А. І. Колосов
А. В. Якунін
Ю. В. Ситникова

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для економістів
у двох модулях
МОДУЛЬ 2

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА

А. І. Колосов,
А. В. Якунін,
Ю. В. Ситникова

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для економістів
у двох модулях

МОДУЛЬ 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2015

Колосов А. І. Вища математика для економістів: у 2-х модулях. Модуль 2: конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”) / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. − 257 с.

Автори: А. І. Колосов,
А. В. Якунін,
Ю. В. Ситникова

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц. Л. Б. Коваленко*

Подано конспект лекцій, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання, зразками розв’язання типових задач і запитаннями для самоконтролю. Відображено розділи: інтегральне числення функцій однієї змінної; економічна динаміка та її моделювання; аналітична геометрія у просторі; функції багатьох змінних; числові ряди; елементи фінансової математики та математичної економіки.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 10 від 22.05.2015 р.

Передмова

У конспекті лекцій викладено розділи, що відповідають другому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів економічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю сутності понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до задач економічного змісту. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання.

Основою даного посібника є цикл лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті економіки і підприємництва Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій призначений для студентів економічних спеціальностей і може бути корисний для аспірантів, викладачів, економістів-практиків.

Змістовий модуль 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ЕКОНОМІЧНА ДИНАМІКА ТА ЇЇ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Невизначений інтеграл

1.1.1. Первісна функція та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Основна задача диференціального числення – знаходження похідної $f'(x)$ відомої функції $f(x)$. Механічне тлумачення: за відомим законом руху матеріальної точки $s(x)$ диференціюванням знайти її швидкість $v(x) = s'(x)$.

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною $F'(x) = f(x)$. У механічній інтерпретації: якщо відома швидкість $v(x) = s'(x)$ матеріальної точки, то інтегруванням можна знайти закон її руху $s(x)$.

Нехай X – деякий проміжок на множині дійсних чисел R. Тобто X – це множина вигляду $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$ або $(a;b)$, причому цей проміжок може бути скінченним чи нескінченним.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на X, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$\boxed{F'(x) = f(x)}$ або, що те саме, $\boxed{dF(x) = f(x)dx}$.

Іншими словами, *функція* $f(x)$ *– похідна своєї первісної* $F(x)$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти первісну для даної функції:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \cos 3x$; в) $f(x) = 1/x$.

□ а) Оскільки $(x^4)' = 4x^3$, то з означення первісної випливає, що функція $F(x) = x^4/4$ є первісна для $f(x) = x^3$: $(x^4/4)' = x^3$. Первісною є також $F(x) = x^4/4 + C$, де C – довільна стала, оскільки додавання константи не змінює значення похідної. При цьому $X = (-\infty; +\infty)$.

б) Оскільки $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$, то для $f(x) = \cos 3x$ первісною є функція $F(x) = (1/3)\sin 3x + C$, $X = (-\infty; +\infty)$.

в) Оскільки $(\ln x)' = 1/x$, то первісною для функції $f(x) = 1/x$ служить функція $F(x) = \ln x + C$, $X = (0; +\infty)$, а також $F(x) = \ln|x| + C$. $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. ■

Теорема (про загальний вигляд усіх первісних). *Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на проміжку X. Тоді функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також буде первісною функції $f(x)$. І навпаки, будь-яка первісна функції $f(x)$ на проміжку X може бути подана у вигляді $F(x) + C$.*

□ Доведення першої частини теореми випливає з властивостей похідної та означення первісної:

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Для доведення другої частини припустимо, що $\Phi(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$. Знайдемо похідну різниці $\Phi(x) - F(x) = \varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0, \quad x \in X.$$

З одержаної тотожності випливає, що $\varphi(x)$ є сталою, $\varphi(x) = C$. Тоді $\Phi(x) - F(x) = C$, звідки $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)\,dx$.

При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)\,dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Інтегрування – це обернена операція до диференціювання.

Зауваження. При інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом.

Геометричний зміст. Первісна функції $f(x)$ є лінією $y = F(x)$, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює відповідному значенню функції $f(x)$. Невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ – це сім'я таких «паралельних» ліній, що задається рівнянням $y = F(x) + C$ (рис. 1).

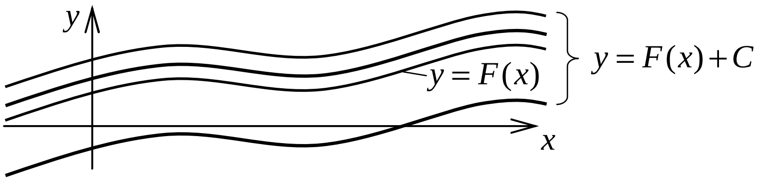

Рис. 1

1.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Невизначений інтеграл має наступні властивості:

1. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції*:

$$\boxed{(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)}.$$

2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу*:

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}.$$

3. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала*:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}.$$

Ці три властивості випливають з означення невизначеного інтеграла. Наступні дві співпадають з відповідними властивостями похідної.

4. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо*:

$$\boxed{\int\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx}.$$

5. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла*:

$$\boxed{\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx, \quad a=const\neq 0}.$$

6. *Якщо* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ – *будь-яка неперервно диференційована функція, то*

$$\boxed{\int f(u)\,du=F(u)+C}.$$

Тобто, *змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційована функція іншої змінної*.

□ <u>Доведемо</u> цю властивість. Розглянемо $\int f(u)\,du$, в якому $u=\varphi(x)$. Тоді $du=\varphi'(x)\,dx$. Нехай для підінтегральної функції первісною є $F(u)=F\left(\varphi(x)\right)$. Знайдемо її похідну:

$$F'\left(\varphi(x)\right)=F'(u)\,\varphi'(x)=f(u)\,\varphi'(x)=f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

Тоді за третьою властивістю

$$\int dF\left(\varphi(x)\right)=\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx=F\left(\varphi(x)\right)+C$$

або $\int f(u)\,du=F(u)+C$. ■

<u>Зауваження 1</u>. Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням*.

<u>Зауваження 2</u>. Властивості 4 і 5 виражають <u>лінійність</u> операції інтегрування.

<u>Зауваження 3</u>. Властивість 6 виражає <u>інваріантність</u> формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовану функцію*.

На основі таблиці похідних (диференціалів) елементарних функцій можна скласти таблицю невизначених інтегралів:

Таблиця 1

Основні невизначені інтеграли			
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\ ctg\ u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u \rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b} \right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0\ ;\ \ a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\ arctg \dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert \dfrac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$ $(a > 0)$

Продовж. Табл. 1

Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\| tg\frac{u}{2} \right\| + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\| tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \right\| + C$
3	$\int tg\, u\; du = -\ln\left\|\cos u\right\| + C$	4	$\int ctg\, u\; du = \ln\left\|\sin u\right\| + C$
5	$\int sh u\; du = ch u + C$	6	$\int ch u\; du = sh u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -\, cth\, u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{1}{2}a^2 \ln\left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C$ $(a \neq 0)$	10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
11	$\int e^{au} \sin bu\; du = \left(-b e^{au} \cos bu +\right.$ $\left.+ a e^{au} \sin bu\right)/\left(a^2 + b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	12	$\int e^{au} \cos bu\; du = \left(a e^{au} \cos bu +\right.$ $\left.+ b e^{au} \sin bu\right)/\left(a^2 + b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності з використанням *тотожних перетворень* підінтегральної функції та *підведення під знак диференціалу*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx$; б) $\int tg^2 x\; dx$; в) $\int 2^{\sin x} \cos x\, dx$.

□ а) Використавши властивості 4 та 5, запишемо даний інтеграл у вигляді лінійної комбінації табличних інтегралів

$$\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx = 2\int x^3 dx - 3\int e^x dx + \int dx$$

і з огляду на наведену вище таблицю отримаємо

$$2x^{3+1}/(3+1) - 3e^x + x^{0+1}/(0+1) + C = x^4/2 - 3e^x + x + C .$$

б) Використавши властивості тригонометричних функцій та інтегралів, зробивши деякі елементарні перетворення, отримаємо

$$\int\left(\sin^2 x \big/ \cos^2 x\right)dx = \int\left((1-\cos^2 x) \big/ \cos^2 x\right)dx =$$

$$= \int\left(1/\cos^2 x - 1\right)dx = \int dx/\cos^2 x - \int dx = tgx - x + C\,.$$

в) Використавши підведення під знак диференціала, отримаємо

$$\int 2^{\sin x}\cos x\, dx = \int 2^{\sin x}\, d(\sin x) = 2^{\sin x} \big/ \ln 2 + C\,. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграли і результат перевірити диференціюванням:

$$\text{а)} \int\left(3x^3 - 1/x\right)^2 dx\,; \qquad \text{б)} \int 3^{2x+1} 5^x\, dx\,.$$

$\square$ а) $\int (3x^3 - 1/x)^2\, dx = \int (9x^6 - 6x^2 + 1/x^2)\, dx = 9\int x^6\, dx -$

$$-6\int x^2\, dx + \int (1/x^2)\, dx = 9x^7 \big/ 7 - 2x^3 - 1/x + C\,;$$

$$((9/7)x^7 - 2x^3 - 1/x + C)' = (9/7)\cdot 7x^6 - 2\cdot 3x^2 +$$

$$+1/x^2 + 0 = (3x^3 - 1/x)^2\,;$$

б) $\int 3^{2x+1} 5^x\, dx = 3\int (3^2\cdot 5)^x\, dx = 3\int 45^x\, dx = 3\cdot 45^x \big/ \ln 45 + C$;

$$((3/\ln 45)\cdot 45^x + C)' = (3/\ln 45)\cdot 45^x \ln 45 + 0 = 3^{2x+1} 5^x\,. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл $\int \dfrac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x}\, dx$. Виділити первісну $y = F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0\,; y_0)$, де $x_0 = 1$ і $y_0 = -10$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1 = 64$.

$$\int \frac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x}\, dx = \int\left(3x^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x^{-1/3} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= 3\int x^{1/2} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int x^{-1/3} dx + \int \frac{dx}{x} = 3\cdot x^{3/2} \big/ (3/2) - 2\sqrt{x} -$$

$$-4\cdot x^{2/3}\Big/(2/3)+\ln|x|+C=2x^{3/2}-2\sqrt{x}-6x^{2/3}+\ln|x|+C.$$

З умови $F(x_0)=y_0$ знайдемо відповідне значення довільної сталої та шукану первісну:

$$F(1)=-10:\ \ 2\cdot 1^{3/2}-2\sqrt{1}-6\cdot 1^{2/3}+\ln|1|+C=-10;$$

$$C=-4;\ \ F(x)=2x^{3/2}-2\sqrt{x}-6x^{2/3}+\ln|x|-4$$

Обчислимо значення первісної в указаній точці $x_1=64$:

$$F(64)=2\cdot 64^{3/2}-2\sqrt{64}-6\cdot 64^{2/3}+\ln|64|-4=908+\ln 64.\ ■$$

1.1.3. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

1. ***Метод заміни змінної*** (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int g(t)\,dt=}$$

$$\boxed{=G(t)+C=G(\varphi^{-1}(x))+C}.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

Зауваження 1. Функція $\varphi(t)$ обирається таким чином, щоб отриманий інтеграл $\int g(t)\,dt$ був простішим, зокрема, мав табличний вигляд або його можна було звести до такого вигляду за допомогою елементарних перетворень. Далі будуть наведені стандартні підстановки $x=\varphi(t)$ для деяких класів інтегралів.

Зауваження 2. Заміна змінної може застосовуватися повторно.

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u=\varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\boxed{\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du}.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, поклавши $u=\varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C.$$

Зауваження 3. При другому способі за нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin(x^3+2)x^2dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}dx$.

□ а) Зробимо підстановку $u=x^3+2$. Тоді $du=3x^2dx$, $x^2dx=(1/3)\,du$ і, отже,

$$\int \sin(x^3+2)\,x^2dx=(1/3)\int \sin u\,du=(-1/3)\cos u+C=$$

$$=(-1/3)\cos(x^3+2)+C.$$

б) Зробимо підстановку $u=arctg\,x$. Тоді $dt=du/(1+x^2)$ і, отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}dx=\int \sqrt[3]{u}\,du=\int u^{1/3}du=(3/4)u^{4/3}+C=$$

$$=(3/4)arctg^{4/3}x+C. \quad ■$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int f(ax+b)\,dx$, $a\neq 0$, якщо відомо, що $\int f(x)dx=F(x)$.

□ Застосуємо лінійну підстановку $u = ax + b$. Для цієї підстановки $du = a\,dx$.

$$\int f(ax+b)dx = (1/a)\int f(ax+b)adx = (1/a)\int f(u)du =$$

$$= (1/a)F(u) + C.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо

$$\int f(ax+b)\,dx = (1/a)F(ax+b) + C. ■$$

Висновок 1. Оскільки у наведеному прикладі розглядалася довільна функція $f(x)$, отриманий результат можна застосовувати як одну з властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 3. Знайти інтеграл

$$\int\left(1/\cos^2 6x + (2-9x)^{10} + \sin(x-6)\right)dx.$$

$$□ \int\left(1/\cos^2 6x + (2-9x)^{10} + \sin(x-6)\right)dx =$$

$$= \int dx/\cos^2 6x + \int (2-9x)^{10}dx + \int \sin(x-6)\,dx =$$

$$= (1/6)tg\,6x - (1/99)(2-9x)^{11} - \cos(x-6) + C. \quad ■$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

$$□ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left|\begin{array}{c} u = f(x) \\ du = f'(x)\,dx \end{array}\right| = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C. \quad ■$$

Висновок 2. *Інтеграл дробу, в якому чисельник є похідною знаменника, дорівнює сумі натурального логарифма модуля знаменника і довільної сталої*: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

2. *Метод інтегрування частинами*, що ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій, відіграє допоміжну роль і має специфічні сфери застосування.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

а тепер проінтегруємо

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv, \text{ але } \int d(uv) = uv + C.$$

Маємо ***формулу інтегрування частинами***

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}.$$

<u>Зауваження 4</u>. Застосовувати цей метод доречно, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або йому подібний. Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні. Функцію v знаходять у <u>явному вигляді</u> як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, поклавши $C = 0$).

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx$, $P_n(x)\sin bx$, $P_n(x)\,e^{ax}$, $P_n(x)\,ch\,bx$, $P_n(x)\,sh\,bx$, то за u слід взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin bx$, $P_n(x)\arccos bx$, $P_n(x)\,arctg\,bx$, $P_n(x)\,arcctg\,bx$, $P_n(x)\,arsh\,bx$, $P_n(x)\,arch\,bx$, $P_n(x)\,arth\,bx$, $P_n(x)\,arcth\,bx$, то за u слід взяти відповідно логарифмічну $\ln x$, обернену тригонометричну $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $arctg\,bx$, $arcctg\,bx$ чи обернену гіперболічну $arsh\,bx$, $arch\,bx$, $arth\,bx$, $arcth\,bx$ функцію;

в) $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $\int \cos\ln x\,dx$, $\int \sin\ln x\,dx$, то за u в перших двох інтегралах можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну, а в останніх – відповідну тригонометричну функцію. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв’язок цього рівняння.

<u>Приклад 5</u>. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

□ а) Нехай $x=u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v=\int 5^x dx = 5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx = x5^x/\ln 5 - (1/\ln 5)\int 5^x dx = x5^x/\ln 5 + 5^x/\ln^2 5 + C.$$

б) Припустимо, що $u=x^2+4$; $dv=\cos x\,dx$. Тоді $du=2x\,dx$, $v=\sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x - 2\int x\sin x\,dx.$$

Застосувавши до інтегралу, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, $du=dx$, $v=-\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

в) Приймемо, що $u=\ln(x+3)$, $dv=dx$. Тоді $du=dx/(x+3)$, $v=x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3) - \int x\,dx/(x+3) = x\ln(x+3) -$$

$$-\int \frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3) - \int dx + 3\int\frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3) -$$

$$-x+3\ln(x+3)+C.$$

г) Покладемо $u=\sin 7x$, $dv=e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du=7\cos 7x\,dx$ та $v=e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I=\int e^x\sin 7x\,dx = e^x\sin 7x - \int e^x 7\cos 7x dx =$$

$$= e^x \sin 7x - 7\int e^x\cos 7x\,dx\ .$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u=\cos 7x$, $dv=e^x dx$; $du=-7\sin 7x\,dx$, $v=e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x (-7\sin 7x)\, dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\, dx .$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I . Розв'язавши це рівняння, маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I \text{ ; } 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x \text{ ;}$$

$$I = \int e^x \sin 7x\, dx = (1/50)\left(e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x\right) + C . \quad \blacksquare$$

Зауваження 5. Наведені методи вичерпують відомі загальні способи інтегрування. Вони можуть застосовуватися разом у різній послідовності й багаторазово. Далі будуть розглянуті особливості їх використання для інтегрування основних класів функцій. Треба творчо підходити до конкретної задачі, враховуючи її специфіку і допускаючи застосування нетипових способів інтегрування.

1.1.4. Інтегрування раціональних дробів

1. Розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники.

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$\boxed{P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}; \;\; a_i \in R; \; i = \overline{0, n} \; .$$

На множині комплексних чисел C будь-який многочлен $P_n(x)$ n-го степеня за основною теоремою алгебри має точно n коренів, а тому єдиним способом (з точністю до порядку співмножників) розкладається у добуток

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m} ,$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

При інтегруванні дійсних виразів бажано не виходити за межі множини дійсних чисел R . Розглянемо особливості розкладання на множники при цьому обмеженні.

Якщо комплексне число $a=\alpha+\beta i$ є коренем многочлена $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то й комплексно-спряжене з ним $\overline{a}=\alpha+\beta i$ також буде коренем даного многочлена. Добуток $(x-a)(x-\overline{a})$, що відповідає парі комплексно-спряжених коренів, породжує ***простий*** (***незвідний*** у множині дійсних чисел) квадратний тричлен x^2+px+q з дійсними коефіцієнтами $p,q\in R$ і від'ємним дискримінантом $D=p^2-4q<0$.

Таким чином, *будь-який многочлен* $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$\boxed{P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_s)^{k_s}\times}$$

$$\boxed{\times(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}},$$

де лінійні двочлени $x-a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1,x_2,\dots,x_s$; квадратні тричлени x^2+px+q з від'ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1,k_2,\dots,k_s$ і $l_1,l_2,\dots,l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1+\dots+k_s+2(l_1+\dots+l_t)=n$.

<u>Приклад 1</u>. Розкласти многочлен $P(x)=x^5-x^4-3x^3-$ $-5x^2-10x-6$ на різні прості дійсні множники.

□ За теоремою Вієта добуток коренів многочлена такого типу дорівнює вільному члену. Тобто, $x_1x_2x_3x_4x_5=-6$. Перевіримо числа $\pm1,\pm2,\pm3,,\pm6$, які є дільниками вільного члена -6.

Нехай $x=-1$. Тоді

$$P(-1)=(-1)^5-(-1)^4-3\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-10\cdot(-1)-6=$$
$$=-1-1+3-5+10-6=0.$$ Отже, $x=-1$ – корінь.

Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x-(-1)=x+1$:

$$
\begin{array}{ll}
-\ x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 & |\ \underline{x+1} \\
\quad \underline{x^5 + x^4} & |\ x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6 \\
\quad -\ -2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 & \\
\qquad \underline{-2x^4 - 2x^3} & \\
\qquad -\ -x^3 - 5x^2 - 10x - 6 & \\
\qquad\quad \underline{-x^3 - x^2} & \\
\qquad\quad -\ -4x^2 - 10x - 6 & \\
\qquad\qquad \underline{-4x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad -\ -6x - 6 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-6x - 6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Отримаємо

$$P(x) = (x+1)S(x), \text{ де } S(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена четвертого степеня. Нехай $x = -1$. Тоді $S(-1) = 1 + 2 - 1 + 4 - 6 = 0$. Отже, $x = -1$ – корінь. Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x - (-1) = x + 1$. (Виконайте ділення самостійно). Одержимо

$$S(x) = (x+1)T(x), \quad \text{де } T(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена третього степеня. Нехай $x = 3$. Тоді $T(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Отже, $x = 3$ – корінь. Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x - 3$. (Виконайте ділення самостійно). Отримаємо

$$T(x) = (x-3)(x^2 + 2),$$

де неповний квадратний тричлен $x^2 + 2$ є простим, оскільки дійсних коренів не має.

Отже, $\quad P(x) = (x+1)^2 (x-3)(x^2+2)$. ■

2. Раціональні дроби.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m;$$

$$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n .$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу*

$$\boxed{P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x)},$$

причому цей розклад єдиний.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 2. Вилучити цілу частину неправильного дробу $P(x)/Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 4)/((x+4)(x-2))$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, спочатку виконавши множення в знаменнику і записавши результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x) = (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$;

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & \underline{x^2 + 2x - 8} \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2} \qquad & x^2 - 2x + 9 \\
-\,-2x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 + 16x} \quad & \\
-\,9x^2 - 11x + 4 & \\
\underline{9x^2 + 18x - 72} & \\
-29x + 76 &
\end{array}$$

Таким чином,

$$P(x)/Q(x) = x^2 - 2x + 9 + (-29x + 76)/((x+4)(x-2)). \quad \blacksquare$$

Зауваження 1. Вилучення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Приклад 3. Вилучити цілу частину неправильного дробу $x^4/(x^2+1)$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Скористаємося алгебраїчними перетвореннями:

$$x^4/(x^2+1) = (x^4 - 1 + 1)/(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1)/(x^2+1) +$$

$$+1/(x^2+1) = x^2 - 1 + 1/(x^2+1). \quad \blacksquare$$

3. Найпростіші раціональні дроби. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\boxed{\dfrac{A}{x-a}}$; 2) $\boxed{\dfrac{A}{(x-a)^k},\ k \ge 2}$; 3) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\ D = p^2 - 4q < 0}$;

4) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\ k \ge 2,\ D = p^2 - 4q < 0}$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***). Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k \in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має тільки комплексні корені.

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t = x - a$ (проробіть це самостійно):

1) $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

2) $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$, $k \ge 2$.

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат

$$x^2+px+q = x^2+2x\cdot(p/2)+(p/2)^2+q-(p/2)^2 =$$

$$=(x+p/2)^2+a^2;\ a=\sqrt{q-p^2/4}>0.$$

Зробимо заміну $t = x+p/2$. Тоді $x = t-p/2$, $dx = dt$. Одержимо

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+$$

$$+(B-Ap/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+(B-Ap/2)\cdot\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}.$$

Далі використовуємо заміну $u = t^2+a^2$. Тоді $du = 2tdt$, $tdt = (1/2)\,du$. Отримаємо

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = (1/2)\int \frac{du}{u} = (1/2)\ln|u|+C.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x+p/2;\quad a=\sqrt{q-p^2/4};$$

$$u = t^2+a^2 = (x+p/2)^2+q-p^2/4 = x^2+px+q,$$

після спрощення остаточно маємо

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = (A/2)\ln|x^2+px+q|+$$

$$+\left((2B-Ap)/(4q-p^2)\right) arctg\left((2x+p)/\sqrt{4q-p^2}\right)+C.$$

<u>Зауваження 5</u>. Якщо в квадратному тричлені x^2+px+q дискримінант додатний $D>0$, то дріб $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ за означенням неелементарний і зводиться до двох дробів першого типу. Однак його можна інтегрувати й наведеним вище способом, де замість арктангенса з’явиться логарифм.

Зауваження 6. Одержані формули запам'ятовувати не потрібно. Краще безпосередньо застосовувати розглянуті підходи для інтегрування кожного конкретного елементарного дробу.

Зауваження 7. Інтегрування найпростішого дробу четвертого типу розглядати не будемо. Бажаючим вивчити це питання треба звернутися до більш ґрунтовних підручників.

4. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0 = 0$), розкладений на прості дійсні множники

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

де $k_1 + \dots + k_s + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^{k_1 - 1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{s1}}{(x - x_s)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{A_{s2}}{(x - x_s)^{k_s - 1}} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{x - x_s} + \dots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} +$$

$$+ \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1 - 1}} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots +$$

$$+ \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}} + \frac{B_{t2}x + C_{t2}}{(x^2 + p_t x + q_t)^{l_t - 1}} + \dots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2 + p_t x + q_t}.$$

Коефіцієнти A_{ij} $(i = \overline{1, s}\,;\ j = \overline{1, k_i})$ і B_{ij}, C_{ij} $(i = \overline{1, t}\,;\ j = \overline{1, l_t})$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x, *приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів* (два многочлена тотожно рівні, коли рівні коефіцієнти при подібних членах – однакових степенях x);

– ***метод окремих значень*** (***метод підстановки***): *надаючи змінній* x *в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів* (тотожні вирази приймають однакові значення при довільному допустимому значенні аргументу x).

Зауваження 8. Використовуючи метод окремих значень, не треба розкривати дужки в многочленах, а підставляти зручно різні дійсні корені знаменника $Q_n(x)$, що приводить до простих рівнянь. Отримана система повинна мати розмірність, що дорівнює числу шуканих коефіцієнтів.

Зауваження 9. Метод підстановки рекомендується вживати, коли всі корені знаменника дійсні й серед них немає кратних. У протилежному випадку краще поєднати цей метод з методом невизначених коефіцієнтів. Але треба вибирати незалежні рівняння, щоб система мала єдиний розв'язок.

Зауваження 10. Існують інші, менш поширені, методи знаходження невідомих коефіцієнтів. Допитливі можуть з ними познайомитися, звернувшись до спеціалізованої літератури.

Приклад 4. Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ розкласти на суму найпростіших дробів, де

а) $P(x) = -2x^4 - x^3 - 6x^2 + 18x + 13$

і $Q(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$;

б) $P(x) = 7x - x^2 - 4$ і $Q(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$;

в) $P(x) = x^3 - 8$ і $Q(x) = x(x+4)(x^2 + 2x + 2)$.

□ а) Многочлен $Q(x)$ було розкладено на множники вище (див. Прикл.1): $Q(x)=(x+1)^2(x-3)(x^2+2)$.

Шукане розкладання дробу матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+2},$$

де числа A, B, C, D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо (відкидаючи однакові знаменники) тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2)+B(x-3)(x^2+2)+C(x-3)(x+1)(x^2+2)+$$
$$+(Dx+E)(x-3)(x+1)^2=P(x).$$

Знайдемо невідомі A, B, C, D, E методом невизначених коефіцієнтів. Розкривши дужки і звівши подібні, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Отримаємо і розв'яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом Гауса) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^4 & A+C+D=-2, \\
x^3 & 2A+B-2C-D+E=-1\ , \\
x^2 & 3A-3B-C-5D-E=-6\ , \\
x^1 & 4A+2B-4C-3D-5E=18\ , \\
x^0 & 2A-6B-6C-3E=13\ ;
\end{array}\right\}\quad
\begin{array}{l|}
A=-1; \\
B=1; \\
C=-2; \\
D=1; \\
E=-3.
\end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2+2}.$$

б) Даний дріб розкладається на елементарні наступним чином: $P(x)/Q(x)=A/(x+1)+B/(x-2)+C/(x-3)$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)=P(x).$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти A, B і C, скористаємося методом окремих значень. Для отримання простої системи візьмемо ті значення x, що є коренями знаменника $Q(x)$, тобто $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. Тоді

$$\begin{array}{r|l} x=-1 & 12A=-12, \\ x=\ \ 2 & -3B=6, \\ x=\ \ 3 & 4C=8; \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\} \qquad \begin{array}{l} A=-1; \\ B=-2; \\ C=2. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$P(x)/Q(x)=-1/(x+1)-2/(x-2)+2/(x-3).$$

в) Многочлен $Q(x)$ уже розкладений на різні прості дійсні множники (переконайтеся самостійно, що квадратний тричлен x^2+2x+2 має від'ємний дискримінант). Шукане розкладання дробу на суму найпростіших матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів маємо тотожність многочленів:

$$A(x+4)(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2)+$$
$$+(Cx+D)\,x(x+4)=P(x).$$

Оскільки знаменник $Q(x)$ має лише два різних дійсних кореня $x=0$ і $x=-4$, то для складання системи рівнянь відносно невідомих A, B, C і D використаємо комбінацію методів окремих значень і невизначених коефіцієнтів. Дістанемо і розв'яжемо систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{array}{r|c} x=0 & 8A=-8, \\ x=-4 & -40B=-72, \\ x^3 & A+B+C=1, \\ x & 10A+2B+4D=0; \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \qquad \begin{array}{c} A=-1; \\ B=9/5 \\ C=1-A-B=1/5; \\ D=-(5A+B)/2=8/5. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x+8}{x^2+2x+2}\,. \quad ■$$

5. Розгляд основних випадків інтегрування раціональних дробів.

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу $\int P(x)dx/Q(x)$. Якщо дріб неправильний, то його подаємо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів.

<u>Приклад 5</u>. Знайти інтеграл $I=\int\frac{2x^3-15x-45}{x^2-6x+13}dx$.

□ Оскільки дріб неправильний, то діленням «кутом» виділимо в ньому цілу частину (проробіть це самостійно), а потім проінтегруємо, використовуючи метод заміни змінної:

$$I=\int(2x-3)\,dx+\int(-44x-6)\,dx\big/(x^2-6x+13)=$$

$$=\left|x^2-6x+13=(x-3)^2+4;\ t=x-3;\ x=t+3;\ dx=dt\right|=x^2-$$

$$-3x+\int\frac{-44(t+3)-6}{t^2+4}dt=x^2-3x-44\int\frac{t\,dt}{t^2+4}-6\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\left|u=t^2+4;\ du=2t\,dt;\ t\,dt=(1/2)\,du\right|=x^2-3x-44\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-6\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2}=x^2-3x-22\ln|u|-3arctg\,\frac{t}{2}+C=$$

$$=\left|\,t=x-3;\ u=t^2+4=(x-3)^2+4=x^2-6x+13\,\right|=$$

$$=x^2-3x-22\ln(x^2-6x+13)-3\,arctg\,\frac{x-3}{2}+C$$

$$=3arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C\,. \quad ■$$

З попереднього відомо, що структура розвинення на елементарні дроби визначається коренями знаменника $Q(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) Корені знаменника дійсні й прості, тобто

$$Q(x) = (x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-d)\,.$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дроби тільки першого типу

$$P(x)/Q(x) = A/(x-a) + B/(x-b) + \ldots + D/(x-d)\,.$$

Тоді

$$\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)} = \int \frac{A\,dx}{x-a} + \int \frac{B\,dx}{x-b} + \ldots + \int \frac{D\,dx}{x-d} =$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots + D\ln|x-d| + C\,.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{4x^2-13x+7}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx$.

□ $I = \int \frac{4x^2-13x+7}{(x-2)(x-3)(x+1)}dx = \int \frac{A\,dx}{x-2} + \int \frac{B\,dx}{x-3} + \int \frac{C\,dx}{x+1}$.

Тут $4x^2-13x+7 = A(x-3)(x+1) + B(x-2)(x+1) +$

$$+ C(x-2)(x-3)\,.$$

Використавши метод підстановки (пророблть це самостійно), маємо: $A=1;\ B=1; C=2$.

$$I = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2dx}{x+1} =$$

$$= \ln|x-2| + \ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C\,. \quad \blacksquare$$

б) Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\gamma}\,.$$

У цьому разі дріб розкладається на найпростіші дроби першого і другого типів.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx$.

$$\square \quad I=\int\frac{A\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{B\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{C\,dx}{x+2}+\int\frac{D\,dx}{x-1}.$$

Маємо тотожність $x^3+4x^2+5x+8=A(x-1)+$

$$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3.$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (проробіть це самостійно), отримаємо: $A=-2, B=-1, \; C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C. \quad \blacksquare$$

в) <u>Корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно-спряжені</u>:

$$Q(x)=(x^2+px+q)...(x^2+rx+s)(x-a)^{\alpha}...(x-c)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб $P(x)/Q(x)$ розкладається на найпростіші дроби першого, другого і третього типів.

<u>Приклад 8</u>. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

$$\square \quad I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}.$$

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$; $A=-1-C=0$. Отже,

$$I=\int\frac{3\,dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3\,arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C. \; \blacksquare$$

Зауваження 11. Розглядати випадок, коли у знаменнику є кратні комплексні корені ми не будемо. Бажаючих поглибити свою математичну підготовку відсилаємо до більш ґрунтовних підручників.

Справедливе твердження: *інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді.*

1.1.5. Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути безліч. Більшість з них взагалі не обчислюються аналітично. Тому розглянемо деякі найголовніші типи таких функцій, що завжди інтегруються.

Домовимося, що запис $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означає раціональну функцію вказаних аргументів.

1. Інтеграли вигляду:

$$\boxed{\int \cos ax \cos bx \, dx, \ \int \sin ax \cos bx \, dx, \int \sin ax \sin bx \, dx}$$

знаходяться за допомогою тригонометричних формул перетворення добутків у суму відповідно:

$$\cos ax \cos bx = \big(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2;$$

$$\sin ax \cos bx = \big(\sin(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2;$$

$$\sin ax \sin bx = \big(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\big)/2.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x \, dx$.

□ $I = (1/2)\int (\sin 10x + \sin 6x)\, dx =$

$$= (-1/20)\cos 10x - (1/12)\cos 6x + C. \ ■$$

2. Інтеграл вигляду $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\, dx}$. Покажемо, що *цей інтеграл за допомогою* ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\boxed{tg\,(x/2) = t}$ *завжди зводиться до інтеграла від раціональної функції*. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\sin x = \frac{2tg\,(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}; \;\; \cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctg\, t; \;\; dx = 2dt/(1+t^2).$$

Отже, $\sin x$, $\cos x$ і dx мають раціональні вирази відносно t. Оскільки раціональна функція від раціональних функцій знову раціональна, маємо:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int \frac{R\big(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2)\big) 2\,dt}{1+t^2}.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

$$\square \;\; I = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\big(6t/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2)\big)} = \int \frac{2\,dt}{6t+1-t^2} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$= \left(-1/\sqrt{10}\right)\ln\left|\left(tg(x/2) - 3 - \sqrt{10}\right)/\left(tg(x/2) - 3 + \sqrt{10}\right)\right| + C. \;\blacksquare$$

Поряд з універсальною також є інші підстановки, що у ряді випадків дають значно простіші раціональні вирази і тим самим швидше ведуть до мети:

а) $\boxed{\int R(\sin x)\cos x\, dx}$. Підстановка $\boxed{\sin x = t}$, $\cos x\, dx = dt$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\, dt$;

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin x - 2}$.

$$\square \;\; I = \int \frac{\cos^2 x \, \cos x\, dx}{\sin x - 2} = \left|\cos^2 x = 1 - \sin^2 x\right| =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin x - 2} = \left|\begin{array}{c} \sin x = t; \\ \cos x\, dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t-2} =$$

$$= \int \left(-t-2-3/(t-2)\right)dt = (-1/2)t^2 - 2t - 3\ln|t-2| + C =$$

$$= (-1/2)\sin^2 x - 2\sin x - 3\ln|\sin x - 2| + C\,. \quad ■$$

б) $\boxed{\int R(\cos x)\sin x dx}$. Підстановка $\boxed{\cos x = t}$, $-\sin x\, dx = dt$ зводить цей інтеграл до $-\int R(t)\, dt$;

Приклад 4. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x - 16} dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $\cos x = t$).

в) $\boxed{\int R(tg\ x)\, dx}$. Підстановка $\boxed{tg\ x = t}$, $x = arctg\, t$, $dx = dt/(1+t^2)$, зводить цей інтеграл до $\int R(t) dt/(1+t^2)$;

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{tg\ x\ (1+tg^2 x)}{tg^2 x + 2tg\ x + 5} dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\ x = t$).

г) $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\, dx$. Підстановка $tg\ x = t$, $x = arctg\, t$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\, dt$ тому що

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin x \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}\ .$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x}$.

$$□ \quad I = \left| \begin{array}{l} t = tg\ x; \\ x = arctg\, t; \end{array} dx = \frac{dt}{1+t^2};\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \right.$$

$$\left. \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right| = \int \frac{dt/(1+t^2)}{\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)^2 + 6\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)\left(1/\sqrt{1+t^2}\right)} =$$

$$=\int\frac{dt}{t(t+6)}=\int\frac{Adt}{t}+\int\frac{Bdt}{t+6}=\left|\begin{array}{c|c} & A(t+6)+Bt=1 \\ t=0 & \left.\begin{array}{r}6A=1\\ -6B=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}A=1/6\\ B=-1/6\end{array} \\ t=-6 & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t+6}=\frac{1}{6}\ln|t|-\frac{1}{6}\ln|t+6|+C=$$

$$=\left|\,t=tg\,x\,\right|=(1/6)\ln|tg\,x|-(1/6)\ln|tg\,x+6|+C\,. \quad \blacksquare$$

д) $\boxed{\int\sin^m x\cos^n x\,dx}$, де m і n – цілі числа. Тут можливі такі особливості:

• Якщо хоча б одне з чисел m чи n – непарне, то відокремлюємо від непарного степеня одну функцію, що в добутку з dx дає диференціал «кофункції» (без врахування знака). Цю «кофункцію» приймаємо за нову змінну t.

Наприклад, нехай $n=2p+1$, тоді

$$\int\sin^m x\cos^{2p+1}x\,dx=\int\sin^m x\cos^{2p}x\cos x\,dx=$$

$$=\int\sin^m x(1-\sin^2 x)^p\cos x\,dx\,.$$

Зробимо заміну: $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$. Отже,

$$\int\sin^m x\cos^n x dx=\int t^m(1-t^2)^p\,dt$$

– інтеграл від раціональної функції.

<u>Зауваження 1</u>. Якщо можливо, то треба вибирати непарний додатний (краще менший за модулем) показник степеня. При цьому показник степеня іншої функції може бути довільним.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо обидва числа m і n – непарні від'ємні, то краще застосувати підстановку $\boxed{tg\,x=t}$.

<u>Приклад 7</u>. Знайти інтеграл $I=\int\sqrt[6]{\cos x}\sin^5 x\,dx$

□ $I=\int\sqrt[6]{\cos x}\sin^4 x\sin x\,dx=\int\sqrt[6]{\cos x}(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx=$

$$=\left|\cos x=t;\ -\sin x\,dx=dt\right|=$$

$$=-\int t^{1/6}(1-t^2)^2\,dt=-\int(t^{1/6}-2t^{13/6}+t^{25/6})\,dt=(-6/7)t^{7/6}+$$

$$+(12/19)t^{19/6}-(6/31)t^{31/6}=-(6/7)(\cos x)^{7/6}+$$

$$+(12/19)(\cos x)^{19/6}-(6/31)(\cos x)^{31/6}+C\,.\ ■$$

• Якщо m і n – парні невід’ємні числа, то використовуємо формули зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\boxed{\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2\,;\ \cos^2 x=(1+\cos 2x)/2}.$$

Отже, $\int \sin^m x\cos^n x\,dx=2^{-p-q}\int(1-\cos 2x)^p(1+\cos 2x)^q\,dx$, де $m=2p$ і $n=2q$.

Після піднесення до степенів p, q і множення матимемо $\cos 2x$ як у парних, так і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються, як показано вище. Члени з парними степенями знову перетворюємо за формулами зниження степеня. Продовжуючи цей процес, дійдемо до інтегралів від сталих величин і функцій $\cos kx$, які легко інтегруються.

<u>Зауваження 3</u>. Для зниження степеня можна додатково використати формулу $\sin x\cos x=(\sin 2x)/2$.

<u>Приклад 8</u>. Знайти інтеграл $I=\int \sin^2 3x\cos^2 3x\,dx$.

□ $I=\left|\sin^2 3x\cos^2 3x=(\sin 3x\cos 3x)^2=\left((1/2)\sin 6x\right)^2=\right.$

$$=\left.\frac{1}{4}\sin^2 6x\right|=\frac{1}{4}\int \sin^2 6x\,dx=\left|\sin^2 6x=\frac{1-\cos 12x}{2}\right|=$$

$$=(1/8)\int(1-\cos 12x)\,dx=(1/8)\,x-(1/96)\sin 12x+C\,.\ ■$$

• Якщо m і n – парні числа, з яких хоча б одне від'ємне, то робимо заміну $\boxed{tg\ x=t}$, або $ctg\ x=t$;

<u>Приклад 9</u>. Знайти інтеграл $I=\int dx/\cos^4 x$

□ $I=\left|tg\ x=t;\ x=arctg\,t;\ dx=dt/(1+t^2)\right|=$

$$=\int\frac{dt}{(1+t^2)\cdot 1/(1+t^2)^2}=\int\frac{dt}{1/(1+t^2)}=\int(1+t^2)\,dt=$$

$$= t + (1/3)t^3 + C = tg\, x + (1/3)\, tg^3 x + C\,.\ \blacksquare$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $I = \int \left(\cos^2 x \big/ \sin^6 x\right) dx$.
(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\, x = t$).

1.1.6. Інтегрування деяких типів ірраціональностей. Тригонометричні підстановки

Не від усякої ірраціональної функції інтеграл можна виразити через елементарні функції у скінченній формі. Розглянемо інтеграли від ірраціональних функцій, що за допомогою підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій і, отже, інтегруються.

1. Інтеграл вигляду

$$\boxed{\int R\left(x, (ax+b)^{m/n}, \ldots, (ax+b)^{r/s}\right) dx, \quad a \neq 0}.$$

Він зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\boxed{ax + b = t^k}$, де k – найменший спільний знаменник дробів у показниках степенів $m/n, \ldots, r/s$. Тоді $x = (t^k - b)/a$; $dx = (k/a)t^{k-1}dt$. Після інтегрування за змінною t повертаємося до початкової змінної x: $t = (ax+b)^{1/k} = \sqrt[k]{ax+b}$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{(\sqrt{x-1} + 2x)\, dx}{x - 2\sqrt{x-1}}$.

□ Робимо заміну: $x - 1 = t^2$; $x = t^2 + 1$; $dx = 2tdt$. Тоді

$$I = \int \frac{(t + 2t^2 + 2)2t\, dt}{t^2 + 1 - 2t} = \int \frac{(4t^3 + t^2 + 4t)\, dt}{t^2 - 2t + 1} = \int (4t + 10)\, dt +$$

$$= \int \left(4t + 10 + (20t - 10)/(t-1)^2\right) dt = 2t^2 + 10t +$$

$$+ \int \frac{\left(20(t-1) + 10\right) dt}{(t-1)^2} = 2t^2 + 10t + \int \left(\frac{20}{t-1} + \frac{10}{(t-1)^2}\right) dt =$$

$$= 2t^2 + 10t + 20 \ln|t-1| - 10/(t-1) + C = \left| t = \sqrt{x-1} \right| = 2(x-1) +$$

$$+ 10\sqrt{x-1} + 20 \ln|\sqrt{x-1} - 1| - 10\big/\left(\sqrt{x-1} - 1\right) + C\,.\ \blacksquare$$

2. Для інтегралів наведених нижче типів застосовують спеціальні тригонометричні підстановки в залежності від вигляду підкореневого виразу:

1) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \quad \Rightarrow \quad x=a\cdot\sin t,\ dx=a\cos t dt}$;

2) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{\sin t},\ dx=-\frac{a\cdot\cos t}{\sin^2 t}dt}$;

3) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx \quad \Rightarrow \quad x=a\cdot tgt,\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt}$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

□ Зробимо підстановку $x=3\sin t$ з метою позбутись ірраціональності. Тоді $dx=3\cos t\,dt$ і

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=\int(3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt=$$

$$=\int 9\sin^2 t\cdot 3|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt=81\int\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=(81/4)\int\sin^2 2t\,dt=(81/8)\int(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=(81/8)\cdot\left(\int dt-\int\cos 4t\,dt\right)=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot\int\cos 4t\,dt$$

при умові $\cos t\geq 0$. Нехай $t=u/4$. Тоді $dt=(1/4)\,du$ і

$$\int\cos 4t\,dt=(1/4)\int\cos u\,du=(1/4)\sin u+C.$$

Отже $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot(1/4)\sin u+C$.

Повернемось до початкової змінної x:

$$t=\arcsin(x/3);\quad u=4t=4\arcsin(x/3).$$

Тоді

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=\frac{81}{8}\arcsin(x/3)-\frac{81}{32}\sin(4\arcsin(x/3))+C.$$

Звичайно, отриманий результат можна спростити, використовуючи тригонометричні тотожності. ■

1.1.7. Інтеграли, що «не беруться»

Диференціювання ґрунтується на формулах для похідної кожної з операцій, за допомогою яких формуються елементарні функції. Тому *похідна довільної елементарної функції також є елементарною*.

При інтегруванні не існує відповідних формул для добутку, частки і суперпозиції функцій. Тому *не кожну первісну, навіть коли вона існує, можна подати через елементарні функції у скінченному вигляді*.

Говорять, що інтеграл $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ «***не береться***», якщо первісна $F(x)$ – неелементарна функція.

Такого типу первісні, що часто застосовуються в математиці та інших дисциплінах, називаються ***спеціальними функціями***. Для них складені відповідні таблиці, побудовані графіки і створені комп'ютерні програми.

Наведемо деякі інтеграли, що «не беруться», і відповідні спеціальні функції:

а) $\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-x^2/2}dx = \Phi(x)+C$, де первісна $\Phi(x)$, що задовольняє додатковій умові $\Phi(0)=0$, називається ***функцією Лапласа*** (***інтегралом ймовірностей***);

б) $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{Si}\,(x)+C$, де первісна $\mathrm{Si}\,(x)$, що задовольняє додатковій умові $\mathrm{Si}\,(0)=0$, називається ***інтегральним синусом***.

1.2. Визначений інтеграл

1.2.1. Інтегральна сума. Її геометричний та економічний зміст. Поняття визначеного інтеграла. Умови його існування. Формула Ньютона – Лейбниця

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних (не обов'язково рівних) елементарних частин точками поділу x_i, $i=\overline{0,n}$ такими, що $a=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};x_i]$ візьмемо по одній довільній (не обов'язково середній) точці c_i, $i=\overline{1,n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо суму отриманих добутків

$$S_n(f)=f(c_1)\Delta x_1+...+f(c_i)\Delta x_i+...+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Цей вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Зауваження 1. Інтегральна сума $S_n(f)$, як це випливає з її побудови, не є функцією змінної n і не є функцією змінної x. Інтегральна сума залежить як від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу x_i, $i=\overline{0,n}$, так і від вибору точок c_i, $i=\overline{1,n}$ по одній на кожному частинному відрізку.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$, знизу віссю Ox і вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$ (рис.2), називається ***криволінійною трапецією***.

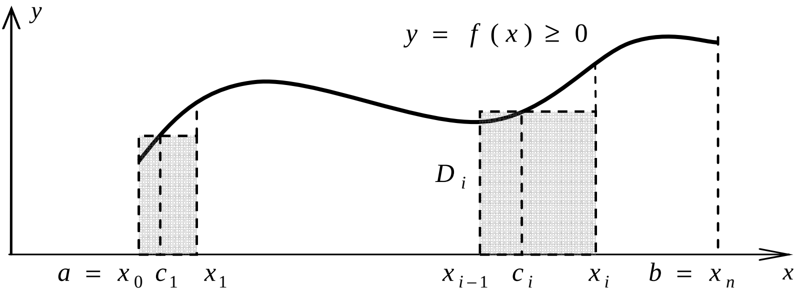

Рис. 2

Знайдемо її площу S

Добуток $f(c_i)\Delta x_i$ чисельно дорівнює площі прямокутника D_i з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. *Інтегральна сума* $S_n(f)$ чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких прямокутників, і *служить наближеним значенням площі криволінійної трапеції*: $S \approx S_n(f)$.

Економічний зміст. Розглянемо задачу про об'єм виробництва зі змінною продуктивністю праці. Аналізуючи будь-яке виробництво помічаємо, що продуктивність праці в різні моменти часу t різна. Нехай продуктивність праці за період часу від 0 до T описується неперервною функцією $f(t)$. Розіб'ємо проміжок $[0;T]$ на n елементарних проміжків тривалістю $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. Вважаючи продуктивність протягом часу Δt_i сталою і рівною $f(\bar{t}_i)$, де $\bar{t}_i$ – довільно взята точка з $[t_{i-1}, t_i]$, наближено визначимо об'єм продукції ΔQ_i, виробленої за елементарний проміжок часу Δt_i: $\Delta Q_i \approx f(\bar{t}_i)\Delta t_i$.

Тоді об'єм продукції Q, виробленої за весь період часу від 0 до T, наближено визначається як $Q \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{t}_i)\Delta t_i$, тобто *інтегральна сума* $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{t}_i)\Delta t_i$ *наближено дорівнює об'єму продукції, виробленої за період часу* $[0;T]$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a;b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i=\overline{1,n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i},$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$ – ***відрізок інтегрування***.

Підкреслимо, що границя розглядається при будь-яких розбиттях відрізка $[a;b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок c_i на елементарних відрізках $[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$.

Зауваження 2. Не зважаючи на близькість позначень, невизначений і визначений інтеграли різні за суттю, оскільки невизначений інтеграл – це сім'я функцій (первісних), а визначений інтеграл – це число (значення границі).

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}$.

Економічний зміст. Збільшуючи кількість n проміжків розбиття Δt_i, одержуємо все точніші формули для обчислення об'єму виробленої продукції. При $\max \Delta t_i \to 0$ (відповідно $n \to \infty$) маємо точну рівність

$$\boxed{Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{t}_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)\,dt},$$

тобто, визначений інтеграл $\int_0^T f(t)\,dt$ *від продуктивності праці* $f(t)$ *дорівнює об'єму продукції* Q*, виробленої за період часу* $[0;T]$.

Теорема 1 (***необхідна умова інтегрованості***). *Якщо функція інтегрована на деякому відрізку, то вона обмежена на ньому.*

□ Припустимо супротивне. Нехай функція $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необмежена. Тоді для довільного розбиття існує хоча б один елементарний відрізок $[x_{i-1};x_i]$, де функція необмежена. Вибираючи на ньому відповідним чином точку c_i, можна зробити значення функції $f(c_i)$, а з нею інтегральну суму $S_n(f)$ як завгодно великою. Тому скінченна границя для $S_n(f)$ не існує. ■

Зауваження 3. Умова обмеженості функції є необхідною, але не є достатньою для інтегрованості функції.

Теорема 2 (***достатня умова інтегрованості***). *Функція, неперервна на відрізку, інтегрована на ньому.*

Зауваження 4. Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

Визначений інтеграл фактично відкрито понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосередньо знаходити границі інтегральних сум важко навіть у найпростіших випадках. Невизначений інтеграл відкрито значно пізніше (у XXVII столітті) і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. Тоді ж був встановлений зв'язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Теорема (***Ньютона – Лейбниця***). *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$$ – ***формула Ньютона – Лейбниця***.

Тут символом $\boxed{F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$ позначено приріст первісної (читається: «$F(x)$ з підстановкою від a до b»).

□ Розглянемо приріст $F(b) - F(a)$. Перепишемо його, додаючи та віднімаючи значення функції в кожній внутрішній точці розбиття $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, враховуючи, що $x_0 = a, x_n = b$, та використовуючи на кожному елементарному відрізку формулу Лагранжа, а потім зробимо граничний перехід:

$$F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + ... +$$

$$+ (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \left| F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i \right.,$$

$$\left. c_i \in [x_{i-1}; x_{i-1}] \right| = F'(c_1)\Delta x_1 + F'(c_2)\Delta x_2 + ... + F'(c_n)\Delta x_n =$$

$$= \left| F'(c_i) = f(c_i) \right| = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... +$$

$$+ f(c_n)\Delta x_n = S_n(f); \quad \lim_{\Delta x_i \to 0}(F(b) - F(a)) = \lim_{\Delta x_i \to 0} S_n(f).$$

Таким чином $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, отримаємо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1. \quad ■$$

Зауваження 5. Формула Ньютона – Лейбниця залишається справедливою для будь-якої інтегрованої на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, що має неперервну первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком хіба що скінченного числа точок.

1.2.2. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення

Спираючись на означення та формулу Ньютона – Лейбниця, що зв'язує визначений інтеграл з невизначеним, можна встановити основні властивості визначеного інтеграла.

Найпростіші властивості:

1. *Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування* (змінна інтегрування є «німою»):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt}.$$

2. *Визначений інтеграл з рівними між собою межами інтегрування дорівнює нулю*:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}.$$

3. *Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}.$$

Властивість адитивності за проміжком:

4. *Для будь-яких трьох чисел* a, b *і* c *справедлива рівність*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx},$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують.

Доведення спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини, що відповідають частинам всього відрізка інтегрування.

Властивості лінійності:

5. *Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \text{ де } A = const}.$$

$$\square \quad \int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n A\, f(c_i)\Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

6. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*. Так, у разі трьох функцій:

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx}.$$

Доведення спирається на відповідну властивість границі суми.

Властивості монотонності:

7. *Якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку* $[a;b]$, $f(x)\ge 0, x\in[a;b]$, *а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній* $b\ge a$, *то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx\ge 0}.$$

8. *Якщо на відрізку* $[a;b]$, *де* $a<b$, *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *задовольняють нерівності*

$$\boxed{f(x)\le\varphi(x)\text{, то }\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b\varphi(x)\,dx}.$$

Іншими словами, *нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої*.

□ Розглянемо різницю

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b(\varphi(x)-f(x))\,dx=$$

$$=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n(\varphi(c_i)-f(c_i))\Delta x_i\,.$$

Тут кожна різниця $\varphi(c_i)-f(c_i)\ge 0$, $\Delta x_i>0$. Отже, кожен член суми додатний, додатна вся сума і невід'ємна її границя, тобто $\int_a^b(\varphi(x)-f(x))\,dx\ge 0$. Звідси

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx-\int_a^b f(x)dx\ge 0\quad\text{або}\quad\int_a^b\varphi(x)\,dx\ge\int_a^b f(x)\,dx\,.\ ■$$

9. *Абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню* $b\ge a$:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx}.$$

□ За властивістю модуля $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Враховуючи властивість 8, з цього випливає

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

або $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. ■

Для функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю

$$\boxed{\mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Теорема (***про середнє значення***). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на інтервалі $(a;b)$ існує хоча б одна точка c така, що середнє інтегральне μ функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ дорівнює значенню функції $f(c)$ в цій точці:*

$$\boxed{f(c) = \mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx}.$$

□ Нехай $a < b$. Якщо m і M найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто $m \le f(x) \le M$, тоді:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx; \quad m \le \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx \le M .$$

Вираз, який розташований всередині цієї подвійної нерівності, дорівнює μ. Тобто, $m \le \mu \le M$. Тоді за теоремою про проміжне значення неперервної на відрізку функції при деякому значенні c $(a < c < b)$ будемо мати $\mu = f(c)$. ■

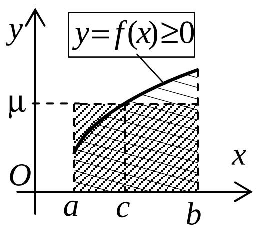

Рис. 3

Геометричний зміст (рис. 3). Для неперервної невід’ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка c така, що площа відповідної криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і висотою $\mu = f(c)$.

Приклад. Продуктивність праці робітника протягом восьмигодинної зміни описується функцією $f(t)=1+t^{2/3}-0{,}55t$, $t\in[0;8]$. Знайти $\overline{f}$ – середню продуктивність праці робітника за зміну.

$$□\quad \overline{f}=\frac{1}{8}\int_0^8(1+t^{2/3}-0{,}55t)\,dt=\frac{1}{8}\left(t+\frac{t^{5/3}}{5/3}-0{,}55\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=(1/8)\cdot(8+19{,}2-17{,}6)=1{,}2\,.\quad ■$$

1.2.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функція* $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x=\varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x'=\varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha)=a$ *і* $\varphi(\beta)=b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\left|\,x=\varphi(t);\ dx=\varphi'(t)\,dt;\ t=\varphi^{-1}(x);\right.}$$

$$\boxed{\left.\alpha=\varphi^{-1}(a);\ \beta=\varphi^{-1}(b)\,\right|=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt},$$

де $t=\varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

□ Якщо $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$, то можемо записати

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C;\quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))+C\,.$$

Справедливість останньої рівності перевіряється диференціюванням обох частин по t. З цих рівностей відповідно маємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a);\quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=$$

$$=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)\,.$$

Праві частини одержаних виразів рівні, отже, ліві частини теж рівні: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. ■

Зауваження 1. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x=\varphi(t)$ ці умови задовольняє.

Зауваження 2. Аналогічно випадку невизначеного інтеграла, формула заміни змінної може використовуватись як в прямому, так і в зворотному напрямку.

Зауваження 3. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної: якщо обчислено один з визначених інтегралів формули заміни, то маємо деяке число; цьому числу дорівнює також інший інтеграл.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

$$\square \quad I = \left| \begin{array}{c} x+1=t^2;\ \ x=t^2-1;\ dx=2t\,dt; \\ t=\sqrt{x+1};\ \ t_1=\sqrt{3+1}=2;\ t_2=\sqrt{8+1}=3 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_2^3 \frac{t^2-1-3}{t}\,2tdt = 2\int\limits_2^3 (t^2-4)\,dt = 2\int\limits_2^3 t^2dt - 8\int\limits_2^3 dt =$$

$$= (2/3)\,t^3\Big|_2^3 - 8t\Big|_2^3 = (2/3)\cdot(3^3-2^3) - 8\cdot(3-2) = 14/3. \quad ■$$

Приклад 2. Обчислити: а) $\int\limits_2^7 \frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$; б) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

(Розв’яжіть самостійно, використовуючи відповідно підстановки: а) $3x-5=t^4$; б) $x=2/\cos t$).

Зауваження 4. При обчисленні визначеного інтеграла заміну змінної можна проводити у відповідному невизначеному інтегралі. Тоді треба повернутись до початкової змінної і застосувати формулу Ньютона – Лейбниця. Звичайно цим користуються у простих випадках, коли заміну здійснюють усно.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}$, виконуючи заміну змінної у відповідному невизначеному інтегралі.

$$\square\ I=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}=\left|\int\frac{dx}{4+5\cos x}=\right|t=tg\,\frac{x}{2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\,arctg\,t;\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\left|=\int\frac{2\,dt\big/(1+t^2)}{4+5\cdot(1-t^2)\big/(1+t^2)}=\right.$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2-9}=-2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|+C\ \Bigg|=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|\Bigg|_{0}^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{tg\,(\pi/4)-3}{tg\,(\pi/4)+3}\right|-\ln\left|\frac{tg\,0-3}{tg\,0+3}\right|\right)=\frac{1}{3}\ln 2.\ \blacksquare$$

1.2.4. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовані функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b(u\,v)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b u\,v'\,dx.$$

Оскільки $\int(u\,v)'dx=u\,v+C$, тому $\int_a^b(u\,v)'\,dx=u\,v\big|_a^b$.

Отже $u\,v\big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=u\,v\big|_a^b-\int_a^b v\,du},$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$I=\int_{-2}^{0}(4x^2-12x-8)\cos 2x\,dx\,.$$

$$\square\quad I=\begin{vmatrix} u=4x^2-12x-8;\ \ dv=\cos 2x\,dx; \\ du=(8x-12)\,dx;\ v=(1/2)\sin 2x \end{vmatrix}=$$

$$=(4x^2-12x-8)(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}(1/2)\sin 2x\cdot(8x-12)\,dx=$$

$$=32\sin 4-2\int_{-2}^{0}(2x-3)\sin 2x\,dx=\Big|u=2x-3;\ \ du=2dx;$$

$$dv=\sin 2x\,dx;\ \ v=-(1/2)\cos 2x\,\Big|=32\sin 4-$$

$$-2\left((2x-3)\cdot(-1/2)\cos 2x\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}(-1/2)\cos 2x\cdot 2dx\right)=$$

$$=32\sin 4-3+7\cos 4-2\int_{-2}^{0}\cos 2x\,dx=32\sin 4-3+$$

$$+7\cos 4-2\cdot(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0}=31\sin 4+7\cos 4-3.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int_{0}^{\pi/2}e^{4x}\cos 5x\,dx\,.$

(Розв’яжіть самостійно).

1.3. Невласні інтеграли першого та другого роду

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов: а) скінченність проміжку інтегрування; б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Так у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума очевидно не має скінченної границі.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до ***невласного інтеграла*** – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Невласний інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають ***невласним інтегралом першого роду***.

Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ й інтегрована на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегрованою*** на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***.

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***, а функція $f(x)$ – ***неінтегрованою*** на $[a;+\infty)$.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно (на вліво нескінченному проміжку $(-\infty;b]$):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}\,,$$

де c – довільне фіксоване дійсне число. *Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч*. Можна довести, що інтеграл, визначений цією рівністю, не залежить від вибору числа c.

З наведених означень випливає, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів. Тому при розгляді невласного інтеграла перш за все виникає питання про його збіжність, яке вирішується або його безпосереднім обчисленням, або за допомогою спеціальних ***ознак збіжності***.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді природно вважати, що він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рис. 4 позначена похилими та перехресними штрихами. Починаючи з деякого значення b, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, яка позначена на рис. 4 перехресними штрихами. Тобто, при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ прямує до нуля настільки швидко, що площа відповідної нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

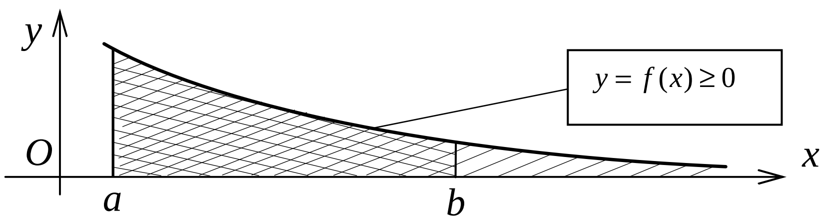

Рис. 4

Приклад 1. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}; \quad \text{б) } \int_3^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{2} \frac{x^2 dx}{x^6+64}.$$

□ а) $$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^b = \frac{1}{2}\times$$

$$\times \lim_{b\to+\infty} \Big(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\Big) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3\,.$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I=(1/2)\ln 3$.

$$б)\ I=\int_3^{+\infty}\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=x^2+3x-10; \quad dt=2x+3; \\ t_1=3^2+3\cdot 3-10=8;\ t_2=b^2+3b-10\end{matrix}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int_8^{b^2+3b-10}\frac{dt}{t}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_8^{b^2+3b-10}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b^2+3b-10|-\ln|8|\right)=+\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається.

в) (Розв'яжіть самостійно). ■

<u>Зауваження 2.</u> При обчисленні невласних інтегралів для скорочення іноді застосовують запис, аналогічний формулі Ньютона – Лейбниця. Наприклад,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),\ \text{де}\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)}.$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\boxed{\int_a^{+\infty}u\,dv=u\,v\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}v\,du}.$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити невласний інтеграл $I=\int_{-\infty}^0 x\,e^{x/4}dx$ або встановити його розбіжність.

$$\square\quad I=\int_{-\infty}^0 x\,e^{x/4}dx=\left|u=x;\ dv=e^{x/4}dx; du=dx;\ v=4e^{x/4}\right|=$$

$$=\left(x\cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 4\,e^{x/4}dx=-4e^{-\infty}-4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^0=\left|e^{-\infty}=0\right|=$$

$=0-16\ (e^0-e^{-\infty})=-16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16. ■

<u>Зауваження 3.</u> Застосування заміни змінної може звести невласний інтеграл до звичайного визначеного інтеграла.

Перейдемо до розгляду невласних інтегралів від необмежених функцій (невласних інтегралів другого роду).

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на будь-якому проміжку

$[a;\eta]$, де $\eta < b$, тобто існує визначений інтеграл $\int\limits_a^\eta f(x)dx$, і функція $f(x)$ необмежена на проміжку $[a;b]$. У цьому випадку точку b називають ***особливою***. Тоді границю $\boxed{\lim\limits_{\eta \to b-0} \int\limits_a^\eta f(x)dx}$ називають ***невласним інтегралом від необмеженої функції*** (***невласним інтегралом другого роду***) на проміжку $[a;b]$ і позначають $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx}$.

Якщо ця границя існує й скінченна, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається ***збіжним***; якщо ж ця границя не існує чи дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ – ***розбіжний***.

Аналогічно визначається невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ від необмеженої функції з особливою точкою a:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to a+0} \int\limits_\eta^b f(x)\,dx}.$$

У випадку, коли внутрішня точка $c \in (a;b)$ особлива, тобто в будь-якому околі точки c функція $f(x)$ необмежена, то за невласний інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ приймають суму границь:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to c-0} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \lim_{\mu \to c+0} \int\limits_\mu^b f(x)\,dx}.$$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити невласний інтеграл чи встановити його розбіжність

$$\text{а) } \int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}; \quad \text{в) } \int_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

□ а) Особлива точка $x=3$. Отже, за означенням невласного інтеграла, формулами заміни змінної та Ньютона – Лейбниця, знайдемо

$$\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\eta\to 3-0}\int_0^\eta \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left|\begin{array}{c} \sqrt{9-x^2}=t;\ \ 9-x^2=t^2 \\ x^2=9-t^2;\ \ 2xdx=-2tdt \\ xdx=-tdt \\ t_н=3;\ \ t_в=\sqrt{9-\eta^2} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\eta\to 3-0}\left(-\int_3^{\sqrt{9-\eta^2}} \frac{(9-t^2)tdt}{t}\right) = \lim_{\eta\to 3-0}\left(\left(-9t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_3^{\sqrt{9-\eta^2}}\right) =$$

$$= \lim_{\eta\to 3-0}\left(-9\sqrt{9-\eta^2}+27+\frac{\sqrt{(9-\eta^2)^3}}{3}-9\right) = 18.$$

Отже, інтеграл збігається, його значення дорівнює 18.

б) Особливі точки: $x=0$ і $x=-1 \notin [0;1]$. Маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2} = \lim_{\eta\to +0}\int_\eta^1 \frac{dx}{x+x^2} = \lim_{\eta\to +0}\int_\eta^1 \frac{1+x-x}{x+x^2}dx =$$

$$= \lim_{\eta\to +0}\left(\int_\eta^1 \frac{1+x}{x(1+x)}dx - \int_\eta^1 \frac{x}{x(1+x)}dx\right) = \lim_{\eta\to +0}\left(\ln|x|\Big|_\eta^1 - \ln|1+x|\Big|_\eta^1\right) =$$

$$= \lim_{\eta\to +0}\left(\ln 1 - \ln\eta - \ln 2 + \ln(1+\eta)\right) = \infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

в) Особливі точки:

$x^2-4x+3=0$; $x=3$ і $x=1 \notin [2;6]$. Маємо

$$I = \int_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \lim_{\eta\to 3-0}\int_2^\eta \frac{dx}{x^2-4x+3} + \lim_{\mu\to 3+0}\int_\mu^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Знайдемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \right) dx =$$

$$= \left| A(x-3) + B(x-1) = 1; \quad \begin{matrix} x=1: \\ x=3: \end{matrix} \begin{cases} -2A = 1; & A = -1/2; \\ 2B = 1; & B = 1/2 \end{cases} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x-3} \right) dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C\,.$$

Тоді $I = \lim\limits_{\eta\to 3-0} \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| \right)\Bigg|_2^{\eta} + \lim\limits_{\mu\to 3+0} \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| \right)\Bigg|_{\mu}^{6} =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\eta\to 3-0} \left(\ln\left|\frac{\eta-3}{\eta-1}\right| - \ln 1 \right) + \frac{1}{2}\lim_{\mu\to 3+0} \left(\ln\frac{3}{5} - \ln\left|\frac{\mu-3}{\mu-1}\right| \right) - \text{ *границя не існує.*}$$

Отже, інтеграл $I = \int\limits_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ розбігається. ■

1.4. Геометричні та економічні застосування визначеного інтеграла

Різноманітні застосування визначеного інтеграла реалізуються за однією з двох схем:

1) Для шуканої величини, в припущенні адитивності (можливість підсумовування по елементам розбиття) і лінійності в малому (лінійна залежність між головними частинами нескінченно малих приростів, що фігурують в задачі), складається інтегральна сума, що наближено її визначає, а потім здійснюється граничний перехід при необмеженому здрібненні розбиття і одержується точне значення у вигляді визначеного інтеграла.

2) Складають співвідношення для диференціала (або похідної) шуканої функції, а потім саму функцію знаходять інтегруванням.

Розглянемо задачі обчислення основних кількісних характеристик геометричних об'єктів (довжини, площі, об'єму) та деякі економічні застосування інтегрального числення.

1.4.1. Обчислення площі плоскої фігури

Під час розгляду питання про обчислення площі плоскої фігури основним є поняття правильної області.

Непорожня множина D точок координатної площини Oxy називається ***областю*** (***відкритою областю***), якщо виконуються такі умови: 1) вона ***відкрита***, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки; 2) вона ***зв'язна***, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Точка M_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області.

Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Зауваження 1. Надалі розглядаються області, межа яких Γ складається зі скінченного числа кусково-неперервних кривих та ізольованих точок.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається ліворуч, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***.

Об'єднання області D з її межею Γ, називається ***замкненою областю***.

Зауваження 2. Домовимось ділянку межі Γ зображати суцільною лінією, якщо вона входить в область D, і пунктирною лінією, якщо вона не входить в область D.

Область D називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число C, що відстань будь-якої точки області D до початку координат не перевищує числа C. У протилежному випадку область D називається ***необмеженою***.

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 5), відрізок $[a;b]$ - її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови: 1) вона обмежена знизу «горизонтальною» ***лінією входу*** $y = y_1(x)$, зверху – «горизонтальною» ***лінією виходу*** $y = y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x = a$ і $x = b$ ($a < b$); 2) довільна пробна пряма $x = c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії входу та в одній точці на дальній лінії виходу; 2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y = y_1(x)$ (аналогічно $y = y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

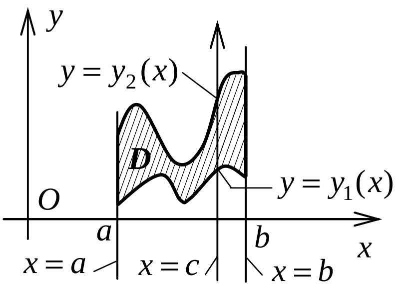

Рис. 5

Правильна в напрямку осі Oy плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\boxed{\begin{cases} a \le x \le b; \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}}$$

де $D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox$.

Площу такої області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних трапецій, одна з основ кожної з яких лежить на осі Ox. Тоді площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити за формулою:

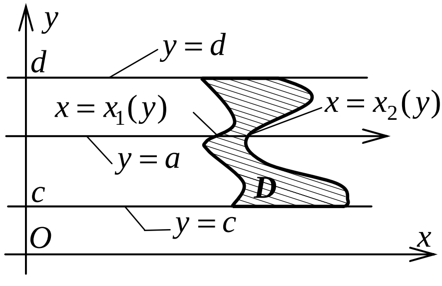

Рис. 6

$$\boxed{S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx}.$$

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямку осі*** Ox плоска область D (рис. 6). При цьому змінні x і y міняються ролями. (Сформулюйте означення самостійно).

Правильна в напрямку осі Ox плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\boxed{\begin{cases} c \le y \le d; \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}} \qquad \text{де } D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy.$$

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy}\,.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, область, обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, є правильною. Область D: $x^2 \le y \le 2 - x^2$; $x \in [-1;1]$, обмежена двома вертикальними параболами, що перетинаються, – правильна в напрямку осі Oy, але неправильна в напрямку осі Ox. Кругове кільце $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ – неправильне в обох напрямках.

<u>Зауваження 3</u>. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

<u>Приклад 1</u>. Знайти площу області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв'язати двома способами: а) використовуючи інтегрування за змінною x; б) використовуючи інтегрування за змінною y. Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3;\ A(3;1); \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = -1;\ B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4-\sqrt{y}; \\ x-y+2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=(4-x)^2,\ x\le 4; \\ x-(4-x)^2+2=0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1=2; \\ x_2=7>4; \end{matrix}$$

$$y_1=(4-2)^2=4; \quad C(2;4).$$

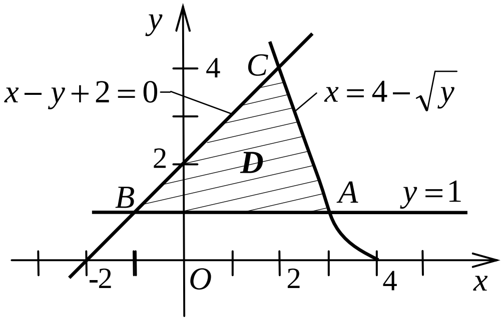

Рис. 7

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x-y+2=0$, $y=1$ і лівої половини $x=4-\sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 7) і проаналізуємо її форму.

а) Щоб скористатися формулою $S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx$, необхідно подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рис. 7 видно, що область D – неправильна, оскільки її верхня межа утворена двома різними лініями, що з'єднуються в кутовій точці C. Тому розбиваємо область D на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 8).

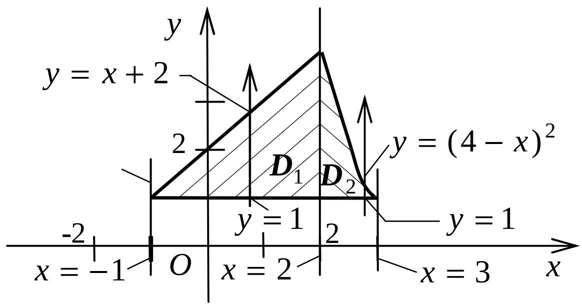

Рис. 8

Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області $S = S_1 + S_2$. Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2} ((x+2)-1)\,dx + \int_{2}^{3} \left((x-4)^2 - 1\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+1)\,dx + \int_{2}^{3} (x^2 - 8x + 15)dx = \left((1/2)x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+ \left((1/3)x^3 - 4x^2 + 15x\right)\Big|_{2}^{3} = 2 + 2 - 1/2 + 1 + 9 - 36 + 45 -$$

$$-8/3 + 16 - 30 = 35/6 \text{ (кв. од.)}.$$

б) Щоб скористатися формулою $S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy$, необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рис. 7 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рис. 9.

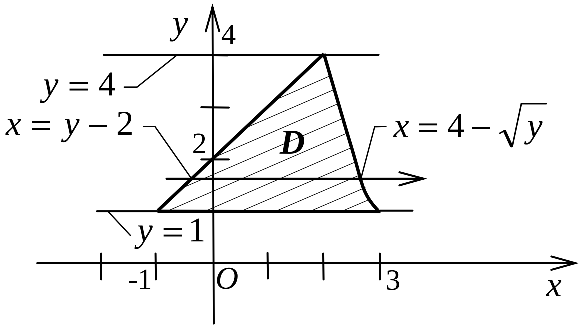

Рис. 9

Проведемо обчислення:

$$S = \int_1^4 \left(\left(4 - \sqrt{y}\right) - (y-2)\right)dy = \int_1^4 \left(6 - \sqrt{y} - y\right)dy =$$

$$= \left(6y - (2/3)\,y^{3/2} - (1/2)\,y^2\right)\Big|_1^4 = 24 - 16/3 - 8 - 6 + 2/3 +$$

$$+1/2 = 35/6 \text{ (кв. од.)}. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 4</u>. Звичайно, при обчисленні площі конкретної фігури треба використовувати особливості її форми і вибирати той

спосіб її подання як правильної області, що приводить до більш простих розрахунків.

Приклад 2. Обчислити площу фігури D, обмеженої параболами $y = 2x - x^2 + 3$ і $y = x^2 - 4x + 3$.

□ Знайдемо точки перетину парабол:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3; \\ y = x^2 - 4x + 3; \end{cases} \quad 2x - x^2 + 3 = x^2 - 4x + 3;\ 2x(x-3) = 0;$$

$$x_1 = 0;\ y_1 = 3;\ x_2 = 3;\ y_2 = 0;\ x = 3;\ A(0;3);\ B(3;0).$$

Характерними точками також є вершини парабол. Для знаходження вершин і зручності побудови парабол виділимо в їх рівняннях повні квадрати двочлена:

$$y = 2x - x^2 + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 3 = 4 - (x-1)^2;\ C(1;4);$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1;\ E(2;-1).$$

Вказану фігуру D зображено на рис. 10.

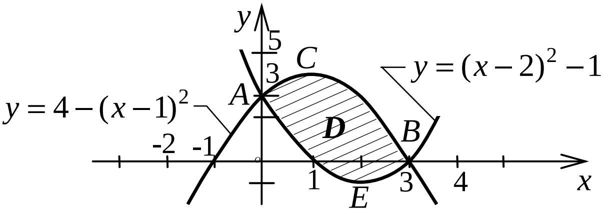

Рис. 10

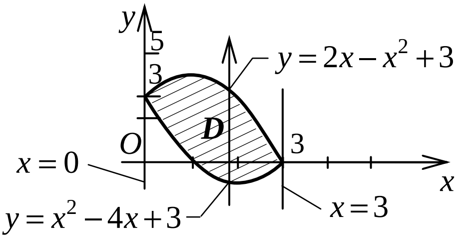

Рис. 11

З нього видно, що область D – правильна в напрямку осі Oy. Крім того, задані рівняння кривих, що обмежують область, мають явний вигляд відносно змінної y. Відповідне зображення подано на рис. 11.

За формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$ маємо:

$$S = \int_0^2 \Big((2x - x^2 + 3) - (x^2 - 4x + 3)\Big)dx = \int_0^2 (6x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \Big(3x^2 - (2/3)x^3\Big)\Big|_0^3 = 27 - 18 = 9 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

1.4.2. Обчислення довжини дуги кривої

Нехай на координатній площині Oxy задана деяка лінія рівнянням у явній формі $y = y(x)$. Потрібно обчислити довжину L її дуги L_{AB}. (рис. 12).

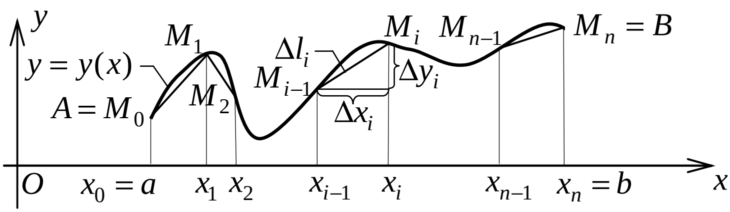

Рис. 12

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i = \overline{1,n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$ і проведемо хорди $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_{i-1}M_i, ..., M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_i, ..., \Delta l_n$. Тоді маємо ламану $M_0M_1...M_i...M_{n-1}M_n$, вписану в дугу L_{AB}. Довжина ламаної L_n дорівнює сумі довжин її ланок $L_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$.

Довжиною** L **дуги L_{AB} називають границю довжини L_n вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому число n

цих ланок прямує до нескінченності):

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \ .$$

Теорема 1. *Якщо функція* $y = y(x)$, *визначена на відрізку* $[a;b]$, *неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина* L *дуги* L_{AB}, *що служить її графіком на відрізку* $[a;b]$, *обчислюється за формулою*

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx} \ .$$

□ Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+(\Delta y_i / \Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$\Delta y_i / \Delta x_i = (y(x_i) - y(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1}) = y'(c_i)$, де $x_{i-1} < c_i < x_i$.

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i$, оскільки $\Delta x_i > 0$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i \ .$$

За умовою похідна $y'(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1+(y'(x))^2}$ теж неперервна. Тоді вираз для довжини ламаної L_n є інтегральною сумою для неперервної функції. Отже, існує визначений інтеграл – границя L_n при необмеженому здрібненні розбиття, що дає довжину L дуги L_{AB}:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \ . \ \blacksquare$$

Приклад 1. Знайти довжину вказаної дуги

$$y = \ln x, \ x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$$

□ Похідна $y' = 1/x$. Тоді:

$$L=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(1/x)^2}\,dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=$$

$$=\left|x^2+1=t^2;\ \sqrt{1+x^2}=t;\ \ x=\sqrt{t^2-1};\ dx=t\,dt\big/\sqrt{t^2-1}\ ;\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1=\sqrt{1+3}=2;\\ t_1=\sqrt{1+8}=3\end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{t\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}}=\int\limits_2^3\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3 dt+$$

$$+\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2-1}=t\,|_2^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=3-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=$$

$$=1+(1/2)\ln(3/2)\ \text{(од.).}\ \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти довжину кола $x^2+y^2=R^2$.

□ Довжина L_1 дуги кола, що розташована у першому квадранті, складає четверту частину довжини L всього кола. Рівняння цієї дуги має вигляд $y=\sqrt{R^2-x^2}$, звідки $y'=-x\big/(R^2-x^2)^{1/2}$. Тоді довжину L кола можна обчислити так:

$$L=4L_1=4\int\limits_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R\int\limits_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^R=$$

$$=4R(\arcsin 1-\arcsin 0)=2\pi R\ \ \text{(од.).}\ \blacksquare$$

1.4.3. Обчислення об’єму тіла обертання

1. Об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло T. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox (рис. 13). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від x: $S=S(x)$. Знайдемо об'єм V тіла T.

Припустимо, що функція $S(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, що служить проекцією тіла T на вісь Ox. Проведемо довільно площини $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_i$, ..., $x = x_n$, де $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$. Тим самим тіло розбивається на елементарні шари між сусідніми площинами $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$. На кожному частинному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$ візьмемо довільну точку c_i і для кожного i-го шару побудуємо елементарний циліндр, твірна якого паралельна осі Ox і має довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а напрямною служить контур перерізу тіла T площиною $x = c_i$. Тоді об'єм шару ΔV_i наближено дорівнює об'єму такого циліндра з площею основи $S(c_i)$ і висотою Δx_i: $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Об'єм V тіла T наближено дорівнює сумі V_n об'ємів усіх частинних циліндрів: $V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i$. Точність цього наближення підвищується зі зменшенням кроків Δx_i розбиття.

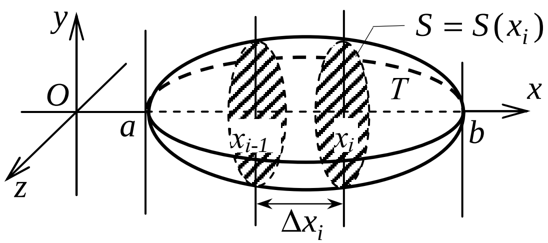

Рис. 13

Границя цієї суми (якщо вона існує) при необмеженому здрібненні розбиття (коли $\max \Delta x_i \to 0$ і при цьому, очевидно, $n \to \infty$) визначає об'єм V даного тіла T: $V = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i$.

Таким чином, об'єм V є границею інтегральної суми V_n для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $[a; b]$, тому вказана границя існує і дорівнює визначеному інтегралу: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$.

Приклад 1. Знайти об'єм еліпсоїда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

□ У перерізі еліпсоїда (рис. 14) площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\begin{cases} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2; \\ x = const \end{cases}$$

або $\quad y^2 \Big/ \left(b^2(1 - x^2/a^2)\right) + z^2 \Big/ \left(c^2(1 - x^2/a^2)\right) = 1$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2}, \quad c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

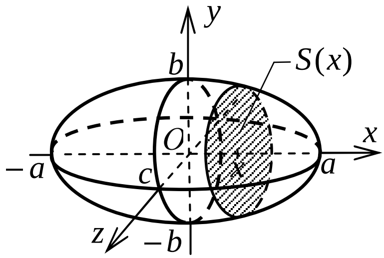

Рис. 14

Площа такого еліпса

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right).$$

Обчислимо об'єм еліпсоїда, враховуючи його симетрію відносно площини Oyz:

$$V = \pi bc\int_{-a}^{a}(1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\int_{0}^{a}(1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\left(x - x^3/(3a^2)\right)\Big|_0^a = (4/3)\pi abc \text{ (куб.од.).} \ ■$$

2. Об'єм тіла обертання.

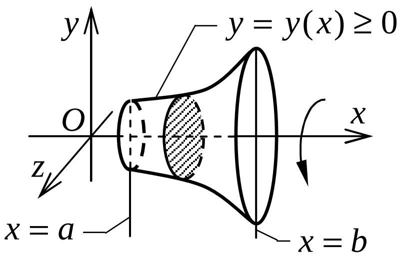

Рис. 15

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x) \geq 0$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ та $x = b$, де $a \leq b$. Якщо обертати цю фігуру навколо осі Ox, то утвориться тіло обертання T (рис. 15). Переріз цього тіла площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, – круг з площею $S(x) = \pi R^2 = \pi(y(x))^2$. Тоді об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx}\,.$$

Приклад 2. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$, навколо осі Ox.

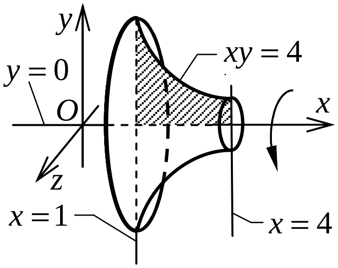

Рис. 16

□ Тіло, об'єм якого треба знайти, зображене на рис. 16. Фігура (криволінійна трапеція), що обертається, показана штриховою.

Проведемо обчислення:

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx = \pi\int_1^4 (4/x)^2\,dx =$$

$$= 16\pi(-1/x)\,\big|_1^4 = 12\pi \text{ (куб.од.). } \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури D, обмеженої дугою синусоїди $y = 4\sin x,\ x \in [0;\pi/6]$, віссю Oy і горизонтальною прямою $y = 2$, навколо осі Ox.

(Розв'яжіть самостійно).

1.4.4. Застосування визначеного інтегралу в економічних задачах

1. Задача про розподіл доходів населення держави. Рівень розвитку держави характеризується тим, як вона забезпечує рівень життя своїх громадян. Одним з таких показників є матеріальний добробут. Легко і досить точно проводити порівняльний аналіз розподілу населення за рівнем добробуту дозволяє ***коефіцієнт Джині***, який характеризує нерівність в розподілі доходів населення. Він безпосередньо зв'язаний з ***кривою Лоренца*** $y = f(x)$ (крива OmA на рис. 17), яка відображає залежність відсотка y доходів населення від відсотка x тих, які ці доходи мають. При рівномірному (досконалому) розподілі крива Лоренца вироджується в пряму –

бісектрису OA, а тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAB (***коефіцієнт Джині*** $\boxed{k = S_{OAm}/S_{\Delta OAB}}$), характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів населення.

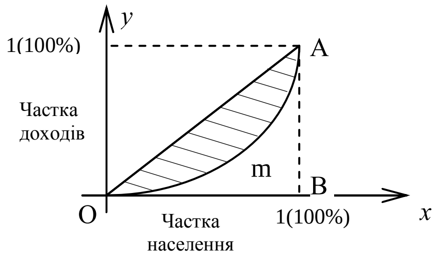

Рис. 17

Приклад 1. Нехай $y = x^3/(2-x^4)^2$ – крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів у деякій країні, де x – відсоток населення, y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині k.

□ $k = S_{OAm}/S_{\Delta OAB}$;

$$S_{OAm} = \int_0^1 \left(x - x^3/(2-x^4)^2\right) dx = \int_0^1 x dx -$$

$$-\int_0^1 \frac{x^3 dx}{(2-x^4)^2} = \left| u = 2 - x^4;\ du = -4x^3 dx;\ u_1 = 2;\ u_2 = 1 \right| =$$

$$= x^2/2\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\int_2^1 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot(-1/u)\Big|_2^1 = 0{,}375;$$

$$S_{\Delta OAB} = 0{,}5; \quad k = 0{,}375/0{,}5 = 0{,}75.$$

Досить велике значення коефіцієнта k показує значну нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни. ■

Зауваження 1. Очевидно, що $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0;1]$. Тому коефіцієнт нерівномірності розподілу доходів задовольняє співвідношення $0 \le k \le 1$. Коли $k = 0$, доходи розподілено рівномірно. Коли $k = 1$, нерівномірність розподілу найбільша.

2. Задача про дисконтування. Визначення початкової суми грошей за її кінцевою величиною, одержаною через час t (років) при річній відсотковій ставці p, називається ***дисконтуванням.*** Задачі такого типу зустрічаються при визначенні економічної ефекти-

вності капіталовкладень.

Нехай K_t – кінцева сума, одержана за t років, а K_0 – сума, що дисконтується (початкова сума). K_0 у фінансовому аналізі називають ***теперішньою вартістю*** очікуваних у майбутньому грошових надходжень.

Якщо відсотки прості, то $K_t = K_0(1+tp/100)$, де $p/100$ – номінальна річна відсоткова ставка, подана у вигляді десяткового дробу. Звідси $K_0 = K_t/(1+p/100)$.

У випадку складних відсотків маємо: $K_t = K_0(1+p/100)^t$. Тоді $K_0 = K_t(1+p/100)^{-t}$.

Якщо відсотки нараховуються рівномірно n разів протягом кожного року, тоді $K_t = K_0(1+(p/n)/100)^{nt}$. Звідси $K_0 = K_t(1+(p/n)/100)^{-nt}$.

У разі неперервного нарахування відсотків (при $n \to \infty$) маємо: $K_t = K_0 e^{tp/100}$. Тоді $K_0 = K_t e^{-tp/100}$.

Нехай щорічний дохід, що надходить, змінюється з часом і описується функцією $f(t)$, а відсотки нараховуються неперервно при відповідній відсотковій ставці $p/100$. Тоді дисконтований дохід K_0 за визначений час $[0;T]$ обчислюється за формулою

$$\boxed{K_0 = \int_0^T f(t)e^{-tp/100}dt}.$$

Приклад 2. Знайти дисконтований дохід за чотири роки при відсотковій ставці 5%, якщо початкові капіталовкладення становили 15 млн. грн. і планується щорічно збільшувати капіталовкладення на 2 млн. грн.

□ Згідно умови задачі капіталовкладення задано функцією $f(t) = 15 + 2t$ і $p = 5$, $T = 4$. Обчислимо суму дисконтування вкладень:

$$K_0 = \int_0^T f(t)e^{-tp/100}dt = \int_0^4 (15+2t)e^{-0,05t}dt \approx 68 \text{ (млн. грн.)}$$

(інтеграл обчислити самостійно, використовуючи інтегрування частинами).

Отже, для нарахування однакової суми, що утворилась за чотири роки, щорічні капіталовкладення від 15 млн. грн. до 23 млн. грн. рівнозначні одночасному початковому вкладенню 68 млн. грн. при тій самій відсотковій ставці та неперервному нарахуванні відсотків. ■

Зауваження 2. Як відомо з фінансового аналізу, якщо в деякому проекті доходи $P(t)$ і витрати $C(t)$ здійснюються неперервно протягом n років, тоді різниця доходів і витрат за елементарний проміжок часу $[t, t+\Delta t]$ приблизно дорівнює $\big(P(t)-C(t)\big)\Delta t$. Відповідно теперішня вартість ΔTB цієї різниці визначається за формулою $\Delta TB = \big(P(t)-C(t)\big)e^{-tp/100}\Delta t$, де $e^{-tp/100}$ – коефіцієнт дисконтування, t – поточний рік життя проекту. Тоді початкова вартість TB всієї різниці доходів і витрат протягом n років при неперервній капіталізації обчислюється за формулою:

$$\boxed{TB = \int_0^n \big(P(t)-C(t)\big)e^{-tp/100}dt}.$$

Отже, теперішня вартість TB залежить від таких трьох факторів: різниці доходів і витрат $P(t)-C(t)$; терміну життя проекту n і величини відсоткової ставки p. У загальному випадку інвестиції будуть вигідними, якщо $TB > C_0$, тобто якщо приведена вартість інвестицій буде більше за початкові капіталовкладення.

3. Задача про зміну капіталу**.** Нехай $I(t)$ – чисті інвестиції (загальні капіталовкладення, що були здійснені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування амортизації), $K(t)$ – капітал підприємства (основні фонди), тоді $I(t) = K'(t)$, тобто за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій. Якщо відома функція чистих інвестицій $I(t)$, то можна знайти зміну капіталу ΔK за проміжок часу $[t_1; t_2]$ за формулою: $\boxed{\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt}$.

Приклад 3. Чисті інвестиції змінюються з часом за формулою $I(t) = 10000e^t \big/ (1+e^t)$ грош. од./рік. Знайти: а) приріст капіталу ΔK (з точністю до цілих грош. од.) за перші п'ять років; б) проміжок часу $[0;T]$ (з точністю до року), протягом якого приріст капіталу ΔK досягне $100\,000$.

□ а) $\Delta K = \int\limits_0^5 \frac{10000e^t}{1+e^t}dt = \Big| u = 1+e^t;\ du = e^t dt;$

$$u_1 = 2;\, u_2 = 1+e^5 \Big| = 10000 \int\limits_2^{1+e^5} \frac{du}{u} = 10000 \ln|u| \Big|_2^{1+e^5} =$$

$$= 10000\Big(\ln(1+e^5) - \ln 2\Big) \approx 43136 \text{ (грош. од.);}$$

б) $\int\limits_0^T \frac{10000e^t}{1+e^t}dt = 100000;\ \ 10000\Big(\ln(1+e^T) - \ln 2\Big) = 100000;$

$$\ln(1+e^T) - \ln 2 = 10;\ \ \ln(1+e^T) = \ln(2\cdot e^{10});$$

$$1+e^T = 2\cdot e^{10};\ \ e^T = 2e^{10} - 1;\ \ T = \ln(2e^{10} - 1) \approx 11 \text{ (років).} \ \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти (з точністю до цілих грош. од.) середнє значення μ витрат $C(x) = 100x - 10x^2 + 270$ грош. од. якщо обсяг продукції x змінюється від 3 до 9 одиниць. Вказати (з точністю до цілих одиниць продукції) обсяг продукції $\bar{x}$, при якому витрати приймають середнє значення.

□ Середнє значення μ функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за теоремою про середнє значення і досягається хоча б в одній внутрішній точці $\bar{x}$ цього відрізка:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx;\quad \mu = \frac{1}{9-3}\int\limits_3^9 (100x - 10x^2 + 270)\,dx =$$

$$= \frac{5}{3}\left(5x^2 - \frac{x^3}{3} + 27x\right)\Bigg|_3^9 = 480;$$

$$f(\bar{x}) = \mu; \quad C(\bar{x}) = 100\bar{x} - 10\bar{x}^2 + 300 = 480;$$

$$\bar{x}^2 - 10\bar{x} + 18 = 0; \;\; D = 100 - 72 = 28;$$

$$\bar{x}_1 = 5 - \sqrt{7} \approx 2 \notin (3;9); \quad \bar{x}_2 = 5 + \sqrt{7} \approx 8. \quad \blacksquare$$

4. Задача про максимізацію прибутку за часом. Метою будь-якого виробництва є досягнення максимального прибутку. Тобто, досягнення максимальної різниці між доходами і видатками. Позначимо $P(t)$, $D(t)$ і $V(t)$ відповідно функції, що виражають залежності прибутку, доходу та видатків від часу t. Тоді $P(t) = D(t) - V(t)$. Похідні $P'(t)$, $D'(t)$ і $V'(t)$ є функціями маргінальних прибутку, доходу та витрат відповідно. При цьому $P'(t) = D'(t) - V'(t)$. Загальний прибуток $P(T)$ за час $[0;T]$ можна знайти за формулою

$$P(T) = \int_0^T P'(t)dt = \int_0^T \big(D'(t) - V'(t)\big)dt.$$

Якщо функція $P(t)$ досягає свого екстремуму (з економічних міркувань – максимуму), то її похідна дорівнює 0:

$$P'(t) = D'(t) - V'(t) = 0, \text{ звідки } \; D'(t) = V'(t).$$

Тобто, в процесі економічної діяльності настає такий момент часу T_k (***тривалість прибуткового існування***), коли маргінальні доходи і видатки зрівнюються $D'(T_k) = V'(T_k)$. При цьому загальний прибуток досягає свого максимуму $\max P(t) = P(T_k)$ і подальша діяльність у цій сфері втрачає економічний сенс.

Приклад 5. Нехай прибутки, доходи та видатки вимірюються в мільйонах гривень, а час – у роках. Маргінальні витрати і доходи підприємства після початку його діяльності визначаються співвідношеннями: $V'(t) = 3 + 2t^{1/3}$, $D'(t) = 9 - t^{1/3}$. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства T_k. Знайти максимальне значення $P(T_k)$ загального прибутку, що одержується за цей час.

□ $D'(t) = V'(t)$; $9 - t^{1/3} = 3 + 2t^{1/3}$; $t^{1/3} = 2$; $T_k = 8$.

Отже, підприємство є прибутковим вісім років. За цей час загальний прибуток досягає максимального значення і становить:

$$P(T_k) = \int_0^{T_k} P'(t)dt = \int_0^{T_k} \left(D'(t) - V'(t)\right)dt\,;$$

$$P(8) = \int_0^8 \left(9 - t^{1/3} - 3 - 2t^{1/3}\right)dt = 3\int_0^8 \left(2 - t^{1/3}\right)dt =$$

$$= 3(2t - 3t^{4/3}/4)\Big|_0^8 = 3\cdot(16-12) = 12 \text{ (млн. грн.).} \quad ■$$

<u>5. Задача про об’єм продукції, виробленої за проміжок часу</u>.

Згідно з економічним змістом визначеного інтеграла

$$\boxed{Q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau}$$

– об’єм продукції, виробленої за період часу $[0;t]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності праці $f(t)$ на проміжку $[0;t]$.

<u>Приклад 6</u>. Продуктивність праці описана рівнянням

$$f(t) = -(5/2)t^2 + 15t + 50\,.$$

Знайти об’єм продукції, виробленої за час $0 \le t \le 6$.

□ Об’єм продукції, виробленої за час $0 \le t \le 6$, дорівнює

$$Q(6) = \int_0^6 \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 50\right)dt = \left(-\frac{5t^3}{6} + \frac{15t^2}{2} + 50t\right)\Bigg|_0^6 = 390\,. \quad ■$$

<u>Приклад 7</u>. Продуктивність праці робітника протягом зміни описується функцією $f(t) = -t^2 + 8t + 20$. Знайти максимально можливу тривалість робочої зміни $t_{\max}$, доки продуктивність праці не досягне нульового рівня, і обчислити об’єм продукції $Q(t_{\max})$, виробленої за таку зміну. (Розв’яжіть самостійно).

<u>6. Задача про стратегію розвитку</u>.

<u>Приклад 8</u>. Компанія повинна обрати одну із двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 12 млн. гривень у нове обладнання і одержувати 3 млн. гривень прибутку кожного року на протязі 10

років його експлуатації; 2) вкласти 16 млн. гривень у більш досконале обладнання, яке дозволить одержати 5 млн. гривень прибутку щорічно, але на протязі більш короткого строку експлуатації у 7 років. Яку стратегію треба обрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна відсоткова ставка 10%?

□ Нехай $f(t)$ – щорічний прибуток на момент часу t (рік), $V(0)$ – початкові капіталовкладення, p – номінальна облікова щорічна відсоткова ставка. Тоді дійсне значення загального чистого прибутку $P(T)$ за період часу $[0;T]$ можна знайти за формулою:

$$\boxed{P(T) = \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt/100} dt - V(0)}.$$

Для першої стратегії дійсне значення загального чистого прибутку за 10 років становить

$$P_1 = \int_0^{10} 3e^{-0,1t} dt - 12 = -30e^{-0,1t}\Big|_0^{10} - 12 \approx 7 \quad \text{(млн. грн.)}.$$

Для другої стратегії маємо :

$$P_2 = \int_0^{7} 5e^{-0,1t} dt - 16 = -50e^{-0,1t}\Big|_0^{7} - 16 \approx 9 \quad \text{(млн. грн.)}.$$

Отже, друга стратегія рівнем прибутку краще першої і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку компанії. ■

1.5. Економічна динаміка та її моделювання: диференціальні та різницеві рівняння

1.5.1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

При вивченні різноманітних явищ у науці, техніці та інших сферах часто не вдається безпосередньо встановити функціональну залежність між значеннями шуканих і відомих величин, проте можливо виявити зв'язки між нескінченно малими приростами (диференціалами) змінних, що фігурують у задачі. Диференціальні зв'язки завдяки лінеаризації, як правило, суттєво простіші скінченних. Крім того, результати спостережень чи експериментів часто подаються в диференціальній формі. Тому для моделювання неперервних динамічних процесів широко використовуються диференціальні та інші споріднені з ними рівняння. Далі наведемо декілька прикладів подібних задач.

Задача 1. Повні витрати V залежать від об'єму (кількості одиниць) виробленої продукції x. Знайти функцію $V = V(x)$, якщо відомо: швидкість росту витрат dV/dx для всіх значень x дорівнює середнім витратам на одиницю продукції V/x.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $\boxed{dV/dx = V/x}$, розв'язком якого при додатковій умові $V(1) = V_0$ служить лінійна функція: $V = V_0 x$.

Задача 2. Нехай в початковий момент $t = 0$ часу t на деякій фірмі вироблялося x_0 одиниць продукції, а швидкість зростання dx/dt випуску продукції x в довільний момент часу t прямо пропорційна поточному об'єму інвестування $I(t)$ зі сталим коефіцієнтом пропорційності k. Знайти залежність $x = x(t)$ кількості виробленої продукції від часу при сталому інвестуванні $I(t) = I_0$.

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння $\boxed{dx/dt = kI_0}$. Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0) = x_0$ служить лінійна функція: $x = kI_0 t + x_0$.

Задача 3. Еластичність попиту η на деяку продукцію з об'ємом попиту x, кожна одиниця якої пропонується за ціною p, визначається за формулою $\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$. Знайти функцію попиту $x = x(p)$ (залежність між об'ємом x попиту на товар і та його ціною p), якщо відомо: еластичність попиту стала і дорівнює -1.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $\boxed{\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = -1}$, розв'язком якого при додатковій умові $x(1) = x_0$ служить гілка гіперболи: $x = x_0 / p$.

Задача 4. Відомо, що швидкість зростання dK/dt інвестованого капіталу K в довільний момент часу t прямо пропорційна поточній величині капіталу $K(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $p/100$, де p – узгоджений відсоток неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання $K = K(t)$ інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції $K(0) = K_0$.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $\boxed{\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{p}{100}K}$, розв'язком якого при додатковій умові $K(0) = K_0$ служить експонента: $K = K_0 e^{pt/100}$.

Задача 5. Нехай ведеться виборча компанія. У початковий момент часу $t_0 = 0$ агітаційну інформацію про кандидата A мають x_0 громадян, загальна кількість яких дорівнює X. Далі ця інформація поширюється через спілкування людей між собою. Припустимо, що швидкість цього процесу dx/dt (зростання числа громадян $x = x(t)$, ознайомлених з даною інформацією за час t) прямо пропорційна як числу x вже проінформованих на даний момент t людей, так і числу $X - x$ громадян, ще не охоплених агітацією.

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння

$$\boxed{dx/dt = kx(X - x)} \text{ або } \boxed{dx/dt = kXx - kx^2},$$

де k – додатний сталий коефіцієнт пропорційності. Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0) = x_0$ служить ***логістична крива***:

$$\boxed{x = X\Big/\left(1 + (X / x_0 - 1)\, e^{-Xkt}\right)}.$$

Подібне диференціальне рівняння моделює поширення технічних нововведень, зростання популяції певного виду тварин та інші процеси. Це рівняння можна доповнити ще одним доданком $-v$, що враховує різні втрати інформації:

$$\boxed{dx/dt = kXx - kx^2 - v}.$$

1.5.2. Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв’язки та їх геометричний зміст

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної x, то диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

Диференціальне рівняння n–го порядку зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'',...,\ y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали).

Диференціальне рівняння n–го порядку можна подати в ***загальному вигляді***

$$\boxed{F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0},$$

де $y = y(x)$ – шукана функція. Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну x, саму шукану функцію y та її похідні нижчих порядків $y', y'',..., y^{(n-1)}$, але до нього обов’язково повинна входити n-а похідна $y^{(n)}$.

Це неявна форма запису ДР. Розв’язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо ***канонічний*** (***нормальний***) ***вигляд*** ДР

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right)}.$$

Наприклад, $y'''-3(y')^4 - \sqrt{y} - 2\sin x = 0$ – ДР третього порядку, подане у загальній (неявній) формі; $y^{(6)} = y'''-4x(y')^8$ – ДР шостого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної $y = F(x)$ для даної функції $f(x)$ породжує найпростіше диференціальне рівняння $y' = f(x)$, розв’язування якого зводиться до інтегрування.

Розв'язком диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв’язку ДР називається ***інтегральною кривою***.

<u>Зауваження 1</u>. Розв’язок ДР n–го порядку є n разів диференційованою функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його ***інтегруванням***.

<u>Зауваження 2</u>. Розв’язок ДР, записаний ***у неявній формі***, часто називають ***інтегралом*** диференціального рівняння. Розв’язок ДР також може подаватися ***в параметричній формі***.

<u>Зауваження 3</u>. Диференціальне рівняння вважається ***розв’язаним***, якщо множина його розв’язків задається співвідношеннями без диференціювання, що можуть включати операції інтегрування відомих функцій. Серед вказаних інтегралів допускаються й ті, що не виражаються через елементарні функції у скінченному вигляді. Як правило, будемо намагатися знаходити розв’язок ДР у найбільш простій явній формі та обчислювати всі наявні інтеграли.

<u>Приклад 1</u>. Перевірити, чи служить явно задана функція $y = C_1 + C_2 e^{10x} - x^3/30 - x^2/100 - x/500$, де C_1, C_2 − довільні сталі, розв’язком диференціального рівняння $y'' - 10y' = x^2$.

□ Диференціюючи вказану функцію, знайдемо

$$y' = 10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - 1/500;$$

$$y'' = 100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50.$$

Підставимо функцію та її похідні у рівняння:

$$100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50 - 10\left(10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - \right.$$

$$\left. - 1/500\right) = x^2; \quad x^2 = x^2.$$

Оскільки тотожність вірна, то вказана функція є розв’язком заданого ДР. ■

Щоб знайти шукану функцію з ДР n-го порядку, треба в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв’язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку є функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст. Загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. При цьому через кожну внутрішню точку області визначення сім'ї проходить єдина інтегральна крива. Частинному розв'язку відповідає конкретний екземпляр з сім'ї інтегральних ліній.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2$. Вказати три його частинні розв'язки.

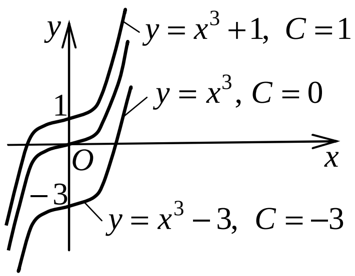

Рис. 18

□ $dy/dx = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$;

$$y = 3\int x^2 dx = x^2 + C.$$

Отже, $y = x^3 + C$ − загальний розв'язок. Геометрично йому відповідає однопараметрична сім'я інтегральних кривих. Поклавши послідовно $C = -3$, $C = 0$ і $C = 1$, отримаємо три частинні розв'язки, зображені на рис. 18. ■

1.5.3. Початкові та крайові умови. Задача Коші та крайова задача

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

2) ***крайові*** (***граничні***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих.

Для ДР n-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0)=y_0;\ y'(x_0)=y_0';\ldots;\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ − відомі числа (початкові дані).

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):

$$y''=\cos x;\quad y(0)=1;\ \ y'(0)=2.$$

□ Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y'=\int\cos x dx;\quad y'=\sin x+C_1;\ \ y=\int(\sin x+C_1)\,dx;$$

$$y=-\cos x+C_1x+C_2.$$

В одержаний загальний розв'язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$1=-\cos 0+C_1\cdot 0+C_2;\ 2=\sin 0+C_1;\ \ C_1=2,\ C_2=2.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння (розв'язок задачі Коші):

$$y_K=-\cos x+2x+2.\ \ ■$$

Приклад 2. Розв'язати крайову задачу (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним граничним умовам):

$$y''=12x;\quad y(0)=3;\ \ y'(1)=-1.$$

□ Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y'=12\int x\,dx;\ \ y'=6x^2+C_1;\ \ y=\int(6x^2+C_1)\,dx;$$

$$y=2x^3+C_1x+C_2.$$

В отриманий загальний розв'язок та його першу похідну підставимо задані крайові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$3=0+C_1\cdot 0+C_2;\ -1=3\cdot 1+C_1;\ \ C_1=-4,\ C_2=3.$$

Звідси частинний розв’язок (розв'язок крайової задачі):

$$y_b = 2x^3 - 4x + 3 . \quad ■$$

Зауваження 1. У диференціального рівняння можуть існувати так звані ***особливі розв’язки***, які неможливо дістати із загального розв’язку ні при яких значеннях довільних сталих. Геометрично особлива інтегральна крива не входить у сім’ю, що відповідає загальному розв’язку, а тому не може лежати всередині області існування цієї сім’ї.

Наприклад, нехай маємо рівняння $y' = y^{2/3}$. При $y \neq 0$ отримаємо: $y^{-2/3}y' = 1$; $(3y^{1/3})' = 1$; $3y^{1/3} = x + C$. Звідси $y = (1/27)(x + C)^3$ − загальний розв’язок. Але розв’язок $y(x) \equiv 0$ до нього не входить і тому є особливим.

Зауваження 2. У деяких випадках виникає обернена задача знаходження ДР, що описує задану сім’ю інтегральних кривих.

Приклад 3. Знайти ДР першого порядку, загальний розв’язок якого $y = C\sin x - x^2$, де C − довільна стала.

□ Продиференціюємо загальний розв’язок. Вираз для похідної $y' = C\cos x - 2x$ не можна назвати диференціальним рівнянням, оскільки коефіцієнт C − невизначений. Вилучимо з нього C. Для цього з початкового рівняння $y = C\sin x - x^2$ виразимо C і підставимо знайдене значення у співвідношення для похідної:

$$C = (y + x^2)/\sin x; \quad y' = \cos x(y + x^2)/\sin x - 2x \text{ або}$$

$$y'\sin x = y\cos x + x^2\cos x - 2x\sin x$$

− шукане ДР першого порядку. ■

Зауваження 3. Теорія диференціальних рівнянь ще далека до завершення. Для ДР у канонічній формі доведено теореми, що виражають достатні умови існування та єдиності розв'язку відповідної задачі Коші. На жаль, аналогічні умови для крайових задач значно жорсткіші, менше просунені й досить віддалені від необхідних. У практичних застосуваннях задача Коші, при певних обмеженнях, має єдиний розв'язок, крайова задача може мати довільну кількість розв'язків.

1.5.4. Різниці. Оператор зсуву. Різницеві рівняння. Приклади застосування різницевих рівнянь в економічних задачах

Різниці. Оператор зсуву. Різницеві рівняння.

Комп'ютерний супровід неперервних за часом процесів будь-якої природи передбачає їх дискретизацію – перехід від неперервно змінюваного аргументу до дискретно змінюваного, оскільки цифрова ЕОМ може оперувати лише з числами. Крім того, економічна інформація звичайно фіксується дискретно, наприклад через рік, місяць, тиждень і т. д. Аналіз таких оцифрованих даних приводить до різницевих рівнянь. Різницеве рівняння в математичному відношенні часто розглядається як деяке наближення відповідного диференціального чи як деякий його дограничний варіант. Теорія різницевих рівнянь в багатьох аспектах схожа з теорією диференціальних рівнянь, проте в силу специфіки функцій з дискретним аргументом має і самостійне значення. Далі наводяться стислі відомості про різницеві рівняння.

Функція дискретного аргументу (***сіткова функція***) звичайно позначається так:

$$\boxed{y_n = f(x_n)} \text{ або } \boxed{y_n = y(x_n)},\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

де x_n – відповідне номеру n одне значення аргументу (n***-й вузол***) з деякої множини (***сітки*** або ***розбиття***) – послідовності точок $\{x_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, що накриває деякий проміжок (скінченній чи нескінченний), причому

$$\ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < \ldots .$$

Відстані $\boxed{h_n = x_{n+1} - x_n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ між сусідніми вузлами сітки можуть бути довільними додатними числами. Проте найчастіше розглядають випадок ***рівномірної сітки*** зі сталим ***кроком дискретизації*** $h_n = h > 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тоді $x_n = x_0 + nh$, а сіткова функція $y_n = f(x_n)$ стає ***функцією цілочисельного аргументу*** – номеру n вузла сітки: $y_n = y(n) = f(x_0 + nh)$. Її графіком на координатній площині Oxy є дискретний набір точок $(n; y_n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (див. рис. 19).

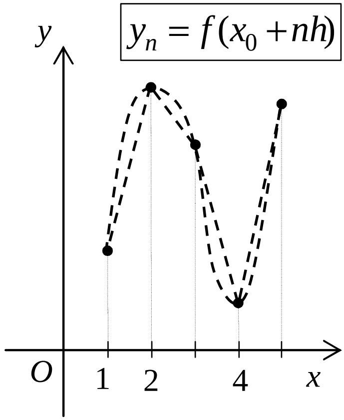

Рис. 19

Зауваження 1. Підкреслимо, що між цілочисельними значеннями аргументу n така функція невизначена. Тому зворотній перехід від сіткової функції до функції неперервного аргументу (її ***обвідній***) неоднозначний. На рис. 19 пунктирними лініями зображено дві обвідні. Однією з них є ламана, якій відповідає кусково-лінійна функція.

Приклад 1. Для заданої функції $y = f(x)$, що визначена на відрізку $[a;b]$, побудувати рівномірні сітку вузлами

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b$

і скласти відповідну сіткову функцію $y_n = y(n) = f(x_0 + nh)$, $n = 0,1,...,N$, якщо $y = 5x^2 - 4x$; $a = 1$, $b = 2$ і $N = 5$.

□ Крок дискретизації $h = \dfrac{b-a}{N} = \dfrac{2-1}{5} = \dfrac{1}{5}$, Одержуємо сітку $\{1;1{,}2;\, 1{,}4;\, 1{,}6;\, 1{,}8;\, 2\}$ Ординати сіткової функції $y_n = 5x_n^2 - 4x_n$, $n = \overline{0, N}$ утворюють множину $\{1;\, 2{,}4;\, 4{,}2;\, 6{,}4;\, 9;\, 12\}$ ■

Для характеристики швидкості змінювання сіткової функції $y_n = y(n)$ використовується ***перша спадна різниця*** (***спадна різниця першого порядку***) $\boxed{\Delta y_n = y_{n+1} - y_n}$, що є аналогом першої похідної функції неперервного аргументу.

Розглядаючи в свою чергу Δy_n як сіткову функцію, можна знайти її першу спадну різницю, тобто ***другу спадну різницю*** (***спадну різницю другого порядку***) початкової функції $y_n = y(n)$:

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) =$$

$$= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n .$$

Аналогічно визначається ***спадна різниця k-го порядку***:

$$\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n).$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти всі спадні різниці до k-го порядку: включно для функції $y_n = e^{an}$, де $a = const$.

□ $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = e^{a(n+1)} - e^{an} = (e^a - 1)e^{an} = (e^a - 1)y_n$.

Отже, перша різниця пропорційна самій функції. Тоді

$$\Delta^2 y_n = (e^a - 1)\left(e^a - 1)e^{an}\right) = (e^a - 1)^2 e^{an} = (e^a - 1)^2 y_n;\ \ldots;$$

$$\Delta^k y_n = (e^a - 1)\left(e^a - 1)^{k-1} e^{an}\right) = (e^a - 1)^k e^{an} = (e^a - 1)^k y_n. \quad ■$$

Введемо символічний ***оператор зсуву*** S, дія якого на функцію $y(x)$ полягає у зростанні аргументу на сталу величину $h > 0$ – крок дискретизації: $Sy(x) = y(x+h)$. При цьому як для додатних, так і від'ємних значень дійсної змінної t справедлива рівність $S^t y(x) = y(x + th)$.

Тоді ***оператор спадної різниці*** Δ можна виразити через оператор зсуву: $\Delta = S - 1$. Відповідно маємо $\Delta^k = (S-1)^k$. Звідси, застосовуючи формулу бінома Ньютона, дістаємо:

$$\Delta^k = (S-1)^k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m S^{k-m} \quad \text{або} \quad \Delta^k y_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m y_{n+k-m}.$$

Рівняння загального вигляду

$$\boxed{F(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

називається ***різницевим рівнянням*** (***рівнянням у скінченних різницях***) ***k-го порядку*** (РР) відносно шуканої функції $y_n = y(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

<u>Приклад 3</u>. Визначити порядок різницевих рівнянь:

а) $y_{n+3} = 3ny_n$; б) $y_{n+2} + 2n - 8y_{n+6} = y_n$; в) $y_{n+1}^2 + 8y_n^3 + y_n = 4$.

□ Рівняння а) 3 порядку, тому що зв'язує y_n з y_{n+3}. Рівняння б) має 6 порядок, оскільки зв'язує y_n і y_{n+6}. Рівняння в) першого порядку, тому що зв'язує y_{n+1} і y_n. ■

Зауваження 2. В означенні РР індекс n змінюється від 0 і далі приймає цілі додатні значення. Але n може починати змінюватись з іншого значення, наприклад, з –2 або 5. У таких випадках n буде приймати відповідні наступні значення.

Розв'язком різницевого рівняння називається будь-яка сіткова функція $y_n = y(n)$, $n = 0,1,2,...$, що в результаті підстановки в різницеве рівняння перетворює його на тотожність.

Приклад 4. Показати, що послідовність $y_n = n(n+1)/2$, $n = 1,2,3,...$ є розв'язком різницевого рівняння $y_n - y_{n-1} = n$.

□ Треба показати, що дана послідовність задовольняє рівняння для всіх можливих значень n. Для цього спочатку знайдемо y_{n-1}, підставивши замість n у формулу для $y_n = y(n)$ значення $n-1$: $y_{n-1} = (n-1)(n-1+1)/2 = (n-1)n/2$.

Тепер підставимо y_n та y_{n-1} у рівняння:

$$n(n+1)/2 - (n-1)n/2 = n; \quad n = n \text{ – вірно.}$$

Отже, задана послідовність $y_n = y(n)$, $n = 1,2,3,...$ задовольняє різницеве рівняння для всіх $n = 1,2,3,...$, тому ця сіткова функція є розв'язком рівняння. ■

Лінійне різницеве рівняння першого порядку зі сталим коефіцієнтом можна подати у вигляді

$$\boxed{y_{n+1} - a\,y_n = f_n}, \quad n = 0,1,2,...,$$

де a – сталий коефіцієнт, $a \neq 0$; f_n – права частина (відома сіткова функція).

У математиці фінансів особливе значення має лінійне рівняння вигляду $\boxed{y_{n+1} - a\,y_n = b}$, де $b = const$. Його ***загальний розв'язок*** задається співвідношенням:

$$y_n = \begin{cases} Ca^n - b/(a-1), \; a \neq 1; \\ C + nb, \; a = 1 \end{cases} \quad (n = 0,1,2,...),$$

де C – довільна стала. Значення C можна визначити, якщо задано хоча б один член послідовності y_n. Якщо відомий y_p, тобто задана ***початкова умова*** $y_p = y_{p0}$, тоді

$$C = \begin{cases} a^{-p}\left(y_{p0} + b/(a-1)\right), \ a \neq 1; \\ y_{p0} - pb, \ \ a = 1. \end{cases}.$$

Відповідно маємо ***частинний розв'язок***

$$\boxed{y_n = \begin{cases} Ca^{n-p}\left(y_{p0} + b/(a-1)\right) - b/(a-1), \ a \neq 1; \\ y_{p0} + (n-p)b, \ a = 1 \end{cases}} \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

<u>Приклад 5</u>. Знайти частинний розв'язок лінійного різницевого рівняння $y_{n+1} - 2y_n = 3$ при початковій умові $y_0 = 7$.

□ Загальним розв'язком є сіткова функція

$$y_n = Ca^n - b/(a-1) = C2^n - 3/(2-1) = C2^n - 3 \ \ (n = 0,1,2,\ldots).$$

Надавши у цій рівності аргументу n значення $n = 0$ і використовуючи значення y_0, одержимо: $y_0 = C2^0 - 3 = 7$; $C = 10$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд: $y_n = 10 \cdot 2^n - 3$. ■

<u>Приклади застосування різницевих рівнянь в економічних задачах</u>.

Різницеві рівняння досить широко використовуються для побудови моделей економічної динаміки з дискретним часом: складні відсотки, модель ділового циклу Самюельсона – Хікса, павутинні моделі ринку, динамічна модель Леонтьєва та ін. Докладно їх розглянемо далі. Поки що обмежимось однією конкретною задачею на складні відсотки.

<u>Приклад 5</u>. Робітник поклав на свій банківський рахунок накопичень 10300 гривень і щомісяця вносить ще по 150 гривень на цей рахунок з отриманням прибутку $1{,}5\%$ за кожен місяць. Знайти величину його накопичень одразу після здійснення n-го внеску; зокрема, при $n = 25$.

□ Нехай y_n – значення рахунку відразу після n-го внеску ($n = 1, 2, \ldots$). Тоді перше, початкове значення величини рахунку становить $y_1 = 10300$. Можна виразити y_{n+1} ($n = 1, 2, \ldots$) через y_n таким чином: значення рахунку після ($n+1$)-го внеску дорівнює його значенню після n-го внеску + відсоток прибутку + останній внесок. Тобто,

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}015 y_n + 150; \quad y_{n+1} = 1{,}015 y_n + 150.$$

Остання рівність є лінійним різницевим рівнянням першого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно сіткової функції y_n ($n = 1, 2, \ldots$). Його загальний розв'язок (отримайте його самостійно!) має вигляд: $y_n = C \cdot 1{,}015^n - 10000$.

Конкретне значення довільної сталої C знаходиться з початкової умови:

$$y_1 = 10300: \; C \cdot 1{,}015^1 - 10000 = 10300; \quad C = 20000.$$

Отже, частинним розв'язком поставленої різницевої задачі Коші є сіткова функція

$$y_n = 20000 \cdot 1{,}015^n - 10000, \; n = 1, 2, \ldots.$$

При $n = 25$ одержимо

$$y_{25} = 20000 \cdot 1{,}015^{25} - 10000 \approx 19019 \text{ (грн.).} \quad \blacksquare$$

Приклад 6. 2000 гривень зберігаються з простим 8% прибутком за кожен рік, y_n – величина накопичень після n років зберігання. Запишіть різницеве рівняння для y_n та знайдіть його розв'язок. Якою буде величина накопичень через 10 років?

(Розв'язати самостійно).

1.5.5 Метод Ейлера

Цей метод відноситься до ***чисельних методів*** розв'язання диференціальних рівнянь і служить прикладом застосування різницевих рівнянь у наближених обчисленнях.

На відрізку $[a;b]$ розглянемо диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, для якого задана початкова умова

$y(x_0)=y_0$, де $x_0=a$. Нехай відрізок $[a;b]$ розбитий на n рівних частин одновимірною ***сіткою***: $a=x_0<x_1<\ \ldots\ <x_{i-1}<x_i<\ldots$ $<x_n=b$, де $x_i=x_0+ih$ – i-й ***вузол*** ($i=0,1,\ldots,n$), $h=(b-a)/n$ – ***крок сітки***. Потрібно знайти розв'язок $y=y(x)$ поставленої задачі Коші на відрізку $[a;b]$ у вигляді наближених значень $\tilde{y}_i$, $i=\overline{0,n}$ ***сіткової функції*** $y_i=y(x_i)$, $i=\overline{0,n}$.

Згідно з методом Ейлера у кожному вузлі x_{i-1}, $i=1,\ldots,n$ замінимо похідну y' її ***скінченно різницевою апроксимацією вперед***:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}\ \Rightarrow\ y'_{i-1}\approx\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\approx\frac{\Delta\tilde{y}_i}{\Delta x_i}=\frac{\tilde{y}_i-\tilde{y}_{i-1}}{h},$$

а праву частину $f(x,y)$ обчислимо в точці $(x_{i-1};\tilde{y}_{i-1})$. У результаті отримаємо ***різницеве рівняння***

$$\boxed{\tilde{y}_i=\tilde{y}_{i-1}+h\,f(x_{i-1},\tilde{y}_{i-1})},\ i=1,2,\ldots,n\ ,$$

що є наближенням даного ДР з похибкою порядку h^2 на кожному кроці.

Додаючи початкову умову $\tilde{y}_0=y_0$, дістанемо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Якщо кожну пару сусідніх точок $M_{i-1}(x_{i-1};\tilde{y}_{i-1})$ і $M_i(x_i;\tilde{y}_i)$, $i=\overline{1,n}$ сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива $y=y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$, наближено замінюється ***ламаною Ейлера*** $M_0M_1M_2\ldots M_n$.

Приклад 1. Побудувати ламану Ейлера, що служить апроксимацією інтегральної кривої – розв'язку задачі Коші $y'=x^2+y$, $y(1)=-2$ на відрізку $[1;2]$. Крок дискретизації $h=0,2$. Обчислення проводити наближено до трьох десяткових знаків після коми.

□ За умовою $f(x,y)=x^2+y$; $h=0,2$; $x_0=1$; $y_0=-2$. Кількість кроків $n=(b-a)/h=(2-1)/0,2=5$. Тоді за формулою $\tilde{y}_i=\tilde{y}_{i-1}+h\,f(x_{i-1},\tilde{y}_{i-1})$ маємо:

$$i=1:\ \ x_0=1;\ \ \tilde{y}_0=y_0=-2;\ \ \ f(x_0,\tilde{y}_0)=1-2=-1;$$

$$\tilde{y}_1=\tilde{y}_0+h\,f(x_0,\tilde{y}_0)=-2+0{,}2\cdot(-1)=-2{,}2;$$

$$i=2:\ \ x_1=x_0+h=1+0{,}2=1{,}2;\ \ \ f(x_1,\tilde{y}_1)=(1{,}2)^2-2{,}2=$$

$$=-0{,}76;\ \ \tilde{y}_2=\tilde{y}_1+h\,f(x_1,\tilde{y}_1)=-2{,}2+0{,}2\cdot(-0{,}76)=-2{,}352.$$

Продовжуючи обчислення до кроку $i=n=5$, запишемо отримані результати у вигляді таблиці:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\tilde{y}_i$	-2	$-2{,}2$	$-2{,}352$	$-2{,}43$	$-2{,}4$	$-2{,}24$
$f(x_i,\tilde{y}_i)$	-1	$-0{,}76$	$-0{,}392$	0,13	0,836	1,763

Ламана Ейлера $M_0M_1M_2...M_5$ показана на рис. 20. ■

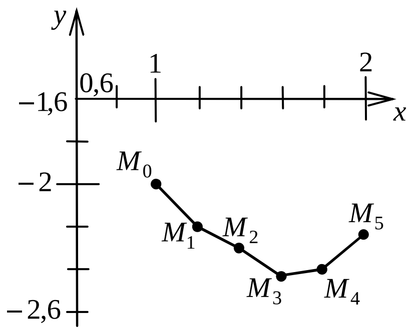

Рис. 20

Зауваження 1. Описаний метод Ейлера – ***явний*** (нове значення $\tilde{y}_i$ обчислюється безпосередньо) і ***однокроковий*** (на кожному кроці використовується значення розв'язку тільки в одній попередній точці x_{i-1}) зі сталою довжиною кроку h. Метод Ейлера є досить грубим і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень.

1.5.6. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням n***-го порядку*** $(n\ge 1)$ називається рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x)},$$

де $y = y(x)$ − шукана функція аргументу x; $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ та $f(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), причому $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ − ***коефіцієнти***, $f(x)$ − ***права частина***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та всіх її похідних.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** ДР (ЛОДР) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку, коли $f(x) \neq 0$, − ***лінійним неоднорідним*** (ЛНДР) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Загальні властивості лінійних ДР вищих порядків розглянемо на прикладі ***лінійного ДР другого порядку***

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина.

Система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ $(n \geq 2)$ називається ***лінійно залежною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо існують сталі числа $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, не всі рівні нулю, такі, що для відповідної лінійної комбінації у кожній точці $x \in (a;b)$ виконується рівність

$$\boxed{\mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x) + ... + \mu_n y_n(x) \equiv 0}.$$

Якщо ця тотожність виконується лише за умови, коли всі $\mu_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то система функцій $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ називається ***лінійно незалежною*** в інтервалі $(a;b)$.

У випадку двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ умову лінійної залежності можна подати у вигляді

$$y_1(x)/y_2(x) = C = const, \ \forall x \in (a;b).$$

<u>Наприклад</u>, а) функції $y_1(x) = \ln x$ і $y_2(x) = \lg x$ лінійно залежні на півпрямій $(0;+\infty)$, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x) = \ln x/\lg x = \ln 10 = const;$$

б) функції $y_1(x) = \sin x$ і $y_2(x) = \sin 2x$ лінійно незалежні на множині дійсних чисел R, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x) = \sin x/\sin 2x = 1/(2\cos x) \neq const\,.$$

1.5.7. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння

На деякому проміжку $(a;b)$ розглянемо систему n функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$, що є частинними розв'язками деякого одного ЛОДР n-го порядку $(n \geq 2)$ і тому n разів диференційовані. Сформуємо функціональний визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

що називається ***визначником Вронського*** (***вронськіаном***) даної системи.

Ознаку лінійної залежності чи незалежності такої системи виражає наступна

теорема 1. *Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи* n *частинних розв'язків* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *якого-небудь одного ЛОДР* n*-го порядку дорівнює нулю в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$, *то ця система розв'язків – лінійно залежна, причому вронськіан* $W(x)$ *тотожно рівний нулю на всьому проміжку* $(a;b)$. *Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *відмінний від нуля в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$, *то ця система розв'язків – лінійно незалежна, причому вронськіан* $W(x)$ *не перетворюється в нуль у жодній точці проміжку* $(a;b)$.   (Без доведення).

Для даного ЛОДР n-го порядку будь-яка лінійно незалежна система n його частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називається ***фундаментальною***.

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає така

<u>теорема 2</u>. *Якщо функції* $y_1(x), y_2(x)$ *утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація*

$$\boxed{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2},$$

де C_1 *і* C_2 *− довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння*.

□ Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Перевіримо, чи їх лінійна комбінація $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію $\bar{y}$ та її похідні у рівняння:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad \bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' +$$
$$+ py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2.

Справді, для визначення C_1 і C_2 дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

визначником якої служить вронськіан

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ вронськіан відмінний від нуля $W(x_0) \neq 0$. Тому система лінійних рівнянь відносно C_1 і C_2 завжди має і причому єдиний розв'язок.

Отже, $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ − загальний розв'язок ЛОДР. ■

Наприклад, частинними розв'язками ЛОДР другого порядку $y'' + y = 0$ є функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$. (Перевірте це самостійно). Їх вронськіан відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Тому ці розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ − лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Зауваження 1. Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР $y = 0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому вронськіан тотожно рівний нулю. (Перевірте це самостійно).

Для ***ЛОДР*** n***-го порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 , \quad a_i = const \in R , \ i = \overline{1,n}}$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи та на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі ***ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0 , \quad p = const \in R ; \ q = const \in R} .$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y = e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення $\boxed{k^2 + pk + q = 0}$, яке називають ***харак-***

теристичним рівнянням даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта $\boxed{D = p^2 - 4q}$.

<u>Випадок 1</u>. $D > 0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$: $k_{1,2} = \left(-p \pm \sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ − лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд $\boxed{\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$\square \; k^2 - 5k + 6 = 0; \; D = 25 - 24 = 1 > 0;$$

$$k_1 = 3, \; k_2 = 2; \; \bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}. \quad \blacksquare$$

<u>Випадок 2</u>. $D = 0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Тобто, $k = -p/2$ − один корінь кратності $r = 2$. Тоді $y_1 = e^{kx}$ − частинний розв'язок. Знайдемо другий лінійно незалежний з ним розв'язок y_2. Скористаємося методом збурень.

Вважатимемо, що k_1 і k_2 відрізняються на нескінченно малу величину Δk: $k_1 = k$; $k_2 = k + \Delta k$; $\Delta k \to 0$. Таким чином, повертаємося до випадку 1. Тоді лінійна комбінація $y_{2*} = \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right)/\Delta k$ − теж частинний розв'язок. Переходячи у y_{2*} до границі при $\Delta k \to 0$, дістаємо невизначеність типу $0/0$, що розкривається за правилом Лопіталя:

$$y_2 = \lim_{\Delta k \to 0} y_{2*} = \lim_{\Delta k \to 0} \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right)/\Delta k = \left|0/0\right| =$$

$$= \lim_{\Delta k \to 0} (e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx})'/(\Delta k)' = \lim_{\Delta k \to 0} e^{(k+\Delta k)x} x = x e^{kx}.$$

Перевіримо, що одержана функція $y_2 = x\, e^{kx}$ є розв'язком ЛОДР:

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}; \quad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx};$$

$$2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = e^{kx}(k^2x + 2k +$$

$$+ p + pkx + qx) = \left|k = -p/2\right| = e^{kx}((-p/2)^2x + 2(-p/2) +$$

$$+ p + p(-p/2)x + qx) = -(1/4)e^{kx}(p^2 - 4q)x =$$

$$= \left|p^2 - 4q = D = 0\right| = -xe^{kx} \cdot 0 = 0.$$

До того ж, вронськіан системи $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x\,e^{kx}$ відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & x\,e^{kx} \\ k\,e^{kx} & e^{kx} + kx\,e^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0.$$

Тому ці розв’язки $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = x\,e^{kx}$ – лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему.

Отже, загальний розв’язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\boxed{\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\,e^{kx} + C_2x\,e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x)}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти загальний розв’язок $y'' - 2y' + y = 0$.

□ $D = 4 - 4 = 0$, $k_1 = k_2 = \mathrm{k} = 1$; $\bar{y} = e^x(C_1 + C_2x)$. ■

<u>Випадок 3</u>. $D < 0$. Характеристичне рівняння має два комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{-D}/2$, $D = p^2 - 4q < 0$, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді $y_{1к} = e^{k_1x} = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_{2к} = e^{k_2x} = e^{(\alpha-\beta i)x}$ – комплексні лінійно незалежні розв’язки. Їх лінійна комбінація

$$\boxed{\bar{y}_к = C_1e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta i)x}}$$

є комплексним загальним розв’язком.

Але ДР має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв’язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x); \quad y_{2к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Можна показати, що *для комплекснозначної функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками*. (Зробіть це самостійно).

Таким чином, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним розв'язком є їх лінійна комбінація

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок $y'' + 8y' + 25y = 0$.

$$\square\ k^2 + 8k + 25 = 0;\ D = 64 - 100 = -36 < 0;$$

$$k_{1,2} = (-8 \pm \sqrt{-36})/2 = (-8 \pm 6\sqrt{-1})/2 = (-8 \pm 6i)/2 = -4 \pm 3i;$$

$$\alpha = -4;\ \beta = 3;\quad \bar{y} = e^{-4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).\quad \blacksquare$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' + 25y' = 0;\quad y(1) = -2;\ y'(1) = 0;$

б) $y'' - 9y = 0;\quad y(0) = 3;\ y'(0) = -3;$

в) $y'' + 4y' + 4y = 0;\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 3;$

г) $y'' + 16y = 0;\quad y(\pi/2) = 6;\ y'(\pi/2) = 2;$

д) $y'' + 8y' + 20y = 0;\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 12.$

□ а) Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 25k = 0;\ k(k + 25) = 0;\ k_1 = 0;\ k_2 = -25.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$, то маємо випадок 1. У відповідній формі записуємо загальний розв'язок: $\bar{y} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-25x} = C_1 + C_2 e^{-25x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$\bar{y}' = -25C_2e^{-25x};$$

$$\begin{matrix} y(1) = -2: \\ y'(1) = 0: \end{matrix} \quad \begin{cases} -2 = C_1 + C_2e^{-25\cdot 1}; \\ \quad 0 = -16C_2e^{-25\cdot 1}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 = -2 - 0 = -2. \end{cases}$$

Тоді $y_K = -2$ – розв'язок задачі Коші.

б) $k^2 - 9 = 0$; $k^2 = 9$; $k_{1,2} = \pm 3$; $\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$;

$$\bar{y}' = 3C_1e^{3x} - 3C_2e^{-3x}; \quad \begin{cases} 3 = C_1e^{3\cdot 0} + C_2e^{-3\cdot 0}; \\ -3 = 3C_1e^{3\cdot 0} - 3C_2e^{-3\cdot 0}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1 - C_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 2; \end{cases} \quad y_K = e^{4x} + 2e^{-4x}.$$

в) $k^2 + 4k + 4 = 0$; $D = 16 - 16 = 0$; $k_1 = k_2 = k = -2$;

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 + C_2x); \ \bar{y}' = C_2e^{-2x} - 2(C_1 + C_2x)e^{-2x};$$

$$\begin{cases} 1 = e^{-2\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0); \\ 3 = C_2e^{-2\cdot 0} - 2(C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-2\cdot 0}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 - 2C_1 = 3; \ C_2 = 5; \end{cases}$$

$$y_К = e^{-2x}(1 + 5x).$$

г) $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$; $\alpha = 0$; $\beta = 4$;

$$\bar{y} = e^{0x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x;$$

$$\bar{y}' = -4C_1\sin 4x + 4C_2\cos 4x;$$

$$\begin{matrix} y(\pi/2) = 6: \\ y'(\pi/2) = 2: \end{matrix} \quad \begin{cases} 6 = C_1\cos(4\cdot\pi/2) + C_2\sin(4\cdot\pi/2); \\ 2 = -4C_1\sin(4\cdot\pi/2) + 4C_2\cos(4\cdot\pi/2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = C_1; \\ 2 = 4C_2; \ C_2 = 1/2; \end{cases} \quad y_K = 6\cos x + (1/2)\sin 4x.$$

д) $k^2 + 8k + 20 = 0$; $D = 64 - 80 = -16 < 0$;

$$k_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{-16})/2 = (-4 \pm 4i)/2 = -2 \pm 2i; \quad \alpha = -2; \ \beta = 2;$$

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\,; \quad \bar{y}' = -2e^{-2x}(C_1 \cos 2x +$$

$$+ C_2 \sin 2x) + e^{-2x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)\,;$$

$$\begin{cases} 0 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0); \\ 12 = -2e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1; \\ 12 = -2C_1 + 2C_2;\ C_2 = 6; \end{cases} \quad y_K = 6e^{-2x} \sin 2x\,. \ \blacksquare$$

1.5.8. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

Структуру загального розв'язку ЛНДР другого порядку визначає така

<u>теорема 1</u>. *Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)}\,,$$

можна подати у вигляді суми загального розв'язку $\bar{y}$ *відповідного ЛОДР*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$$

і якого-небудь частинного розв'язку y_* *ЛНДР*: $\boxed{y = \bar{y} + y_*}$.

□ Перевіримо, що функція $y = \bar{y} + y_*$ є розв'язком ЛНДР:

$$y' = \bar{y}' + y_*'\,;\ y'' = \bar{y}'' + y_*'';\ \ \bar{y}'' + y_*'' + p(\bar{y}' + y_*') + q(\bar{y} + y_*) =$$

$$= (\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y}) + (y_*'' + py_*' + qy_*) = 0 + f(x) = f(x)\,.$$

Оскільки $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$, де $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР, то розв'язок $y = \bar{y} + y_* = C_1y_1 + C_2y_2 + y_*$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2. Можна показати (зробіть це самостійно, аналогічно доведенню теореми про структуру загального розв'язку ЛОДР), що для довільних початкових умов $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0'$ знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2. Тобто розв'язок $y = \bar{y} + y_*$ є загальним. ■

Принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна

теорема 2. *Якщо у ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)}$$

права частина є сумою двох функцій $\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x)}$, *то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми* $\boxed{y_* = y_{*1} + y_{*2}}$, *де* y_{*1} *і* y_{*2} *– частинні розв'язки рівнянь*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)} \text{ і } \boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)}$$

з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями $f_1(x)$, $f_2(x)$ *праворуч.*

(Доведіть самостійно безпосередньою підстановкою).

1.5.9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо ***ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x), \quad p = const \in R;\ q = const \in R},$$

де права частина має ***спеціальний вигляд***

$$\boxed{f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)}.$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − многочлени відповідно степеня n і m; a і b − дійсні сталі, з яких формується ***характерне комплексне число*** $z = a + bi$.

Зауваження 1. m і n − довільні невід'ємні цілі числа, $m \geq 0$, $n \geq 0$; a і b − довільні дійсні числа, в тому числі $a = 0$, $b = 0$.

Згідно з ***методом невизначених коефіцієнтів*** *структура ча-*

стинного розв'язку y_* ЛНДР формується за виглядом правої частини $f(x)$ з урахуванням того, коренем якої кратності r $(r \ge 0)$ є характерне число $z = a + bi$ для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно x членах.

Частинний розв’язок має вигляд

$$\boxed{y_* = x^r e^{ax}(\overline{P_s}(x)\cos bx + \overline{Q}_s(x)\sin bx)},$$

де $\overline{P_s}(x)$ і $\overline{Q}_s(x)$ − многочлени степеня $s = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Приклад 1. Записати структуру частинного розв’язку y_*:

$y''+4y'+20y = e^{-2x}(x^2\cos 4x - \sin 4x)$.

□ $y''+4y'+13y = 0$; $k^2 + 4k + 13 = 0$; $D = -36$;

$k_{1,2} = -2 \pm 3i$; $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi} = -2 + 3i$ − корінь

кратності $r = 1$; $s = \max\{2; 0\} = 2$;

$y_* = x^1 e^{-2x}((Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 4x)$,

де A, B, C, D, E, F – невідомі коефіцієнти. ■

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y''-2y'-3y = e^x(10\cos x - 25\sin x)$.

□ $y''-2y'-3y = 0$; $k^2 - 2k - 3 = 0$; $D = 16$; $k_1 = 3$;

$k_2 = -1$; $\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$; $z = a + bi = 1 + i$ − не є коренем

$(r = 0)$; $s = \max\{0; 0\} = 0$; $y_* = e^x(A\cos x + B\sin x)$;

$y_*' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = e^x(A\cos x +$

$+ B\sin x - A\sin x + B\cos x)$; $y_*'' = e^x(A\cos x + B\sin x -$

$- A\sin x + B\cos x) + e^x(-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x) =$

$= e^x(-2A\sin x + 2B\cos x)$;

$e^x(-2A\sin x+2B\cos x)-2e^x(A\cos x+B\sin x-A\sin x+$

$+B\cos x)-3e^x(A\cos x+B\sin x)=e^x(10\cos x-25\sin x)\,|:e^x\neq 0;$

$-5A\cos x-5B\sin x=10\cos x-25\sin x;$

$$\begin{array}{l} \cos x: \\ \sin x: \end{array} \begin{cases} -5A=10; & A=-2; \\ -5B=-25; & B=5; \end{cases}$$

Отже, маємо загальний розв’язок

$y=\bar{y}+y_*=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+e^x(-2\cos x+5\sin x)$. ■

<u>Приклад 3.</u> Розв’язати задачу Коші:

$y''+2y'+5y=12e^{-x}\sin 2x;\quad y(0)=0;\ y'(0)=5.$

□ $y''+2y'+5y=0$; $k^2+2k+5=0$; $D=4-20=-16$;

$k_{1,2}=-1\pm 2i$; $\bar{y}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

$z=a+bi=-1+2i$ − корінь кратності $r=1$; $s=\max\{0;0\}=0$;

$$y_*=x^1e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x);\quad y_*'=e^{-x}(A\cos 2x+$$

$$+B\sin 2x)-xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+2xe^{-x}(-A\sin 2x+$$

$$+B\cos 2x);\quad y_*''=-2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+4e^{-x}\times$$

$$\times(-A\sin 2x+B\cos 2x)-3xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-$$

$$-4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x);$$

$$-2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+4e^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)-$$

$$-3xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)+$$

$$+2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-2xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+$$

$$+4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)+5xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)=$$

$$=12e^{-x}\sin 2x\ \ |\div e^{-x}\neq 0;$$

$$-2A\cos 2x-2B\sin 2x-4A\sin 2x+4B\cos 2x-3Ax\cos 2x-$$

$$-3Bx\sin 2x+4Ax\sin 2x-4Bx\cos 2x+2A\cos 2x+$$

$$+2B\sin 2x - 2Ax\cos 2x - 2Bx\sin 2x - 4Ax\sin 2x +$$
$$+4Bx\cos 2x + 5Ax\cos 2x + 5Bx\sin 2x = 12\sin 2x;$$
$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 12\sin 2x;$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos 2x\\ \sin 2x\end{array}\right|\ \begin{cases}4B=0; & B=0;\\ -4A=12; & A=-3;\end{cases}\quad y_* = -3xe^{-x}\cos 2x;$$
$$y = \bar{y} + y_* = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - 3xe^{-x}\cos 2x;$$
$$y' = -e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 2e^{-x}(-C_1\sin 2x + C_2\cos 2x) -$$
$$-3e^{-x}\cos 2x + 3xe^{-x}\cos 2x + 6xe^{-x}\sin 2x;$$
$$\begin{array}{l}y(0)=0:\\ y'(0)=5:\end{array}\begin{cases}C_1=0; & C_1=0;\\ -C_1+2C_2-3=5; & C_2=4;\end{cases}$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$y_K = 4e^{-x}\sin 2x - 3xe^{-x}\cos 2x. \quad \blacksquare$$

Розглянемо більш детально окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв’язку y_* ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

1. Права частина – многочлен степеня n:

$$\boxed{f(x) = P_n(x),\ \ P_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n}.$$

Можливі наступні випадки структури y_* в залежності від того, чи є характерне число $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ коренем характеристичного многочлена:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює характерному числу $z = 0$, тобто $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$, то y_* шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня n з невизначеними коефіцієнтами: $\boxed{y_* = \overline{P_n}(x) = \overline{A}_0x^n + \overline{A}_1x^{n-1} + ... + \overline{A}_n}$.

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z = 0$, наприклад, $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$, то:

$$\boxed{y_* = x\overline{P_n}(x) = \overline{A}_0 x^{n+1} + \overline{A}_1 x^n + ... + \overline{A}_n x}\,.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок:

а) $y''+3y'+2y = 1 - x^2$; б) $7y''-y' = 12x$.

□ а) $y''+3y'+2y = 0$; $k^2 + 3k + 2 = 0$; $D = 9 - 8 = 1$;

$$k_1 = -1;\ k_2 = -2;\ \overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x};$$

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ – не є коренем; $n = 2$;

$$y_* = Ax^2 + Bx + C;\ y_*' = 2Ax + B;\ y_*'' = 2A;$$

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 1 - x^2;$$

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = 1 - x^2;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 2A = -1; & A = -1/2; \\ 6A + 2B = 0; & B = -3A = 3/2; \\ 2A + 3B + 2C = 1; & C = 1/2 - A - (3/2)B = -5/4; \end{array}\right.$$

$$y_* = -x^2/2 + (3/2)x - 5/4;\ y = \overline{y} + y_*;$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - x^2/2 + (3/2)x - 5/4.$$

б) $7y''-y' = 0$; $7k^2 - k = 0$; $k(7k - 1) = 0$;

$$k_1 = 0;\ k_2 = 1/7;\ \overline{y} = C_1 + C_2 e^{x/7};$$

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ – корінь кратності $r = 1$; $n = 1$;

$$y_* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx;\ y_*' = 2Ax + B;\ y_*'' = 2A;$$

$$7 \cdot 2A - (2Ax + B) = 12x;\ 14A - 2Ax - B = 12x;$$

$$-2Ax + (14A - B) = 12x;\ \begin{array}{c|l} x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} -2A = 12; \\ 14A - B = 0; \end{array}\right.\ A = -6;$$

$$B = 14A;\ B = -84;\ y_* = -6x^2 - 84x;$$

$$y = \overline{y} + y_*;\ y = C_1 + C_2 e^{x/7} - 6x^2 - 84x.\ \blacksquare$$

Зауваження 2. Підкреслимо, що у многочлені $P_n(x)$ коефіцієнти A_i, $i=\overline{1,n}$ можуть дорівнювати нулю. Але в будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо з повним многочленом $\overline{P_n}(x)$.

2. Права частина – добуток сталого множника на експоненту:

$$\boxed{f(x)=Ae^{ax}}.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z=a+0i=a$ коренем характеристичного многочлена та якої кратності r, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює числу $z=a$, тобто $k_1\neq a, k_2\neq a$, то $\boxed{y_*=\overline{A}e^{ax}}$.

б) Якщо тільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює $z=a$, наприклад, $k_1=a,\ k_2\neq a$, то $\boxed{y_*=\overline{A}xe^{ax}}$.

в) Якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють числу $z=a$, тобто $k_1=k_2=a$, то $\boxed{y_*=\overline{A}x^2e^{ax}}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок:

а) $y''+4y'+3y=8e^{3x}$; б) $y''-5y'-6y=2e^{-x}$;

в) $3y''-6y'+3y=e^{x}$; г) $y''-4y=e^{-2x}$.

□ а) $y''+4y'+3y=0$; $k^2+4k+3=0$; $D=4$; $k_1=-1$;

$$k_2=-3;\ \ \overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x};\ \ z=a+bi=3+0i=3$$

– не є коренем; $y_*=\overline{A}e^{3x}$; $y_*'=3\overline{A}e^{3x}$; $y_*''=9\overline{A}e^{3x}$;

$$9\overline{A}e^{3x}+4\cdot 3\overline{A}e^{3x}+3\overline{A}e^{3x}=8e^{3x};\ \ 24\overline{A}e^{3x}=8e^{3x};\ \ \overline{A}=1/3;$$

$$y_*=e^{3x}/3;\ \ y=\overline{y}+y_*;\ \ y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}/3.$$

б) $y''-5y'-6y=0$; $k^2-5k-6=0$; $D=49$; $k_1=-1$;

$k_2=6$; $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; $z=a+bi=-1+0i=-1$

– корінь кратності $r=1$; $y_*=\overline{A}xe^{-x}$; $y_*'=\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x}$;

$$y_*'' = -\overline{A}e^{-x} - \overline{A}e^{-x} + \overline{A}xe^{-x} = -2\overline{A}e^{-x} + \overline{A}xe^{-x};$$

$$-2\overline{A}e^{-x} + \overline{A}xe^{-x} - 5(\overline{A}e^{-x} - \overline{A}xe^{-x}) - 6\overline{A}xe^{-x} = 2e^{-x};$$

$$-2\overline{A}e^{-x} + \overline{A}xe^{-x} - 5\overline{A}e^{-x} + 5\overline{A}xe^{-x} - 6\overline{A}xe^{-x} = 2e^{-x};$$

$$-7\overline{A}e^{-x} = 2e^{-x}; \quad \overline{A} = -2/7; \quad y_* = (-2/7)xe^{-x};$$

$$y = \overline{y} + y_*; \quad y = C_1e^{-x} + C_2e^{6x} - (2/7)xe^{-x}.$$

в) $3y'' - 6y' + 3y = 0$; $y'' - 2y' + y = 0$; $D = 0$;

$k_1 = k_2 = k = 1$; $\overline{y} = e^x(C_1 + C_2x)$; $z = a + bi = 1 + 0i = 1$

− корінь кратності $r = 2$; $y_* = \overline{A}x^2e^x$; $y_*' = 2\overline{A}xe^x + \overline{A}x^2e^x$;

$$y_*'' = 2\overline{A}e^x + 2\overline{A}xe^x + 2\overline{A}xe^x + \overline{A}x^2e^x = 2\overline{A}e^x + 4\overline{A}xe^x +$$

$$+ \overline{A}x^2e^x; \quad 3(2\overline{A}e^x + 4\overline{A}xe^x + \overline{A}x^2e^x) - 6(2\overline{A}xe^x + \overline{A}x^2e^x) +$$

$$+ 3\overline{A}x^2e^x = e^x; \quad 6\overline{A}e^x + 12\overline{A}xe^x + 3\overline{A}x^2e^x - 12\overline{A}xe^x -$$

$$-6\overline{A}x^2e^x + 3\overline{A}x^2e^x = e^x; \quad 6\overline{A}e^x = e^x; \quad \overline{A} = 1/6;$$

$$y_* = x^2e^x/6; \quad y = \overline{y} + y_*; \quad y = e^x(C_1 + C_2x) + x^2e^x/6.$$

(Рівняння г) розв'язати самостійно). ■

3. Права частина – лінійна комбінація косинуса і синуса одного і того ж аргументу:

$$\boxed{f(x) = A\cos bx + B\sin bx}\,.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z = 0 + bi = bi$ коренем характеристичного многочлена, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює $z = bi$, тобто $k_{1,2} \neq \pm bi$, то $y_* = \overline{A}\cos bx + \overline{B}\sin bx$.

$$\boxed{y_* = \overline{A}\cos bx + \overline{B}\sin bx}\,.$$

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z = bi$, тобто $k_{1,2} = \pm\beta i$ і $\beta = b$, то

$$\boxed{y_* = x(\overline{A}\cos bx + \overline{B}\sin bx)}\ .$$

Зауваження 3. A і B − довільні задані числа, одне з яких може дорівнювати нулю. У будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо у відповідному повному вигляді з $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок:

а) $y''-6y'+5y = 2\cos x$; б) $y''+16y = 4\cos 4x - 24\sin 4x$.

□ а) $y''-6y'+5y = 0$; $k^2 - 6k + 5 = 0$; $D = 16$; $k_1 = 1$;

$$k_2 = 5;\ \ \overline{y} = C_1 e^{5x} + C_2 e^x;\ \ z = a + bi = 0 + 1i = i$$

− не є коренем; $y_* = \overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x$; $y_*' = -\overline{A}\sin x +$

$+\overline{B}\cos x$; $y_*'' = -A\cos x - B\sin x$; $-\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x -$

$$-6(-\overline{A}\sin x + \overline{B}\cos x) + 5(\overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x) = 2\cos x;$$

$$-\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x + 6\overline{A}\sin x - 6\overline{B}\cos x + 5\overline{A}\cos x + 5\overline{B}\sin x =$$

$$= 26\cos x;\ \ (-\overline{A} - 6\overline{B} + 5\overline{A})\cos x + (-\overline{B} + 6\overline{A} + 5\overline{B})\sin x =$$

$$= 26\cos x;\ \ (4\overline{A} - 6\overline{B})\cos x + (6\overline{A} + 4\overline{B})\sin x = 2\cos x;$$

$$\begin{array}{c|} \cos x \\ \sin x \end{array}\ \begin{cases} 4\overline{A} - 6\overline{B} = 2; \\ 6\overline{A} + 4\overline{B} = 0; \end{cases} \begin{cases} \overline{B} = (-3/2)\overline{A}; \\ 4\overline{A} + 9\overline{A} = 2;\ \overline{A} = 2/13;\ \overline{B} = -3/13; \end{cases}$$

$$y_* = 2/13\cos x - 3/13\sin x;$$

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 2/13\cos x - 3/13\sin x.$$

б) $y''+16y = 0$; $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$;

$$\overline{y} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x;\ \ z = a + bi = 0 + 4i = 4i$$

− корінь кратності $r = 1$; $y_* = x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)$;

$$y_*' = \overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x + x(-4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x);$$

$$y_*'' = -4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x - 4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x +$$

$$+ x(-16\overline{A}\cos 4x - 16\overline{B}\sin 4x) = -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) -$$

$$-8A\sin 4x + 8B\cos 4x;\ \ -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)x -$$

$$-8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x + 16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) = 4\cos 4x -$$

$$-24\sin 4x;\ \ -8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x = 4\cos 4x - 24\sin 4x;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 4x & \left\{ \begin{array}{ll} 8\overline{B} = 4; & \overline{B} = 1/2; \\ -8\overline{A} = -24; & \overline{A} = 3; \end{array} \right. \\ \sin 4x & \end{array}$$

$$y_* = x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x);\ \ \ y = \overline{y} + y_*;$$

$$y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x). \ \blacksquare$$

Зауваження 4. Якщо права частина $f(x)$ не має спеціального вигляду, то часто її можна подати як скінченну суму

$$\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)},$$

де кожний доданок $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ уже має спеціальний вигляд. Тоді за принципом суперпозиції $\boxed{y_* = y_{*1} + y_{*2} + \ldots + y_{*n}}$, де y_{*i} – частинний розв'язок рівняння $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)}$ з тією ж самою лівою і відповідною правою частиною, $i = \overline{1, n}$.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок

$$\text{а) } y'' - 2y' + 6y = 18e^{2x} - 29\sin x;$$

$$\text{б) } y'' + 4y = 12e^{-2x} + 8x.$$

□ а) Для відповідного ЛОДР $y'' - 2y' + 6y = 0$ розв'язуємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 6 = 0;\ \ D = -20;\ k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}i$$

і записуємо його загальний розв'язок

$$\overline{y} = e^x(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x).$$

Права частина $f(x) = 18e^{2x} - 29\sin x$ не має спеціального вигляду, але її можна подати як суму двох доданків спеціального вигляду

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ де } f_1(x) = 18e^{2x},\ f_2(x) = -29\sin x.$$

Тоді $y_* = y_{*1} + y_{*2}$. Знайдемо окремо y_{*1} і y_{*2}:

$$z_1 = a_1 + b_1 i = 2 + 0i = 2 \text{ – не є коренем; } \ y_{*1} = \overline{A}e^{2x};$$

$$y'_{*1} = 2\overline{A}e^{2x}; \ \ y''_{*1} = 4\overline{A}e^{2x}; \ \ 4\overline{A}e^{2x} - 2\cdot 2\overline{A}e^{2x} + 6\overline{A}e^{2x} =$$

$$= 18e^{2x}; \ \ 6\overline{A}e^{2x} = 18e^{2x}; \ \ \overline{A} = 3; \ \ \ y_{*1} = 3e^{2x};$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = 0 + 1i = i \text{ – не є коренем; } \ y_{*2} = \overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x;$$

$$y'_{*2} = -\overline{A}\sin x + \overline{B}\cos x; \ \ y''_{*2} = -\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x;$$

$$-\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x - 2(-\overline{A}\sin x + \overline{B}\cos x) + 6(\overline{A}\cos x +$$

$$+ \overline{B}\sin x) = -29\sin x;$$

$$-(5\overline{A} - 2\overline{B})\cos x + (2\overline{A} + 5\overline{B})\sin x = -29\sin x;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos x & \\ \sin x & \end{array}\left\{\begin{array}{l} 5\overline{A} - 2\overline{B} = 0; \\ 2\overline{A} + 5\overline{B} = -29; \end{array}\right. \ \ \left\{\begin{array}{l} \overline{B} = (5/2)\overline{A}; \\ 2\overline{A} + 5\cdot(5/2)\overline{A} = -29; \end{array}\right.$$

$$\overline{A} = -2; \ \ \overline{B} = -5; \ \ y_{*2} = -2\cos x - 5\sin x;$$

$$y_* = y_{*1} + y_{*2} = 3e^{2x} - 2\cos x - 5\sin x.$$

Отже, загальний розв'язок ЛНДР

$$y = \overline{y} + y_* = e^x(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x) +$$

$$+ 3e^{2x} - 2\cos x - 5\sin x.$$

(Рівняння б) розв'язати самостійно). ■

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' + 4y' = -16x + 8 + 40\sin 2x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 7$;

б) $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-x} + 6\cos x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$.

□ а) $y'' + 4y' = 0$; $k^2 + 4k = 0$; $k(k+4) = 0$; $k_1 = 0$;

$$k_2 = -4; \ \ \overline{y} = C_1 + C_2 e^{-4x}; \ \ f(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

$$f_1(x) = -16x + 5; \ \ f_2(x) = 40\sin 2x; \ \ y_* = y_{*1} + y_{*2};$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i = 0 + 0i = 0 \text{ – корінь кратності } r = 1; \ \ n = 1;$$

$$y_{*1} = (\overline{A}x + \overline{B})x = \overline{A}x^2 + \overline{B}x\,;\quad y'_{*1} = 2\overline{A}x + \overline{B}\,;\quad y''_{*1} = 2\overline{A}\,;$$

$$2\overline{A} + 4(2\overline{A}x + \overline{B}) = -16x + 8;\;\; 8\overline{A}x + 2\overline{A} + 4\overline{B} = -16x + 8\,;$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \left\{\begin{array}{ll} 8\overline{A} = -16; & \overline{A} = -2; \\ 2\overline{A} + 4\overline{B} = 8; & 2\cdot(-2) + 4\overline{B} = 8;\ \overline{B} = 3; \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array} \quad y_{*1} = -2x^2 + 3x\,;$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = 0 + 2i = 2i \text{ − не є коренем;}$$

$$y_{*2} = \overline{A}\cos 2x + \overline{B}\sin 2x\,;\quad y'_{*2} = -2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x\,;$$

$$y''_{*2} = -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x\,;\quad -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x +$$

$$+ 4(-2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x) = 40\sin 2x\,;$$

$$(-4\overline{A} + 8\overline{B})\cos 2x + (-8\overline{A} - 4\overline{B})\sin 2x = 40\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & \left\{\begin{array}{ll} -4\overline{A} + 8\overline{B} = 0; & \overline{A} = 2\overline{B}; \\ -8\overline{A} - 4\overline{B} = 40; & -8\cdot 2\overline{B} - 4\overline{B} = 40;\ \overline{B} = -2;\ \overline{A} = -4; \end{array}\right. \\ \sin 2x & \end{array}$$

$$y_{*2} = -4\cos 2x - 2\sin 2x\,;\quad y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2x^2 + 3x -$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x\,;\quad y = \overline{y} + y_* = C_1 + C_2 e^{-4x} - 2x^2 + 3x -$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x\,;\quad y' = -4C_2 e^{-4x} - 4x + 3 + 8\sin 2x -$$

$$-4\cos 2x\,;\quad \begin{array}{r} y(0) = 3: \\ y'(0) = 7: \end{array} \left\{\begin{array}{ll} C_1 + C_2 - 4 = 3; & C_2 = -2; \\ -4C_2 + 3 - 4 = 7; & C_1 = 7 - C_2 = 9; \end{array}\right.$$

$$y_K = 9 - 2e^{-4x} - 2x^2 + 3x - 4\cos 2x - 2\sin 2x\,.$$

(Задачу б) розв’язати самостійно). ■

Приклад 9. Розв’язати крайову задачу:

$$y'' + 4y = 8x + 9\sin x; \qquad y(0) = 0;\;\; y'(\pi) = 5\,.$$

(Розв’язати самостійно. Відповідь: $y = 2x + 3\sin x$.)

Зауваження 5. Розв’язуючи самостійно зазначені диференційні рівняння зверніть ще раз увагу на комбіновану праву частину цих диференційних рівнянь, яку слід подати як суму двох доданків спеціального вигляду та знайти окремо для кожного доданку відповідний частинний розв’язок.

1.5.10. Лінійні різницеві рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду

Лінійне різницеве рівняння k***-го порядку зі сталими коефіцієнтами*** можна подати у вигляді

$$\boxed{a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_n y_{n+k-1} + \ldots + a_k y_n = f_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

де a_m, $m = \overline{0,k}$ – ***сталі коефіцієнти***, причому $a_0 \neq 0$ і $a_k \neq 0$; f_n – ***права частина*** (відома сіткова функція). Якщо права частина f_n тотожно дорівнює нулю, то рівняння називається ***однорідним***. У противному разі рівняння називається ***неоднорідним***.

Зауваження 1. Методи розв'язування лінійних різницевих рівнянь (РР) аналогічні методам розв'язування лінійних ДР. Надалі обмежимося розглядом ***лінійних неоднорідних РР другого порядку зі сталими коефіцієнтами*** (ЛНРР), які можна подати у формі:

$$\boxed{y_{n+2} + p\,y_{n+1} + q\,y_n = f_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Загальний розв'язок ЛНРР $y_n = y(n, C_1, C_2)$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2, число яких дорівнює порядку рівняння.

Надавши в загальному розв'язку конкретні значення довільним сталим C_1 і C_2, одержимо ***частинний розв'язок***.

Для однозначного визначення конкретних значень C_1 і C_2 і відповідного частинного розв'язку звичайно використовують ***початкові умови***: $y_0 = y_{0,0}$ і $y_1 = y_{0,1}$. Відповідно розглядається ***початкова задача*** (***задача Коші***).

Загальний розв'язок ЛНРР y_n можна подати у вигляді суми $y_n = \bar{y}_n + y_{*n}$, де $\bar{y}_n$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\boxed{y_{n+2} + p\,y_{n+1} + q\,y_n = 0}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

а y_{*n} – деякий частинний розв'язок самого неоднорідного РР.

Ненульовий розв'язок однорідного РР (ЛОРР) будемо шукати у вигляді показникової функції $\boxed{y_n = \lambda^n,\ \lambda \neq 0}$.

Підставимо в рівняння і одержимо

$$\lambda^{n+2} + p\lambda^{n+1} + q\lambda^n = 0,\quad n = 0,1,2,...,$$

Оскільки $\lambda \neq 0$, то поділивши обидві частини на λ^n, отримаємо ***характеристичне рівняння***: $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$.

У залежності від знака дискримінанта $D = p^2 - 4q$ можливі наступні три випадки:

1. $\boxed{D > 0}$, тоді характеристичне рівняння має два різні дійсні корені $\lambda_1 \neq \lambda_2$. При цьому

$$\boxed{\bar{y}_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n}.$$

2. $\boxed{D = 0}$, тоді характеристичне рівняння має один дійсний двократний корінь: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -p/2$. Маємо

$$\boxed{\bar{y}_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n}.$$

3. $\boxed{D < 0}$, тоді характеристичне рівняння має два комплексно спряжені корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm i\sqrt{-D}}{2}$. Позначимо $\boxed{\alpha = -p/2}$ і $\boxed{\beta = \sqrt{-D}/2}$. Тоді

$$\boxed{\bar{y}_n = r^n(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi)}.$$

При цьому:

а) якщо $\boxed{\alpha = 0}$, то $\boxed{r = \beta}$ і $\boxed{\varphi = \pi/2}$;

б) якщо $\boxed{\alpha \neq 0}$, то $\boxed{r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ і $\boxed{\varphi = arctg\,|(\beta/\alpha|}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок $\bar{y}_n$ лінійного однорідного рівняння:

а) $y_{n+2} + 8y_{n+1} + 12y_n = 0,\quad n = 0,1,2,...;$

б) $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0,\quad n = 0,1,2,...;$

в) $y_{n+2}-2y_{n+1}+4y_n=0$, $.n=0,1,2,\ldots$.

□ а) Характеристичне рівняння $\lambda^2+8\lambda+12=0$ має два різні дійсні корені: $\lambda_1=-6\neq\lambda_2=-2$. Тоді

$$\bar{y}_n=C_1(-6)^n+C_2(-2)^n.$$

б) Характеристичне рівняння $\lambda^2+6\lambda+9=0$ має один дійсний двократний корінь: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-3$. Тоді

$$\bar{y}_n=(C_1+C_2n)(-3)^n.$$

в) Характеристичне рівняння $\lambda^2-2\lambda+4=0$ має два комплексно-спряжені корені: $\lambda_{1,2}=1\pm i\sqrt{3}$. Отже, $\alpha=1\neq 0$ і $\beta=\sqrt{3}$. Тоді $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2$ і $\varphi=arctg\,|(\beta/\alpha|=\pi/3$. Маємо

$$\bar{y}_n=2^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{3}+C_2\sin\frac{n\pi}{3}\right).\ ■$$

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати різницеву задачу Коші: знайти частинний розв'язок $y_{чn}$ лінійного однорідного різницевого рівняння

$$y_{n+2}-8y_{n+1}+16y_n=0,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

який задовольняє початковим умовам $y_0=2$ і $y_1=-3$.

□ Знайдемо загальний розв'язок:

$$\lambda^2-8\lambda+16=0;\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda=4;\quad \bar{y}_n=(C_1+C_2n)\,4^n.$$

Далі врахуємо початкові умови:

$$\begin{array}{r} y_0=2: \\ y_1=-3: \end{array}\begin{cases}(C_1+C_2\cdot 0)4^0=2; & C_1=2;\\ (C_1+C_2\cdot 1)4^1=-3; & 8+4C_2=-3;\quad C_2=-11/4.\end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y_{чn}=(2-11n/4)\,4^n,\quad n=0,1,2,\ldots.\ ■$$

Знаходження деякого частинного розв'язку y_{*n} неоднорідного рівняння розглянемо тільки для випадку правої частини спеціального вигляду

$$\boxed{f_n = P_l(n)\,b^n},\quad b = const\,,\ n = 0,1,2,\ldots,$$

де $P_l(n)$ – відомий многочлен від n степеня l.

Будемо шукати частинний розв'язок y_{*n} за виглядом правої частини у формі:

$$\boxed{y_{*n} = n^s \overline{P}_l(n)\,b^n},$$

де $\overline{P}_l(n) = A_0 n^l + A_1 n^{l-1} + \ldots + A_{l-1} n + A_l$ – многочлен від n степеня l з невідомими коефіцієнтами A_m, $m = \overline{0,l}$; s – кратність числа b як кореня характеристичного рівняння, $s \ge 0$.

Невідомі значення A_m, $m = \overline{0,l}$ можна знайти *методом невизначених коефіцієнтів*.

<u>Приклад 3</u>. Знайти частинний розв'язок y_{*n} за виглядом правої частини заданого різницевого рівняння:

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} - 10y_n = 2^n(14n - 3),\quad n = 0,1,2,\ldots.$$

□ Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0;\quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -10 \end{cases};\quad \begin{matrix} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}.$$

Оскільки права частина містить у собі многочлен першого порядку, а основа показникової функції в правій частині $b = 2$ є простим коренем ($s = 1$) характеристичного рівняння ($b = \lambda_2 = 2$), то частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$y_{*n} = n^1(An + B)\,2^n = (An^2 + Bn)\,2^n,$$

де A і B – невідомі сталі коефіцієнти.

Для визначення A і B підставимо y_{*n} у різницеве рівняння та дістанемо тотожність відносно n:

$$(A(n+2)^2 + B(n+2))\,2^{n+2} + 3(A(n+1)^2 + B(n+1))\,2^{n+1} -$$

$$-10\,(An^2 + Bn)\,2^n = 2^n(14n - 3).$$

Спростимо тотожність, розділивши ліву і праву частини почленно на $2^n \neq 0$, а потім розкривши дужки і звівши подібні:

$$4An^2 + 16An + 16A + 4Bn + 8B + 6An^2 + 12An + 6A + 6Bn + 6B -$$

$$-10An^2 - 10Bn = 14n - 3; \quad 28An + 22A + 14B = 14n - 3.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях n, складемо систему для визначення A і B та розв'яжемо її:

$$\begin{array}{l} n^1: \\ n^0: \end{array} \begin{cases} 28A = 14 & A = 1/2 = 0{,}5 \\ 22A + 14B = -3 & B = -1 \end{cases}.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок $y_{*n} = (0{,}5n^2 - n)\,2^n$. ■

<u>Приклад 4</u>. Розв'язати різницеву задачу Коші: знайти частинний розв'язок $y_{чn}$ лінійного неоднорідного різницевого рівняння

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 40\,(-6)^n, \;\; n = 0,1,2,\ldots,$$

який задовольняє початковим умовам $y_0 = 3$ і $y_1 = -9$.

□ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного РР:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0; \;\; \lambda_1 = -2 \neq \lambda_2 = -1; \;\; \bar{y}_n = C_1\,(-1)^n + C_2\,(-2)^n.$$

Далі знайдемо частинний розв'язок y_{*n} заданого неоднорідного РР за виглядом його правої частини, враховуючи що основа показникової функції $b = -6$ не є коренем ($s = 0$) характеристичного рівняння, а многочлен в правій частині має нульовий степінь:

$$y_{*n} = n^0 A(-6)^n = A(-6)^n;$$

$$A(-6)^{n+2} + 3A(-6)^{n+1} + 2A(-6)^n = 40\,(-6)^n;$$

$$36A - 18A + 2A = 40; \;\; 20A = 40; \;\; A = 2; \;\; y_{*n} = 2\,(-6)^n.$$

Тоді загальний розв'язок початкового неоднорідного РР:

$$y_n = \bar{y}_n + y_{*n} = C_1\,(-1)^n + C_2\,(-2)^n + 2\,(-6)^n.$$

Для визначення відповідних значень довільних сталих C_1 і C_2 скористаємося початковими умовами:

$$\begin{matrix} y_0 = 3: \\ y_1 = -9: \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 3; & C_2 = 1 - C_1; \\ -C_1 - 2C_2 - 12 = -9; & -C_1 - 2 + 2C_1 = 3; \end{cases} C_1 = 5; C_2 = -4.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y_{чп} = 5(-1)^n - 4(-2)^n + 2(-6)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \blacksquare$$

1.6. Контрольні запитання

1. Яка функція є первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
5. У чому полягає спосіб безпосереднього інтегрування?
6. У яких двох формах реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?
7. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Коли доречно застосовувати цей метод?
8. Наведіть типові випадки застосування інтегрування частинами і дайте відповідні рекомендації щодо вибору u.
9. Наведіть стандартний вигляд многочлена $P_n(x)$ n-го степеня.
10. Як розкладається многочлен з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники?
11. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
12. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
13. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
14. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
15. Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів і методу окремих значень? Дайте рекомендації щодо їх застосування.
16. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
17. Як інтегруються правильні раціональні дроби у наступних випадках: а) корені знаменника дійсні й прості; б) корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?

18. Як за допомогою підстановок інтеграли з лінійними ірраціональностями зводяться до інтегралів від раціональних функцій?
19. Як знаходяться інтеграли вигляду
$\int \cos ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$?
20. У чому полягає універсальна тригонометрична підстановка?
21. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$?
22. Як за допомогою тригонометричних підстановок інтегруються вирази, що містять квадратний корінь із суми чи різниці квадратів?
23. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний та економічний зміст?
24. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?
25. Сформулюйте необхідну умову інтегрованості функції.
26. У чому полягає достатня умова інтегрованості?
27. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
28. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
29. Якою подвійною нерівністю задається оцінка визначеного інтеграла?
30. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку? Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
31. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
32. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
33. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
34. Що таке невласний інтеграл від необмеженої функції? У чому полягає його геометричний зміст?
35. Наведіть дві основні схеми застосування визначеного інтеграла.
36. Яка плоска область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy ? Осі Ox ? Просто правильною?
37. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy плоскої області? Правильної в напрямку осі Ox області?
38. Як знаходиться довжина дуги плоскої лінії у випадку, коли лінія задана явно в прямокутних координатах?
39. Як знаходиться об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів? Як знаходиться об'єм тіла обертання?

40. Наведіть приклади економічних задач, які розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла.
41. Що таке диференціальне рівняння? Як визначається його порядок?
42. Що називається розв'язком ДР?
43. Що таке інтегральна крива ДР?
44. Що називається загальним розв'язком ДР? Частинним розв'язком? Який їх геометричний зміст?
45. Що таке початкові та крайові умови? Як ставиться початкова задача (задача Коші)? Крайова задача?
46. Що таке особливий розв'язок ДР?
47. Як методом Ейлера наближено будується розв'язок задачі Коші для ДР першого порядку?
48. Яка система функцій $y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)\ \ (n \geq 2)$ називається лінійно залежною? Лінійно незалежною?
49. Яка структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку?
50. Що таке характеристичне рівняння для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
51. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
52. Яка структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку?
53. У чому полягає принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР?
54. Для ЛНДР що таке права частина спеціального вигляду?
55. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?
56. Що таке різницеве рівняння? Як визначається його порядок?
57. Що називається розв'язком різницевого рівняння?
58. Як задається загальний розв'язок лінійного РР першого порядку зі сталим коефіцієнтом?
59. Яка структура загального розв'язку ЛНРР другого порядку?
60. Що таке характеристичне рівняння для ЛОРР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
61. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОРР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
62. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНРР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?

Змістовий модуль 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ

2.1. Площина та пряма у просторі

2.1.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

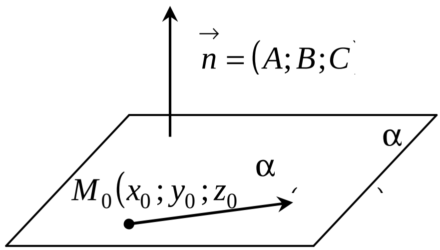

Рис. 21

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n} = (A;B;C) \neq \vec{0}$ (рис. 21).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

або в координатній формі

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

– ***рівняння площини, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = (A;B;C)$.

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;1;1)$ і перпендикулярна до площин $5x+2y-z+3=0$ і $x-y+3z+7=0$.

□ Оскільки нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(5;2;-1)$ і $\vec{n}_2=(1;-1;-3)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k}$$

Оскільки вектор $\vec{n}_0=(1;-2;1)$ колінеарний вектору $\vec{n}=(7;-14;7)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}_0$.

Отримаємо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна двом заданим площинам

$$x+1-2(y-1)+z-1=0 \Rightarrow x-2y+z+2=0. \ ■$$

2.1.2. Загальне рівняння площини. Окремі випадки загального рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

і отримаємо $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Тоді одержимо

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x, y, z, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Зауваження. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Рівняння довільної площини можна звести до загального вигляду.

<u>Теорема</u>. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат* x, y, z. *Кожному лінійному рівнянню зі змінними* x, y, z *відповідає деяка площина.* (Без доведення)

У таблиці 2 відображені особливості розміщення площини, коли один або декілька коефіцієнтів її загального рівняння дорівнюють нулю. (Частина ілюстративних зображень окремих випадків розміщення площини наведена на рис. 22 – 24. Ілюстрації для інших випадків зробіть самостійно).

Таблиця 2

№ п/п	Рівняння	Характеристика розміщення площини
1	$By + Cz + D = 0$	паралельна осі Ox
2	$Ax + Cz + D = 0$	паралельна осі Oy
3	$Ax + By + D = 0$	паралельна осі Oz (рис. 22)
4	$Ax + By + Cz = 0$	проходить через початок координат $O(0;0;0)$ (рис. 23)
5	$Cz + D = 0$	перпендикулярна до осі Oz (рис. 24)
6	$By + D = 0$	перпендикулярна до осі Oy
7	$Ax + D = 0$	перпендикулярна до осі Ox
8	$By + Cz = 0$	проходить через вісь Ox
9	$Ax + Cz = 0$	проходить через вісь Oy
10	$Ax + By = 0$	проходить через вісь Oz
11	$z = 0$	Координатна площина Oxy
12	$y = 0$	Координатна площина Oxz
13	$x = 0$	Координатна площина Oyz

<u>Приклад</u>. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

□ $M \in \alpha$; $\vec{n} = \overrightarrow{NP} \perp \alpha$; $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

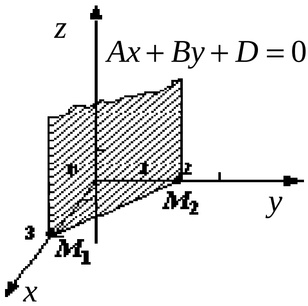

Рис. 22

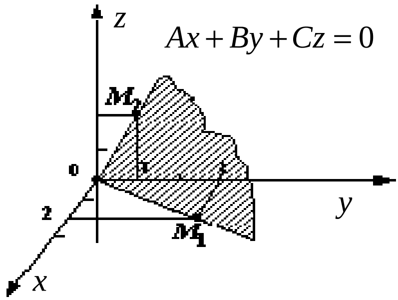

Рис. 23

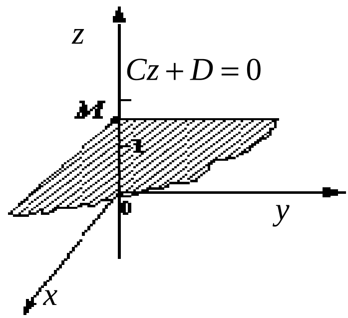

Рис. 24

$$\vec{n}=\overrightarrow{NP}=\big(1-5;\ -3-(-6);$$
$$-1-0\ \big)=\big(-4;\ 3;\ -1\big);$$
$$-4(x-1)+3(y-(-1))+$$
$$+(-1)(z-2)=0;$$
$$-4x+4+3y+3-z+2=0;$$
$$-4x+3y-z+9=0;$$
$$4x-3y+z-9=0.\ \blacksquare$$

2.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій.

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо три вектори $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x;y;z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні (рис. 25).

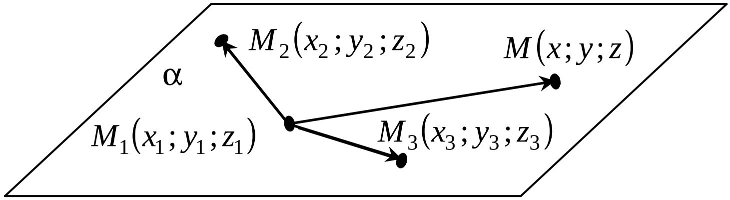

Рис. 25

Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$$(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$$

або в координатній формі

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

Приклад. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки. Знайти одиничний вектор нормалі.

$$\square \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix}=0\ ; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0\ ;$$

$$11x+12y-8z+17=0\ ; \quad \vec{n}=(A;B;C)=(11;12;-8)\ ;$$

$$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{11^2+12^2+(-8)^2}=\sqrt{329}\ ;\ \vec{n}_0=\left(\frac{11}{\sqrt{329}};\frac{12}{\sqrt{329}};-\frac{8}{\sqrt{329}}\right).\ \blacksquare$$

2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$ (рис. 26).

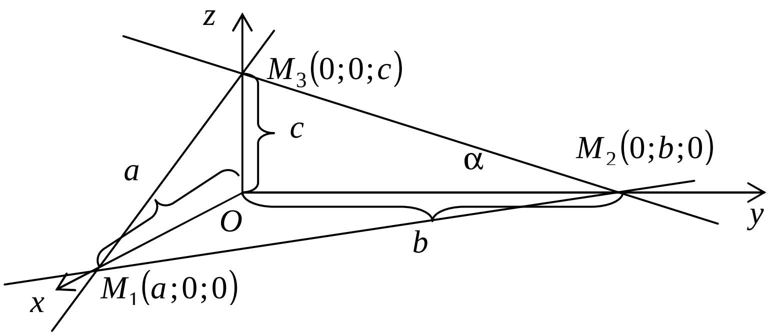

Рис. 26

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0 \qquad bcx+acy+abz-abc=0; \qquad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

– ***рівняння площини у відрізках на осях***.

<u>Приклад 1</u>. Звести загальне рівняння площини

$$3x-6y+8z+12=0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

□ $3x-6y+8z=-12 \quad \Big| :(-12)\,; \quad \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-2/3}=1.$ ■

<u>Приклад 2</u>. Знайти точки перетину площини

$$\alpha: \quad 3x-2y+6z-12=0$$

з координатними осями і зобразити площину, побудувавши її сліди – лінії перетину з координатними площинами.

□ $\alpha \bigcap Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} a = 4 \\ M_1(4;0;0) \end{matrix};$

$$\alpha \bigcap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} b = -6 \\ M_2(0;-6;0) \end{matrix};$$

$$\alpha \bigcap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} c = 2 \\ M_3(0;0;2) \end{matrix}.$$

Площина α зображена на рис. 27. ■

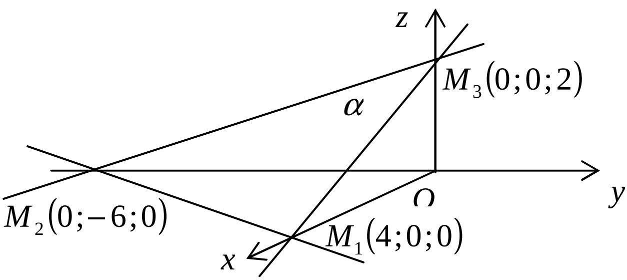

Рис. 27

2.1.5. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 28). Отже,

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

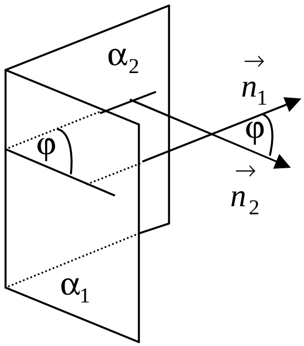

Рис. 28

Умова перпендикулярності двох площин:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}\ .$$

Умова паралельності двох площин:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}\ .$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}\ .$$

Приклад. Знайти косинус кута між заданою площиною $\alpha_1:\ 2x - y - 2z + 6 = 0$ і координатною площиною Oxy.

□ $\vec{n}_1 = (2;-1;-2)$; $\alpha_2:\ z = 0$; $\vec{n}_2 = \vec{k} = (0;0;1)$;

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}\ . \quad ■$$

2.1.6. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (рис. 29).

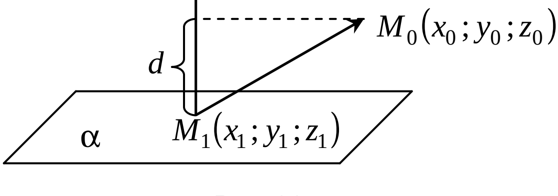

Рис. 29

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор $\vec{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$. Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\vec{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, то

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

Приклад 1. Знайти відстань d від точки $M_0(2; -4; 3)$ до площини $\alpha: 3x - 2y - 6z - 1 = 0$. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Задана піраміда з вершинами $A(3; 4; 0)$, $B(4; -3; 1)$, $C(-4; 1; -1)$, $D(-1; -1; 5)$. Знайти довжину висоти піраміди, проведеної з вершини D. (Розв'язати самостійно).

2.1.7. Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s} = (m; n; p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 30).

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\vec{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо ***канонічні***

рівняння прямої:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

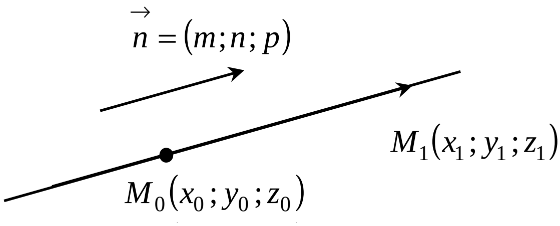

Рис. 30

2.1.8. Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t\,; \quad \frac{y-y_0}{n}=t\,; \quad \frac{z-z_0}{p}=t\,; \boxed{\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

Приклад. Пряма задана своїми канонічними рівняннями. Записати її параметричні рівняння:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{-2}. \quad \text{(Розв'язати самостійно).}$$

2.1.9. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

<u>Приклад</u>. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;0;3)$ і $M_2(4;-2;3)$. (Розв'язати самостійно).

2.1.10. Пряма як перетин двох площин. Загальні рівняння прямої

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l є лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то система $\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$ називається ***загальними рівняннями прямої***.

<u>Зауваження 1</u>. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

<u>Зауваження 2</u>. Рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

де λ – параметр, задає пучок площин, які проходять через пряму l.

<u>Приклад</u>. Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ 3x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Знайти її 1) канонічні рівняння; 2) параметричні рівняння.

□ 1) Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k} .$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -2y + 4z - 10 = 0 \\ 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases} ; \quad y = -1; \quad z = 2 \; ; \quad M_0(0;-1;2) .$$

Канонічні рівняння:

$$\frac{x-0}{-4} = \frac{y-(-1)}{14} = \frac{z-2}{8} \; ; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{4} .$$

(Параметричні рівняння знайти самостійно). ■

2.1.11. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1 : \; \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } l_2 : \; \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} .$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Отже,

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}} .$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0} .$$

Умова паралельності двох прямих: $\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$.

Приклад. Знайти кут між прямими:

$$l_1: \begin{cases} 3x - 2y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2z + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad l_2: \frac{x}{-3} = \frac{y-6}{0} = \frac{z-1}{4}.$$

(Розв'язати самостійно).

2.1.12. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, коли вектори $\vec{s_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\vec{s_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використовуючи умову компланарності трьох векторів $(\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s_1}) \cdot \vec{s_2} = 0$, одержуємо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}.$$

Зауваження 1. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність є умовою їх належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 є мимобіжними.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$, який перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ на вектор $\vec{a}$

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right| \Big/ \left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right)\right| \Big/ \left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right| .$$

<u>Зауваження 2</u>. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

<u>Приклад</u>. Знайти відстань d між заданими прямими:

а) $l_1: \ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$ і $l_2: \ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$;

б) $l_1: \ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-2}{0}$ і $l_2: \ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{4}$.

□ а) $\vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1M_2} = (0-2; 2-(-5); 3-(-3)) = (-2; 7; 6)$;

$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$; $|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}| = -2 \cdot (-4) +$

$$+ 7 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0 \ ; \quad d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|0|}{\sqrt{21}} = 0 \ .$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.1.13. Відстань від точки до прямої

Нехай треба знайти відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями:

$$x = mt + x_0; \quad y = nt + y_0; \quad z = pt + z_0 \ .$$

Розглянемо три способи визначення цієї відстані.

<u>Спосіб 1</u>. Візьмемо на прямій відому точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{s} = (m; n; p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ (рис. 31). Площа S цього паралелограма

$$S = |\vec{s}| \cdot d \quad \text{або} \quad S = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}| \ .$$

Звідси

$$\boxed{d = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}| \big/ |\vec{s}|} \ .$$

<u>Спосіб 2</u>. Проведемо через точку M_1 площину α, яка перпендикулярна до прямої l (рис. 32).

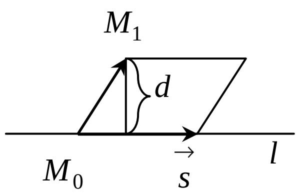

Рис. 31

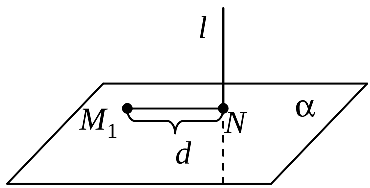

Рис. 32

Вектор нормалі $\vec{n}$ площини α колінеарний напрямному вектору $\vec{s}$ прямої l. Можна вважати, що $\vec{n} = \vec{s} = (m; n; p)$. Тоді

$$\alpha: \quad m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0 \ .$$

Далі треба знайти точку N перетину прямої та площини. Ця точка є основою перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на пряму l. Отже, $d = M_1 N$.

Спосіб 3. Розглянемо функцію $u = d^2(t)$, яка дорівнює квадрату відстані

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - mt - x_0)^2 + (y_1 - nt - y_0)^2 + (z_1 - pt - z_0)^2}$$

від точки M_1 до довільної точки прямої l.

Відстань d від точки M_1 до прямої l відповідає найменшому значенню цієї функції. Зі змісту задачі випливає, що мінімум існує і є єдиним екстремальним значенням. Тому відповідне значення параметра t_m визначається однозначно з необхідної умови екстремуму $u'(t) = 0$:

$$-2m(x_1 - mt - x_0) - 2n(y_1 - nt - y_0) - 2p(z_1 - pt - z_0) = 0 \ ;$$

$$t_m = \frac{m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0)}{m^2 + n^2 + p^2} \ .$$

Тоді $d = d(t_m)$.

Приклад. Знайти відстань d від заданої точки M_1 до заданої прямої l:

$$M_1(2;\, 3;\, -5) \ ; \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2} \, .$$

□ Застосовуємо спосіб 1:

$$\vec{s} = (-1; -2; 2); \quad |\vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \ ;$$

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = (2 - (-1);\, 3 - 2;\, -2 - 0) = (3;\, 1;\, -2);$$

$$\vec{s} \times \overrightarrow{M_0 M_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \ ;$$

$$|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{2^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}\ ;$$

$$d=|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|\Big/|\vec{s}\,|=\frac{5\sqrt{2}}{3}\ .$$

(Способами 2 і 3 розв'язати задачу самостійно). ■

2.1.14. Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l:\ \begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}\ ;\quad \alpha:\ Ax+By+Cz+D=0\ .$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба скласти і розв'язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am+Bn+Cp)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)\ .$$

1) Якщо $Am+Bn+Cp\neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t=-\ (Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(Am+Bn+Cp)\ .$$

2) Якщо $Am+Bn+Cp=0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, тобто точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am+Bn+Cp=0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, тобто точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

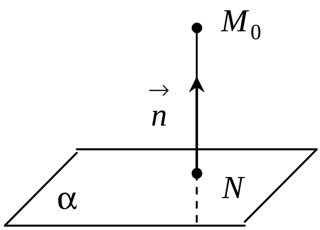

Рис. 33

<u>Приклад</u>. Знайти проекцію N точки $M_0(2;-5;4)$ на площину $\alpha:\ 3x+2y-z-6=0$.

□ Точка N є основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 33). Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна вважати, що $\vec{s}=\vec{n}=(3;\ 2;\ -1)$. Тоді параметричні рівняння прямої M_0N :

$$x=3t+2;\qquad y=2t-5;\qquad z=-t+4.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t+2)+2(2t-5)-(-t+4)-6=0\ ;\quad t=-1\ .$$

Тоді

$$x=3(-1)+2=-1;\quad y=2(-1)-5=-7;\quad z=-(-1)+4=5\ .$$

Отже, проекцією є точка $N(-1;-7;5)$. ■

2.1.15. Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

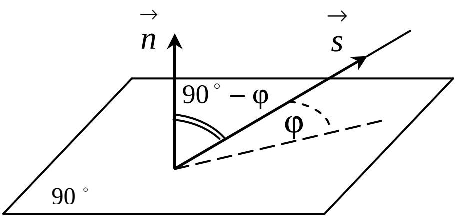

Рис. 34

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};$$

$$\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0\ .$$

Кут φ між ними (рис. 34) доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}=(m;n;p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A;B;C)$ до 90°.

Тоді $$\cos(90^\circ-\varphi)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\boxed{\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$\boxed{Am+Bn+Cp=0}.$$

Приклад 1. Знайти кут між прямою l і площиною α:

$$l:\ \begin{cases} x+4y-2z-8=0 \\ 2x+3y-z+6=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \alpha:\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$

(Розв’язати самостійно).

Приклад 2. Перевірити, що пряма $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{3}$ перпендикулярна до площини $10x-4y-6z+3=0$.

(Розв’язати самостійно).

Приклад 3. Перевірити, що пряма $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ паралельна площині $2x+2z-1=0$. (Розв’язати самостійно).

2.2. Поверхні другого порядку

2.2.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору R^3, координати котрих задовольняють алгебраїчне рівняння другого степеня

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0},$$

де хоча б один з коефіцієнтів *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* відмінний від нуля, тобто виконується умова $\boxed{A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0}$.

Це рівняння може визначати сферу, еліпсоїд, гіперболоїд (однопорожнинний або двопорожнинний), параболоїд (еліптичний або гіперболічний), конус, циліндр (еліптичний, гіперболічний або параболічний). За допомогою паралельного переносу й повороту системи координат зазначене рівняння другого порядку можна звести до канонічного вигляду. Форму та розташування поверхонь вивчають методом перерізів. Для цього перетинають поверхню координатними площинами та їм паралельними і визначають тип кривої, що одержується в перерізі.

Зауваження. Крім зазначених поверхонь, загальному рівнянню другого порядку може відповідати один з вироджених випадків: сукупність двох площин чи прямих, площина, пряма, точка чи порожня множина. Порожній множині відповідає певна уявна поверхня, при цьому загальне рівняння втрачає геометричний смисл. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних невироджених поверхонь.

2.2.2. Поверхні обертання. Сфера. Еліпсоїд

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (***твірної***, ***меридіана***) l навколо заданої прямої a_0 (***осі обертання***), що лежить у площині лінії l, називається ***поверхнею обертання***.

Коло, яке описує довільна точка твірної l при обертанні, називається ***паралеллю***. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання a_0.

Правило: *Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання, залишити тією самою, а іншу змінну замінити на «плюс / мінус» квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.*

Зокрема

$$\boxed{\begin{matrix} F(y,z)=0 \\ \lrcorner Oz \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z\right)=0}.$$

Якщо коло $y^2+z^2=R^2$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то дістанемо ***сферу***.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y^2+z^2=R^2 \\ \lrcorner Oz \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=R^2.$$

Звідси отримуємо $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ – ***канонічне рівняння сфери***.

Рівняння сфери зі зміщеним центром у точці $M_o(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом R має вигляд (рис. 35):

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}.$$

Зауваження 3. Сфера є обмеженою замкненою поверхнею, яка симетрична відносно центра. Довільна пряма, що проходить через її центр, є віссю симетрії сфери. Довільна площина, що проходить через центр сфери, служить її площиною симетрії.

Приклад 1. Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

а) $4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0$;

б) $3x^2+3y^2+3z^2-6y+5z+3=0$.

□ а) Згрупуємо окремо члени з x, y і z, а потім виділимо повні квадрати двочленів відповідного вигляду $x \pm a$, $y \pm b$ і

$z \pm c$:

$$4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0;$$

$$4(x^2-4x)+4(y^2+6y)+4(z^2+3z)+25=0;$$

$$(x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2)+(y^2+2\cdot 3y+3^2-3^2)+$$

$$+\left(z^2+2\cdot(3/2)z+(3/2)^2-(3/2)^2\right)+25/4=0;$$

$$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+(z+3/2)^2-9/4+25/4=0;$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+3/2)^2=9.$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C\left(2,-3,\ -3/2\right)$ і радіусом $R=3$.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$x^2+(y-1)^2+(z+5/6)^2=25/36$; $C\left(0,1,\ -5/6\right)$; $R=5/6$. ■

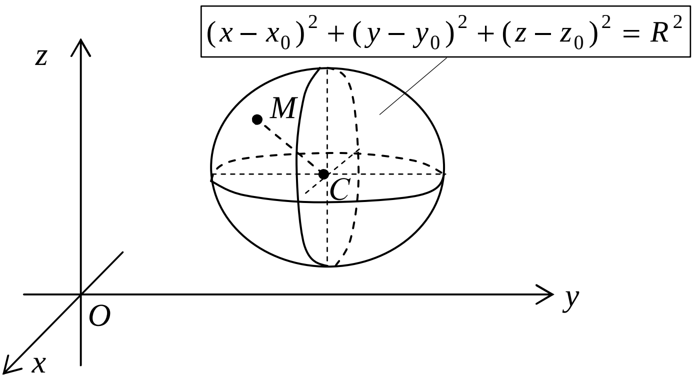

Рис. 35

Піддаючи сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж кожної з координатних осей Ox, Oy і Oz з коефіцієнтами деформації відповідно $k_x=R/a$, $k_y=R/b$ і $k_z=R/c$ ($a,b,c>0$), треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну: $x\to k_x x$; $y\to k_y y$; $z\to k_z z$. У результаті матимемо

$$\left((R/a)x\right)^2+\left((R/b)y\right)^2+\left((R/c)z\right)^2=R^2;\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

– ***канонічне рівняння еліпсоїда*** (рис. 36).

Величини a, b і c називаються ***півосями еліпсоїда***. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то маємо еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою $a=b=c=R$, то – сферу.

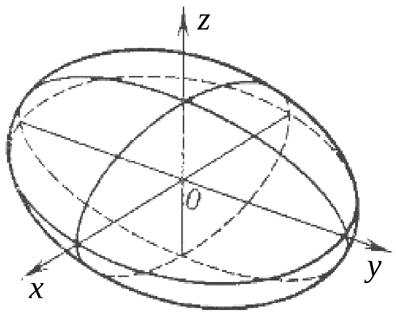

Рис. 36

Еліпсоїд симетричний відносно координатних площин, координатних осей і початку координат, який називають ***центром еліпсоїда***. Еліпсоїд в цілому лежить в межах прямокутного паралелепіпеда зі сторонами $2a$, $2b$ і $2c$, який симетричний відносно координатних площин.

Для з’ясування форми поверхні використовуємо метод перерізів. Розсічемо поверхню площиною $x=h$ (рис. 36):

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}.$$

1) При $|h|<a$ маємо $1-\frac{h^2}{a^2}=H^2>0$ – у перерізі вийде еліпс із півосями Hb і Hc.

2) При $h=\pm a$ одержимо дві точки $(a;0;0)$ і $(-a;0;0)$.

3) При $|h|>a$ вираз $1-\frac{h^2}{a^2}<0$ – площина й поверхня не перетинаються.

Зауваження 2. Лінією перетину еліпсоїда довільною площиною є еліпс.

Приклад 2. Звести рівняння заданого еліпсоїда до канонічного вигляду і побудувати його зображення: $16x^2+9y^2+36z^2=144$.

(Виконати самостійно).

2.2.3. Однопорожнинний гіперболоїд

Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1},\ a,b,c>0$$

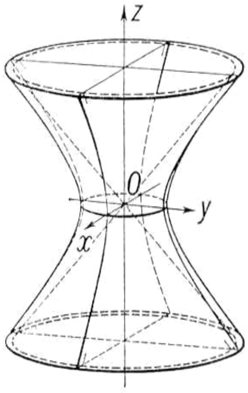

Рис. 37

Поверхня симетрична відносно координатних площин. Початок координат є центром симетрії (рис. 37). Перерізи поверхні площинами $x=0$, $y=0$ є гіперболами:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Переріз поверхні площиною $z=h$ є еліпсом:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}=H^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1.$$

Зауваження. Однопорожнинний гіперболоїд належить до ***лінійчатих поверхонь***, твірні яких є прямими лініями. Він може бути побудований за допомогою двох систем прямих ліній. Лінійчаті поверхні широко використовуються в будівництві.

2.2.4. Двопорожнинний гіперболоїд

Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда має вигляд:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1},\ (a,b,c>0) \quad (4)$$

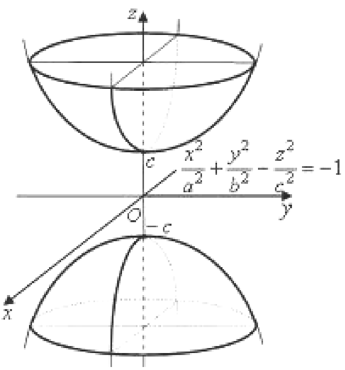

Рис. 38

Поверхня симетрична відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 38).

Перерізи поверхні площинами x=0 і

$y = 0$ є гіперболами відповідно:

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Розглянемо перерізи поверхні площиною $z = h$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

1) $|h| < c$ – переріз є порожньою множиною;

2) $|h| = c$ – у перерізі маємо дві точки: $(0;0;c)$ і $(0;0;-c)$;

3) $|h| > c$ – переріз є еліпсом: $\frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1$, $\left(H^2 = h^2/c^2 - 1\right)$.

2.2.5. Конічні поверхні. Конус другого порядку

Конічною поверхнею називається поверхня, яку описує пряма (***твірна***), що проходить через фіксовану точку O (***вершину*** конуса) та іншу змінну точку, яка рухається вздовж заданої кривої l_0 (***напрямної*** конуса), причому вершина O не лежить на напрямній l_0.

Канонічне рівняння конуса другого порядку (***еліптичного конуса***) (рис. 39) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}, \ (a,b,c>0).$$

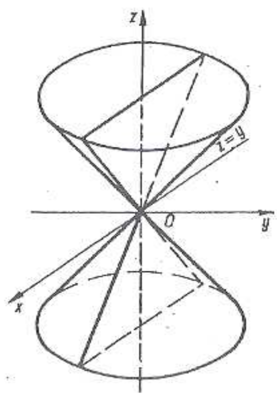

Рис. 39

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\boxed{x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = 0}$$

визначає ***круговий конус***.

Еліптичний конус симетричний відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 39). Його перерізи площинами $x = 0$ і $y = 0$ є прямими, що перетинаються: $y = \pm bz/c$, $x = \pm az/c$. А перерізи площинами $z = h$ є еліпсами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \quad \frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1, \quad \left(H^2=h^2/c^2\right).$$

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

Приклад. Звести рівняння заданого конуса другого порядку до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини: $4x^2+9y^2=36z^2$, $|z|\le 2$. (Виконати самостійно).

2.2.6. Еліптичний параболоїд

Канонічне рівняння еліптичного параболоїда (рис. 40) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z}, \ (p,q>0)$$

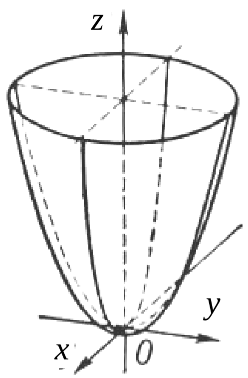

Рис. 40

Поверхня симетрична відносно координатних площин $x0z$, $y0z$ і вісі $0z$. Перерізи поверхні площинами $x=0$, $y=0$ є параболами:

$$y^2=2qz, \quad x^2=2pz$$

Перерізи поверхні площинами $z=h>0$ є еліпсами

$$x^2/(\sqrt{2ph})^2+y^2/(\sqrt{2qh})^2=1$$

2.2.7. Гіперболічний параболоїд

Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда (рис. 41) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z}, \ (p,q>0)$$

Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0,0,0)$ (***вершина*** гіперболічного параболоїда) є ***сідловою точкою*** (***точкою перевалу***) цієї поверхні. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії.

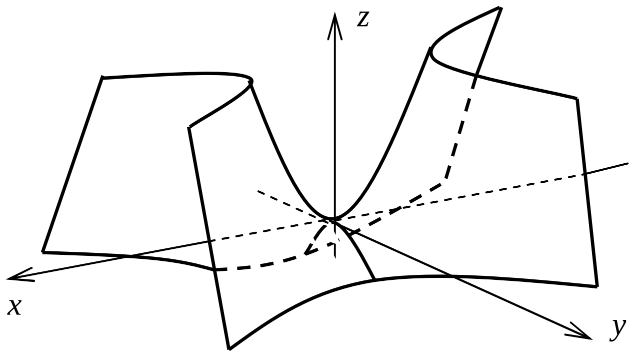

Рис. 41

1) У перерізі поверхні площиною $x = 0$ одержуємо параболу: $y^2 = -2qz$. Гілки параболи напрямлені вниз.

2) У перерізі поверхні площиною $y = 0$ отримуємо параболу: $x^2 = 2pz$. Гілки параболи напрямлені вгору.

3) У перерізі поверхні площиною $z = h$, $h \neq 0$ дістаємо гіперболу: $x^2/p - y^2/q = 2h$. А при перетині з координатною площиною $z = 0$ отримуємо дві прямі, що перетинаються у початку координат.

Зауваження. Гіперболічний параболоїд є лінійчатою поверхнею.

2.2.8. Циліндричні поверхні. Циліндри другого порядку

Циліндричною поверхнею (***циліндром***) називається поверхня, описана прямою (***твірною***) l, що рухається паралельно заданій прямій a_0 вздовж заданої лінії (***напрямної***) l_0, причому вказані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині. Якщо напрямна циліндра лежить у площині $x0y$, а твірна паралельна осі $0z$, то рівняння циліндра має вигляд: $F(x, y) = 0$ або $y = f(x)$. Аналогічно,

$F(x,z)=0$ або $z=f(x)$ – рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі $0y$; $F(y,z)=0$ або $z=f(y)$ – рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі $0x$.

Якщо напрямною циліндричної поверхні є крива другого порядку, то поверхню називають ***циліндричною поверхнею другого порядку*** (рис. 42 – 44).

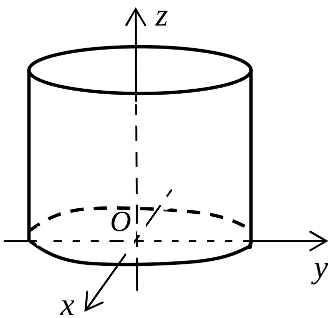

Рис. 42

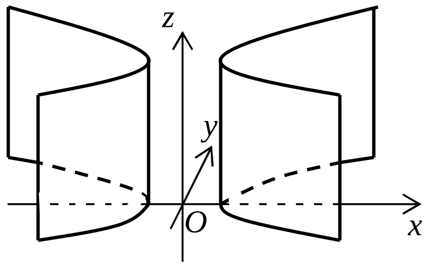

Рис. 43

За типом кривої, що утворюється у перерізі циліндра з площиною, перпендикулярною твірній, розрізняють такі циліндри другого порядку:

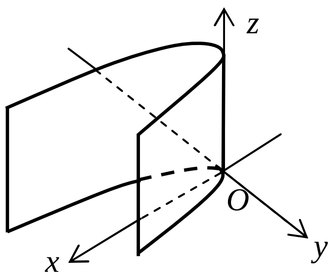

Рис. 44

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ – ***еліптичний*** (рис. 42), з окрема, ***круговий*** $\boxed{x^2+y^2=R^2}$;

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ – ***гіперболічний*** (рис. 43);

$\boxed{x^2=2py}$ – ***параболічний*** (рис. 44).

Аналогічно можна записати рівняння циліндричних поверхонь другого порядку, твірні яких паралельні осям $0x$ чи $0y$.

<u>Зауваження</u>. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як «огорожу» з прямих, виставлену вздовж напрямної l_0.

2.3. Функції багатьох змінних. Диференціювання функцій багатьох змінних

2.3.1. Поняття функції багатьох змінних. Область визначення

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина n довільних дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називаються n-***вимірною точкою*** і позначається однією буквою, наприклад, M. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються ***координатами*** точки M. Позначається $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множина всіх n-вимірних точок називається n-***вимірним точковим простором*** R^n.

Нехай задано деяку n-вимірну непорожню множину D. Якщо за вказаним правилом (***законом відповідності***) f кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної u, то кажуть, що задано ***функцію*** n ***змінних*** $u = f(M) = = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. При цьому множину D називають ***областю визначення*** функції $u = f(M)$. Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають ***аргументами***, а залежну змінну u – ***функцією***.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z = f(M) = f(x, y)$ є ***функцією двох змінних*** x, y.

Якщо D – область у тривимірному координатному просторі $Oxyz$, то функція $u = f(M) = f(x, y, z)$ є ***функцією трьох змінних*** x, y, z.

Нехай $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ – деяка точка n-вимірного простору. Множина всіх точок цього простору, для кожної з яких $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ відстань $\rho = M_0M$ від точки M_0 менша ε, тобто виконується умова

$$\boxed{\rho = M_0M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon},$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке додатне число, називається ε-***околом*** точки M_0 і позначається $U(M_0, \varepsilon)$.

У випадку двовимірного простору (площини) ε-околом точки M_0 є внутрішня частина круга радіуса ε з центром M_0.

Зауваження 1. Надалі обмежимось, в основному, розглядом функцій лише двох і, рідше, трьох змінних. На випадок функцій більшого числа змінних відповідні результати поширюються за аналогією.

Зауваження 2. Якщо функція задана аналітично (формулами) без будь-яких додаткових умов, то розглядають її ***природну область визначення*** (***область допустимих значень***) D – множину всіх тих точок, у яких дані аналітичні вирази мають смисл.

Приклад. Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині Oxy природну область визначення D заданої функції:

а) $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$; б) $z = \sqrt{y^2 - 1 - x}$;

в) $z = \arcsin\left((x - 3y)/6\right) + 1 \Big/ \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \ln x$.

□ а) Природна область визначення D даної функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y), для яких $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$9 - x^2 - 9y^2 = 0; \quad x^2 + 9y^2 = 9; \quad x^2/9 + y^2/1 = 1.$$

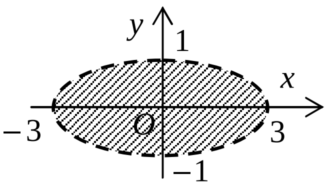

Рис. 45

Це рівняння еліпса з півосями $a = 3$ та $b = 1$. Даний еліпс у залежності від знака виразу $9 - x^2 - 9y^2$ ділить всю координатну площину Oxy на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 45).

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, треба взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю умову. Наприклад, для точки $O(0,0)$ умова виконується $9-0^2-9\cdot 0^2=9>0$, тому внутрішня область, обмежена еліпсом, входить в D. Для точки $B(0,2)$ ця умова не виконується $9-0^2-9\cdot 2^2=-27<0$, тому область, що лежить поза еліпсом, не входить в D.

Отже, внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D, тому що для його точок $9-x^2-9y^2=0$ і відповідна нерівність не виконується. Така лінія зображується пунктиром. Область D – відкрита (рис. 45).

б) Квадратний корінь добувається тільки з невід'ємних чисел, тому $y^2-1-x\geq 0$. Жодних інших обмежень на аргументи x, y немає.

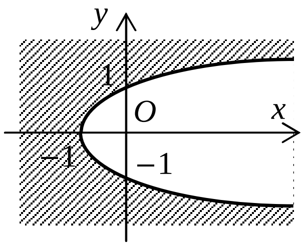

Рис. 46

Рівняння $y^2-1-x=0$ визначає параболу, яка в залежності від знака виразу y^2-1-x поділяє координатну площину на дві частини – внутрішню і зовнішню.

Точка $O(0,0)$ лежить усередині параболи і не задовольняє належній умові. Точка $A(-2,0)$ лежить зовні параболи і задовольняє цій умові. Отже, область визначення D складається з точок, що лежать ззовні параболи. Область D – замкнена, її межа позначена суцільною лінією (рис. 46).

в) Природна область визначення D даної функції – множина всіх тих точок (x,y), які задовольняють системі

$$\begin{cases} -1\leq (x-3y)/6\leq 1; \\ 9-x^2-y^2>0; \\ x>0. \end{cases}$$

Межа області D визначається рівняннями

$$(x-3y)/6=-1;\ (x-3y)/6=1;\ 9-x^2-y^2=0;\ x=0$$

або $x-3y+6=0$; $x-3y-6=0$; $x^2+y^2=9$; $x=0$.

Перші два рівняння визначають пару паралельних прямих, третє рівняння – коло з центром у початку координат і радіусом $R=3$, а четверте рівняння задає вісь Oy. Кожна пряма ділить координатну площину на дві півплощини. Точки прямих $x-3y+6=0$ і $x-3y-6=0$ задовольняють відповідні нерівності. Такі лінії зображуються суцільно. Коло ділить координатну площину на внутрішню і зовнішню частини (всередині круга і поза кругом). Для точок кола і прямої $x=0$ відповідні нерівності не виконуються, тому вони зображуються пунктиром. Використовуючи пробні точки, знаходимо область визначення D (рис. 47). ■

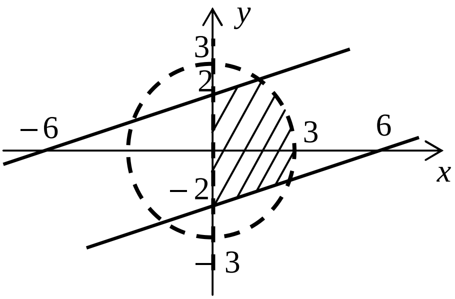

Рис. 47

2.3.2. Геометричне зображення функції двох змінних. Лінії та поверхні рівня

Множина всіх точок $P(x,y,z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння $z=f(x,y)$, називається ***графіком*** функції двох змінних $z=f(x,y)$.

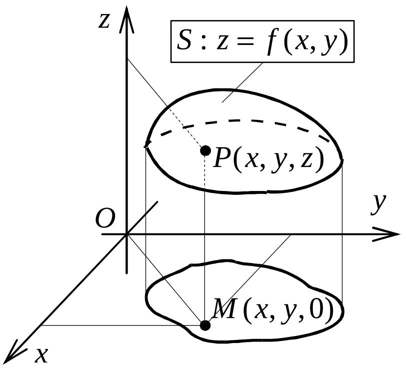

Рис. 48

Звичайно графіком є деяка поверхня S, що проектується на площину Oxy на область визначення D (рис. 48). (Поверхня $z=f(x,y)$ – це «дах», що «нависає» над плоскою областю D).

<u>Приклад 1</u>. Побудувати по-

верхню, яка є графіком функції $z = x^2 + y^2/4$ (еліптичний параболоїд).

□ Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знаходимо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

Oyz: $x = 0$; $z = y^2/4$; $y^2 = 4z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxz: $y = 0$; $z = x^2$; $x^2 = z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxy: $z = 0$; $x^2 + y^2/4 = 0$; $O(0,0)$ – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині Oxy: $z = 0$.

$z = 9$; $x^2 + y^2/4 = 9$; $x^2/9 + y^2/36 = 1$ – еліпс з великою піввіссю $a = 6$, що паралельна осі Oy, і з малою піввіссю $b = 3$, що паралельна осі Ox.

Еліптичний параболоїд $z = x^2 + y^2/4$ зображений на рис. 49.

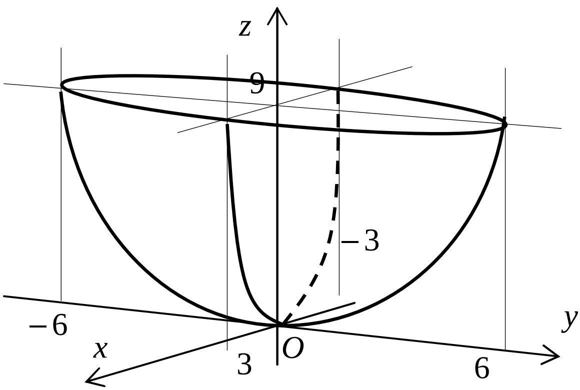

Рис. 49

<u>Зауваження 1</u>. Функцію трьох чи більше змінних зобразити за

допомогою графіка неможливо.

Зауваження 2. Для функції двох чи більше змінних не можна ввести поняття монотонності (зростання чи спадання). Наприклад, для функції $z = f(x, y)$, що зображена на рис. 50, у точці $M(x, y)$ у напрямку променя l_1 ця функція спадає $f(M_1) < f(M)$, а у напрямку променя l_2 ця функція зростає $f(M_2) > f(M)$.

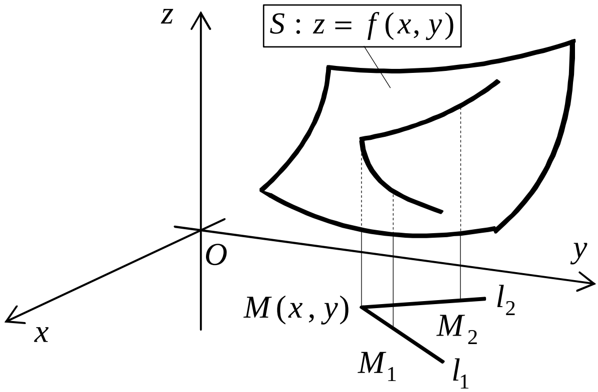

Рис. 50

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C$, $C = const$. Рівняння лінії рівня

$$\boxed{f(x, y) = C}.$$

Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$.

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x, y)$, кожна з яких виконує роль проекції лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ відповідною площиною $z = C$ (рис. 51).

Якщо вибрати числа $C_1, C_2, ..., C_n$ так, щоб вони утворювали

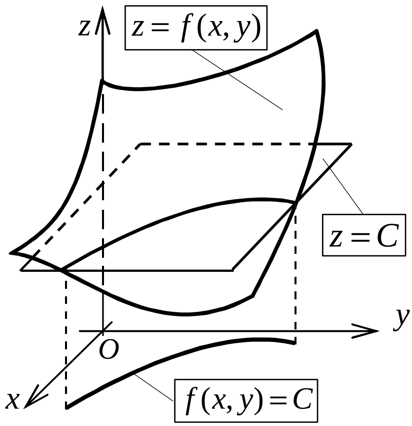

Рис. 51

арифметичну прогресію з різницею d $C_{n+1} = C_n + d$, то отримаємо топографічну карту рельєфу поверхні $z = f(x,y)$. За взаємним розташуванням ліній рівня можна судити про характер рельєфу: там, де лінії розміщуються густіше, функція $z = f(x,y)$ змінюється швидше (поверхня крутіша); там, де лінії розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (поверхня більш полога).

Приклади ліній рівня: ізотерми, ізобари на географічних картах; еквіпотенціальні лінії плоского електростатичного поля в електротехніці; криві байдужості функції загальної корисності $TU(Q_1, Q_2)$ споживання товарів двох видів Q_1, Q_2 у мікроекономіці.

Приклад 2. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = x^2 + y^2 + 2$ при $C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = 4, C_4 = 5$.

□ $x^2 + y^2 + 2 = C$; $x^2 + y^2 = C - 2$.

$C_1 = 2$: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;0)$ (вироджене коло).

$C_2 = 3$: $x^2 + y^2 = 1$ – коло радіуса $R = 1$ з центром $O(0;0)$.

$C_3 = 4$: $x^2 + y^2 = 2$ – коло радіуса $R = \sqrt{2}$ з центром $O(0;0)$.

$C_4 = 5$: $x^2 + y^2 = 3$ – коло радіуса $R = \sqrt{3}$ з центром $O(0;0)$.

Сім'я ліній рівня $x^2 + y^2 = C - 2$ – це сім'я концентричних кіл з центром у початку координат $O(0;0)$ (рис. 52).

Функція $z = f(x,y)$ зростає вздовж кожного радіального напрямку. Поверхня $z = f(x,y)$ – це симетрична «чаша» з круто зростаючими краями (параболоїд обертання). ■

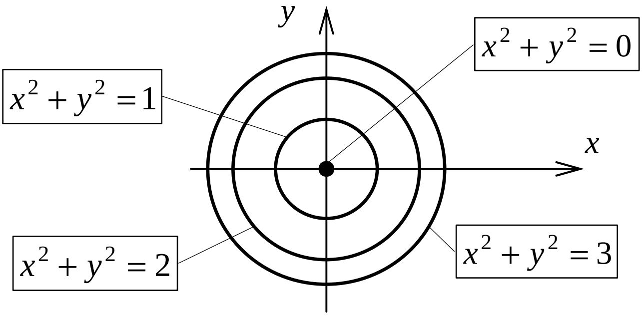

Рис. 52

Поверхнею рівня функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u=C$, $C=const$. Рівняння поверхні рівня

$$\boxed{f(x,y,z)=C}.$$

Приклад 3. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u=x^2+y^2+z^2$ при $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=4$.

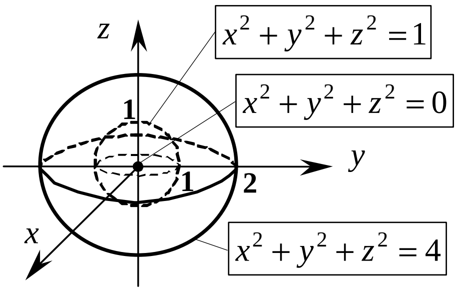

Рис. 53

□ Поверхні рівня $x^2+y^2+z^2=C$ – це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат $O(0;0;0)$. На рис. 53 зображено поверхні рівня при $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=4$. ■

Приклад 4. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u=x^2+y^2-z$ при $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=4$. (Розв'язати самостійно).

2.3.3. Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність. Точки розриву

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 54).

Різниця $\boxed{\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}$ називається ***частинним приростом по*** x функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x.

Аналогічно $\boxed{\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}$ – ***частинний приріст по*** y.

Якщо одночасно надати змінній x приросту Δx, а змінній y приросту Δy, то різниця $\boxed{\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}$ називається ***повним приростом*** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$.

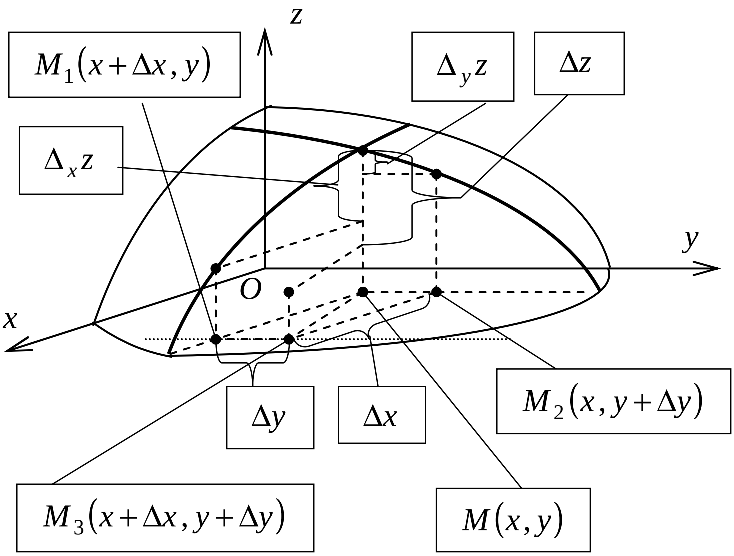

Рис. 54

Зауваження 1. Із рис. 54 зрозуміло, що повний приріст Δz, у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних приростів:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z\,.$$

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Число A називається ***границею функції*** $z = f(x,y)$ ***в точці*** M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якої точки M із δ-околу точки M_0, крім, можливо, самої точки M_0, виконується нерівність $\left| f(x,y) - A \right| < \varepsilon$. Позначається

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} f(x,y) = A\,.$$

Іншими словами, число A називається ***границею функції*** $z = f(x,y)$ ***в точці*** M_0, якщо їх різниця $\alpha = f(x,y) - A$ є нескінченно малою величиною при $M \to M_0$:

$$\alpha = f(x,y) - A \to 0 \quad \text{при } M \to M_0\,.$$

Зауваження 2. Точка M необмежено наближається до точки M_0 довільним способом. Важливо лише, що відстань $\rho = M_0M$ від точки M_0 прямує до нуля.

Функція $z = f(x,y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо виконуються умови:

1) функція $z = f(x,y)$ визначена в самій точці M_0 і в деякому її околі;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Оскільки для неперервної функції $z = f(x,y)$ її приріст прямує до нуля .при $M \to M_0$: $\Delta z = f(M) - f(M_0) \to 0$ і при цьому прирости всіх аргументів прямують до нуля:

$$\Delta x = x - x_0 \to 0\,; \quad \Delta y = y - y_0 \to 0\,,$$

то означення неперервної в точці функції можна подати так.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо в цій точці нескінченно малим приростам Δx і Δy її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції Δz:

$$\lim_{\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0} \Delta z = 0 .$$

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в області*** D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Властивості функції багатьох змінних, що неперервна в обмеженій замкненій області, аналогічні відповідним властивостям функції однієї змінної, що неперервна на відрізку.

Властивість 1. Функція $z = f(x, y)$, що неперервна в обмеженій замкненій області D, є обмеженою і досягає в ній свого найменшого m і найбільшого M значення.

Властивість 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, а m і M – відповідно її найменше і найбільше значення у цій області, то для будь-якого числа μ, що задовольняє нерівність $m \le \mu \le M$, у області D знайдеться хоча б одна точка $N \in D$, в якій значення функції дорівнює числу μ.

Якщо в точці M_0 порушується хоча б одна з умов неперервності, то ця точка називається ***точкою розриву*** функції $z = f(x, y)$, а сама функція $z = f(x, y)$ називається ***розривною*** в точці M_0.

Зауваження 4. У випадку функції двох змінних точки розриву можуть бути ***ізольованими*** чи утворювати ***лінії розриву***. Для функції трьох змінних точки розриву, крім цього, можуть утворювати ***поверхні розриву***.

Наприклад, функція $z = 1/(x^2 + y^2)$ має ізольовану точку розриву $O(0,0)$, для функції $z = 1/(2x + y + 2)$ пряма $2x + y + 2 = 0$ є лінією розриву, а функція $u = 1/(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ має поверхню розриву – сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2.3.4. Частинні похідні та їх обчислення. Геометричний зміст частинних похідних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}\,.$$

Застосовуються також позначення:

$$z_x^I;\ f_x^I;\ f_x^I(x, y);\ f_x^I(M);\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x};\ \frac{\partial f(M)}{\partial x};\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M.$$

Аналогічно

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}\,.$$

Таким чином,

$$\partial z/\partial x = \left[dz/dx\right]_{y=const};\quad \partial z/\partial y = \left[dz/dy\right]_{x=const}.$$

Зауваження. Якщо у функції багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то отримаємо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j. До цієї функції можна застосувати весь апарат математичного аналізу функцій однієї змінної. Зокрема, *частинна похідна за вибраною змінною обчислюється за правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі інші аргументи сталими* (*фіксованими*, «*замороженими*»):

$$\boxed{\partial u/\partial x_j = \left[du/dx_j\right]_{x_i = const,\ i=\overline{1,n};\ i\neq j}},\quad j = \overline{1,n}.$$

Приклад. Знайти всі частинні похідні заданої функції:

а) $z = x^2/y - \sin y + \pi$; б) $z = x^y$; в) $u = e^{xy^2z}/z$;

г) $u = x\cos(xy^3 - z)$; д) $u = tg\left(xy^4/z^2\right)$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2/y - \sin y + \pi\right)'_x = \left(x^2/y\right)'_x - (\sin y)'_x + \pi'_x =$

$$= (1/y)\,(x^2)'_x - 0 + 0 = (1/y)\cdot 2x = 2x/y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2/y - \sin y + \pi\right)'_y = \left(x^2/y\right)'_y - (\sin y)'_y + \pi'_y = x^2\,(1/y)'_x -$$

$$-\cos y + 0 = x^2\cdot\left(-1/y^2\right) - \cos y = -\,x^2/y^2 - \cos y;$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = y\,x^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y\ln x$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{xy^2z}/z\right)'_x = \dfrac{1}{z}\,(e^{xy^2z})'_x = \dfrac{1}{z}\cdot e^{xy^2z}(xy^2z)'_x =$

$$= (1/z)\cdot e^{xy^2z}\cdot y^2z = y^2\,e^{xy^2z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{xy^2z}/z\right)'_y = \frac{1}{z}\,(e^{xy^2z})'_y =$$

$$= (1/z)\cdot e^{xy^2z}(xy^2z)'_y = (1/z)\cdot e^{xy^2z}\cdot xz\cdot 2y = 2xye^{xy^2z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(e^{xy^2z}/z\right)'_z = \frac{(e^{xy^2z})'_z\cdot z - e^{xy^2z}\,z'_z}{z^2} = \frac{e^{xy^2z}\,(xy^2z)'_z\cdot z - e^{xy^2z}}{z^2} =$$

$= (e^{xy^2z}\,xy^2z - e^{xy^2z})/z^2$. (Завдання г) і д) виконати самостійно). ■

Розглянемо геометричний зміст частинних похідних.

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Графіком функції $z = f(x,y)$ є деяка поверхня (рис. 55).

Рівняння $y = y_0$ визначає січну площину, яка перпендикулярна до осі Oy. Ця площина перетинає поверхню $z = f(x,y)$ по деякій плоскій лінії l. Оскільки $\partial z/\partial x = [dz/dx]_{y=y_0}$, то виходячи з геометричного змісту звичайної похідної, маємо $\partial z/\partial x|_{M_0} = tg\,\alpha$.

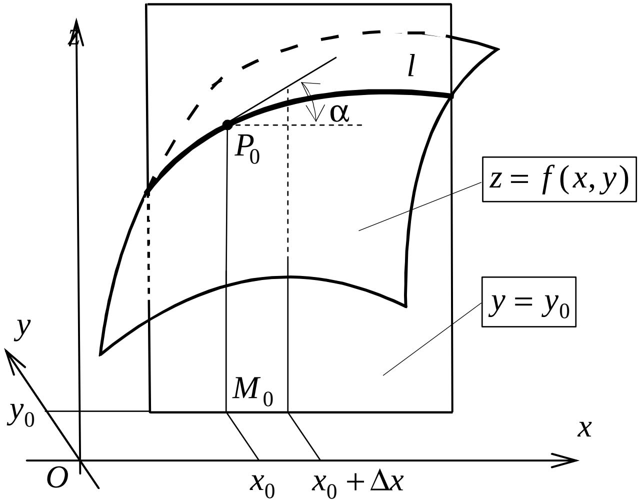

Рис. 55

Частинна похідна $\partial z/\partial x|_{M_0}$ *чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу* α *дотичної до лінії перерізу* l *поверхні* $z = f(x,y)$ *площиною* $y = y_0$ *у відповідній точці* $P_0(x_0, y_0, z_0)$, *де* $z_0 = f(x_0, y_0)$. (<u>Геометричний зміст</u> частинної похідної).

Загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x,y)$ площиною $y = y_0$: $\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0. \end{cases}$

Аналогічно $\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0 \end{cases}$

– загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x,y)$ площиною $x = x_0$.

2.3.5. Частинні та повний диференціали

Нехай задано функцію багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то одержимо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j, диференціал якої називається ***частинним диференціалом функції*** $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***за змінною*** x_j і позначається $d_{x_j}u$.

Частинний диференціал зв'язаний з відповідною частинною похідною співвідношенням

$$\boxed{d_{x_j}u = \frac{\partial z}{\partial x_j}\, dx_j},$$

де dx_j – диференціал незалежної змінної x_j. Диференціал незалежної змінної збігається з її приростом $dx_j = \Delta x_j$.

Приклад 1. Знайти частинні диференціали функції:

а) $z = arctg\,(y/x)$; б) $u = 3x^2yz - x\ln y$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2} \cdot y \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$d_x z = -\frac{y\,dx}{x^2+y^2}; \quad d_y z = \frac{x\,dx}{x^2+y^2};$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3yz \cdot 2x - \ln y \cdot 1 = 6xyz - \ln x$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2z \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{y} = 3x^2z - x/y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2y \cdot 1 - 0 = 3x^2y;$$

$$d_x u = (6xyz - \ln x)\,dx; \; d_y u = (3x^2z - x/y)\,dy; \; d_z u = 3x^2y\; dz. \; ■$$

Функція $z = f(M) = f(x, y)$ називається ***диференційованою*** в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - - f(x, y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де A, B – незалежні від Δx і Δy величини; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів Δx і Δy аргументів:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1 (***необхідна умова диференційованості***). *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в деякій точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці.*
(Без доведення)

Теорема 2. *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x; y)$, тобто $dz = A\,dx + B\,dy$, то ця функція має в точці $M(x; y)$ частині похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, причому*

$$\partial z/\partial x = A; \quad \partial z/\partial y = B.$$

Іншими словами, *повний диференціал функції $z = f(x, y)$ дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів* $\boxed{dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy}$.

(Без доведення)

Теорема 3 (***Достатня умова диференційованості***). *Якщо функція $z = f(x, y)$ має в деякій точці $M(x; y)$ неперервні частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, то ця функція диференційована в точці M.*
(Без доведення)

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції:

а) $u = \ln\left(x + \sqrt{y + z^2}\right)$; б) $u = e^{z^2}\sin^2(x + y^3)$.

□ а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y+z^2}}\cdot 1=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+z^2}}\cdot 2z=$$

$$=\frac{z}{\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=$$

$$=\frac{2\sqrt{y+z^2}\,dx+dy+2z\,dz}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{z^2}\cdot 2\sin(x+y^3)\cdot\cos(x+y^3)=e^{z^2}\sin 2(x+y^3)$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{z^2}2\sin(x+y^3)\cos(x+y^3)\cdot 3y^2=3y^2e^{z^2}\sin 2(x+y^3);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sin^2(x+y^3)\cdot e^{z^2}\cdot 2z=2ze^{z^2}\sin^2(x+y^3);$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dx+$$

$$+3y^2e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dy+2z\,e^{z^2}\sin^2(x+y^3)\,dz.\quad ■$$

Зауваження. При достатньо малих приростах аргументів Δx і Δy повний приріст Δz функції $z=f(x,y)$ можна наближено замінити повним диференціалом $\Delta z\approx dz$. Звідси маємо формулу для наближеного обчислення значення функції

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y.$$

Приклад 3. Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z=x/y$ в точці $M(9,3)$ при $\Delta x=0{,}1$ і $\Delta y=-0{,}2$.

□ $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=$

$$=\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y}=\frac{(x+\Delta x)y-x(y+\Delta y)}{y(y+\Delta y)}=\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y(y+\Delta y)};$$

$$\Delta z=\frac{3\cdot 0{,}1-9\cdot(-0{,}2)}{3\cdot(3-0{,}2)}=\frac{2{,}1}{3\cdot 2{,}8}=0{,}25;\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2};$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy=\frac{1}{y}\,\Delta x-\frac{x}{y^2}\,\Delta y;$$

$$dz=(1/3)\cdot 0{,}1-(9/3^2)\cdot(-0{,}2)\approx 0{,}233. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти наближене значення

а) $A=1{,}98\cos 1$; б) $A=\sqrt{17}\ln 3$.

□ а) Розглянемо функцію $z=z(x,y)=x\cos y$. Нехай $x=2$; $y=\pi/3$. Тоді $\Delta x=1{,}98-2=-0{,}02$; $\Delta y=1-\pi/3\approx -0{,}047$.

Дістанемо:

$$A=1{,}98\cos 1=z(2+\Delta x,\ \pi/3+\Delta y)\approx z(2,\pi/3)+$$

$$+\frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial x}\,\Delta x+\frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial y}\,\Delta y;\quad z(2,\pi/3)=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y;\quad \frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial x}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x\sin y;$$

$$\frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial y}=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\approx -1{,}73;$$

$$A=1{,}98\cos 1\approx 1+(1/2)\cdot(-0{,}02)+(-1{,}73)\cdot(-0{,}047)\approx$$

$$\approx 1-0{,}01+0{,}081\approx 1{,}07.$$

б) Розв’язати самостійно. ■

Теорема 4 (***Інваріантність форми повного диференціала***). *Повний диференціал складеної функції* $z=f(x,y)$, *де* $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, *можна подати у вигляді*

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

який збігається з виглядом повного диференціала звичайної функції.

Іншими словами, *вигляд повного диференціала функції не залежить від того, чи є її аргументи незалежними змінними чи функціями інших змінних*.
(Без доведення)

2.3.6. Похідні складених функцій

Обмежимось розглядом трьох важливих випадків у припущенні, що всі частинні похідні неперервні.

1) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, аргументи якої самі є функціями незалежної змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної t $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}\,.$$

2) Якщо аргументи функції двох змінних $z = f(x, y)$ самі є функціями інших двох незалежних змінних $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$. Тоді частинні похідні складеної функції двох змінних $z = f\left(x(u, v),\, y(u, v)\right)$ обчислюються за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}\,; \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}\,.$$

3) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, де другий аргумент y сам є функцією першого аргументу x: $y = y(x)$. Тоді ***повна похідна*** за x складеної функції однієї змінної $z = f\left(x, y(x)\right)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}\,.$$

Зауваження. Праворуч у цій формулі перший доданок $\partial z/\partial x$ – це частинна похідна за x, обчислена в припущенні, що $y = const$.

У лівій частині маємо dz/dx – повну похідну за x, обчислену при умові, що y є функцією від x: $y = y(x)$.

<u>Приклад</u>. Знайти значення вказаних похідних складеної функції у відповідній точці:

а) dz/dt, якщо $z = x e^{xy}$, де $x = t\cos t$, $y = t \sin t$, $t_0 = \pi$;

б) $\partial z/\partial u$ і $\partial z/\partial v$, якщо $z = arctg(x^2 + y)$, де $x = u\ln v$, $y = v\cos u$, $u_0 = \pi$, $v_0 = 1$;

в) dz/dx, якщо $z = \arcsin(xy)$, де $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

□ а) $x_0 = x(t_0) = \pi\cos\pi = -\pi$; $y_0 = y(t_0) = \pi \sin\pi = 0$;

$$dx/dt = \cos t - t\sin t; \quad dx/dt\big|_{t=\pi} = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1;$$

$$dy/dt = \sin t + t\cos t; \quad dy/dt\big|_{t=\pi} = \sin\pi + \pi\cos\pi = -\pi;$$

$$\partial z/\partial x = e^{xy} + xy e^{xy}; \quad \partial z/\partial x\big|_{t=\pi} = e^{-\pi\cdot 0} - \pi\cdot 0\cdot e^{-\pi\cdot 0} = 1;$$

$$\partial z/\partial y = x^2 e^{xy}; \quad \partial z/\partial y\big|_{t=\pi} = (-\pi)^2 e^{-\pi\cdot 0} = \pi^2;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}; \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\pi} = 1\cdot -1) + \pi^2\cdot(-\pi) = -(\pi^3 + 1).$$

б) $x_0 = x(u_0, v_0) = \pi\cdot\ln 1 = 0$; $y_0 = y(u_0, v_0) = 1\cdot\cos\pi = -1$;

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \ln v; \quad \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{u=\pi, v=1} = \ln 1 = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}; \quad \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{u=\pi, v=1} = \frac{\pi}{1} = \pi;$$

$$\partial y/\partial u = -v\sin u; \ \partial y/\partial u\big|_{u=\pi, v=1} = -1\cdot\sin\pi = 0; \ \partial y/\partial v = \cos u;$$

$$\partial y/\partial v\big|_{u=\pi, v=1} = \cos\pi = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial x\big|_{u=\pi, v=1} = \frac{2\cdot 0}{1 + (0^2 - 1)^2} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial y\Big|_{u=\pi,\,v=1}=\frac{1}{1+(0^2-1)^2}=\frac{1}{2}\,;\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\,;$$

$$\partial z/\partial u\Big|_{u=\pi,\,v=1}=0\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0=0\,;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\,;$$

$$\partial z/\partial v\Big|_{u=\pi,\,v=1}=0\cdot\pi+(1/2)\cdot(-1)=-1/2\,;$$

в) $y_0=y(x_0)=\ln 1=0$; $dy/dx=1/x$; $dy/dx\big|_{x=1}=1/1=1$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,;\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1}=\frac{0}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}}=0\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}}=1\,;\quad \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\,;\quad \frac{dz}{dx}\Big|_{x=1}=0+1\cdot 1=1\,.\ \blacksquare$$

2.3.7. Диференціювання неявно заданих функцій

Теорема 1. (***умови існування неявної функції***). *Якщо функція* $F(x,y)$ *та її частинні похідні* $F'_y(x,y)$, $F'_x(x,y)$ *визначені та неперервні в деякому околі точки* $M_0(x_0,y_0)$ *і при цьому* $F(x_0,y_0)=0$, *а* $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, *то рівняння* $F(x,y)=0$ *в деякому околі точки* $M_0(x_0,y_0)$ *визначає єдину неявну неперервну і диференційовану функцію* $y=y(x)$, *причому* $y_0=y(x_0)$.

(Без доведення).

Теорема 2. *Нехай функція* $y=y(x)$ *задається неявно рівнянням* $F(x,y)=0$, *де функція* $F(x,y)$ *та її частинні похідні* $F'_y(x,y)$ *і* $F'_x(x,y)$ *неперервні в околі деякої точки* $M(x,y)$, *координати якої задовольняють це рівняння, і при цьому* $F'_y(x,y)\neq 0$. *Тоді в цій точці* $\boxed{y'_x=-F'_x(x,y)\big/F'_y(x,y)}$. (Без доведення).

Приклад 1. Написати рівняння дотичної до кривої

$$l:\quad x^3y^4-3y^2=4 \quad \text{у точці} \quad M_0(1;2)\,.$$

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;2)$ рівняння лінії

$$l: \quad F(x,y) = x^3y^4 - 3y^2 - 4 = 0;$$

$$M_0(1;2): \quad F(x_0, y_0) = 1^3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 0; \quad 0 = 0; \quad M_0 \in l.$$

Рівняння дотичної прямої $\quad y - y_0 = y_0^I \cdot (x - x_0)$.

Знайдемо шукану похідну $\quad y_0^I = y_x^I \Big|_{M_0}$:

$$y_x^I = -F_x^I \Big/ F_y^I; \quad F_x^I = 3x^2y^4; \quad F_y^I = 4x^3y^3 - 6y;$$

$$y_x^I = -\frac{3x^2y^4}{4x^3y^3 - 6y} = -\frac{3x^2y^3}{4x^3y^2 - 6};$$

$$y_0^I = y_x^I \Big|_{M_0} = -3 \cdot 1^2 \cdot 2^3 \Big/ (4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 6) = -12/5.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y - 2 = -\frac{12}{5}(x - 1); \quad y = -\frac{12}{5}x + \frac{22}{5}. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Нехай рівняння $F(x,y,z) = 0$ задає неявно функцію двох змінних $z = z(x,y)$. Тоді, фіксуючи y, за теоремою 2 отримаємо $\boxed{\partial z / \partial x = -F_x^I(x,y) \Big/ F_z^I(x,y)}$.

Фіксуючи x, аналогічно маємо $\boxed{\partial z / \partial y = -F_y^I(x,y) \Big/ F_z^I(x,y)}$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти значення частинних похідних функції $z = z(x,y)$, яка задана неявно рівнянням $x^2 + 2e^y + xz = 5$, у точці $M_0(1;0;2)$.

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;0;2)$ задане рівняння, що визначає деяку поверхню

$$S: \quad F(x,y,z) = x^2 + 2e^y + xz - 5 = 0; \quad M_0(1;0;2): F(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= 1^2 + 2 \cdot e^0 + 1 \cdot 2 - 5 = 0; \quad 0 = 0; \quad M_0 \in S.$$

Знайдемо шукані похідні:

$$F'_x = 2x + z; \quad F'_y = 2e^y; \quad F'_z = x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+z}{x};$$

$$\partial z/\partial x\big|_{M_0} = -(2\cdot 1 + 2)/1 = -4; \; \partial z/\partial x = -F'_y/F'_z; \; \partial z/\partial x = -2e^y/x;$$

$$\partial z/\partial y\big|_{M_0} = -2e^0/1 = -2. \; \blacksquare$$

Приклад 3. Продиференціювати неявно задану функцію $z = z(x, y)$ двох змінних: $y^2 - \sin yz + xz^4 - 3 = 0$.

$\square$ $F'_x = z^4$; $F'_y = 2y - z\cos yz$; $F'_z = -y\cos yz + 4xz^3$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{z^4}{-y\cos yz + 4xz^3}; \; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_y}{F'_z} - \frac{2y - z\cos yz}{-y\cos yz + 4xz^3}. \; \blacksquare$$

Приклад 4. Обчислити частинні похідні неявно заданої функції $z = z(x, y)$ у вказаній точці:

$x\sin y + y\sin x + z^2\sin x - z^3 + 1 = 0$; $M_0(0; \pi/2; 1)$. (Самостійно).

2.3.8. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала

Нехай поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка цієї поверхні (рис. 56). Рівняння дотичної площини α_d у точці P_0 будемо шукати у вигляді

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

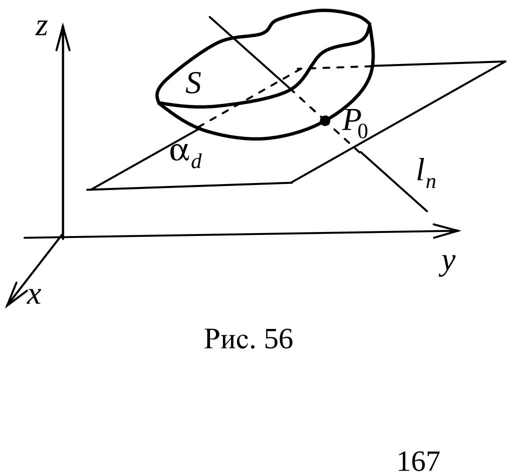

Рис. 56

де A, B – невизначені коефіцієнти.

З геометричного змісту частинних похідних $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$ випливає, що рівняння дотичних у точці P_0 до ліній перетину поверхні S: $z = f(x, y)$

площинами $y = y_0$ і $x = x_0$ мають відповідно вигляд:

$$\begin{cases} z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} z - z_0 = f_y'(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Ці дві прямі є лініями перетину дотичної площини α_d відповідно з площинами $y = y_0$ і $x = x_0$. Тому рівняння дотичних прямих можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ y = y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Порівнюючи ці рівняння з попередніми рівняннями дотичних прямих, знаходимо $A = f_x'(x_0, y_0)$; $B = f_y'(x_0, y_0)$.

Отже, ***рівняння дотичної площини*** α_d має вигляд:

$$\boxed{z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)}.$$

Вектор нормалі дотичної площини

$$\vec{n} = (A, B, C) = \left(f_x'(x_0, y_0),\ f_y'(x_0, y_0), -1\right)$$

називається також ***вектором нормалі до поверхні*** S: $z = f(x, y)$ у точці дотику $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пряма l_n, яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до дотичної площини α_d у цій точці, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***) до поверхні S: $z = f(x, y)$ у цій точці P_0.

Взявши вектор нормалі дотичної площини за напрямний вектор, можна записати ***канонічні рівняння нормальної прямої***:

$$\boxed{l_n: \ \frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо поверхня S задана неявно рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то:

1) рівняння дотичної площини

$$\boxed{\alpha_d: \ F'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot(y-y_0)+}$$

$$\boxed{+F'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot(z-z_0)=0}$$

і вектор нормалі $\vec{n}=\left(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\right)$;

2) канонічні рівняння нормальної прямої

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}}.$$

<u>Приклад</u>. Написати рівняння дотичної площини α_d та нормальної прямої l_n до заданої поверхні S в указаній точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$:

а) $x_0=0$, $y_0=2$, а поверхня S задана явно рівнянням $z=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

б) $P_0(1;-2;-1)$, а поверхня S задана неявно рівнянням $x^2+y^2/x-z^3+4yz=14$.

□ а) $z=f(x,y)=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

$$z_0=f(x_0, y_0)=0^2-2\cos 0+2-0^3=6; \quad P_0(0;2;6);$$

$$f'_x=2x+y\sin x-2; \quad f'_x\big|_{P_0}=2\cdot 0+2\cdot\sin 0-2=-2;$$

$$f'_y=-\cos x+3y^2; \quad f'_y\big|_{P_0}=-\cos 0+3\cdot 2^2=11;$$

$$\alpha_d: \ z-z_0=f'_x\big|_{P_0}(x-x_0)+f'_y\big|_{P_0}(y-y_0);$$

$$z-6=-2(x-0)+11(y-2); \quad -2x+11y-22-z+6=0;$$

$-2x+11y-z-16=0$; $2x-11y+z+16=0$ – дотична площина;

$$l_n: \quad \frac{x-x_0}{f'_x\big|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{f'_y\big|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{-1}; \quad \frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-6}{-1}$$

– нормальна пряма;

б) Перевіримо спочатку, чи належить указана точка $P_0(1;-2;-1)$ даній поверхні S:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2/x - z^3 + 4yz - 14 = 0; \; 1^2 + (-2)^2/1 - (-1)^3 +$$
$$+4\cdot(-2)\cdot(-1) - 14 = 0; \quad 0 = 0 \text{ вірно}; \quad P_0(1;-2;-1) \in S.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці дотику P_0:

$$F'_x = 2x - y^2/x^2; \; F'_x\big|_{P_0} = 2\cdot 1 - (-2)^2/1^2 = -2; \; F'_y = 2y/x + 4z;$$
$$F'_y\big|_{P_0} = 2\cdot(-2)/1 + 4\cdot(-1) = -8; \; F'_z = -3z^2 + 4y; \; F'_z\big|_{P_0} = -3\times$$
$$\times(-1)^2 + 4\cdot(-2) = -11.$$

Складаємо рівняння дотичної площини та нормальної прямої:

$$\alpha_d: \quad F'_x\big|_{P_0}(x-x_0) + F'_y\big|_{P_0}(y-y_0) + F'_z\big|_{P_0}(z-z_0) = 0;$$
$$-2\cdot(x-1) - 8\cdot(y+2) - 11\cdot(z+1) = 0; \; 2x - 2 + 8y + 16 +$$
$$+11z + 11 = 0; \quad 2x + 8y + 11z + 25 = 0$$ – дотична площина;

$$l_n: \quad \frac{x-x_0}{F'_x\big|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{F'_y\big|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{F'_z\big|_{P_0}}; \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z+1}{-11};$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z+1}{11}$$ – нормальна пряма. ■

Порівнюючи рівняння дотичної площини

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

з формулою повного диференціала, яку можна подати у вигляді

$$dz = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

бачимо, що праві частини цих виразів збігаються.

Отже, й ліві частини є рівними. Тобто, *повний диференціал функції* dz *дорівнює приросту* $\Delta z = z - z_0$ *аплікати дотичної площини* α_d, *проведеної до поверхні* $S:\ z = f(x, y)$ *у точці* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 57). (Геометричний зміст повного диференціалу).

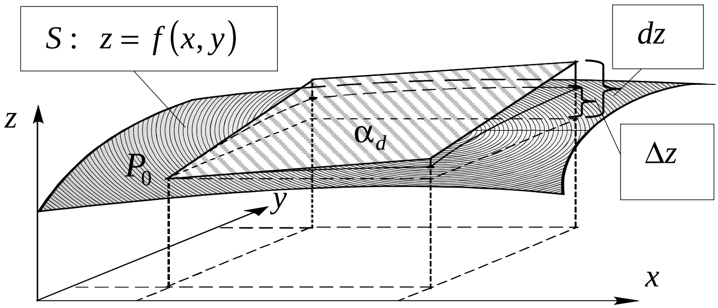

Рис. 57

2.3.9. Похідна за напрямом і градієнт

Нехай у деякому околі фіксованої точки $M(x, y, z)$ задано функцію трьох змінних $u = u(M) = u(x, y, z)$. Проведемо з цієї точки M довільний ненульовий вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$. У напрямі цього вектора на деякій відстані Δl від початку M візьмемо іншу точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ (рис. 58). Тоді

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\ ;$$

$$\Delta x = \Delta l\ \cos\alpha;\quad \Delta y = \Delta l\ \cos\beta;\quad \Delta z = \Delta l\ \cos\gamma\,.$$

Різниця $\Delta_l u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x, y, z)$ значень функції в точках M_1 і M називається ***приростом функції*** $u = u(x, y, z)$ ***у напрямі вектора*** $\vec{l}$.

Якщо функція $u = u(x, y, z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta l \to 0$.

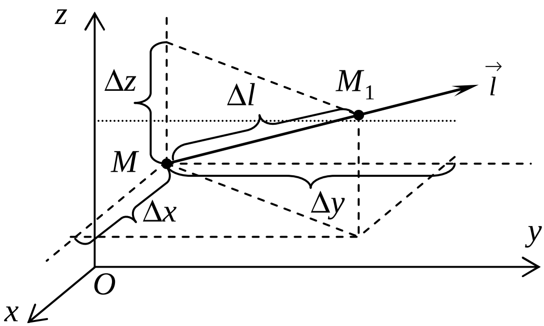

Рис. 58

Тоді $\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta l \cos\gamma +$

$$+\varepsilon_1 \Delta l \cos\alpha + \varepsilon_2 \Delta l \cos\beta + \varepsilon_3 \Delta l \cos\gamma$$.ё

Похідною функції $u = u(x, y, z)$ ***у точці*** $M(x, y, z)$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$ називається границя $\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

і визначає швидкість змінювання функції за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці $M(x, y, z)$.

Зауваження. Якщо напрям вектора $\vec{l}$ співпадає з напрямом одного з координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ чи $\vec{k}$, то похідна за напрямом $\partial u/\partial l$ співпадає з відповідною частинною похідною:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial i}=\frac{\partial u}{\partial x}};\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial j}=\frac{\partial u}{\partial y}};\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial k}=\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Приклад 1. Для заданої функції $u=u(x,y,z)$ і вказаного вектора $\vec{l}$ знайти похідну за напрямом $\partial u/\partial l$ у зазначеній точці M :

а) $u=(x^2+y^2)tg\,z$; $\quad \vec{l}(-1;\,2;\,-2)$; $\quad M(1;-2;\,\pi/4)$;

б) $u=\sqrt{x^2+2y}\ln(x+y+z)$; $\quad \vec{l}(-6;\,2;\,-3)$; $\quad M(3;-4;2)$.

□ а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2}{\cos^2 z}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=2\cdot1\cdot tg\frac{\pi}{4}=2;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=2\cdot(-2)\cdot tg\frac{\pi}{4}=-4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{\cos^2 z};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{1^2+(-2)^2}{\cos^2(\pi/4)}=10;\ |\vec{l}\,|=\sqrt{l_x^2+l_y^2+l_y^2};$$

$$|\vec{l}\,|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3;$$

$$\cos\alpha=l_x\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\beta=l_y\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\gamma=l_z\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\alpha=-1/3;$$

$$\cos\beta=\frac{2}{3};\ \cos\gamma=\frac{-2}{3};\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\partial u/\partial l\,\Big|_M=2\cdot(-1/3)+(-4)\cdot(2/3)+10\cdot(-2/3)=-10.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $\partial u/\partial l\,\Big|_M=-1$. ■

Градієнтом функції $u=u(x,y,z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\boxed{grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}.$$

Теорема (***Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом***). *Похідна* $\partial u/\partial l$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *дорівнює проекції градієнта* $grad\, u$ *на цей вектор* (рис. 59):

$$\boxed{\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\, u}\,.$$

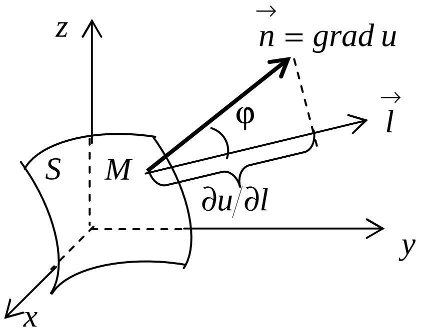

Рис. 59

□ Розглянемо одиничний вектор $\vec{l_0} = \vec{l}\big/|\vec{l}|$, $|\vec{l_0}|=1$, що відповідний вектору $\vec{l}$:

$$\vec{l_0} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}\,.$$

Знайдемо у координатній формі скалярний добуток градієнта $grad\, u$ на одиничний вектор $\vec{l_0}$:

$$gradu \cdot \vec{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Вираз у правій частині отриманої рівності є похідною за напрямом $\partial u/\partial l$. Отже, $grad\, u \cdot \vec{l_0} = \partial u/\partial l$.

Нехай φ – кут між векторами $grad\, u$ і $\vec{l}$. Тоді за означенням скалярного добутку, враховуючи, що $|\vec{l_0}|=1$, маємо

$$\partial u/\partial l = grad\, u \cdot \vec{l_0} = |grad\, u| \cdot |\vec{l_0}| \cdot \cos\varphi = |grad\, u| \cdot \cos\varphi\,.$$

Вираз у правій частині цієї рівності є проекцією градієнта на вектор $\vec{l}$. Отже, $\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\, u$. ■

Основні властивості градієнта:

1) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *функції* $u = u(x, y, z)$ *у даній точці*

$M(x,y,z)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта* $grad\,u$. *Це найбільше значення похідної* $\partial u/\partial l$ *дорівнює модулю градієнта*:

$$\boxed{(\partial u/\partial l)_{max} = |\,grad\,u\,|} \quad \text{при} \quad \boxed{\vec{l}_{\max} = grad\,u}.$$

(<u>Фізичний зміст</u> градієнта).

Іншими словами, *градієнт указує напрям найшвидшого зростання функції в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості*:

$$\boxed{\vec{l}_{\max} = grad\,u}; \quad \boxed{|\,grad\,u\,| = (\partial u/\partial l)_{max}}.$$

□ $\partial u/\partial l = |grad\,u| \cdot \cos\varphi$; $(\partial u/\partial l)_{max} = |\,grad\,u\,|$ при $\cos\varphi_{\max} = 1$.

Тоді $\varphi_{\max} = 0 \Rightarrow \vec{l}_{\max} \uparrow\uparrow grad u$. ■

2) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *функції* $u = u(x,y,z)$ *у довільній точці* $M(x,y,z)$ *за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта* $grad\,u$, *дорівнює нулю*: $\boxed{\vec{l} \perp grad u \;\Rightarrow\; \partial u/\partial l = 0}$.

□ $\partial u/\partial l = |grad\,u| \cdot \cos\varphi$; $\vec{l} \perp grad u$; $\varphi = \pi/2$; $\cos\varphi = 0$;

$\partial u/\partial l = 0$. ■

3) *градієнт* $grad\,u$ *функції* $u = u(x,y,z)$ *у кожній точці* $M(x,y,z)$ *перпендикулярний до поверхні рівня* $S:\ u(x,y,z) = C$, *яка проходить через цю точку* (рис. 59). (<u>Геометричний зміст</u> градієнта). Іншими словами, *градієнт* $grad\,u$ *можна прийняти за вектор нормалі* $\vec{n}$ *до поверхні рівня* $S:\ u(x,y,z) = C$ *у відповідній точці* $M(x,y,z)$

$$\boxed{S:\ u(x,y,z) = C}; \quad grad\,u \perp S \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{n} = grad\,u}.$$

□ Оскільки поверхня рівня S задається неявно рівнянням $F(x,y,z) = u(x,y,z) - C = 0$, то її вектор нормалі

$\vec{n} = \left(\partial F/\partial x\big|_M ,\ \partial F/\partial y\big|_M ,\ \partial F/\partial z\big|_M \right)$. Але $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(u - C) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$;

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial y};\ \ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Тоді $\vec{n} = \left(\partial u/\partial x\big|_M ,\ \partial u/\partial y\big|_M ,\ \partial u/\partial z\big|_M \right) = grad\, u\big|_M$. ■

<u>Приклад 2</u>. Для заданої функції знайти градієнт і модуль градієнта в указаній точці:

а) $z = x^2 y - 5\sin(3x - 2y)$; $M_0(2, 3)$;

б) $u = 3xyz - 2x^3 y + y^2/z$; $M_0(-1, 2, 1)$.

□ а) $grad\, z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 15\cos(3x - 2y)$;

$$\partial z/\partial y = x^2 + 10\cos(3x - 2y);\ \ \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 2\cdot 2\cdot 3 -$$

$$-15\cos(3\cdot 2 - 2\cdot 3) = -3;\ \partial z/\partial y\big|_{M_0} = 2^2 + 10\cos(3\cdot 2 - 2\cdot 3) = 14;$$

$$grad\, z\big|_{M_0} = -3\vec{i} + 14\vec{j};\ \ \left| grad\, z \right| = \sqrt{(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2};$$

$$\left| grad\, z \right|_{M_0} = \sqrt{(-3)^2 + 14^2} = \sqrt{205};$$

б) $grad\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\partial u/\partial x = 3yz - 6x^2 y$;

$$\partial u/\partial y = 3xz - 2x^3 + 2y/z;\ \partial u/\partial z = 3xy - y^2/z^2;\ \ \partial u/\partial x\big|_{M_0} =$$

$$= 3\cdot 2\cdot 1 - 6\cdot(-1)^2\cdot 2 = -6;\ \ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 3\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot(-1)^3 +$$

$$+ 2\cdot 2/1 = 3;\ \ \partial u/\partial z\big|_{M_0} = 3\cdot(-1)\cdot 2 - 2^2/1^2 = -8;\ \ grad\, u\big|_{M_0} =$$

$$= -6\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k};\ \left| grad\, u \right| = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2};$$

$$\left| grad\, u \right|_{M_0} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-8)^2} = \sqrt{109}.$$ ■

Приклад 3. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u = \ln(2x^4 + y^2 - 2z^4)$ у точці $M_0(1, -2, -1)$.

□ Напрям найбільшої швидкості зростання функції співпадає з напрямом градієнта, а її величина дорівнює модулю градієнта:

$$\left(\partial u/\partial l\right)_{max}\Big|_{M_0} = \left| grad\, u \right|_{M_0} \quad \text{при} \quad \vec{l}_{\max} = grad\, u\big|_{M_0}.$$

Знайдемо градієнт і його модуль у заданій точці M_0:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 8x^3\big/(2x^4 + y^2 - 2z^4);$$

$$\partial u/\partial y = 2y\big/(2x^4 + y^2 - 2z^4); \quad \partial u/\partial z = -8z^3\big/(2x^4 + y^2 - 2z^4);$$

$$\partial u/\partial x\big|_{M_0} = (8\cdot 1^3)\Big/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2; \quad \partial u/\partial y\big|_{M_0} =$$

$$= 2\cdot(-2)\Big/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = -1; \quad \partial u/\partial z\big|_{M_0} = -8\cdot(-1)^3 :$$

$$:\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2; \quad grad\, u\big|_{M_0} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\left| grad\, u \right| = \sqrt{\left(\partial u/\partial x\right)^2 + \left(\partial u/\partial y\right)^2 + \left(\partial u/\partial x\right)^2};$$

$$\left| grad\, u \right|_{M_0} = \; = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Тоді $\left(\partial u/\partial l\right)_{max}\Big|_{M_0} = 3$ при $\vec{l}_{\max} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. ■

2.3.10. Частинні похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ функції двох змінних $z = f(x, y)$ також є функціями двох змінних x і y, а тому самі можуть мати частинні похідні.

Частинна похідна по x від частинної похідної по x називається ***другою чистою частинною похідною по*** x і позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{ або } z''_{xx}. \text{ Таким чином, } \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}.$$

Аналогічно частинна похідна по y від частинної похідної по y називається ***другою чистою частинною похідною по*** y та позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, або z''_{yy}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по x взяти частинну похідну по y, то отримаємо ***другу мішану частинну похідну по*** x ***і*** y, яка

Позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, або z''_{xy}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по y взяти частинну похідну по x, то одержимо ***другу мішану частинну похідну по*** y ***і*** x (з іншим порядком диференціювання), яка позначається

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, або z''_{yx}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

У загальному випадку $\partial^2 z / \partial y \partial x \neq \partial^2 z / \partial x \partial y$.

<u>Зауваження 1</u>. Аналогічно частинним похідним другого порядку вводяться частинні похідні третього, четвертого і т.д., порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right); \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

<u>Теорема</u>. *Для неперервних мішаних частинних похідних порядок диференціювання значення не має, зокрема* $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}$.

(Без доведення).

<u>Приклад 1</u>. Для заданої функції $z = f(x, y)$ перевірити рівність указаних мішаних частинних похідних:

а) $z = \sin(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; б) $z = y \ln x$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (\sin(xy))'_x = y\cos(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y\cos(xy))'_y =$

$= \cos(xy) - xy\sin(xy)$; $\partial z / \partial y = (\sin(xy))'_y = x\cos(xy)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x\cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2};$$

$$\partial^3 z / \partial x \partial y \partial x = \partial^3 z / \partial x^2 \partial y. \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Перевірити, що задана функція $z = f(x, y)$ задовольняє вказаній умові:

$$\text{а) } z = arctg\,\frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\text{б) } z = x\sin(x - y); \quad x\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2z = 0.$$

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \times$$

$$\times\left(-x/(x^2 + y^2)\right) = 0; \quad (-2xy - 2xy + 4xy)/(x^2 + y^2)^2 = 0; \quad 0 = 0.$$

Таким чином, задана функція задовольняє вказаній умові.

б) $\partial z / \partial x = \sin(x - y) + x\cos(x - y)$; $\partial z / \partial y = -x\cos(x - y)$;

$$\partial^2 z / \partial y^2 = -x\sin(x - y); \quad x\big(\sin(x - y) + x\cos(x - y) -$$

$$-x\cos(x - y)\big) - \big(-x\sin(x - y)\big) - 2x\sin(x - y) = 0; \quad 0 = 0.$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

Приклад 3. Для заданої функції $u = f(x, y, z)$ знайти значення вказаної частинної похідної в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u = x^2yz^4 + x^3y^2z + yz^2; \quad M_0(-1;2;1); \quad \partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z.$$

□ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xyz^4 + 3x^2y^2z$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2yz^4 + 6xy^2z$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} =$

$= 2z^4 + 12xyz$; $\partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z = 8z^3 + 12xy$; $\partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z \Big|_{M_0} =$

$$= 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot (-1) \cdot 2 = 8 - 24 = -16. \quad ■$$

Диференціалом другого порядку (***другим диференціалом***) функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається диференціал від її повного диференціалу, тобто - $\boxed{d^2z = d(dz)}$.

Зауваження 2. Аналогічно визначаються диференціали більш високого порядку: $d^3z = d(d^2z)$; $\boxed{d^nz = d(d^{n-1}z)}$.

Зауваження 3. Якщо функція $z = f(x, y)$ має відповідні неперервні частинні похідні, то

$$\boxed{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}.$$

Зауваження 4. Нехай функція n змінних $u = f(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ $(m+1)$ раз диференційована в деякому околі $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$. Тоді для довільної точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ з цього околу справджується ***формула Тейлора***, яку компактно можна подати в диференціальній формі:

$$\boxed{u(M) = u\big|_{M_0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k u\big|_{M_0} + o(\rho^m)},$$

де $\boxed{\rho = M_0M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon}$.

Цю формулу до членів другого порядку включно для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна записати в розгорнутому вигляді:

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)\right) +}$$

$$\boxed{+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) +\right.}$$

$$\boxed{\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right) + o(\rho^2)}.$$

Зауваження 6. Диференціали вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Приклад 4. Розкласти функцію $z = x\ln(x + 2y)$ за формулою Тейлора до членів другого порядку включно в околі точки $M_0(1,0)$

□ Обчислимо значення заданої функції, її перших та других частинних похідних у вказаній точці $M_0(1,0)$:

$z = x\ln(x + 2y)$; $\quad z(M_0) = 0$;

$\partial z/\partial x = \ln(x + 2y) + x/(x + 2y)$; $\quad \partial z(M_0)/\partial x = 1$;

$\partial z/\partial y = 2x/(x + 2y)$; $\quad \partial z(M_0)/\partial y = 2$;

$\partial^2 z/\partial x^2 = (x + 4y)/(x + 2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial x^2 = 1$;

$\partial^2 z/\partial x\partial y = 4y/(x + 2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial x\partial y = 0$;

$\partial^2 z/\partial y^2 = -4x/(x + 2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial y^2 = -4$.

Запишемо розвинення заданої функції за формулою Тейлора:

$$x\ln(x + 2y) = 0 + \big(1\cdot(x - 1) + 2\cdot(y - 0)\big) + (1/2)\big(1\cdot(x - 1)^2 +$$

$$+ 2\cdot 0\cdot(x - 1)(y - 0) + (-4)\cdot(y - 0)^2\big) + o(\rho^2);$$

$$x\ln(x+2y)=(x-1)+2y+(1/2)(x-1)^2-4y^2+o(\rho^2),$$

де $\rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. ■

<u>Приклад 5</u>. Розкласти функцію $z=xe^{y/x}$ за формулою Тейлора до членів другого порядку включно в околі точки $M_0(1,0)$

(Розв'язати самостійно).

2.3.11. Економічний зміст частинних похідних

Нехай задана виробнича функція $z=f(x,y)$, що описує, наприклад, обсяг виробленої продукції z в залежності від об'єму витрачених двох видів ресурсів x і y. Припустимо, що фактор x змінився на Δx, а кількість фактора y залишилася незмінною.

При цьому виробнича функція одержала частинний приріст $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$. Тоді $\Delta_x z/\Delta x$ – середній приріст виробничої функції на одиницю приросту фактора x, зокрема, середній об'єм виробленої продукції z, що припадає на одиницю ресурсу x. Переходячи до границі при $\Delta x\to 0$, отримаємо $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ – ***гранична*** (***маргінальна***) ***продуктивність фактора*** x (граничний об'єм виробленої продукції z, що припадає на одиницю ресурсу x). Аналогічно, ***гранична*** (***маргінальна***) ***продуктивність фактора*** y: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Частинна еластичність виробничої функції $z=f(x,y)$ ***відносно фактора*** x визначається таким чином:

$$\boxed{E_x(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z/z}{\Delta x/x}=\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}}.$$

Вона задає приблизно коефіцієнт пропорційності між відсотковим відношенням $\Delta z/z$ функції z і відсотковим відношенням $\Delta x/x$ аргументу x, коли y – величина стала: $E_x(z)\approx\dfrac{\Delta z/z}{\Delta x/x}$. Тобто, відсотковий приріст виробничої функції $z = f(x,y)$ відповідно до відсоткового приросту фактора x за умови, що фактор y залишається незмінним, визначається наближеною рівністю $\Delta z/z \approx E_x(z)\cdot(\Delta x/x)$.

Аналогічно визначається ***частинна еластичність виробничої функції*** $z = f(x,y)$ ***відносно фактора*** y:

$$\boxed{E_y(z) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z/z}{\Delta y/y} = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Приклад 1. Випуск деякого товару характеризується виробничою функцією $z = z(x,y) = 20x - x^2 - 2y^2 + 3xy$, де x і y – чинники виробництва. Знайти: а) граничні продуктивності $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ факторів x і y у точці $M_0(4,2)$; б) частинні еластичності $E_x(z)$ і $E_y(z)$ функції за кожним чинником у точці $M_0(4,2)$.

□ а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 20 - 2x + 3y$; $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 20 - 2\cdot 4 + 3\cdot 2 = 18$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 3x;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -4\cdot 2 + 3\cdot 4 = 4;$$

б) $E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}(20 - 2x + 3y)$; $z\big|_{M_0} = 20\cdot 4 - 4^2 - 2\cdot 2^2 +$

$$+3\cdot 4\cdot 2 = 80;\quad E_x(z)\big|_{M_0} = \frac{4}{80}\cdot 18 = 0{,}9;$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}(-4y + 3x);\quad E_y(z)\big|_{M_0} = \frac{2}{80}\cdot 4 = 0{,}1.\quad ■$$

Конкретизуємо економічний зміст частинних похідних на прикладі ***виробничої функції Кобба – Дугласа***

$$\boxed{Q = Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}},$$

що є функцією двох змінних K і L. Тут Q – об’єм виробленої продукції; K – об'єм фондів (капіталу); L – об'єм трудових ресурсів; A – сталий параметр, що характеризує продуктивність прийнятої технології виробництва, $A > 0$; α, β – сталі коефіцієнти, $\alpha, \beta \geq 0$ і $\alpha + \beta \leq 1$. (Величини Q, K і L можуть задаватися у вартісному чи натуральному вираженні).

Величини $l = Q/L$, $k = Q/K$ і $f = K/L$ називають відповідно ***середньою продуктивністю праці*** (кількість продукції, виробленої одним робітником), ***середньою фондовіддачею*** (кількість продукції, що вироблена одним верстатом) і ***середньою фондоозброєністю*** (вартість фондів, що припадають на одиницю трудових ресурсів).

Зафіксуємо поточний стан підприємства, тобто об'єм фондів K і число працівників L. Їм відповідає певний випуск продукції $Q = Q(K, L)$. Якщо, не змінюючи K, найняти ще одного працівника, то одержимо приріст випуску продукції $\Delta Q = Q(K, L+1) - Q(K, L)$, що є частинним приростом функції $Q = Q(K, L)$ за змінною L, і тому $\Delta Q \approx d_L Q = Q_L'(K, L) \cdot \Delta L$. Оскільки $\Delta L = 1$, то $\Delta Q \approx Q_L'(K, L)$.

Отже, частинна похідна від виробничої функції за об'ємом трудових ресурсів приблизно дорівнює додатковій вартості продукції, що виготовлена ще одним робітником. Тому частинна похідна $Q_L' = \beta A K^{\alpha} L^{\beta - 1}$ називається ***граничною продуктивністю праці***.

Якщо ж, не змінюючи L, збільшити фонди ще на одиницю – купити ще один верстат $\Delta K = 1$, то додаткова вартість продукції, що виготовлена на ньому, приблизно дорівнює частинній похідній виробничої функції за об'ємом фондів. Тому частинна похідна $Q_K' = \alpha A K^{\alpha - 1} L^{\beta}$ називається ***граничною фондовіддачею***.

Як гранична продуктивність праці, так і гранична фондовіддача – це абсолютні величини. Але в економіці надзвичайно цікаво знати на скільки відсотків зміниться випуск продукції, якщо число робітників збільшиться на 1%, або якщо фонди зростуть на 1%. Тому розглядаються поняття:

еластичність випуску продукції за об'ємом трудових ресурсів

$$\boxed{E_L(Q) = \frac{L}{Q} \cdot Q_L^{/} = \frac{L}{Q} \cdot \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1} = \beta}$$

та ***еластичність випуску продукції за об'ємом фондів***

$$\boxed{E_K(Q) = \frac{K}{Q} \cdot Q_K^{/} = \frac{K}{Q} \cdot \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta} = \alpha}.$$

Звідси маємо <u>економічний зміст параметрів функції Кобба – Дугласа</u>: α *– еластичність випуску за фондами;* β *– еластичність випуску за працею*.

<u>Приклад 2</u>. Нехай виробнича функція деякої фірми є функцією Кобба – Дугласа $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$. Відомо, для зростання випуску продукції Q на 5% треба збільшити фонди K на 10% або чисельність працівників L на 15%. За рік один працівник виготовляє продукції на 48 000 грн., всього на фірмі 1000 працівників, а фонди оцінюються в 64 млн. грн. Записати виробничу функцію. Знайти середню фондовіддачу $k = Q/K$ і середню фондоозброєність $f = K/L$.

□ Зрозуміло, що еластичність випуску продукції за фондами $\alpha = 5\%/10\% = 1/2$, а за працею $\beta = 5\%/15\% = 1/3$, при цьому $\alpha + \beta = 1/2 + 1/3 = 5/6 \le 1$. Отже, функція Кобба – Дугласа має вигляд $Q = A \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/3}$. Тоді, враховуючи, що $Q = l \cdot L$, і підставляючи відомі значення $l = 48000$, $L = 1000$, $K = 64 \cdot 10^6$, отримаємо:

$$Q = 48000 \cdot 1000 = 48 \cdot 10^6; \;\; 48 \cdot 10^6 = A \cdot (64 \cdot 10^6)^{1/2} \cdot (1000)^{1/3};$$

$$48 \cdot 10^6 = A \cdot 8 \cdot 10^4; \;\; A = 600; \;\; Q = 600 K^{1/2} L^{1/3}$$

– виробнича функція.

Середня фондовіддача $k = \dfrac{Q}{K} = \dfrac{48 \cdot 10^6}{64 \cdot 10^6} = \dfrac{3}{4}$, а середня фондоозброєність $f = \dfrac{K}{L} = \dfrac{64 \cdot 10^6}{1000} = 64000$. ■

2.4. Екстремум та умовний екстремум функції багатьох змінних

2.4.1. Екстремум функції двох змінних. Необхідні умови екстремуму. Стаціонарні точки

Нехай функція двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ визначена в деякій області D і $M_0(x_0, y_0)$ – внутрішня точка цієї області. Точка M_0 називається ***точкою максимуму*** функції $z = f(M)$, якщо значення функції в цій точці M_0 більше, ніж значення функції у всіх близьких сусідніх точках:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) > f(M) \ \Leftrightarrow\ M_0 - \max,$$

де $U(M_0, \varepsilon)$ – деякий ε-окіл точки M_0, $\varepsilon > 0$.

Аналогічно вводиться поняття ***точки мінімуму***:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) < f(M) \ \Leftrightarrow\ M_0 - \min\ .$$

Точки максимуму та мінімуму називаються ***точками екстремуму***. Значення функції $z = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ у точці екстремуму M_0 називається її ***екстремальним значенням*** (***екстремумом***).

Зауваження 1. Розглянутий екстремум є ***строгим внутрішнім локальним екстремумом***. Його не треба плутати з ***глобальним екстремумом*** у деякій заданій області D (найбільше $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ та найменше $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ значення функції в області D).

Зауваження 2. Розрізняють ***гладкий екстремум*** (рис. 60), в якому функція диференційовна, і ***гострий екстремум*** (рис. 61).

Теорема (***необхідні умови гладкого екстремуму***). *Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю*:

$$\boxed{\begin{cases} \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 0; \\ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 0. \end{cases}}$$

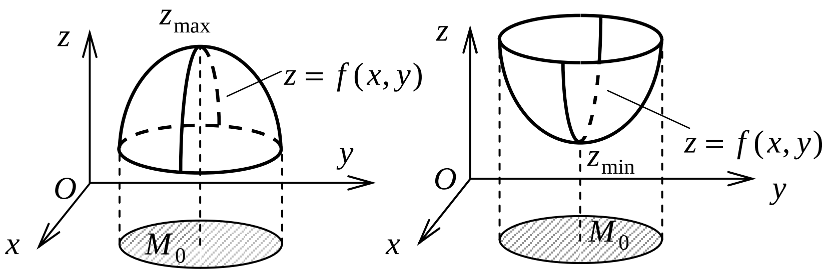

Рис. 60

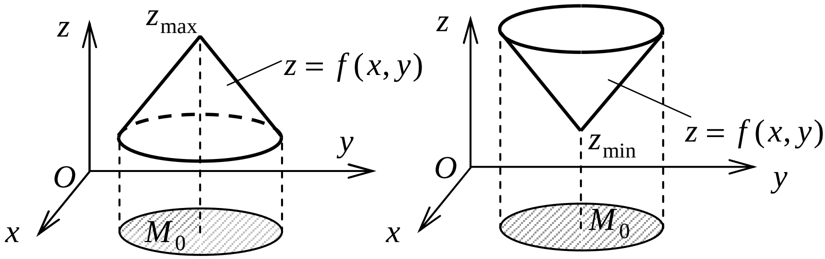

Рис. 61

□ Зафіксуємо змінну y, поклавши $y = y_0 = const$. Тоді точка x_0 є точкою екстремуму диференційованої функції однієї змінної $z = \varphi(x) = f(x, y_0)$. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної $d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по x функції $z = f(x, y)$: $d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = \partial f/\partial x\big|_{M_0}$. Отже, $\partial f/\partial x\big|_{M_0} = 0$.

Аналогічно, якщо зафіксувати аргумент x, поклавши $x = x_0 = const$, то отримаємо диференційовану функцію однієї змінної $z = \psi(y) = f(x_0, y)$. Ця функція має екстремум при $y = y_0$. У точці екстремуму y_0 похідна одержаної функції теж дорівнює нулю: $d\psi/dy\big|_{y=y_0}=0$. Але вказана похідна є частинною похідною по y функції $z=f(x,y)$: $d\psi/dy\big|_{y=y_0}==\partial f/\partial y\big|_{M_0}$.

Отже, $\partial f/\partial y\big|_{M_0}=0$. У точці екстремуму $M_0(x_0,y_0)$ обидві знайдені умови повинні виконуватись одночасно. ■

Зауваження 3. У точці гострого екстремуму хоча б одна з частинних похідних першого порядку не існує, а всі інші дорівнюють нулю (***необхідні умови гострого екстремуму***).

Точки, в яких виконуються необхідні умови екстремуму, тобто всі частинні похідні або дорівнюють нулю або не існують, називаються ***критичними точками*** функції $z=z(M)$.

Критичні точки, в яких всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються ***стаціонарними точками*** функції $z=z(M)$.

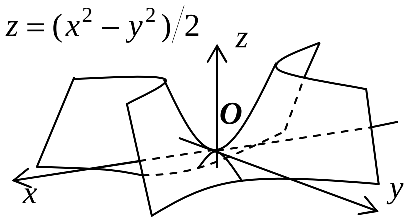

Рис. 62

Зауваження 4. Стаціонарна точка – це точка, що «підозріла» на гладкий екстремум. Тобто в цій точці екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $z=(x^2-y^2)/2$ (гіперболічний параболоїд на рис. 62) початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки $\partial z/\partial x\big|_O=x\big|_O=0$; $\partial z/\partial y\big|_O=-y\big|_O=0$, але екстремум у ній відсутній ($O(0,0)$ – ***сідлова точка*** (***точка перевалу***) функції).

Зауваження 5. Надалі обмежимося розглядом тільки гладкого екстремуму.

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції:

а) $u=x^3+xy+2yz-x+5y+4z-3$; б) $z=(x-y-2)e^{x^2+y^2}$.

□ а) Для знаходження стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = 0 \\ \partial u/\partial y = 0 \\ \partial u/\partial z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial u/\partial x = 3x^2 + y - 1 \\ \partial u/\partial y = x + 2z + 5 \\ \partial u/\partial z = 2y + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ 3x^2 - 2 - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad z = -(5+x)/2; \\ z_1 = -(5+1)/2 = -3; \;\; z_2 = -(5-1)/2 = -2; \\ M_1(1,-2,-3), \;\; M_2(-1,-2,-2) \end{array}$$

– стаціонарні точки.

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $M_0(1/2,-1/2)$ ■

2.4.2. Достатні умови екстремуму

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці:

$$\boxed{A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}}$$

і обчислимо визначник $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2}$.

Теорема (***достатні умови гладкого екстремуму***). 1) *Якщо визначник* Δ *додатний, то* M_0 *– точка екстремуму, причому* а) M_0 *– точка мінімуму, якщо* $A > 0$; б) M_0 *– точка максимуму, якщо* $A < 0$. 2) *Якщо визначник* Δ *від’ємний, то у точці* M_0 *екс-*

тремум відсутній (M_0 – сідлова точка функції $z = f(x, y)$).
3) *Якщо визначник* Δ *дорівнює нулю, то у точці* M_0 *екстремум може бути, а може і не бути.* (Сумнівний випадок. Потрібні додаткові дослідження.) (Без доведення).

Приклад 1. Дослідити функції на екстремум:

а) $z = x^3 + y^3 - 6xy - 2$; б) $z = x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 28y + 1$;

в) $z = (x+2y)^3/3 - x^2/2 - 3y^2 - 2xy - 2y + 2$; г) $z = xe^{-x-y^2}$.

□ а) Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\partial z/\partial x = 3x^2 - 6y; \quad \partial z/\partial y = 3y^2 - 6x.$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 0 \\ \partial z/\partial y = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \begin{matrix} y = x^2/2; \\ \left(x^2/2\right)^2 - 2x = 0; \end{matrix}$$

$$\frac{x^4}{4} - 2x = 0; \quad x^4 - 8x = 0; \quad \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} x_1 = 0 & y_1 = 0; \\ x_2 = 2 & y_2 = 2^2/2 = 2. \end{matrix}\right.$$

Отже, стаціонарні точки $M_1(0,0)$; $M_2(2,2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\partial^2 z/\partial x^2 = 6x; \quad \partial^2 z/\partial y^2 = 6y; \quad \partial^2 z/\partial x\partial y = -6.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(0,0)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_1(0,0)$ і значення визначника Δ:

$$A = \partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0; \; C = \partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0;$$

$$B = \partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_1} = -6; \quad \Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці M_1 екстремуму немає.

Дослідимо на екстремум точку $M_2(2,2)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_2(2,2)$ і значення визначника Δ:

$$A = \partial^2 z/\partial x^2 \Big|_{M_2} = 6\cdot 2 = 12;\quad C = \partial^2 z/\partial y^2 \Big|_{M_2} = 6\cdot 2 = 12;$$

$$B = \partial^2 z/\partial x\partial y \Big|_{M_2} = -6;\quad \Delta = AC - B^2 = 12\cdot 12 - (-6)^2 = 108 > 0.$$

З нерівності $\Delta > 0$ випливає, що M_2 – точка екстремуму.

Оскільки $A = 12 > 0$, то M_2 – точка мінімуму. Знайдемо мінімальне значення функції у цій точці:

$$z_{\min} = z(M_2) = 2^3 + 2^3 - 6\cdot 2\cdot 2 - 2 = -10.$$

Пункти б), в) і г) розв'язати самостійно. ■

<u>Приклад 2</u>. Підприємство виробляє товари двох видів A і B. Загальні щоденні витрати V на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B у грошовому еквіваленті задаються функцією $V = 620 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2$ грош. од. Визначити кількості одиниць товарів A і B, при яких загальні витрати підприємства будуть мінімальними , і обчислити ці мінімальні витрати.

□ Щоб знайти оптимальну кількість одиниць x та y товарів A і B, необхідно дослідити на екстремум функцію

$$V = 620 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2.$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$V'_x = -14 + 0{,}4x;\quad V'_y = -10 + 0{,}2y$$

Прирівнюючи їх до нуля, отримаємо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -14 + 0{,}4x = 0 \\ -10 + 0{,}2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}4x = 14 \\ 0{,}2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 50 \end{cases}.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку $V''_{xx} = 0{,}4$; $V''_{yy} = 0{,}2$; $V''_{xy} = 0$. Маємо $A = 0{,}4$; $C = 0{,}2$; $B = 0$.

Знаходимо $\Delta = AC - B^2 = 0{,}4\cdot 0{,}2 - 0^2 = 0{,}08$. Оскільки

$\Delta > 0$ і $A > 0$, то маємо мінімум. Обчислимо значення функції $V(x, y)$ у точці мінімуму $(35;50)$:

$$V(35;50) = 620 - 14 \cdot 35 - 10 \cdot 50 + 0{,}2 \cdot 35^2 +$$

$$+ 0{,}1 \cdot 50^2 = 125 \text{ (грош. од.).} \qquad \blacksquare$$

2.4.3. Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна і диференційована в замкненій області D. Тоді вона досягає найменшого (найбільшого) значення на множині D або в одній із стаціонарних точок, що належать цій області D, або в одній із точок межі області D.

Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z = f(x, y)$ у замкненій області D:

1) *Побудувати область* D *в прямокутній системі координат* Oxy. *Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області* D*;*

2) *Знайти стаціонарні точки функції* $z = f(x, y)$. *Виділити з них ті, що лежать в області* D. *Обчислити значення функції у виділених точках;*

3) *Знайти значення функції в усіх кутових точках межі області* D*;*

4) *На кожній ділянці межі області* D *перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції* $z = f(x, y)$ *врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;*

5) *Порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед них найменше – глобальний мінімум* $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ *– і найбільше – глобальний максимум* $\max\limits_{(x,y)\in D} z$.

Приклад 1. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції в замкненій області D, що обмежена вказаними лініями:

а) $z = 3x^2 + y^2 - 4xy - x$; D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$;

б) $z = x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 10y$; D: $x = 0$; $y = -2$; $y = -x$.

□ а) У декартовій системі координат Oxy побудуємо вказані лінії межі області D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$ і позначимо штриховкою саму область D (рис. 63). Кутові точки визначаються як точки попарного перетину цих ліній:

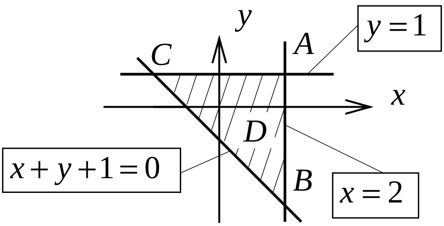

Рис. 63

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1; \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 6x - 4y - 1 = 0 \\ \partial z/\partial y = 2y - 4x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2x \\ 6x - 4\cdot 2x - 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = -1/2; \\ y = -1. \end{matrix}$$

Оскільки стаціонарна точка $M(-1/2; -1) \in D$, то обчислимо відповідне значення функції:

$$z\big|_M = 3(-1/2)^2 + (-1)^2 - 4(-1/2)(-1) - (-1/2) = 1/4.$$

Досліджуємо функцію на межі області D, яка складається з ділянок AB, BC, AC, що сполучаються в кутових точках $A(2;1)$, $B(2; -3)$, $C(-2; 1)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках:

$$z\big|_A = 3\cdot 2^2 + 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2 = 3; \quad z\big|_B = 3\cdot 2^2 + (-3)^2 -$$

$$-4\cdot 2\cdot(-3) - 2 = 43; \quad z\big|_C = 3\cdot(-2)^2 + 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - (-2) = 23.$$

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці.

(Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції вже обчислені).

На відрізку AB: $x = 2,\ y \in [-3, 1]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 3 \cdot 2^2 + y^2 - 4 \cdot 2 \cdot y - 2 = y^2 - 8y + 10 ;$$

$$z_1' = 2y - 8 ; \quad z_1' = 0 ; \quad 2y - 8 = 0 ; \quad y = 4 \notin [-3, 1] .$$

На відрізку BC: $y = -x - 1,\ x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 3x^2 + (-x-1)^2 - 4x(-x-1) - x = 8x^2 + 5x + 1 ;$$

$$z_2' = 16x + 5 ; \quad z_2' = 0 ; \quad 16x + 5 = 0 ; \quad x = -5/16 \in [-2, 2] ;$$

$$y = -(-5/16) - 1 = -11/16 ; \quad N(-5/16, -11/16) ;$$

$$z\big|_N = f_2(-5/16) = 8 \cdot (-5/16)^2 + 5 \cdot (-5/16) + 1 = -7/32 .$$

На відрізку AC: $y = 1,\ x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 3x^2 + 1^2 - 4x \cdot 1 - x = 3x^2 - 5x + 1 ;$$

$$z_3' = 6x - 5 ; \quad z_3' = 0 ; \quad 6x - 5 = 0 ; \quad x = 5/6 \in [-2, 2] ; \quad y = 1 ;$$

$$P(5/6, 1) ; \quad z\big|_P = f_3(5/6) = 3 \cdot (5/6)^2 - 5 \cdot (5/6) + 1 = -13/12 .$$

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції:

$$z\big|_M = \frac{1}{4} ; \ z\big|_A = 3 ; \ z\big|_B = 43 ; \ z\big|_C = 23 ; \ z\big|_N = -7/32 ; \ z\big|_P = -1\frac{1}{12} .$$

Отже, найменше та найбільше значення функції відповідно

$$\min_{(x,y) \in D} z = z\big|_{P(5/6,\,1)} = -1\frac{1}{12} ; \quad \max_{(x,y) \in D} z = z\big|_{B(2,-3)} = 43 .$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

Приклад 2. (Задача дослідження попиту: оптимізація функції корисності при обмеженнях на бюджет покупця). Знайти об’єми попиту (у кількісному вимірі) x і y на дві різновидності X і Y деякого товару при цінах на них, відповідно, $p_x = 6$ грош. од. і $p_y = 4$ грош. од., якщо покупець намагається при своєму бюджеті $K = 168$ грош. од. максимізувати функцію корисності вигляду $z = f(x, y) = 30x + 20y - 30x^{2/3} y^{1/2}$.

□ З економічного змісту задачі очевидно, що $x \geq 0$ і $y \geq 0$. На покупку загальною вартістю $p_x x + p_y y = 6x + 4y$ покупець може витратити суму, що не перевищує $K = 168$:

$$6x + 4y \leq 168$$

або $3x + 2y \leq 84$.

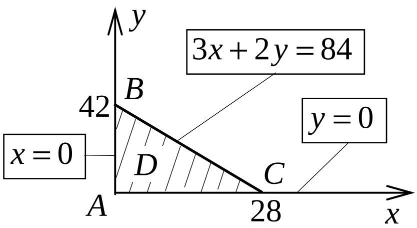

Рис. 64

Указані обмеження задають на координатній площині Oxy замкнену область D у вигляді заштрихованого трикутника ABC (рис. 64), вершини якого визначаються як розв'язки систем:

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0; \\ 3x + 2y = 84; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0; \\ 3x + 2y = 84. \end{cases}$$

Звідси дістаємо $A(0;0)$, $B(0;42)$, $C(28;0)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках області D:

$$z\big|_A = 0; \quad z\big|_B = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 42 - 30 \cdot 0^{2/3} \cdot 42^{1/2} = 840;$$

$$z\big|_C = 30 \cdot 28 + 20 \cdot 0 - 30 \cdot 24^{2/3} \cdot 0^{1/2} = 840.$$

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 30 - 20x^{-1/3}y^{1/2} = 0; \\ \partial z/\partial y = 20 - 15x^{2/3}y^{-1/2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^{1/3} - 2y^{1/2} = 0; \\ 4y^{1/2} - 3x^{2/3} = 0; \end{cases}$$

$$y^{1/2} = (3/2)x^{1/3}; \quad 4 \cdot (3/2)x^{1/3} - 3x^{2/3} = 0; \quad x^{1/3}(2 - x^{1/3}) = 0;$$

$$x^{1/3} = 0 \text{ або } 2 - x^{1/3} = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2^3 = 8; \quad y = (3/2)^2 x^{2/3};$$

$$y_1 = 0; \quad y_2 = (9/4) \cdot 8^{2/3} = 9.$$

Одна стаціонарна точка $(0;0)$ співпала з кутовою A і вже врахована. Друга стаціонарна точка $M(8;9)$ також належить області D, тому обчислимо відповідне значення функції корисності:

$$z\big|_M = 30\cdot 8 + 20\cdot 9 - 30\cdot 8^{2/3}\cdot 9^{1/2} = 60.$$

Досліджуємо функцію на межі області D, яка складається з ділянок $AB,\ BC,\ AC$, що сполучаються в кутових точках $A(0;0)$, $B(0;42)$, $C(28;0)$.

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці. (Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції корисності вже обчислені).

На відрізку AB: $x = 0,\ y \in [0,\ 42]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 30\cdot 0 + 20y - 30\cdot 0^{2/3} y^{1/2} = 20y;$$

$$z_1' = 20 \neq 0$$ – стаціонарних точок немає.

На відрізку BC: $y = 42 - (3/2)x,\quad x \in [0,\ 28]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 30x + 20\big(42 - (3/2)x\big) - 30x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2} =$$

$$= 840 - 30x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2};$$

$$z_2' = -20x^{-1/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2} - 15x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{-1/2}(-3/2) =$$

$$= -20x^{-1/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2} + (45/2)x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{-1/2} = 0;$$

$$-20\big(42 - (3/2)x\big) + (45/2)x = 0; \quad -336 + 12x + 9x = 0;$$

$$x = 16 \in [0, 28]; \quad y = 42 - (3/2)\cdot 16 = 18; \quad N(16,\ 18);$$

$$z\big|_N = 30\cdot 16 + 20\cdot 18 - 30\cdot 16^{2/3}\cdot 18^{1/2} = 840 - 720\cdot 2^{1/6} \approx 31{,}8.$$

На відрізку AC: $y = 0,\ x \in [0,\ 28]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 30x + 20\cdot 0 - 30x^{2/3}\cdot 0^{1/2} = 30x;$$

$$z_3' = 30 \neq 0$$ – стаціонарних точок немає.

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції корисності. Одержимо $\max\limits_{(x,y)\in D} z = z\big|_B = z\big|_C = 840$. Таким чином, оптимальний попит на обидві різновидності товару досягається в кутових точках області обмежень, при цьому покупець повинен витратити весь бюджет на купівлю будь-якої однієї різновидності. ■

2.4.4. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

Обмежимося розглядом випадку функції двох змінних.

Розглянутий раніше локальний екстремум є ***безумовним***, тобто не передбачає виконання ніяких додаткових умов чи обмежень.

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ двох змінних називається екстремум цієї функції, який досягається за додаткової умови, що змінні x, y зв'язані ***рівнянням зв'язку*** $\boxed{\varphi(x, y) = 0}$.

Зауваження 1. З геометричної точки зору у випадку безумовного екстремуму пошук екстремуму поверхні $z = f(x, y)$ здійснюють у деякій області D, а у випадку умовного екстремуму його відшукують на заданій лінії $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 65). Умовний екстремум, якщо він існує, досягається на лінії перетину L заданої поверхні $z = f(x, y)$ з вертикальним циліндром $\varphi(x, y) = 0$, твірні якого паралельні осі Oz.

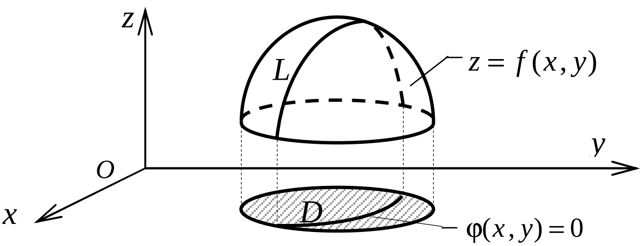

Рис. 65

Зауваження 2. Якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно однієї зі змінних, тобто подати, наприклад, у вигляді $y = \psi(x)$, тоді цю умову можна врахувати, безпосередньо зводячи функцію $z = f(x, y)$ двох змінних підстановкою $y = \psi(x)$ до функції однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$, яка далі досліджується на безумовний екстремум. Проте, у загальному випадку, такий метод малоефективний. Тому виникає потреба впровадження нового підходу.

Згідно з ***методом множників Лагранжа*** задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний безумовний екстремум ***функції Лагранжа***

$$\boxed{L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)},$$

де допоміжна змінна (параметр) λ називається ***множником Лагранжа***.

Необхідні умови такого екстремуму задаються системою рівнянь

$$\boxed{\begin{cases}\partial L/\partial x=\partial f/\partial x+\lambda\ \partial\varphi/\partial x=0;\\ \partial L/\partial y=\partial f/\partial y+\lambda\ \partial\varphi/\partial y=0;\\ \partial L/\partial\lambda=\varphi(x,y)=0.\end{cases}}$$

Розв'язки цієї системи визначають ***стаціонарні точки функції Лагранжа***. Якщо $P_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа $L(x,y,\lambda)$, то $M_0(x_0,y_0)$ – точка, що «підозріла» на умовний екстремум функції $z=f(x,y)$.

Достатні умови умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку d^2L функції Лагранжа з урахуванням рівняння зв'язку. При визначенні знака d^2L диференціал допоміжної змінної $d\lambda$ не враховується, тобто вважається

$$\boxed{d^2L(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}dy^2},$$

де диференціали dx і dy зв'язані залежністю $\boxed{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0}$,

яка виражає рівність нулю повної похідної за x складеної функції $\varphi(x,y(x))$, що випливає з рівняння зв'язку $\varphi(x,y)=0$.

Нехай $P_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ *– стаціонарна точка функції Лагранжа* $L(x,y,\lambda)$. *Тоді:* 1) *якщо* $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0$, *то* $M_0(x_0,y_0)$ *– точка умовного мінімуму;* 2) *якщо* $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0$, *то* $M_0(x_0,y_0)$ *– точка умовного максимуму.*

Зауваження 3. Дифереціюючи рівняння зв'язку за змінною x, отримаємо співвідношення $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$, з якого можна виразити диференціал dy через dx: $dy=-\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}dx$. Тому в будь-якій стаціонарній точці маємо:

$$d^2L(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dx\cdot\left(-\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}dx\right)+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(-\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}dx\right)^2=$$

$$=-\frac{dx^2}{(\partial\varphi/\partial y)^2}\cdot\left[-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right].$$

Другий співмножник (розташований у квадратних дужках) можна подати у вигляді визначника третього порядку

$$\boxed{H=\begin{vmatrix}0 & \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y\\ \partial\varphi/\partial x & \partial^2 L/\partial x^2 & \partial^2 L/\partial x\partial y\\ \partial\varphi/\partial y & \partial^2 L/\partial x\partial y & \partial^2 L/\partial y^2\end{vmatrix}}.$$

Якщо $H>0$, *то* $d^2L<0$, *що вказує на умовний максимум. Аналогічно, якщо* $H<0$, *то* $d^2L>0$, *тобто маємо умовний мінімум функції.*

Правило дослідження функції двох змінних $z=f(x,y)$ на умовний екстремум:

1) *Скласти функцію Лагранжа* $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.

2) *Розв'язати систему* $\begin{cases}\partial L/\partial x=\partial f/\partial x+\lambda\,\partial\varphi/\partial x=0;\\ \partial L/\partial y=\partial f/\partial y+\lambda\,\partial\varphi/\partial y=0;\\ \partial L/\partial\lambda=\varphi(x,y)=0.\end{cases}$

3) *Визначити наявність і характер екстремуму в кожній зі знайдених у попередньому пункті стаціонарних точок за знаком визначника*

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial x & \partial^2 L/\partial x^2 & \partial^2 L/\partial x\partial y \\ \partial\varphi/\partial y & \partial^2 L/\partial x\partial y & \partial^2 L/\partial y^2 \end{vmatrix}.$$

Якщо $H > 0$, *то маємо умовний максимум. Якщо* $H < 0$, *то – умовний мінімум.*

Приклад 1. Знайти екстремум функції

$$z = z(x, y) = x + 3y + 1 \text{ за умови } x^2 + y^2 = 10.$$

□ Геометрична інтерпретація даної задачі така: потрібно знайти найбільше і найменше значення аплікати площини $z = x + 3y + 1$ для точок її перетину з циліндром $x^2 + y^2 = 10$. Виразити одну змінну через іншу з рівняння зв'язку і підставити її в функцію $z(x, y) = x + 3y$ дещо складно, тому будемо використовувати метод множників Лагранжа.

Позначимо $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 10$, складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x + 3y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 10).$$

Продиференціюємо: $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 3 + 2y\lambda$.

Запишемо систему рівнянь для визначення стаціонарних точок функції Лагранжа:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 3 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1/2\lambda; \\ y = -3/2\lambda; \\ (-1/2\lambda)^2 + (-3/2\lambda)^2 - 10 = 0; \end{cases} \quad \lambda \neq 0.$$

Розв’язавши третє рівняння, одержимо

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 10 = 0,\ \frac{10}{4\lambda^2} = 10,\ \lambda^2 = \frac{1}{4},\ \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Якщо $\lambda_1 = -1/2$, то $x_1 = 1$, $y_1 = 3$. Якщо $\lambda_2 = 1/2$, $x_2 = -1$, $y_2 = -3$. Отже, $P_1(1;3;-1/2)$ і $P_2(-1;-3;1/2)$ – стаціонарні точки функції Лагранжа. Відповідно $M_1(1;3)$ і $M_2(-1;-3)$ – точки можливого умовного екстремуму. З'ясуємо наявність і характер екстремуму в кожній точці $M_1(1;3)$ і $M_2(-1;-3)$. Для цього обчислимо визначник H:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y; \ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda; \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & \lambda & 0 \\ y & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

У точці $M_1(1;3)$:

$$H = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 8 \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \right) = 40 > 0.$$

Отже, у цій точці функція має умовний максимум:

$$z_{\max} = z(1;3) = 11.$$

Аналогічно, у точці $M_2(-1,-3)$ знайдемо: $H = -40 < 0$. Отже, у цій точці функція має умовний мінімум:

$$z_{\min} = z(-1;-3) = -9.$$

Зазначимо, що питання про характер екстремуму в точках $M_1(1;3)$ і $M_2(-1;-3)$ можна з'ясувати і без обчислення визначника H. Знайдемо знак диференціала другого порядку d^2L у кожній стаціонарній точці:

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

При $\lambda_1 = -1/2$ одержимо $d^2F < 0$, а тому функція має в точці $M_1(1;3)$ умовний максимум. Аналогічно, в точці $M_2(-1;-3)$

отримаємо умовний мінімум. Таким чином, для визначення знака d^2L не довелося враховувати зв'язок між dx і dy, бо знак є очевидним без додаткових перетворень. ■

Приклад 2. Знайти умовний екстремум функції

$$z = z(x, y) = 4x^2 + 3y^3 - xy - 1 \text{ за умови } x + y = 0.$$

□ Позначимо $\varphi(x, y) = x + y$, складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 4x^2 + 3y^3 - xy - 1 + \lambda(x + y).$$

Продиференціюємо: $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 8x - y + x\lambda$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 9y^2 - x + y\lambda$.

Прирівнявши знайдені частинні похідні до нуля і приєднавши рівняння зв'язку, одержимо систему необхідних умов екстремуму. Розв'язавши її, отримаємо:

$$\lambda_1 = 0,\ x_1 = 0,\ y_1 = 0 \text{ та } \lambda_2 = -1,\ x_2 = 10/9,\ y_2 = -10/9.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки функції Лагранжа $P_1(0;0;0)$ і $P_2(10/9;-10/9;-1)$. Відповідно $M_1(0;0)$ і $M_2(10/9;-10/9)$ – точки можливого умовного екстремуму. З'ясуємо наявність і характер екстремуму в кожній точці $M_1(0;0)$ і $M_2(10/9;-10/9)$ за допомогою визначника H:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 8 + \lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 18y + \lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1;$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8+\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 18y+\lambda \end{vmatrix} = -18y - 2\lambda - 10.$$

У точці $M_1(0;0)$ маємо $H = -10 < 0$, тому вона є точкою умовного мінімуму заданої функції, значення якого

$$z_{\min} = z(0;0) = -1.$$

У точці $M_2(10/9;-10/9)$ маємо

$$H = -18 \cdot (-10/9) - 2 \cdot (-1) - 10 = 32 > 0,$$

тому вона є точкою умовного максимуму заданої функції, значення якого

$$z_{\max} = z(10/9;-10/9) = 4\cdot(10/9)^2 + 3\cdot(-10/9)^3 - (-10/9)\times$$
$$\times(-10/9) - 1 = 500/81 - 3000/729 - 1 = 257/243.$$

Дослідимо характер екстремуму в кожній з точок іншим методом, спираючись на знак $d^2L = 8dx^2 - 2dxdy + 18dy^2$. З рівняння зв'язку $x + y = 0$ маємо $dy = -dx$, тоді

$$d^2L = 8dx^2 - 2dx(-dx) + 18(-dx)^2 = (10 + 18y)\,dx^2.$$

Оскільки $d^2L\big|_{M_1} = 10\,dx^2 > 0$, то $M_1(0;0)$ є точкою умовного мінімуму функції.

Оскільки $d^2L\big|_{M_2} = -10\,dx^2 < 0$, то $M_2(10/9;-10/9)$ є точкою умовного максимуму функції. ■

<u>Приклад 3</u>. Знайти умовний екстремум функції $z = 5xy - 7$, якщо змінні x і y є додатними і задовольняють рівняння зв'язку $x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0$.

□ Запишемо функцію Лагранжа, продиференцюємо її та складемо систему необхідних умов екстремуму:

$$L(x,y) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 5xy - 7 + \lambda\left(x^2/8 + y^2/2 - 1\right);$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 5y + \lambda x/4; \qquad \begin{cases} 5y + \lambda x/4 = 0; \\ 5x + \lambda y = 0; \\ x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 5x + \lambda y;$$

Розв'яжемо систему методом вилучення, здійснюючи всі перетворення за умови, що $x > 0$ і $y > 0$:

$$\lambda = -20y/x;\ 5x - 20y^2/x = 0;\ x^2 - 4y^2 = 0;\ x^2 = 4y^2;\ x = 2y;$$
$$(2y)^2/8 + y^2/2 - 1 = 0;\ y^2 - 1 = 0;\ y^2 = 1;\ y = 1;\ x = 2;\ \lambda = -10.$$

Отже, в області, де $x > 0$ і $y > 0$, маємо стаціонарну точку функції Лагранжа $P_0(2;1;-10)$. Відповідно $M_0(2;1)$ – точка можливого умовного екстремуму. З'ясуємо наявність і характер екстремуму за допомогою визначника H:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x/4;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=y;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\lambda/4;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\lambda;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=5;$$

$$H=\begin{vmatrix}0 & x/4 & y\\ x/4 & \lambda/4 & 5\\ y & 5 & \lambda\end{vmatrix}=\frac{5xy}{2}-\frac{\lambda y^2}{4}-\frac{\lambda x^2}{16};$$

$$H\Big|_{P_0}=\frac{5\cdot 2\cdot 1}{2}-\frac{-10\cdot 1^2}{4}-\frac{-10\cdot 2^2}{16}=10>0.$$

Отже, $M_0(2;1)$ – точка умовного максимуму функції:

$$z_{\max}=z(2;1)=5\cdot 2\cdot 1-7=3.\quad \blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти екстремум функції $z=xy^2-2$ за умови $x+2y-1=0$.

(Розв'язати самостійно. Відповідь: $M_1(1/3, 1/3)$ – точка умовного максимуму, $z_{\max}=z\big|_{M_1}=-53/27$; $M_2(1, 0)$ – точка умовного мінімуму, $z_{\min}=z\big|_{M_2}=-2$).

<u>Приклад 5</u>. Підприємство виробляє два види товарів X і Y в об'ємах x і y відповідно. Функція витрат V має вигляд $V=20x+xy+10y$. Криві попиту на зазначені товари задаються співвідношеннями: $p_x=100-2x+3y$; $p_y=50+2x-2y$, де p_x і p_y – ціни одиниці товарів X і Y відповідно. Діяльність підприємства обмежена наявністю квоти на загальний обсяг виробництва товарів X і Y: $x+y=75$. Знайти максимальний прибуток підприємства при вказаних умовах.

□ Нехай R – сумарний дохід підприємства від реалізації товарів X і Y: $R = R_x + R_y$, де R_x і R_y – доходи від продажу товарів X і Y відповідно. Тоді

$$R_x = p_x x = 100x - 2x^2 + 3xy; \quad R_y = p_y y = 50y + 2xy - 2y^2;$$

$$R = R_x + R_y = -2x^2 + 5xy - 2y^2 + 100x + 50y.$$

Прибуток підприємства Π визначається рівністю $\Pi = R - V$. Тоді

$$\Pi = R - V = -2x^2 + 5xy - 2y^2 + 100x + 50y - (20x + xy + 10y) =$$

$$= -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 80x + 40y.$$

Маємо задачу на умовний екстремум функції двох змінних $\Pi = \Pi(x, y) = -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 80x + 40y$ при наявності рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = x + y - 75 = 0$. Для її розв'язування скористаємося методом множників Лагранжа.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y) = \Pi(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = -2x^2 + 4xy - 2y^2 +$$

$$+ 80x + 40y + \lambda(x + y - 75).$$

Продиференціюємо:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + 4y + 80 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 4y + 40 + \lambda.$$

Запишемо систему рівнянь для визначення стаціонарних точок функції Лагранжа і розв'яжемо її методом вилучення:

$$\begin{cases} -4x + 4y + 80 + \lambda = 0; & 80 + \lambda + 40 + \lambda = 0; \ \lambda = 60; \\ 4x - 4y + 40 + \lambda = 0; & y = 75 - x; \\ x + y - 75 = 0; & -4x + 4(75 - x) + 80 + 60 = 0; \end{cases}$$

$$-x + 75 - x + 20 + 15 = 0; \quad 2x = 110; \quad x = 55; \quad y = 75 - 55 = 20.$$

Отже, $P_0(55; 20; 60)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа. Відповідно $M_0(55; 20)$ – точка можливого умовного екстремуму. З'ясуємо наявність і характер екстремуму в цій точці за допомогою визначника H:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-4;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-4;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=4;$$

$$H=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 4\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}=4+4+4+4=16.$$

Оскільки $H\big|_{P_0}=16>0$, то $M_0(55;20)$ є точкою умовного максимуму функції:

$$\Pi_{\max}=\Pi(55,20)=-2\cdot 55^2+4\cdot 55\cdot 20-$$

$$-2\cdot 20^2+80\cdot 55+40\cdot 20=2750. \ \blacksquare$$

2.4.5. Метод найменших квадратів

Нехай за результатами експериментальних досліджень треба визначити ***модель*** $y=F(x)$ залежності $y=f(x)$ змінної величини y (залежна змінна) від змінної величини x (незалежна змінна). Проведено n випробувань та одержано n пар відповідних значень (з деякими похибками) цих змінних x і y:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

.

З теоретичних міркувань чи за характером розташування на координатній площині Oxy експериментальних точок (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$ встановлюють вигляд функції $y=F(x)$ (вибір ***структури*** моделі – ***структурна ідентифікація***). Нехай розміщення експериментальних точок нагадує пряму (рис. 66). Тоді природно шукану залежність вважати лінійною функцією $y=F(x)=kx+b$.

При вибраному вигляді шуканої функції залишається знайти всі невідомі коефіцієнти (параметри) k, b так, щоб ця модель у деякому розумінні найкраще описувала розглядуваний процес (вибір значень ***параметрів*** моделі – ***параметрична ідентифікація***).

Найпоширенішим способом оцінювання параметрів є ***метод***

найменших квадратів (***МНК***).

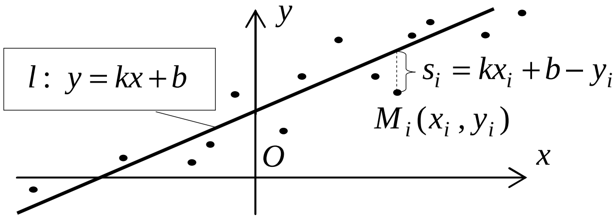

Рис. 66

Відхиленням (***нев'язкою***) s_i залежної змінної y, в точці x_i називають різницю $s_i = y_i - (kx_i + b)$ між експериментальним значенням y_i залежної змінної та її значенням $y_{mi} = kx_i + b$, обчисленим за вибраною моделлю. Сума квадратів усіх відхилень

$$\boxed{s = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - b)^2}$$

є функцією параметрів моделі $s = s(k, b)$, оскільки x_i, y_i $(i = \overline{1, n})$ – відомі числа.

Згідно з МНК значення параметрів моделі знаходяться з умови мінімуму суми квадратів нев'язок.

Можна показати, що квадратична функція $s = s(k, b)$ має єдиний мінімум (k_0, b_0). Тому для його знаходження досить скористатися тільки необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \partial s/\partial k = 0; \\ \partial s/\partial b = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} x_i(kx_i + b - y_i) = 0; \\ 2\sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i) = 0; \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)k + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)k + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}}$$

Остання система називається ***нормальною системою*** методу найменших квадратів. Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукані

оптимальні значення (k_0, b_0) параметрів моделі.

Формула $y = k_0 x + b_0$ зі знайденими оптимальними значеннями параметрів є ***рівнянням регресії***. Лінію, що визначається цим рівнянням, називають ***лінією регресії***.

<u>Зауваження</u>. При формуванні критерію $s = s(k, b)$ якості моделі за методом найменших квадратів припускається, що похибками значень незалежної змінної можна знехтувати.

<u>Приклад</u>. Користуючись методом найменших квадратів, знайти оптимальні значення параметрів k_0 і b_0 лінійної регресії $y = k_0 x + b_0$ за даними результатами n вимірювань

$n = 8$.

x	-7	-5	-4	-1	1	3	6	9
y	-2,4	-1,3	-1,2	0,7	1,4	2,8	3,8	5,9

Побудувати в одній системі координат Oxy експериментальні точки (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$ і лінію регресії $y = k_0 x + b_0$.

<u>Вказівка</u>. Обчислення проводити з точністю до двох десяткових знаків після коми.

□ Для складання нормальної системи методу МНК попередньо обчислимо її коефіцієнти та праві частини:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 218; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 113{,}1; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 9{,}7.$$

Нормальна система має вигляд: $\begin{cases} 218k + 2b = 113{,}1; \\ 2k + 8b = 9{,}7. \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 218 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1740; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 113{,}1 & 2 \\ 9{,}7 & 8 \end{vmatrix} = 885{,}4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 218 & 113{,}1 \\ 2 & 9{,}7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1888{,}4; \quad k_0 = \Delta_1 / \Delta = 0{,}51; \quad b_0 = \Delta_2 / \Delta = 1{,}09.$$

Отже, шукане рівняння регресії $y = 0{,}51x + 1{,}09$. (Рисунок до задачі зробіть самостійно). ■

2.5. Числові ряди

Ряди є основним обчислювальним засобом. Зокрема, у калькуляторах при обчисленні значень функцій використовуються ряди.

В економічних дослідженнях для опису динаміки процесів широко використовують числові послідовності і відповідні числові ряди, що відповідають бігу часу – часові послідовності та ряди (ряди динаміки). Моделі, в яких застосовуються ряди динаміки, можуть будуватися як на основі окремого ізольованого динамічного ряду (наприклад, за даними про чисельність зайнятих на виробництві синтезується модель динаміки чисельності зайнятих), так і на базі системи взаємозв'язаних часових рядів (один з рядів відповідає залежній величині, а інші – окремим факторам, що на нього впливають: наприклад, , складається модель прибутку як функція обсягів реалізації товару, чисельності працівників, фондоозброєності і т.п.)

2.5.1. Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Нехай $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – нескінченна числова послідовність.

Нескінченна сума $\boxed{u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$ називається ***числовим рядом***, а її доданки $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – відповідними (за номером) ***членами ряду***, причому n-й член u_n також має назву ***загального члена***.

Скінченна сума $\boxed{S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k}$ всіх перших членів ряду до u_n включно називається n***-ю частковою сумою ряду*** ($n = 1, 2, ...$).

Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя при $n \to \infty$ послідовності $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ його часткових сум: $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$. При цьому число S називають ***сумою ряду*** і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}+\ldots$, який утворюється з початкового ряду $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ відкиданням перших n членів називається ***n-м залишком ряду*** ($n=1,2,\ldots$).

Розглянемо ***геометричний ряд*** (***ряд геометричної прогресії***)

$$\boxed{a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}}$$

з ***першим членом*** $a\neq 0$ і ***знаменником*** q.

Ряд геометричної прогресії збігається при $|q|<1$ *і розбігається при* $|q|\geq 1$.

Під час розгляду числових рядів розв'язують дві основні задачі: 1) дослідити ряд на збіжність; 2) знайти суму збіжного ряду.

Приклад 1. Користуючись означенням, дослідити ряд на збіжність. Для збіжного ряду вказати його суму:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln(1-1/n)$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-1)(5n+4)}$**.**

□ а) Перетворимо загальний член ряду

$$u_n=\ln(1-1/n)=\ln\big((n-1)/n\big)=\ln(n-1)-\ln n.$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі

$$S_n=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ldots+\ln(n-1)-\ln n=\ln 1-\ln n=\ln n,$$

вигляд якої не залежить від числа n. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty.$$

Отже, ряд розбігається.

б) Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$u_n=\frac{1}{(5n-1)(5n+4)}=\frac{A}{5n-1}+\frac{B}{5n+4}=$$

$$=\left|A(5n+4)+B(5n-1)=1;\quad \begin{matrix} n=1/5: \\ n=-4/5: \end{matrix}\begin{cases} 5A=1; & A=1/5; \\ -5B=1; & B=-1/5 \end{cases}\right|=$$

$$=\frac{1/5}{5n-1}+\frac{-1/5}{5n+4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-1}-\frac{1}{5n+4}\right).$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі, де кількість доданків не залежить від числа n:

$$S_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{5n-6}-\frac{1}{5n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5n-1}-\frac{1}{5n+4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5n+4}\right).$$

Знайдемо границю: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5n+4}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$.

Отже, ряд збігається і його сума $S=1/20$. ■

<u>Властивості</u> числових рядів:

1) *Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи добавити скінченне число членів.* (Для збіжного ряду значення суми при цьому, в загальному випадку, змінюється).

Зокрема, *ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно.*

2) *Для збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$ *його* n*-й залишок* $\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}=R_n$ *служить похибкою наближення* $\boxed{S\approx S_n}$ *суми ряду* S *його* n*-ю частковою сумою* S_n. *При цьому* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0}$.

3) *Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник* $C=const\neq0$, *то його збіжність не порушиться. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на* C:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}Cu_n=C\sum_{n=1}^{\infty}u_n};$$

4) *Два збіжні ряди* $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ і

$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *можна почленно додавати і віднімати. Одержані ряди також збігаються і при цьому*:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n};$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n}.$$

5) *Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом*.

6) *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму*.

Зауваження 1. Про суму (різницю) розбіжних рядів нічого певного стверджувати не можна: результуючий ряд може як збігатися, так і розбігатися.

На практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються ***ознаки збіжності***, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Теорема (***необхідна ознака збіжності***). *Якщо ряд збігається, то його загальний член* u_n *прямує до нуля при* $n \to \infty$: $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$.

□ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, тобто $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, де S – сума ряду (стала величина). Тоді $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, бо при $n \to \infty$ і $n - 1 \to \infty$. Віднімаючи з першої рівності другу, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Але $S_n - S_{n-1} = u_n$. Отже, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. ■

Зауваження 2. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член u_n при $n \to \infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається.

Наслідок (***достатня ознака розбіжності***). *Якщо границя* *загального члена* u_n *при* $n \to \infty$ *відмінна від нуля, тобто* $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0}$, *то ряд розбігається.*

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+8}$ на збіжність.

□ Знайдемо границю n-го члена u_n при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+8} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+8/n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається. ■

Приклад 3. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$ на збіжність.

(Розв’язати самостійно. Відповідь: $\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ – ряд розбігається.)

2.5.2. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***знакододатним***, якщо всі його члени – невід’ємні числа:

$$u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Послідовність часткових сум знакододатного ряду є зростаючою. Згадуючи, що обмежена монотонна змінна має границю, дістаємо ***необхідну і достатню умову збіжності знакододатного ряду***:

знакододатний ряд збігається, якщо послідовність його часткових сум обмежена зверху, і розбігається в противному разі.

Зауваження. При вивченні знакосталих рядів можна обмежитися розглядом тільки знакододатних, оскільки з них множенням на –1 одержуються ряди з недодатними членами.

Далі розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності таких рядів.

Інтегральна ознака Коші. Ця ознака ґрунтується на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Теорема 1 (***інтегральна ознака Коші***). *Якщо члени знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *утворюють спадну послідовність* ($u_{n+1} \le u_n$, $n = 1, 2, \ldots$) *і на проміжку* $[1; +\infty]$ *існує спадна неперервна невід'ємна функція* $f(x)$ *така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду* ($f(n) = u_n$, $n = 1, 2, \ldots$), *тоді вказаний ряд і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно*.

□ Зобразимо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ геометрично точками на координатній площині Oxy, відкладаючи на осі Ox номери 1, 2, ..., n, ..., а на осі Oy – відповідні значення його членів $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, …, $u_n = f(n)$, … (рис. 67).

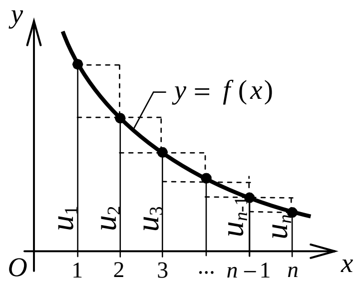

Рис. 67

Побудуємо на цьому рисунку також графік указаної функції $f(x)$. Площа відповідної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[1; n]$, дорівнює визначеному інтегралу

$$I_n = \int_1^n f(x)dx .$$

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1; 2]$, $[2; 3]$, а висоти дорівнюють u_1, u_2, …, u_n.

Порівнюючи площі цих об'єктів, дістанемо:

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n < I_n < u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

або $S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n$, де $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ – часткова сума ряду. Звідси $S_n < u_1 + I_n$ і $S_n > u_n + I_n$. Нехай інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним. Його значення $I = \lim\limits_{n \to \infty} I_n$. Тоді $S_n < u_1 + I$

Отже, зростаюча послідовність часткових сум S_n обмежена зверху і тому має границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним. У даному випадку це означає, що $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$. Тоді, переходячи до нерівності $S_n > u_n + I_n$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Отже, послідовність часткових сум S_n необмежена і має нескінченну границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається. ■

Зауваження 1. Інтегральна ознака справедлива, коли послідовність членів ряду задовольняє відповідним умовам, починаючи хоча б з деякого номеру.

Зауваження 2. На практиці функцію $f(x)$ отримують за допомогою заміни у виразі загального члена u_n ряду дискретної змінної n на неперервну x.

З наведеного доведення випливає

наслідок. *Для суми S і n-го залишку R_n збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ справедливі оцінки*:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < S < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx\,; \quad R_n < \int_n^{+\infty} f(x)dx\,,$$

остання з яких дозволяє визначити, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати задану похибку.

Приклад 1. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність ***узагальнений гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p}$.

□ Вважатимемо $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\,dx$.

При $p=1$ маємо ***гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n}$. Для нього $\int_1^{+\infty} (1/x)\, dx = \lim\limits_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні. Нехай $p \neq 1$. Тоді

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).$$

Коли $p>1$, то $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx = 1/(p-1)$. Інтеграл і ряд збіжні. Коли $p<1$, то $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно маємо:

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ *збігається при* $p>1$ *і розбігається при* $p \le 1$. ■

Приклад 2. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

а) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)\sqrt[3]{\ln(5n-2)}}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.

□ а) Розглянемо функцію $f(x) = 1/(x \ln^3 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[4;+\infty)$, причому $f(n) = u_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{N\to+\infty} \int_2^N \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{N\to+\infty} \int_2^N \frac{d\ln x}{\ln^3 x} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \int_2^N \ln^{-3} x d(\ln x) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\ln^{-2} x}{-2}\Bigg|_x^N = -\frac{1}{2} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\ln^2 x}\Bigg|_2^N =$$

$$= -(1/2) \lim_{N\to+\infty} \left(1/\ln^2 N - 1/\ln^2 2 \right) = 1/(2\ln^2 2) \neq \infty .$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому заданий ряд теж збігається.

б) Введемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{(5x-2)x\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N\frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}=$$

$$\left|\begin{matrix} u=\ln(5x-2);\ du=5dx/(5x-2) \\ u_1=\ln 3; \qquad u_2=\ln(5N-2)\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\int_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} u^{-1/3}du =$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\frac{u^{2/3}}{2/3}\Bigg|_{\ln 3}^{\ln(5N-2)}=\frac{3}{10}\lim_{N\to+\infty}(\ln^{2/3}(5N-2)-\ln^{2/3}3)=+\infty\,.$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

в) (Розв'язати самостійно). ■

Ознаки порівняння.

Під час застосування ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з ***еталонним рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди часто приймають нижче наведені узагальнений гармонічний або геометричний ряди:

а) ***узагальнений гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p}$, що збігається, коли $p>1$, і розбігається при $p\le 1$;

б) ***геометричний ряд*** (ряд геометричної прогресії) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} aq^n}$, що збігається при $q<1$ і розбігається при $q\ge 1$.

Теорема 2 (***перша*** (***основна***) ***ознака порівняння***).

а) *Нехай маємо збіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *при цьому* $u_n\le v_n$, $n=1,2,\ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж збігається.*

(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) *Нехай маємо розбіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *, при цьому* $u_n \ge v_n$*,* $n = 1, 2, \ldots$*. Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж розбігається.*

(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

□ Нехай S_n і σ_n відповідні n-і часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

а) З нерівності $u_n \le v_n$ випливає, що $S_n \le \sigma_n$. Оскільки «більший» знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то існує границя його часткових сум $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, при цьому $\sigma_n \le \sigma$. Тоді $S_n \le \sigma$. Тобто, часткові суми S_n обмежені.

З того, що послідовність S_n зростаюча і обмежена, випливає існування скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, при цьому $S \le \sigma$. Отже, «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збіжний.

б) З нерівності $u_n \ge v_n$ випливає, що $S_n \ge \sigma_n$. Оскільки «менший» знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Отже, «більший» ряд теж розбіжний. ■

<u>Зауваження 3</u>. Основна ознака порівняння виконується, коли члени рядів задовольняють відповідні нерівності, починаючи хоча б з деякого номера.

<u>Наслідок</u>. *Якщо всі члени збіжного знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *не перевищують відповідних членів іншого знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$*, тобто* $u_n \le v_n$*,* $n = 1, 2, \ldots$*, тоді* n*-й залишок*

першого ряду $R_n^{(u)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$ *не перевищує* n*-го залишку* $R_n^{(v)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}v_k$ *другого*: $R_n^{(u)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\le\sum_{k=n+1}^{\infty}v_k=R_n^{(v)}$.

<u>Приклад 3</u>. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n\ln(3n)};\quad \text{б) }\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1};\quad \text{в) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

□ а) Застосуємо основну ознаку порівняння з "більшим" збіжним рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/5)^n$ зі знаменником $q=1/5<1$:

$$u_n=1/(5^n\ln(3n))<1/5^n=(1/5)^n=v_n,\ n=1,2,\ldots.$$

Оскільки $u_n\le v_n$, то «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n\ln(3n)}$ також збігається.

б) Оскільки $u_n=\dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1}\ge\dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}=v_n$ при всіх $n\ge3$ і «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1\big/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p=1/2\le1$, то за основною ознакою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1}$ також розбігається.

в) Оскільки при $n\ge2$ справджується нерівність $u_n=1/n^n\le$ $\le1/2^n=v_n$ і «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n$ є збіжним геометричним рядом з $q=1/2<1$, то за основною ознакою порівняння «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^n$ теж збігається. ■

Теорема 3 (***друга*** (***гранична***) ***ознака порівняння***). *Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \, , \, (0 < c < +\infty)}$ *відношення загальних членів двох знакододатних рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *, то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.*

□ Оскільки існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c$, то для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що для всіх $n \ge N$ буде виконуватися нерівність $|u_n / v_n - c| < \varepsilon$. Звідки $c - \varepsilon < u_n / v_n < c + \varepsilon$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається. З нерівності $u_n / v_n < c + \varepsilon$ маємо $u_n < (c + \varepsilon) v_n$, $n \ge N$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (c + \varepsilon) v_n$ також збігається. Звідси за основною ознакою порівняння випливає збіжність «меншого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається. З нерівності $u_n / v_n > c - \varepsilon$ маємо $u_n > (c - \varepsilon) v_n$, $n \ge N$. З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (c - \varepsilon) v_n$. Тоді згідно з основною ознакою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається. ■

Зауваження 4. Існування вказаної границі говорить про те, що загальні члени u_n і v_n цих рядів при $n \to \infty$ є нескінченно малими одного порядку $u_n = O^*(v_n)$ (зокрема, можуть бути еквівалентними $u_n \sim v_n$). Таким чином, *для порівняння треба підбирати еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *, загальний член якого* v_n *є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член* u_n *ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *, який до-*

сліджується.

Приклад 4. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+4/n\right);\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}arctg\,\frac{5n}{n^3+8}.$$

□ а) Відомо, що $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. Звідси при $n\to\infty$ маємо: $4/n\to 0$; $\ln\left(1+4/n\right)\sim 4/n=O^*(1/n)$. Тому для даного ряду застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$, що розбігається:

$$u_n=\ln\left(1+4/n\right),\ v_n=1/n;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+4/n\right)}{1/n}=$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+4/n\right)}{1/n}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\alpha=4/n\to 0\ \textit{при}\ n\to\infty\right|=$$

$$=4\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=4\ (\neq 0,\neq\infty).$$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+4/n\right)$ розбігається.

б) Оскільки $u_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3}\sim\dfrac{\sqrt[3]{n^5}}{6n^4}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{n^{7/3}}=O^*(1/n^{7/3})$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{7/3}$, $p=7/3>1$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{7/3}(n^{5/3}+4)}{6n^4-n^2+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n^{5/3}}{6-1/n^2+3/n^4}=$$

$$=1/6\quad(\neq 0,\neq\infty).$$ Даний ряд теж збігається.

в) (Розв’язати самостійно). ■

Зауваження 5. Застосування ознак порівняння часто викликає труднощі, пов’язані з необхідністю підбирати еталонний ряд. Тож, нижче наведені більш зручні для користування ознаки, де фігурує тільки ряд, що досліджується.

Ознака Даламбера.

Теорема 4 (***ознака Даламбера***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l}$ *відношення наступного члена до попереднього, то*

а) *при* $l<1$ *ряд збігається*; б) *при* $l>1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l=1$ *не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.*

□ а) Нехай $l<1$. Візьмемо число q, що задовольняє нерівності $l<q<1$. Для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N, що для всіх $n\geq N$ буде виконуватися умова $u_{n+1}/u_n<q$. Таким чином, для $n\geq N$ маємо:

$$u_{N+1}<qu_N\,,\qquad u_{N+2}<qu_{N+1}<q^2u_N\,,$$
$$u_{N+3}<qu_{N+2}<q^2u_{N+1}<q^3u_N\,,\ \ldots\,.$$

Розглянемо два ряди $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots$ і $u_N+qu_N+q^2u_N+q^3u_N+\ldots$, де другий збігається як геометричний ряд зі знаменником $q<1$.

Члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду. Тому за основною ознакою порівняння перший ряд теж збігається.

б) Нехай $l>1$. Тоді для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N, що для всіх $n\geq N$ буде виконуватися нерівність $u_{n+1}/u_n>1$. Звідси $u_{n+1}>u_n$ для всіх $n\geq N$. Це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N+1$. Тому загальний член ряду не прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. За достатньою ознакою розбіжності даний ряд розбігається. ■

Якщо $l=+\infty$, то ряд також розбігається, оскільки існує такий номер N, що для всіх $n\geq N$ буде виконуватися нерівність $u_{n+1}/u_n>1$. Звідки $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. ■

Зауваження 6. На практиці при дослідженні на збіжність найчастіше використовується саме ознака Даламбера. *Щоб не натрапити на випадок невизначеності* $l=1$, *її застосовують до таких рядів, загальний член яких містить у своєму складі факторіал і/або показникову функцію від* n.

Приклад 5. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-4}{\sqrt[3]{n^2\cdot 10^{2n}}}\ ;\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^2+2n}.$$

□ а) До складу загального члена входить показникова функція $10^{(2/3)n}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1}=\frac{7(n+1)-4}{10^{(2/3)(n+1)}\sqrt[3]{(n+1)^2}}=\frac{7n+3}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}}\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(7n+3)10^{(2/3)n}\sqrt[3]{n^2}}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}\,(7n-4)}=\frac{1}{10^{2/3}}\lim_{n\to\infty}\frac{7n+3}{7n-4}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{(n+1)^2}}=10^{-2/3}\lim_{n\to\infty}\frac{7+3/n}{7-4/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{(1+1/n)^2}}=$$

$$=10^{-2/3}\cdot 1\cdot\sqrt[3]{1}=10^{-2/3}<1. \qquad \text{Ряд збігається.}$$

б) Загальний член цього ряду $u_n=(n-1)!\big/(n^2+2n)$ містить факторіал $(n+3)!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_{n+1}=\frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2+2(n+1)}=\frac{n!}{n^2+4n+3}=\frac{(n-1)!n}{n^2+4n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n^2+2n)}{(n^2+4n+3)(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^2+4n+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1/n+4/n^2+3/n^3}=\left|\frac{1}{0}\right|=+\infty>1. \ \text{Ряд розбігається.}\ ■$$

Радикальна ознака Коші.

Теорема 5 (***радикальна ознака Коші***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l}$, *то*

а) *при* $l < 1$ *ряд збігається*; б) *при* $l > 1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l = 1$ *не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду*.

Ця ознака базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом. Доведення аналогічне.

Зауваження 7. *Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від* n, *з яких досить просто добувається корінь* n*-го степеня*.

Приклад 6. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(n^2/(n^3+1)\right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n} \left(n^4/(n+1)\right).$$

□ а) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin\left(n^2/(n^3+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \left(n^2/(n^3+1)\right)} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(n^2/(n^3+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin \left((1/n)/(1+1/n^3)\right) = \sin 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

б) Загальний член ряду є степенем з показником $2n$ виразу $\ln\left(n^4/(n+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln^{2n} \frac{n^4}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \ln^2 \frac{n^4}{n+1} = \ln^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n^3 + 1/n^4} =$$

$$= \left| \ln(1/+0) = \ln(+\infty) = +\infty \right| = +\infty > 1. \quad \text{Ряд розбігається. } \blacksquare$$

Зауваження 8. У випадку невизначеності $l = 1$, радикальна ознака, як і «рівносильна» їй ознака Даламбера, відповіді не дає. Потрібні додаткові дослідження на основі інших більш «сильних» ознак, до яких відносяться всі наведені вище.

2.5.3. Знакозмінні ряди. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця. Абсолютна й умовна збіжність

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків + і -, називається ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається ***знакопочерговим*** або ***рядом Лейбниця***. Його вигляд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \text{ де } a_n = | u_n | \geq 0}.$$

Теорема 1 (***достатня ознака Лейбниця***). *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ *виконуються дві умови*:

1) $\boxed{a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots}$; 2) $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$, *тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, при цьому його сума* S *додатна і не перевищує модуля першого члена*: $0 < S \leq a_1$.

□ Розглянемо часткову суму з парним числом членів:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Кожна різниця в дужках додатна, оскільки $a_n > a_{n+1}$. Тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ – зростаюча.

Крім того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

оскільки кожна дужка знову-таки додатна. Тобто послідовність $\{S_{2n}\}$ обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, тоді $0 < S \leq a_1$.

Обчислимо границю сум з непарними номерами:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S .$$

Таким чином, часткові суми як з парними, так і з непарними номерами мають спільну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Звідси випливає, що вся послідовність часткових сум $\{S_n\}$ також має, причому ту ж саму границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, Тобто ряд збігається. При цьому $0 < S \le a_1$. ■

Наслідок. *Абсолютна похибка* Δ_n *від заміни суми* S *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *будь-якою його частковою сумою* S_n *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Іншими словами, *модуль залишку* R_n *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Тобто $\boxed{\Delta_n = | S - S_n | = | R_n | \le a_{n+1}}$.

Дійсно, даний залишок $R_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + \ldots$ – це також збіжний ряд Лейбниця. Модуль суми цього ряду не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $| R_n | \le a_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Зауваження 1. Ознака Лейбниця справедлива, якщо послідовність членів ряду є спадною хоча б з деякого номера N .

Зауваження 2. Друга умова ознаки Лейбниця $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Приклад 1. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність дані знакопочергові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 5^n}{n^2}$.

□ а) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4n^3-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^2}{4-1/n^3} = 0$;

1) $|u_n| = \dfrac{n}{4n^3-1} > \dfrac{n+1}{4(n+1)^3-1} = |u_{n+1}|$, $n = 1, 2, \ldots$ (доведіть самостійно, безпосередньо переконавшись, що $|u_n| - |u_{n+1}| > 0$).

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

б) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{x'} = \frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{1} = +\infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = +\infty \neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбниця не виконується, то даний ряд розбігається. ■

<u>Теорема 2</u> (***достатня ознака збіжності знакозмінного ряду***). *Якщо для знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, *складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.*

□ Нехай $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ і $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n}|u_k|$ – часткові суми відповідно даного ряду і ряду з абсолютних величин його членів.

Позначимо через $S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ суми модулів відповідно всіх невід'ємних і всіх від'ємних членів серед перших n членів даного ряду. Тоді $S_n = S_n^{(+)} - S_n^{(-)}$ і $S_n^{(m)} = S_n^{(+)} + S_n^{(-)}$.

За умовою ряд з модулів збігається, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(m)} = S^{(m)}$, $S^{(m)} > 0$.

$S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ – додатні зростаючі величини, що менші $S^{(m)}$. Отже, вони мають границі: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(+)} = S^{(+)}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(-)}$. Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^{(+)} - S_n^{(-)}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(+)} - \lim_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(+)} - S^{(-)}.$$

Таким чином, даний знакозмінний ряд збігається. ■

Зауваження 3. Наведена ознака є лише достатньою, але не необхідною: існують збіжні знакозмінні ряди, яким відповідають розбіжні ряди, утворені з модулів їх членів. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ збіжний за ознакою Лейбниця, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ з модулів його членів, розбіжний як гармонічний ряд.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та ***умовно збіжним***, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно збіжний ряд є збіжним*.

Зауваження 4. Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність доцільно розпочинати з виявлення абсолютної збіжності як більш «сильної», застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний і дослідження завершене. Якщо ж ряд з модулів розбігається, то інколи можна відразу зробити висновок про розбіжність і самого знакозмінного ряду (наприклад, при невиконанні необхідної ознаки збіжності). Але частіше далі треба провести більш «тонке» дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

Приклад 2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+1/n)^{3n^2}$.

□ а) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо основну ознаку порівняння:

$$|u_n|=\left|\frac{\sin n}{n^4}\right|=\frac{|\sin n|}{n^4}\le\frac{1}{n^4}=v_n.$$

Оскільки більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^4$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом з $p=4>1$, то менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ теж збіжний. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

б) Ряд з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p=1/2\le1$.

Сам даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^{1/2}$ є знакопочерговим. Він задовольняє обидві умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0;\ |u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=|u_{n+1}|,\ n=1,2,...$$

і тому є збіжним. Отже, даний ряд умовно збіжний.

в) Модуль загального члена даного ряду $|u_n|=(1+1/n)^{3n^2}$ є степенем з показником $3n^2$ виразу $(1+1/n)$, тому до ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1/n)^{3n^2}}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{3n}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\right)^3=e^3>1.$$ Ряд з модулів розбігається.

З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ за радикальною ознакою випливає $\lim_{n\to\infty}|u_n|\ne0$. Звідси $\lim_{n\to\infty}u_n\ne0$.

Таким чином, для даного ряду не виконується необхідна ознака збіжності, тому він розбігається. ■

2.6. Диференціальні рівняння в економічних задачах

Розглянемо деякі найпростіші застосування диференціальних рівнянь в економічній динаміці. Тут незалежною змінною вважається час t, що розглядається як неперервна величина.

Неокласична модель зростання.

Нехай національний дохід R описується виробничою функцією $R = R(K, L)$, де K – обсяг капіталовкладень, L – обсяг витрат трудових ресурсів. При цьому всі величини змінюються з часом. Продуктивність праці l є функцією від величини фондоозброєності $f = K/L$: $l = l(f)$. Оскільки $l = R/L$, то маємо $l(f) = R(K,L)/L$.

Здійснимо моделювання динаміки фондоозброєності $f = f(t)$ при наступних припущеннях. 1) природний приріст трудових ресурсів L з часом змінюється за законом $dL/dt = \alpha L$, де α – сталий коефіцієнт темпу приросту; 2) інвестиції $I = c\,R(K,L)$, де c – стала норма інвестиції, витрачаються на збільшення виробничих фондів і на амортизацію за законом $I = dK/dt + \beta K$, де β – стала норма амортизації.

Зі співвідношень $I = c\,R(K,L)$ і $I = dK/dt + \beta K$ маємо

$$dK/dt = cR(K,L) - \beta K .$$

Прологарифмуємо рівність $f = K/L$ та отримаємо

$$\ln f = \ln K - \ln L .$$

Диференціюючи це співвідношення за часом t, дістанемо

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt} - \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} .$$

Підставивши в цю рівність вирази для похідних dL/dt і dK/dt, отримаємо

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dt}=\frac{1}{K}\left(cR(K,L)-\beta K\right)-\frac{1}{L}\alpha L.$$

Перемноживши обидві частини одержаного співвідношення на f з врахуванням, що $f=K/L$ і $R(K,L)/L=l(f)$, дістанемо ***неокласичну модель зростання***:

$$\boxed{df/dt=cl(f)-(\alpha+\beta)f}$$

– диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, що описує динаміку фондоозброєності.

Воно є нелінійним і ***автономним*** (час t не входить явно в рівняння). Особливе значення має його ***рівноважний*** (***стаціонарний***) частинний ***розв'язок*** $f_{st}=const$, що відповідає стану рівноваги $df/dt=0$. Він знаходиться як корінь алгебраїчного рівняння

$$cl(f_{st})-(\alpha+\beta)f_{st}=0$$

Приклад 1. Для виробничої функції $R=A\sqrt{KL}$, де A – сталий параметр, що характеризує продуктивність прийнятої технології виробництва, скласти диференціальне рівняння неокласичної моделі зростання. Знайти його загальний розв'язок f і ненульовий стаціонарний розв'язок f_{st}.

□ За формулою $l(f)=R(K,L)/L$ дістанемо

$$l(f)=A\sqrt{K/L}=\sqrt{f}.$$

Тоді шукане диференціальне рівняння має вигляд:

$$df/dt=cA\sqrt{f}-(\alpha+\beta)f.$$

Стаціонарний розв'язок одержимо, розв'язуючи відповідне алгебраїчне рівняння:

$$cA\sqrt{f}-(\alpha+\beta)f=0;\quad f_{st1}=0;\quad f_{st2}=c^2A^2/(\alpha+\beta)^2.$$

Таким чином, ненульовий стаціонарний розв'язок має вигляд

$$f_{st}=c^2A^2/(\alpha+\beta)^2.$$

Загальний розв'язок f знаходимо, застосовуючи метод відокремлювання змінних:

$$\frac{df}{\sqrt{f}\,\left(cA-(\alpha+\beta)\sqrt{f}\,\right)}=dt\,;\quad \int\frac{df}{\sqrt{f}\,\left(cA-(\alpha+\beta)\sqrt{f}\,\right)}=\int dt\,;$$

$$f=\left[cA/(\alpha+\beta)+C\exp\left(-(\alpha+\beta)/(2)t\right)\right]^2,\quad C=\text{const}\,.$$

Звернемо увагу, що при $t\to\infty$ маємо

$$f=\left[\frac{cA}{\alpha+\beta}+C\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)\right]^2\to$$

$$\to c^2A^2\big/(\alpha+\beta)^2=f_{st}\,.$$

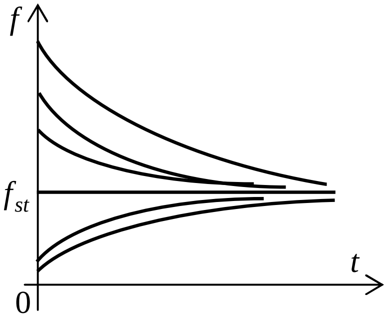

Рис. 68

Отже, при сталих параметрах $A,\ c,\ \alpha,\ \beta$ функція фондоозброєності $f=f(t)$ стійко прямує до ненульового стаціонарного значення f_{st} незалежно від початкових умов ($f=f_{st}$ є ***точкою стійкої рівноваги***) (рис. 68).

Модель природнього зростання випуску.

Знайти закон зростання випуску дефіцитної продукції в умовах ненасиченості ринку.

Нехай деякий товар продається за ціною p і на момент часу t об’єм його реалізації становить $Q=Q(t)$, що дозволило отримати дохід $R=pQ(t)$. Припустимо, що деяка частина прибутку витрачається на інвестиції $I=I(t)$ у виробництво цього товару: $I(t)=c\,pQ(t)$, де c – стала норма інвестиції, $0<c<1$.

Виходячи з припущення, що ринок не насичується, можна зробити висновок, що в результаті розширення виробництва буде отримано приріст доходу, частина якого піде на розширення випуску товару. Це призведе до зростання швидкості випуску (***акселерація***), що пропорційна збільшенню інвестицій: $dQ/dt=mI$, де m – стала норма акселерації.

Підставивши в останню рівність вираз для інвестицій, дістанемо ***модель природного зростання випуску***:

$$\boxed{dQ/dt = aQ\,, \quad a = mcp = const},$$

що є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$Q = C\,e^{at}\,, \quad C = \text{const}\,.$$

Зауваження 1. Одержане диференціальне рівняння також описує процес розмноження бактерій в необмеженому середовищі, зростання цін в умовах постійної інфляції, процес радіоактивного розпаду та ін.

Модель зростання випуску в умовах конкуренції.

На практиці припущення ненасиченості ринку і відсутності конкуренції може бути прийняте лише для досить вузького часового проміжку. У загальному випадку крива попиту $p = p(Q)$, що описує залежність ціни товару p від об'єму його реалізації Q, є деякою спадною функцією. Тобто зі збільшенням обсягу продукції на ринку ціна спадає: $dp/dQ < 0$. Тому ***модель зростання випуску в умовах конкуренції*** має вигляд:

$$\boxed{dQ/dt = \gamma\, p(Q)\,Q\,, \quad \gamma = mc = const}.$$

Оскільки всі множники у правій частині цього рівняння додатні, то $dQ/dt > 0$ тобто функція $Q = Q(t)$ – зростаюча. Характер зростання функції визначається її другою похідною:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \gamma\left(\frac{dQ}{dt}\,p + Q\frac{dp}{dQ}\frac{dQ}{dt}\right) = \gamma\frac{dQ}{dt}\left(p + Q\frac{dp}{dQ}\right).$$

Якщо ввести еластичність попиту $E(p) = \dfrac{p}{Q}\dfrac{dQ}{dp}$, то вираз для другої похідної можна подати у вигляді:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \gamma p\frac{dQ}{dt}\left(1 + \frac{Q}{p}\frac{dp}{dQ}\right) = \gamma p\frac{dQ}{dt}\left(1 - \frac{1}{|\,E(p)\,|}\right),$$

де враховано, що $E(p) < 0$.

З одержаного співвідношення для d^2Q/dt^2 маємо:

– у випадку еластичного попиту ($|E(p)|>1$) спостерігається прогресуюче зростання ($d^2Q/dt^2>0$ – графік угнутий);

– у випадку нееластичного попиту ($|E(p)|<1$) спостерігається уповільнене зростання ($d^2Q/dt^2<0$ – графік опуклий).

Якщо крива попиту є лінійною функцією $p(Q)=a-bQ$, де a, b – сталі додатні коефіцієнти, то модель зростання випуску в умовах конкуренції набуває вигляду:

$$dQ/dt=\gamma(a-bQ)Q.$$

Звідси дістаємо:

$$dQ/dt=0:\ \gamma(a-bQ)Q=0;\ Q_{st1}=0;\ Q_{st2}=a/b.$$

Таким чином, ненульовий стаціонарний розв'язок має вигляд

$$Q_{st}=a/b.$$

Оскільки $d^2Q/dt^2=\gamma(dQ/dt)(a-2bQ)$, то

$$d^2Q/dt^2=0:\ \gamma(dQ/dt)(a-2bQ)=0;\quad Q=a/(2b)$$

– точка перегину графіка функції $Q=Q(t)$. При $Q<a/(2b)$ функція вгнута, а при $Q>a/(2b)$ вона опукла.

Загальний розв'язок $Q=Q(t)$ знаходимо, застосовуючи метод відокремлювання змінних:

$$\frac{dQ}{(a-bQ)Q}=\gamma dt;\quad \int\frac{dQ}{(a-bQ)Q}=\gamma\int dt;$$

$$Q=Ca\,e^{a\gamma t}\Big/\left(1+Cb\,e^{a\gamma t}\right),$$

$$C=\text{const}.$$

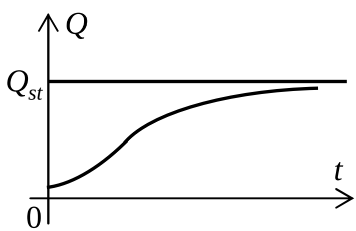

Рис. 69

Графік одержаного загального розв'язку називають ***логістичною кривою*** (рис. 69). Така функція також описує деякі процеси поширення реклами, зростання біологічних популяцій в умовах обмеженого середовища існування та ін.

Зауваження 2. З графіка на рис. 69 випливає, що при малих значеннях часу t логістичне зростання майже не відрізняється від природного зростання за експоненціальним законом. Проте при великих значеннях t темп зростання уповільнюється і логістична крива при $t \to \infty$ асимптотично наближається до прямої $Q = a/b$, що відповідає ненульовому стаціонарному розв'язку.

Динаміка ринкових цін.

Ціна p на деякий товар змінюється залежно від взаємодії попиту Q_d і пропозиції Q_s на ринку. Припустимо для спрощення, що швидкість зміни ціни dp/dt у будь-який момент часу t прямо пропорційна незадоволеному попиту – різниці $Q_d - Q_s$. Тоді динаміка ціни може бути описана ***рівнянням Самюельсона***:

$$\boxed{dp/dt = c(Q_d(p) - Q_s(p))},$$

де c – сталий додатний коефіцієнт.

Припустимо, що для деякого товару криві попиту та пропозиції є лінійними функціями:

$$Q_d(p) = \alpha - \beta p; \quad Q_s(p) = \gamma + \delta p,$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі додатні коефіцієнти, причому $\alpha > \gamma$, оскільки при нульовій ціні, очевидно, попит перевищує пропозицію.

Тоді рівняння Самюельсона набуває вигляду:

$$dp/dt = c(\alpha - \beta p - \gamma - \delta p) \quad \text{або} \quad \boxed{dp/dt + c(\beta + \delta)p = c(\alpha - \gamma)}$$

– маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку зі сталим коефіцієнтом і сталою правою частиною.

Його частинним розв'язком служить стаціонарний розв'язок – ціна рівноваги p_{st}, що відповідає рівноважному стану $dp/dt = 0$:

$$c(\beta + \delta)p = c(\alpha - \gamma): \quad p_{st} = (\alpha - \gamma)/(\beta + \delta) = const.$$

Знайдемо загальний розв'язок $\overline{p}$ відповідного однорідного рівняння:

$$dp/dt + c(\beta + \delta)p = 0; \quad \frac{dp}{p} = -c(\beta + \delta)dt; \quad \int \frac{dp}{p} = -c(\beta + \delta)\int dt;$$

$$\ln p = -c(\beta+\delta)t + \ln C\,;\quad \overline{p} = C\,e^{-kt}\,,\quad k = c(\beta+\delta)\,,\quad C = \text{const}\,.$$

Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок p неоднорідного рівняння має вигляд:

$$p = \overline{p} + p_{st} = C\,e^{-kt} + (\alpha-\gamma)/(\beta+\delta)\,.$$

Значення довільної сталої C визначається врахуванням початкової умови $p(0) = p_0$. Звідки

$$C + (\alpha-\gamma)/(\beta+\delta) = p_0\,;\quad C = p_0 - (\alpha-\gamma)/(\beta+\delta) = p_0 - p_{st}\,.$$

Тоді крива ціни $p = p(t)$ (відповідний частинний розв'язок) задається співвідношенням:

$$p = (p_0 - p_{st})e^{-kt} + p_{st}\,.$$

Оскільки p_0 і p_{st} – сталі величини, тому поведінка кривої ціни визначається характером експоненти e^{-kt}. Якщо $k > 0$, то маємо: $e^{-kt} \to 0$ при $t \to +\infty$. Тоді крива ціни $p = p(t)$ при $t \to +\infty$ асимптотично наближається до прямої $p = p_{st}$, що відповідає ціні рівноваги p_{st} (рис. 70). У цій ситуації говорять про динамічну стабільність ринку. Умова $k > 0$ визначає обмеження на значення параметрів c, β і δ, що забезпечують динамічну стабільність.

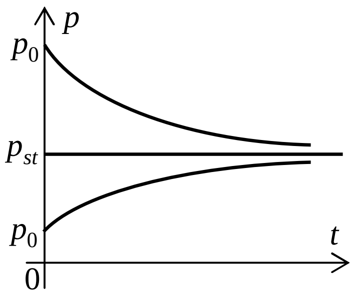

Рис. 70

Залежно від значень p_0 і p_{st} для кривої ціни $p = p(t)$ можливі наступні три випадки (рис. 70): 1) якщо $p_0 = p_{st}$, тоді $p(t) = p_{st}$ – кривою ціни служить горизонтальна пряма, що відповідає ціні рівноваги; 2) якщо $p_0 > p_{st}$, тоді $(p_0 - p_{st})e^{-kt} > 0$ і крива ціни спадає з бігом часу відповідно до e^{-kt}, залишаючись вище прямої $p = p_{st}$; 3) якщо $p_0 < p_{st}$, тоді крива ціни зростає з бігом часу, залишаючись нижче прямої $p = p_{st}$.

Зауваження 3. Рівняння Самюельсона можна розглядати як диференційний аналог різницевої павутинної моделі ринку.

2.7. Різницеві рівняння в економічних задачах

Розглянемо деякі найпростіші застосування різницевих рівнянь для побудови моделей економічної динаміки з дискретним часом n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Модель ділового циклу Самюельсона – Хікса.

Під час моделювання економічної динаміки за допомогою диференціальних рівнянь звичайно виходять з припущення про миттєвий характер впливу різних факторів. Насправді, такі дії відбуваються з деяким запізненням. Якщо наявність запізнення суттєво впливає на економічні процеси, то їх потрібно вводити у відповідні диференціальні рівняння. Проте часто простіше моделі із запізненням будувати у вигляді різницевих рівнянь.

При побудові макроекономічної ***моделі ділового циклу Самюельсона – Хікса*** припускається: 1) споживання C_n на даному n-му періоді часу ($n = 0, 1, 2, \ldots$) лінійно залежить від доходу Y_{n-1} на попередньому $(n-1)$-му періоді часу: $C_n = aY_{n-1} + b$, де a, b – сталі додатні коефіцієнти (a – ***гранична схильність до споживання***; b – ***автономне споживання***); 2) інвестиції I_n на даному n-му періоді прямо пропорційні до приросту доходу $Y_{n-1} - Y_{n-2}$ на попередньому періоді: $I_n = v(Y_{n-1} - Y_{n-2})$, де v – сталий додатний коефіцієнт, який називають ***фактором акселерації***; 3) на кожному n-му періоді національний дохід Y_n витрачається на споживання C_n та інвестиції I_n: $Y_n = C_n + I_n$.

Підставляючи в останнє співвідношення вирази для C_n і I_n, дістанемо рівняння:

$$Y_n = aY_{n-1} + b + v(Y_{n-1} - Y_{n-2}) \text{ або } \boxed{Y_n - (a+v)Y_{n-1} + vY_{n-2} = b},$$

що зв’язує доходи на трьох сусідніх періодах. Це лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке називають ***рівнянням Хікса***.

У припущенні, що величина доходу залишається сталою:

$$Y_n = Y_{n-1} = Y_{n-2} = Y_{st},$$

можна знайти відповідний частинний стаціонарний розв'язок Y_{st}:

$$Y_{st} - (a+v)Y_{st} + vY_{st} = b; \quad Y_{st} = b/(1-a).$$

Для знаходження загального розв'язку $\overline{Y}_n$ відповідного однорідного різницевого рівняння $Y_n - (a+v)Y_{n-1} + vY_{n-2} = 0$ необхідно розглянути характеристичне рівняння $\lambda^2 - (a+v)\lambda + v = 0$.

За принципом суперпозиції загальний розв'язок Y_n неоднорідного рівняння можна подати у вигляді: $Y_n = \overline{Y}_n + Y_{st}$.

Зауваження 1. У залежності від значень граничної схильності до споживання a і фактору акселерації v можливі п'ять типів динаміки: 1) стійке зростання; 2) стійке затухання; 3) незатухаючі коливання (зі сталою амплітудою); 4) коливання із затухаючою амплітудою; 5) коливання зі зростаючою амплітудою. На практиці спостерігаються наступні обмеження на коефіцієнти: $a<1$ і $v>1$. При цьому розв'язок рівняння Хікса відноситься до одного з останніх трьох типів: є нестійким і має коливальний характер – зростання змінюється на швидке спадання і навпаки (рис. 71). Тобто реальна економіка є нестійкою – періоди підйому чергуються з періодами спаду.

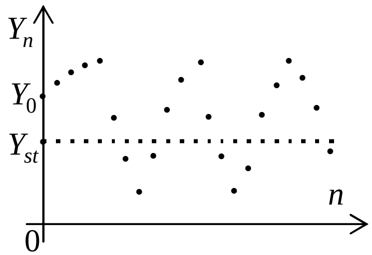

Рис. 71

Розглянемо докладніше найцікавіший випадок комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння, що спостерігається при від'ємному дискримінанті $D = (a+v)^2 - 4v < 0$ (коливальні типи динаміки). Тоді

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \text{ де } \alpha = (a+v)/2;$$

$$\beta = \sqrt{-D}\Big/2 = \sqrt{4v-(a+v)^2}\Big/2;$$

$$\overline{Y}_n = r^n(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi), \quad C_1, C_2 = const;$$

$$Y_n = \overline{Y}_n + Y_{st} = r^n(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) + Y_{st}.$$

Тут

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{v}; \quad \varphi = arctg\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = arctg\sqrt{\frac{4v}{(a+v)^2} - 1}.$$

Одержаний розв'язок Y_n носить коливальний характер і є незатухаючим при $v = 1$, затухаючим при $v < 1$ і з постійно зростаючою амплітудою при $v > 1$.

Приклад 1. Для моделі Самуельсона – Хікса задано, що $a = 0{,}32$, $v = 1{,}28$, $b = 3{,}4$. Знайти частинний розв'язок $Y_{ч\,n}$, який задовольняє початковим умовам $Y_0 = 6$ і $Y_1 = 5{,}8$.

□ Рівняння Хікса набуває вигляду:

$$Y_n - (0{,}32 + 1{,}28)Y_{n-1} + 1{,}28Y_{n-2} = 3{,}4;$$

$$Y_n - 1{,}6Y_{n-1} + 1{,}28Y_{n-2} = 3{,}4.$$

Його частинний стаціонарний розв'язок Y_{st}:

$$Y_{st} = b/(1-a) = 3{,}4/(1-0{,}32) = 5.$$

Знайдемо загальний розв'язок Y_n:

$$r = \sqrt{v} = \sqrt{1{,}28}; \quad \varphi = arctg\sqrt{\frac{4v}{(a+v)^2} - 1} =$$

$$= arctg\sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}28}{(0{,}32 + 1{,}28)^2} - 1} = arctg\,1 = \frac{\pi}{4};$$

$$Y_n = r^n(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) + Y_{st} =$$

$$= 1{,}28^{n/2}\left(C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4}\right) + 5.$$

Для визначення відповідних значень довільних сталих C_1 і

C_2 скористаємося початковими умовами:

$$\begin{matrix} Y_0 = 6: \\ Y_1 = 5{,}8: \end{matrix} \begin{cases} C_1 + 5 = 6; \\ 1{,}28^{1/2}\left(C_1 \cdot \sqrt{2}/2 + C_2 \cdot \sqrt{2}/2\right) + 5 = 5{,}8; \end{cases}$$

$$C_1 = 1;\ \ 0{,}8C_1 + 0{,}8C_2 = 0{,}8;\ \ C_2 = 1 - C_1 = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має коливальний вигляд зі зростаючою амплітудою:

$$Y_{чп} = 1{,}28^{n/2}\cos(n\pi/4) + 5,\ \ n = 0,1,2,\ldots \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. На практиці коливання з постійно зростаючою амплітудою не спостерігаються, оскільки: 1) розмір національного доходу не перевищує величини доходу повної зайнятості, а це обмежує амплітуду коливань зверху; 2) обсяг інвестування повинен хоча б перекривати величину амортизації, а це обмежує амплітуду коливань знизу. Ці обставини вказують на певні недоліки і обмеженість застосування моделі Самюельсона – Хікса.

Павутинна модель ринку.

Розглянемо випадок ринку одного товару й опишемо процес пошуку («нащупування») на ньому рівноважної ціни – торг між продавцем і покупцем.

Дві основні величини ринкових відносин – це попит Q_d і пропозиція Q_s що залежать від ціни товару p на ринку: $Q_d = Q_d(p)$ і $Q_s = Q_s(p)$. При малих значеннях ціни p справедлива нерівність $Q_d(p) > Q_s(p)$, тобто попит перевищує пропозицію. При більших значеннях p навпаки $Q_d(p) < Q_s(p)$, тобто пропозиція перевищує попит. Припускаючи, що функції $Q_d = Q_d(p)$ і $Q_s = Q_s(p)$ неперервні, приходимо до висновку, що існує ***рівноважна ціна*** товару $p = p_{st}$, при якій попит і пропозиція співпадають: $Q_d(p_{st}) = Q_s(p_{st})$. Відповідний об'єм запропонованого і реалізованого товару $Q_{st} = Q_d(p_{st}) = Q_s(p_{st})$ називається ***рівноважним***.

Розглянемо найпростішу ***павутинну модель*** пошуку рівноважної ціни. Вона пояснює явище регулярного повторення циклів зміни цін та обсягів продажу, наприклад, сільськогосподарської продукції.

Припустимо, що об'єм пропозиції Q_{sn} на даному n-му періоді часу ($n = 0, 1, 2, \ldots$) залежить від ціни товару p_{n-1} на попередньому $(n-1)$-му періоді часу: $Q_{sn} = Q_s(p_{n-1})$. При цьому попит Q_{dn} на даному n-му періоді часу залежить від поточної ціни товару p_n: $Q_{dn} = Q_d(p_n)$. Умова динамічної рівноваги $Q_{dn} = Q_{sn}$ попиту і пропозиції на кожному n-му періоді часу ($n = 0, 1, 2, \ldots$) приводить до різницевого рівняння першого порядку:

$$\boxed{Q_d(p_n) = Q_s(p_{n-1})}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

<u>Зауваження 3</u>. Припущення про запізнення пропозиції від ціни цілком обґрунтоване: рішення про обсяг виробництва приймається з урахуванням поточної ціни, проте виробничий цикл має певну тривалість, тому пропозиція, що відповідає прийнятому рішенню, з'явиться на ринку по закінченню даного циклу.

Для спрощення покладемо, що функції попиту і пропозиції є лінійними:

$$Q_{dn} = \alpha - \beta p_n; \quad Q_{sn} = \gamma + \delta p_{n-1},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі додатні коефіцієнти, причому $\alpha > \gamma$, оскільки при нульовій ціні, очевидно, попит перевищує пропозицію.

Тоді маємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку:

$$\alpha - \beta p_n = \gamma + \delta p_{n-1} \quad \text{або} \quad \boxed{p_n = -k\, p_{n-1} + a},$$

де a, k – сталі додатні коефіцієнти: $a = (\alpha - \gamma)/\beta$: $k = \delta/\beta$.

Його стаціонарний частинний розв'язок – рівноважну ціну p_{st} – знайдемо при умові $p_n = p_{n-1} = p_{st} = const$:

$$p_{st} = -k\, p_{st} + a; \quad \boxed{p_{st} = a/(1+k)} \quad \text{або} \quad p_{st} = (\alpha - \gamma)/(\beta + \delta).$$

Загальний розв'язок $\overline{p}_n$ відповідного однорідного рівняння

$$p_n = -k\, p_{n-1}$$

задається формулою $\overline{p}_n = C\,(-k)^n$, де $C = \text{const}$.

Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок p_n неоднорідного рівняння має вигляд:

$$\boxed{p_n = \overline{p}_n + p_{st} = C\,(-k)^n + p_{st}}.$$

Якщо за початкову умову прийняти значення ціни p_0 у період часу $n = 0$, то для довільної сталої C отримаємо:

$$p_0 = C\,(-k)^0 + p_{st}\,;\;\; C = p_0 - p_{st}\,.$$

Тоді відповідний частинний розв'язок задається співвідношенням:

$$\boxed{p_n = (\,p_0 - p_{st}\,)\,(-k)^n + p_{st}}.$$

Якщо $p_0 = p_{st}$, тоді $p_n = p_{st} = const$, $n = 0,1,2,\ldots$, тобто ціни стабільні та співпадають з рівноважною ціною.

Якщо $p_0 \neq p_{st}$, то поведінка ціни p_n, $n = 0,1,2,\ldots$ визначається степеневою функцією $(-k)^n$. Оскільки $k > 0$, то знаки $(-k)^n$ регулярно чергуються, тобто ціна коливається. При цьому мають місце три випадки: 1) якщо $0 < k < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(-k)^n = 0$ і послідовність цін p_n, $n = 0,1,2,\ldots$ носить затухаючий коливальний характер, збігаючись до ціни рівноваги: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_{st}$ (стан рівноваги – стійкий; говорять, що коливання ціни стримуються); 2) якщо $k = 1$, то послідовність цін набуває вигляду p_0, $2p_{st} - p_0$, p_0, $2p_{st} - p_0$, …, тобто періодично коливається навколо ціни рівноваги p_{st} з амплітудою $|\,p_0 - p_{st}\,|$ ((стан рівноваги – нестійкий; кажуть, що коливання ціни періодичні); 3) якщо $k > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(-k)^n = \infty$ і послідовність цін необмежено зростає, коливально віддаляючись від ціни рівноваги (стан рівноваги – нестійкий; говорять, що коливання ціни зростають).

Рис. 72 відповідає випадку $0 < k < 1$ (стійка модель). На горизонтальній осі відкладаються об'єми Q виробленого і реалізованого товару, а на вертикальній – ціни p. Прямі $Q_d = Q_d(p)$ і $Q_s = Q_s(p)$ задають залежності попиту Q_d і пропозиції Q_s від ціни товару p. Збіжний процес пошуку рівноважної ціни відображається павутиною (спіраллю), що скручується до точки рівноваги $(Q_{st}\,;p_{st})$, яка виконує роль ***стійкого фокусу***.

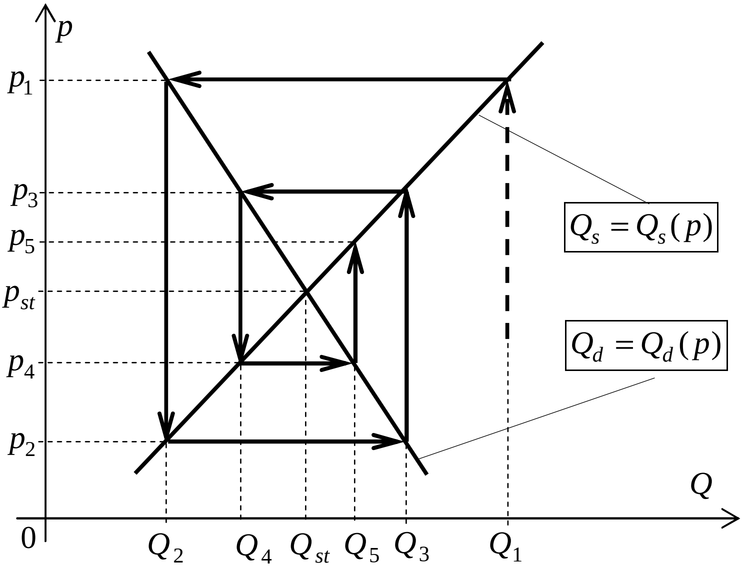

Рис. 72

Аналогічно, рис. 73 відповідає випадку $k > 1$ (нестійка модель). Процес пошуку рівноважної ціни є розбіжним і відображається павутиною (спіраллю), що розкручується від точки рівноваги $(Q_{st}\,;p_{st})$, яка є ***нестійким фокусом***.

Зауваження 4. На збіжність чи розбіжність павутинної моделі значний вплив здійснюють еластичності попиту та пропозиції.

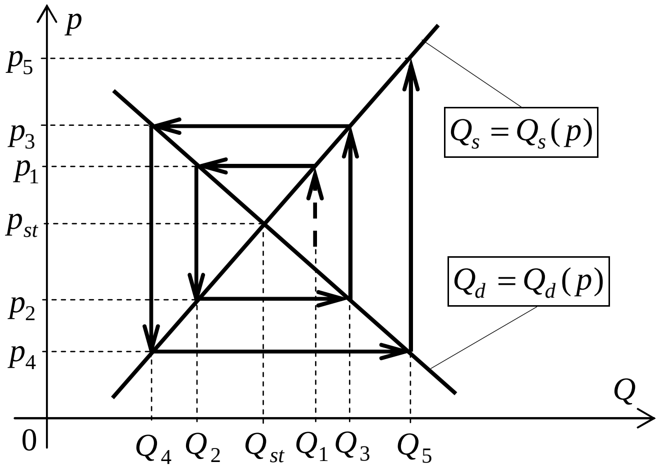

Рис. 73

Зауваження 5. На практиці при $k > 1$ необмежене зростання коливань не спостерігається, оскільки при значних відхиленнях від рівноваги лінійний вигляд залежностей попиту і пропозиції від ціни стає нереалістичним. У більш адекватній нелінійній павутинній моделі при цій умові $k > 1$ встановлюються коливання хоча й великої, проте скінченної амплітуди.

Приклад 2. Для павутинної моделі ринку $p_n = -k\, p_{n-1} + a$ задано, що $a = 3{,}6$; $k = 0{,}8$. Знайти частинний розв'язок $p_{чn}$, який задовольняє початковій умові $p_0 = 2{,}5$.

□ Павутинна модель набуває вигляду: $p_n = -0{,}8\, p_{n-1} + 3{,}6$.

Стаціонарний частинний розв'язок – рівноважна ціна p_{st} – визначається за формулою $p_{st} = a/(1+k)$: $p_{st} = 3{,}6/(1+0{,}8) = 2$.

Загальний розв'язок p_n неоднорідного рівняння має вигляд:

$$p_n = C(-k)^n + p_{st} = C(-0{,}8)^n + 2\,.$$

Відповідне значення довільної сталої C знайдемо з початкової умови: $p_0 = 2{,}5$: $C(-0{,}8)^0 + 2 = 2{,}5$; $C = 0{,}5$.

Отже, шуканий частинний розв'язок $p_{чп}$ має затухаючий коливальний характер: $p_{чп} = 0{,}5\,(-0{,}8)^n + 2$, $n = 0,1,2,\ldots$. ■

<u>Динамічна модель Леонтьєва міжгалузевого балансу</u>.

Розглянута раніше статична модель Леонтьєва міжгалузевого балансу записується у вигляді матричного рівняння:

$$\boxed{X = AX + Y}, \text{ де } X^T = (x_1\, x_2 \ldots x_m); \; Y^T = (y_1\, y_2 \ldots y_m);$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тут m − кількість галузей у господарстві; X – вектор-план валового випуску; Y – вектор кінцевих продуктів; A – матриця прямих витрат; a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - коефіцієнти прямих витрат, що задають витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі..

У цій моделі всі величини покладають осередненими за деякий проміжок часу і «одномоментними». Насправді вектор-план – валовий продукт, що призначений для внутрішнього і кінцевого споживання в n-му періоді часу ($n = 0,1,2,\ldots$) – визначається не поточним валовим випуском X_n, а випуском X_{n+1} у наступний $(n+1)$-й період. Це запізнення обумовлене багатьма факторами, зокрема інерцією планування та налаштування виробництва, необхідністю мобілізації внутрішніх ресурсів, затримкою транспортування сировини й енергоносіїв та ін.

З урахуванням запізнення система рівнянь міжгалузевого балансу в припущенні про сталість частки внутрішнього споживання кожної галузі набуває вигляду:

$$\boxed{X_{n+1} = AX_n + Y_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Маємо ***динамічну модель Леонтьєва з дискретним часом*** –

систему лінійних різницевих рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Головна задача міжгалузевого балансу, що розв'язується з використанням динамічної моделі Леонтьєва, полягає у знаходженні зміни в часі $n = 0,1,2,...$ вектора-плану X_n, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує задану динаміку вектора кінцевих продуктів Y_n, $n = 0,1,2,...$.

Якщо в початковий період часу $n = 0$ задано значення вектора валового випуску X_0, то відповідний частинний розв'язок системи лінійних різницевих рівнянь можна подати у вигляді:

$$\boxed{X_n = A^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} Y_k}, \quad n = 1,2,... .$$

Зауваження 6. При умові $Y_n = Y_0 = const$, $n = 0,1,2,...$ розв'язок $X = (E - A)^{-1} Y_0$ статичної моделі Леонтьєва служить стаціонарним частинним розв'язком динамічної моделі.

Зауваження 7. При певних умовах найбільше власне число матриці $(E - A)^{-1}$ визначає максимально можливий темп зростання економіки, а відповідний власний вектор характеризує необхідні для цього міжгалузеві пропорції.

Приклад 3. Нехай економічна система складається з трьох галузей виробництва: $m = 3$. Для динамічної моделі Леонтьєва відома матриця прямих витрат A, а в початковий період часу $n = 0$ задано значення вектора валового випуску X_0 і вектора кінцевих продуктів Y_0. Знайти значення вектора валового випуску X_3 в період часу $n = 3$, якщо всі компоненти вектора кінцевого споживання Y_n збільшуються на 20% за кожний період, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

□ З умови задачі випливає, що динаміка вектора кінцевих продуктів має вигляд: $Y_n = Y_0 \cdot 1{,}2^n$, $n = 0,1,2,\ldots$. Тоді

$$X_3 = A^3 X_0 + \sum_{k=0}^{2} A^{3-k-1} Y_k = A^3 X_0 + A^2 Y_0 + AY_1 + Y_2 .$$

Проведемо обчислення:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}19 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}17 & 0{,}11 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}19 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}107 & 0{,}132 & 0{,}105 \\ 0{,}087 & 0{,}11 & 0{,}084 \\ 0{,}126 & 0{,}147 & 0{,}104 \end{pmatrix};$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot 1{,}2^1 = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \\ 48 \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot 1{,}2^2 = \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ 57{,}6 \end{pmatrix};$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}107 & 0{,}132 & 0{,}105 \\ 0{,}087 & 0{,}11 & 0{,}084 \\ 0{,}126 & 0{,}147 & 0{,}104 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}19 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}17 & 0{,}11 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}19 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \\ 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ 57{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 272{,}2 \\ 174{,}3 \\ 211{,}3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, у разі зазначеного темпу зростання кінцевого продукту на 20% за кожний період необхідно через три часові періоди збільшити компоненти валового випуску відповідно на

$$\frac{272{,}2 - 200}{200} \cdot 100\% = 36{,}1\%, \quad \frac{174{,}3 - 100}{100} \cdot 100\% = 74{,}3\%,$$

$$\frac{211{,}3 - 100}{100} \cdot 100\% = 111{,}3\%$$

порівняно з їх початковими значеннями. ■

2.8. Контрольні запитання

1. Що таке вектор нормалі площини? Які його координати?
2. Наведіть основні типи рівняння площини.
3. Які можливі випадки розташування площини відносно координатних осей в залежності від рівності нулю коефіцієнтів загального рівняння?
4. Як з’ясувати, що точка належить площині?
5. Який кут ми вважаємо кутом між двома площинами?
6. Як обчислюється кут між площинами?
7. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
8. Як обчислюється відстань від точки до площини?
9. Як знайти точку перетину трьох площин?
10. Що таке напрямний вектор прямої?
11. Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.
12. Як отримати параметричні рівняння прямої з її канонічного рівняння?
13. Як обчислюється кут між прямими у просторі?
14. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
15. Як обчислюється кут між прямою і площиною?
16. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
17. Як знаходиться відстань між непаралельними прямими?
18. Як знаходиться відстань від точки до прямої у просторі?
19. Як знайти точку перетину прямої та площини?
20. Яка поверхня називається сферою? Наведіть канонічне рівняння сфери та рівняння сфери зі зміщеним центром.
21. Які лінії буде отримано, якщо сферу перерізати площинами?
22. Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
23. Яка поверхня називається циліндричною? Запишіть канонічні рівняння еліптичного, гіперболічного, параболічного циліндрів.
24. Яка фігура знаходиться в осьовому перерізі циліндричної поверхні?
25. Яка поверхня називається конічною? Наведіть канонічне рівняння конуса другого порядку.

26. Як утворюється поверхня обертання? Як знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї ж площини?
27. Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів. Які з цих поверхонь є лінійчатими?
28. Проаналізуйте канонічні рівняння вивчених поверхонь, назвіть їх подібності та відмінності.
29. Визначить ознаки за якими можна впевнено стверджувати що задана поверхня конічна або циліндрична?
30. Наведіть означення функції n змінних та її області визначення.
31. Як знайти природну область визначення (область допустимих значень) функції багатьох змінних?
32. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення. Який геометричний зміст цих понять? Наведіть приклади графіків функцій двох змінних.
33. Що називається лінією рівня функції двох змінних? Поверхнею рівня функції трьох змінних? Наведіть приклади ліній та поверхонь рівня.
34. Як Ви розумієте поняття гладкої лінії?
35. Запишіть вирази для повного та частинних приростів функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0.
36. Наведіть означення частинних похідних функції багатьох змінних. У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?
37. Як за правилами диференціювання функції однієї змінної знаходяться частинні похідні функції багатьох змінних?
38. Що таке частинні та повний диференціали функції n змінних?
39. Сформулюйте необхідні та достатні умови диференційованості функції двох змінних.
40. У чому полягає інваріантність форми повного диференціала?
41. Як застосовується повний диференціал у наближених обчисленнях?
42. За якими формулами проводиться диференціювання складених функцій багатьох змінних? Запишіть формулу повної похідної.
43. За якими формулами проводиться диференціювання неявно заданих функцій однієї і двох змінних?
44. Дайте означення похідних і диференціалів вищих порядків.

45. Сформулюйте умови незалежності мішаної частинної похідної від порядку диференціювання.
46. Наведіть означення дотичної площини і нормальної прямої до поверхні.
47. Запишіть загальне рівняння дотичної площини і канонічні рівняння нормальної прямої до поверхні, що задана явно. Який вигляд набувають ці рівняння у випадку неявного задання поверхні?
48. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних?
49. Дайте означення похідної за напрямом і градієнта функції трьох змінних.
50. Запишіть формули для обчислення похідної за напрямом і градієнта у прямокутних координатах.
51. Як зв'язані похідна за напрямом і градієнт, градієнт і вектор нормалі до поверхні рівня?
52. Запишіть формулу Тейлора для функції n змінних.
53. Наведіть означення точки локального мінімуму (максимуму) функції багатьох змінних.
54. Сформулюйте необхідні умови локального екстремуму.
55. Яка точка називається стаціонарною?
56. Сформулюйте достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
57. Як ставиться задача на умовний екстремум для функції двох змінних?
58. У чому полягає метод множників Лагранжа для знаходження умовного екстремуму функції двох змінних?
59. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?
60. Як за методом найменших квадратів знаходяться коефіцієнти шуканої лінійної функції?
61. Наведіть приклади економічних задач на екстремум.
62. Що називається числовим рядом? Наведить приклади.
63. Що називається частковою сумою, загальним членом, сумою, залишком ряду?
64. Який ряд вважають збіжним? Розбіжним?
65. У чому полягає необхідна ознака збіжності та відповідна достатня ознака розбіжності ряду?
66. Сформулюйте властивості дій з рядами.
67. Який числовий ряд називається знакододатним?

68. У чому полягає інтегральна ознака Коші? Як при цьому оцінюються сума і залишок збіжного знакододатного ряду?
69. В яких випадках доцільно застосовувати інтегральну ознаку Коши?
70. При яких умовах збігаються і розбігаються найпоширеніші еталонні ряди – узагальнений гармонічний ряд і ряд геометричної прогресії?
71. Сформулюйте основну ознаку порівняння.
72. У чому полягає гранична ознака порівняння? Як треба підбирати відповідний еталонний ряд?
73. Сформулюйте ознаку Даламбера.
74. Коли краще застосовувати ознаку Даламбера, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
75. У чому полягає радикальна ознака Коші?
76. Коли краще застосовувати радикальну ознаку, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
77. Який числовий ряд називається знакозмінним?
78. Що таке знакопочерговий ряд (ряд Лейбниця)?
79. У чому полягає ознака Лейбниця збіжності знакопочергового ряду?
80. Який знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним? Умовно збіжним?
81. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
82. В якому порядку краще досліджувати знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжність?
83. Наведіть приклади застосування рядів у економічних дослідженнях.
84. Опишіть наступні застосування диференціальних рівнянь в економічних задачах: неокласична модель зростання, модель природного зростання випуску, зростання випуску в умовах конкуренції, динаміка ринкових цін.
85. Опишіть наступні застосування різницевих рівнянь в економічних задачах: складні відсотки, економічна модель розвитку Самюельсона – Хікса, павутинна модель ринку, динамічна модель Леонтьєва.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2010. – 448 с.

3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

4. Бугір М. К. Математика для економістів. – К.: Академія, 2003. – 520 с.

5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: У 2 ч.
Ч.1. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.

6. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Математичний практикум. – К.: КНЕУ, 2004. – 682 с.

7. Васильченко І. П. Вища математика для економістів. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454с.

8. Грисенко М. В. Математика для економістів: методи й моделі, приклади й задачі. – К.: Либідь. 2007. – 720 с.

9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1997. –
Ч.1. – 304 с. Ч.2. – 416 с.

10. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Академія, 2003. – 624с.

11. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

12. Клюшин В. Л. Высшая математика для экономистов. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 448 с.

13. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2005. – 464 с.

14. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 471 с.

15. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

16. Крушевский А. В. Справочник по экономико-математическим моделям и методам. – К.: Техника, 1982. – 208 с.

17. Липовик В. В. Вища математика для економістів. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2003. – 263с.

18. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – М.: Дело, 2003. – 520 с.

19. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики: – К.: КНЕУ, 2003. – 305 с.

20. Макаренко В. О. Вища математика для економістів. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

21. Макаров С. И. Математика для экономистов. – М.: КНОРУС, 2008. – 264 с.

22. Малярець Л. М., Ігначкова А. В. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2006. – 544 с.

23. Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

24. Пастушенко С. М., Підченко Ю. П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

25. Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: Инфра–М, 2003. – 575 с.

26. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В. Математика в экономике: В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.

27. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике: В 2-х ч. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 376 с.

28. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.

29. Станішевський С. О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.

30. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. – Х.: Рубікон, 1999.–320 с.

31. Травкін Ю. І., Малярець Л. М. Математика для економістів. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.

32. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

33. Экономико-математический энциклопедический словарь / Глав. ред. В. И. Данилов-Данильян. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 688 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Колосов Анатолій Іванович,
Якунін Анатолій Вікторович,
Ситникова Юлія Валеріївна

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А
д л я   е к о н о м і с т і в
у   двох   модулях

М О Д У Л Ь 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”)

За авторською редакцією
Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Комп’ютерне верстання *А. В. Якунін*
Дизайн обкладинки *Ю. В. Ситникова*

План 2014, поз. 48 Л
Підп. до друку 16.06.2015 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 15,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства ім. О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014