МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт
з курсу

ФІЗИКА

Розділ

"МЕХАНІКА"

(для студентів 1 курсу денної і заочної форми навчання за напрямами підготовки бакалаврів
6.170202 – Охорона праці, 6.070101 – Транспортні технології (за видами транспорту), 6.060101 – Будівництво, 6.060103 – Гідротехніка (водні ресурси), 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування, 6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій, 6.050201 – Системна інженерія,
6.090103 – Лісове і садово-паркове господарство)

ХАРКІВ – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2015

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з курсу “Фізика”. Розділ “Механіка” (для студентів 1 курсу денної і заочної форми навчання за напрямами підготовки бакалаврів 6.170202 – Охорона праці, 6.070101 – Транспортні технології (за видами транспорту), 6.060101 – Будівництво, 6.060103 – Гідротехніка (водні ресурси), 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування, 6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій, 6.050201 – Системна інженерія, 6.090103 – Лісове і садово-паркове господарство) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: О. М. Петченко, Є. І. Назаренко, Є. С. Орел. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 28 с.

Укладачі: О. М. Петченко
Є. І. Назаренко
Є. С. Орел

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. А. С. Сисоєв

Рекомендовано кафедрою фізики, протокол № 2 від 30 вересня 2014 р.

ВСТУП

Підґрунтям освіти інженера є глибоке вивчення фундаментальних дисциплін, насамперед фізики. Практичні заняття являють собою найбільш активну форму навчання, під час здійснення якої формується фізичне мислення студентів, розкривається конструктивний підхід до фізичних явищ і законів, з'являється вміння грамотно й чітко формулювати фізичну проблему, методи її вирішення і результати. Завдання навчання фізиці можна вважати повністю вирішеним, якщо студент здатний самостійно розв'язувати фізичні проблеми відповідного ступеня складності. Вміння вирішувати задачі є, таким чином, найважливішим критерієм ефективності навчання.

Метою вузівського навчання є підготовка студента до самостійної творчої діяльності. З цієї точки зору практичні заняття являють собою важливий вид навчального процесу, оскільки вирішення задачі незалежно від її складності є маленьким науковим дослідженням з усіма необхідними елементами наукової творчості.

Ці методичні вказівки є корисними при підготовці до практичних занять з курсу фізики і при самостійній роботі студентів. Вони охоплюють більшість розділів механіки і складаються з: контрольних запитань з кожного розділу; вказівок до вирішення задач; приклади розв'язань типових для кожного розділу задач; рекомендовані для самостійного розв'язання задачі. За основу вказівок було взято "Сборник задач по общему курсу физики" В. С. Савельєва (Москва, "Наука", 1985). Всі умови задач і їх розв'язання подано у системі фізичних величин СІ.

РОЗДІЛ 1

КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§1 *Контрольні запитання*

1. Вкажіть дві головні ознаки матерії, про які йдеться у її філософському визначенні.
2. Що можна вважати матеріальною точкою: Місяць, Землю, рухомий автомобіль?
3. Вкажіть на рисунку 1 вектор переміщення тіла, що рухається уздовж кривої АВ.

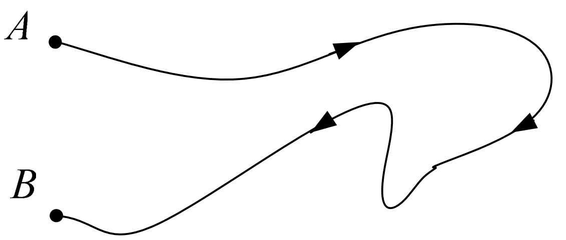


Рисунок 1.1

4. Як називається рух, при якому $a_n = 0$ і $a_\tau =$ const?
5. В якому випадку пройдений тілом шлях у першу секунду дорівнює половині прискорення?
6. Вкажіть, на якому рисунку правильно зображено вектор повного прискорення при русі тіла по колу радіусом R (див. рис. 2, O – центр кола), якщо 1) a_n=0 і $a_\tau<0$; 2) a_n=0 і $a_\tau >0$; 3) $a_n \neq 0$ і $a_\tau=0$; 4) $a_n \neq 0$ і $a_\tau \neq 0$.

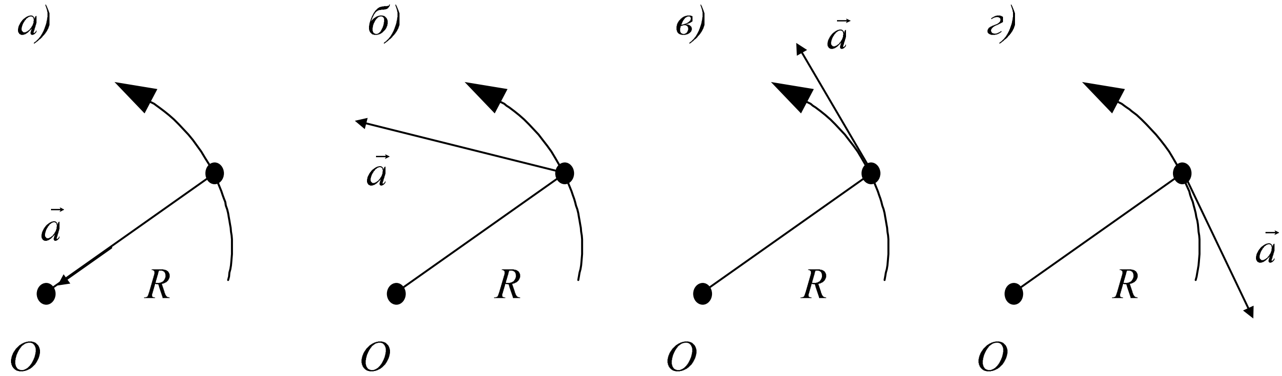


Рисунок 1.2

7. Побудуйте залежність координати матеріальної точки x від часу t при додатних x_0 і v_0 у випадку, коли прискорення a постійне і від'ємне.
8. Побудуйте залежність v від t для частинки, що рухається із стану спокою з прискоренням, зміна якого з часом представлена на рисунку 1.3
9. Усі зірки, зокрема деяка зірка N, віддаляються від Сонця із швидкостями, пропорційними їхнім відстаням до нього. Як буде виглядати ця картина з "точки зору" зірки N?

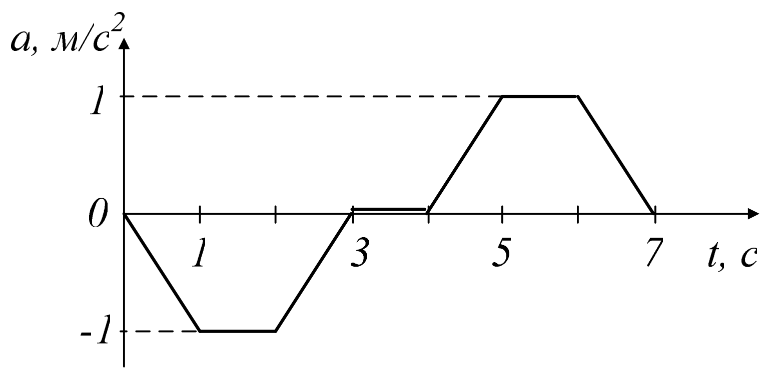


Рисунок 1.3

10. Три точки знаходяться у вершинах рівнобічного трикутника із стороною *a=20 см*. Вони розпочинають одночасно рухатися з постійною за модулем швидкістю v=*5 мм/с* так, що перша точка весь час тримає шлях на другу, друга – на третю, третя – на першу. Нарисувати траєкторії цих точок. З побудованого рисунка визначити, через який час τ точки зустрінуться. Аналітично визначити час τ.
11. Які кінематичні фактори визначають довжину стрибка спортсмена?

§2 *Вказівки до розв'язання задач*

Для вирішення вказаних задач треба добре орієнтуватися в елементах кінематики матеріальної точки, знати визначення миттєвої швидкості та прискорення. Особливу увагу необхідно звернути на прискорення при криволінійному русі, на його складові: нормальне й тангенціальне прискорення.

У таблиці 1.1 наведено деякі кінематичні величини й формули.

Таблиця 1.1 – Деякі кінематичні величини й формули

Фізична величина		Формула
Шлях *s, м*	Рівномірний рух	$s = \mathrm{v}\, t$
Швидкість v, *м/с*		$\mathrm{v}=const$
Прискорення *a, м/с²*		$a=0$
S	Рівноприскорений рух	$s = \mathrm{v}_0\, t + \dfrac{at^2}{2}$
V		$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at$
A		$a = const$
S	Нерівномірний рух	$s = s(t)$
v		$\mathrm{v} = \dfrac{ds}{dt}$
a		$a = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$

§3 ***Приклади розв’язання задач***

Задача 1. Знайти швидкість човна відносно берега річки, який пливе під кутом $\alpha=30°$ до течії, якщо швидкість течії річки $v_1=1{,}5$ *м/с*, швидкість човна відносно води $v_2=2{,}5$ *м/с*.

Дано:

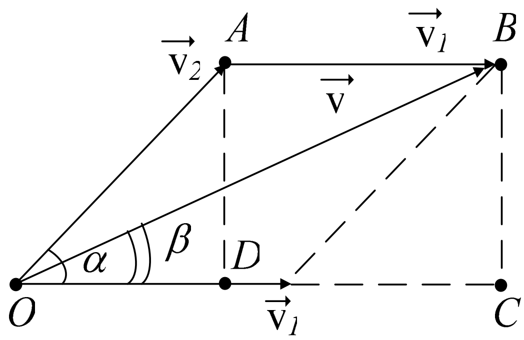
$\alpha = 30°$

$v_1=1{,}5$ *м/с*

$v_2=2{,}5$ *м/с*

$\vec{v}$ – ?

Розв’язок:



$\overrightarrow{OA} = \vec{v}_2$

$\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{v}_1$

$BC=AD=v_2\sin\alpha$

Рисунок 1.4

Швидкість човна відносно берега є векторною сумою швидкостей $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (див. рис. 1.4).

За теоремою косинусів знайдемо модуль вектора швидкості $\vec{v}$:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\ v_1 v_2 \cos(\pi - \alpha);$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2\,v_1^2\ v_2^2 \cos(\alpha)} = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 2\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5\cdot \cos(30°)} \approx 3{,}87 \text{ м/с}\ .$$

Показаний на рисунку 1.4 кут β визначає напрямок вектора швидкості $\vec{v}$:

$$\sin\beta = \frac{v_2 \sin\alpha}{v} \approx \frac{2{,}5\cdot 0{,}5}{3{,}87} \approx 0{,}3228,$$

$$\beta \approx 18{,}83°.$$

Відповідь: $v \approx 3{,}87$ *мм/*, $\beta \approx 18{,}83°$.

Задача 2. Вільно падаюче тіло за останні *2 с* польоту пройшло *196 м* шляху. З якої висоти воно впало?

Дано:

$\Delta t = t_2 - t_1 = 2$ *с*

$s = 196$ *м*

h – ?

Розв’язок:

Нехай у момент часу $t=0$ *с* координата y тіла дорівнює $y = h$ метрів, а в моменти часу $t= t_1$ *с* і $t= t_2$ *с* – $y = s$ *м* і $y = 0$ *м* відповідно (див. рис. 1.5). Рух тіла відбувається у полі тяжіння Землі, тому прискорення тіла – це прискорення вільного падіння $g = 9{,}8$ *м/с²*. Кінематична формула залежності координати y від часу

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.1}$$

За умовою задачі початкова координата $y_0 = h$ *м*, початкова швидкість $v_0 = 0$ *м/с*, прискорення $a = -g$ *м/с²*. Записавши формулу (1.1) для моментів часу

$t = t_1\,c$ і $t = t_2\,c$, а також вираз з умови $t_2 - t_1 = 2\ c$, отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими h, t_1 і t_2 , розв’язавши яку, знайдемо відповідь задачі:

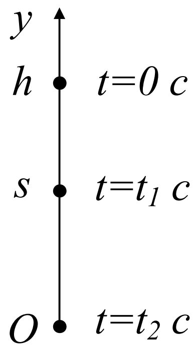


Рисунок 1.5

$$\begin{cases} y(t_1) = s = h - \dfrac{gt_1^2}{2}, \\ y(t_2) = 0 = h - \dfrac{gt_2^2}{2}, \\ t_2 - t_1 = 2\,c; \end{cases} \qquad \begin{cases} h = s + \dfrac{gt_1^2}{2}, \\ h = \dfrac{gt_2^2}{2}, \\ t_1 = t_2 - 2; \end{cases} \qquad \begin{aligned} & h = s + \frac{g}{2}(t_2 - 2)^2, \\ & h = \frac{g}{2}t_2^2, \\ & t_1 = t_2 - 2; \end{aligned}$$

$$\frac{g}{2}t_2^2 = s + \frac{g}{2}(t_2 - 2)^2,\ t_2^2 = \frac{2}{g}s + t_2^2 - 4t_2 + 4,\ t_2 = \frac{s}{2g} + 1 = 11\,c,$$

$$h = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{9{,}8 \cdot 11^2}{2} = 592{,}9\ м\,.$$

Відповідь: $h = 592{,}9\ м$.

Задача 3. На висоті *10 м* над Землею кинуто камінь під кутом 30° до горизонту зі швидкістю v=*20 м/с*. Знайти найбільшу висоту каменя над поверхнею Землі під час його польоту і відстань, яку він здолає у горизонтальному напрямку. Опором повітря знехтувати.

Дано:	Розв’язок:
$h = 10\ м$ $v_0 = 20\ м/с$ $\alpha = 30^{\circ}$	Рух тіла відбувається у полі тяжіння Землі, тому прискорення тіла – це прискорення вільного падіння $g = 9{,}8\ м/с^2$. Розкладемо рух каменя на два компоненти: 1) рівномірний рух уздовж осі x; 2) рівноприскорений рух уздовж осі y.
$H - ?$ $s - ?$	

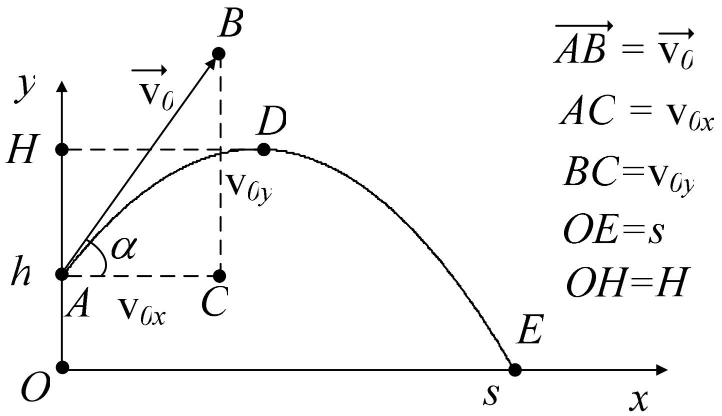


Рисунок 1.6

Кінематичні формули залежності координат x і y від часу, а також відповідних швидкостей v_x і v_y такі:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t, \tag{1.2}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y t^2}{2}; \tag{1.3}$$

$$v_x(t) = v_{0x} = \text{const}, \tag{1.4}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t. \tag{1.5}$$

За умовою задачі: початкові координати – $y_0 = h$ *м*, $x_0 = 0$ *м*; початкові швидкості – $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ *м/с*, $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$ *м/с*; прискорення – $a_x = 0$ *м/с²*, $a_y = -g$ *м/с²*. З урахуванням цього формули (1.2) - (1.5) перепишемо у вигляді

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t, \tag{1.6}$$

$$y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2}; \tag{1.7}$$

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \tag{1.8}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - g \cdot t. \tag{1.9}$$

У верхній точці D $v_y = 0$ *м/с*. Отже з останньої формули можна знайти момент часу, коли камінь має найбільшу висоту:

$$0 = v_0 \sin\alpha - g \cdot t; v_0 \sin\alpha = g \cdot t; \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{20 \cdot 0{,}5}{9{,}8} \approx 1\, c;$$

і за формулою (1.7) саму цю висоту:

$$H = y(1) = h + v_0 \sin\alpha \cdot 1 - \frac{g 1^2}{2} = 10 + 20 \cdot 0{,}5 - \frac{9{,}8}{2} = 15{,}1\, м.$$

Момент часу t_n падіння знайдемо з рівняння

$$y(t_n) = 0.$$

$$0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot t_n - \frac{g t_n^2}{2}; \qquad 0 = 10 + 10 \cdot t_n - \frac{9{,}8\, t_n^2}{2};$$

$$t_{n1} = -0{,}74\, c; \qquad t_{n2} = 2{,}78\, c.$$

Час завжди додатній, тому перший корінь відкидаємо і за формулою (1.6) обчислимо шлях у горизонтальному напрямі s:

$$s = x(t_n) = v_0 \cos\alpha \cdot t_n = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} 2{,}78 = 48{,}1\, м.$$

Відповідь: $H = 15{,}1\, м$, $s = 48{,}1\, м$.

Задача 4. Шлях s, який проходить матеріальна точка вздовж кола радіусом *4 м*, від часу залежить за законом $s=A+Bt+Ct^2$, де $A=2$ *м*, $B=3$ *м/с*, $C=1$ *м/с*^{2}. Знайти прискорення a точки у момент часу і сам момент часу, коли нормальне прискорення дорівнює 4 *м/с*^{2}.

Дано:
$R=4$ *м*
$s=A+Bt+Ct^2$
$A=2$ *м*
$B=3$ *м/с*
$C=1$ *м/с*^{2}
$a_n=4$ *м/с*^{2}

v – ?
a – ?

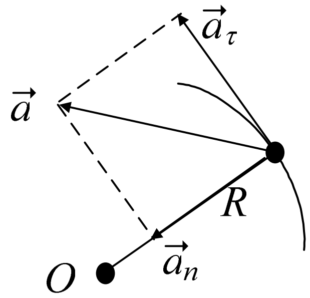


Рисунок 1.7

Розв'язок:

Знайдемо формули для швидкості й тангенціального прискорення. Для цього продиференцюємо вираз для s:

$$\mathrm{v}=\frac{d}{dt}s=B+2Ct=3+2t$$

$$a_\tau=\frac{d}{dt}\mathrm{v}=2C=2\ \text{м/с}^2.$$

Можемо визначити прискорення a за теоремою Піфагора (див. рис. 1.7):

$$a=\sqrt{(a_\tau)^2+(a_n)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}\ \text{м/с}\approx 4{,}47\ \text{м/с}\ .$$

Потрібний момент часу знайдемо з умови $a_n=4$ *м/с*^{2}. Скориставшись формулою для нормального прискорення

$$a_n=\frac{\mathrm{v}^2}{R},\qquad 4=\frac{(3+2t)^2}{4},\qquad 16=(3+2t)^2,$$

отримаємо два значення моменту часу:

$$t_1=0{,}5\ c \text{ і } t_2=-3{,}5\ c.$$

Друге значення часу відкидаємо, бо воно не задовольняє умові задачі ($t\geq 0$).
Відповідь: $a\approx 4{,}47$ *м/с* , $t=0{,}5$ *с*.

§4 *Задачі для самостійного розв'язання*

1.1. Земля обертається навколо Сонця із середньою швидкістю $\mathrm{v}_0=29{,}8$ *км/с*. Сонце рухається у напрямі до сузір'я Лебедя зі швидкістю v= 250 *км/с*. Знайти шлях і переміщення Землі за $t=365$ діб.

1.2. За проміжок часу $t=10$ *с* точка пройшла одну шосту частину кола радіусом $R=150$ *см*. Обчислити за час руху: а) середнє значення модуля швидкості; б) модуль вектора середньої швидкості; в) модуль вектора середнього повного прискорення, якщо точка рухалась зі сталим тангенціальним прискоренням, а початкова швидкість дорівнювала нулю.

1.3. Частинка рухається вздовж прямої згідно з рівнянням $x=A\,t^3+B\,t$, де $A=-0{,}36$ *м/с*^{3}, $B=3$ *м/с*. Визначити середній модуль швидкості <v> і модуль середньої швидкості |<v>| за перші 3 *с* від початку руху.

1.4. Швидкість тіла змінюється за законом $\mathrm{v}=A\,t^2+Ce^{Bt}$, де $A=3$ *м/с*^{3}, $B=1$ *с*$^{-1}$, $C=1$ *м/с*. Знайти прискорення тіла наприкінці першої секунди руху, пройдений тілом шлях і середню швидкість за цей час.

1.5. Рух матеріальної точки задано рівнянням $x=A\,t+2\,B\,t^2$, де $A=0{,}8$ *м/с*, $B=-0{,}1$ *м/с*^{2}. Визначити середнє значення модуля швидкості точки за перші *4 с* руху.

1.6. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю v = *10 м/с*. Не враховуючи опору повітря, знайти: швидкість тіла в момент часу $t_1=0{,}8$ *с*; б) рівняння траєкторії; в) час підйому і час спуску; г) дальність польоту і д) радіус кривизни траєкторії в момент t_1.

1.7. Тіло кинуто зі швидкістю v=*20 м/с* під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Знайти радіус кривизни траєкторії тіла через $t_1 = 1{,}2$ *с* після початку вільного руху.

1.8. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення тіла, яке кинуто з початковою швидкістю v_0=*10 м/с* під кутом $\alpha=30^\circ$ до горизонту, через $t_1 = 0{,}7$ *с* польоту. В яких точках ці прискорення будуть найбільшими і чому дорівнюватимуть?

1.9. Тіло кинуто зі швидкістю v_0=*10 м/с* під кутом $\alpha=30^\circ$ до горизонту. Знайти шлях, пройдений тілом до падіння.

1.10. На висоті h_1=*100 м* тіло, яке вільно падає, мало швидкість v=*20 м/с*. Чому дорівнювала швидкість тіла на висоті h_2=*75 м*?

1.11. Тіло починає падати з висоти h=*100 м* з прискоренням g уздовж вертикалі і a=*2 м/с*^{2} уздовж горизонталі. Знайти: а) швидкість тіла через t_1=*4 с* після початку падіння; б) рівняння траєкторії; в) дальність польоту.

1.12. На поверхні Сіріуса *B* частинка мала швидкість v= – *10 км/с*, спрямовану вертикально вгору. Обчислити прискорення вільного падіння на Сіріусі *B*, якщо частинка, рухаючись вільно в полі тяжіння, знаходилась на висоті h=*10 м* два рази з інтервалом часу dt=*1,4 мс*.

1.13. З поїзда, що рухається зі швидкістю v=*72 км/год*, у перпендикулярному до руху напрямі кинуто камінь. Початкова швидкість каменя відносно поїзда v_0=*20 м/с*, а кут її нахилу до горизонту $\alpha=30^\circ$. Знайти швидкість каменя як функцію часу і відстань, яку пролетить камінь. Опором повітря знехтувати.

1.14. Через який час після початку руху вектор швидкості тіла, яке кинуто під кутом $\alpha=45^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю v_0=*10 м/с*, буде утворювати з горизонтом кут $\alpha=30^\circ$? Тіло рухається вільно.

4.15. Одне тіло кинуто з точки з радіусом-вектором $\vec{r}_1$, зі швидкістю $\vec{v}_1$, а друге – з точки з радіусом-вектором $\vec{r}_2$ зі швидкістю $\vec{v}_2$. Як змінюється відстань між тілами з часом?

1.16. Радіус-вектор частинки має вигляд $\vec{r} = (ct^3 + kt)\vec{b}$, де $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, c=*0,5 м/с*^{3}; k=*2 м/с*. Визначити, як залежать від часу: вектори швидкості і прискорення; шлях і модуль швидкості.

1.17. Точка рухається по колу зі швидкістю v=a_0t, де a_0=*1 м/с*^{2}. Знайти її повне прискорення після того, як вона зробить повний оберт.

1.18. Тіло рухається по колу радіусом R=*1 м* зі швидкістю v= a_0t, де a_0=*2 м/с*^{2}. Визначити вектор середньої швидкості $\langle \vec{v} \rangle$ і середній модуль швидкості тіла <v> за першу секунду руху.

1.19. Визначити максимальні лінійну швидкість і нормальне прискорення точок, що лежать на поверхні нейтронної зірки. Маса зірки $M=3\ 10^{30}$ *кг*, густина $\rho=5\ 10^{13}$ *г/см*^{3}, період обертання $T=3$ *мс*.

1.20. До вертикальної труби висотою $h=3$ *м* влітає маленька пружна кулька зі швидкістю v=5 *м/с* під кутом $\alpha=30°$ до горизонту. Кулька відбивається від стінок. Визначити час падіння кульки до основи труби.

РОЗДІЛ 2
КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

§1 *Контрольні запитання*

1. Яка стрілка рухається швидше: секундна на ручних годинниках або хвилинна на вежових?
2. Чи всі точки на ободі колеса, що котиться, мають однакові лінійні швидкості відносно Землі?
3. На якому з рисунків (див. рис. 2.1) напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\beta}$ відповідають прискореному обертальному руху?
4. Порівняйте лінійні швидкості точок кіл задніх і передніх коліс трактора "Білорусь" і кутові швидкості коліс.
5. Точка рухається по колу рівносповільнено. Як із часом змінюється кут між повним прискоренням і радіус-вектором?
6. Колесо радіуса R обертається проти годинникової стрілки з постійною кутовою швидкістю. Вкажіть напрямки й величину векторів тангенціального, нормального й повного прискорень для точки на ободі колеса. Який шлях проходить ця точка і яке її переміщення за один оберт колеса?
7. Коли колесо котиться, то часто буває, що нижні спиці видні чітко, а верхні начебто зливаються. Чому?

§2 *Вказівки до розв'язання задач*

Для успішного вирішення запропонованих задач необхідно знати формули зв'язку лінійної й кутової швидкостей, а також формули кінематики обертального руху. Особливу увагу слід приділити формулам рівномірного обертального руху, а також визначенням кутового прискорення й кутової швидкості при рівнозмінному обертальному русі.

У таблиця 2.1 наведено деякі величини й формули з кінематики обертального руху.

Таблиця 2.1 – Деякі величини і формули кінематики обертального руху

Фізична величина		Формула
Кут повороту φ, *рад*	Рівномірний рух	$\varphi = \omega t$
Кутова швидкість ω, *рад/с*		$\omega = const$
Кутове прискорення β, *рад/с*^{2}		$\beta = 0$
φ	Рівноприскорений рух	$\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\beta t^2}{2}$
ω		$\omega = \omega_0 + \beta t$
β		$\beta = const$
φ	Нерівномірний рух	$\varphi = \varphi(t)$
ω		$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
β		$\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

§3 *Приклади розв'язання задач*

Задача 1. Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A + B\,t + C\,t^2$, де $A = 10$ *рад*, $B = 20$ *рад/с*, $C = -2$ *рад/с*^{2}. Знайти повне прискорення точки, що знаходиться на відстані *0,1 м* від осі обертання для моменту часу $t = 4$ *с*.

Дано:
$\varphi = A + Bt + Ct^2$
$A = 10$ *рад*
$B = 20$ *рад/с*
$C = -2$ *рад/с*^{2}
$R = 0{,}1$ *м*
$t = 4$ *с*

a – ?

Розв'язок:

Повне прискорення $\vec{a}$ точки, що рухається по кривій може бути знайдене як векторна сума тангенціального $\vec{a}_\tau$ і нормального $\vec{a}_n$ прискорень (див. рис. 1.7)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Оскільки вектори $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ взаємно перпендикулярні, то абсолютну величину повного прискорення можна визначити за теоремою Піфагора:

$$a = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2} .$$

Тангенціальне й нормальне прискорення тіла, що обертається, пов'язане з кутовими прискоренням і швидкістю за формулами

$$a_\tau = \beta R , \qquad a_n = \omega^2 R ,$$

де ω – кутова швидкість тіла; β – кутове прискорення тіла. Підставивши ці вирази у формулу для повного прискорення, одержуємо

$$a=\sqrt{(\beta R)^2+(\omega^2 R)^2}=R\sqrt{\beta^2+\omega^4}\,.$$

Кутову швидкість знайдемо, взявши першу похідну від кута повороту за часом

$$\omega=\frac{d}{dt}\varphi=B+2C\,t.$$

У момент часу $t = 4\ с$ кутова швидкість $\omega = 20+2(-2)\cdot 4=4\ рад/с$.

Кутове прискорення знайдемо, взявши першу похідну від кутової швидкості за часом

$$\beta=\frac{d}{dt}\omega=2C=-4\ рад/с^2.$$

Вираз для кутового прискорення не містить часу, отже кутове прискорення даного руху постійне. Остаточно

$$a=0{,}1\sqrt{(-4)^2+4^4}\approx 1{,}65\ м/с^2\,.$$

Відповідь: $a\approx 1{,}65\ м/с^2$.

Задача 2. Колесо, обертаючись рівноприскорено, досягло кутової швидкості через N оборотів після початку руху $20\ рад/с$. Знайти кутове прискорення колеса.

Дано:
$\omega = 20\ рад/с$
$N = 10$
$\beta - ?$

Розв’язок:

Рівноприскорений обертальний рух описується формулами

$$\varphi(t)=\omega_0\cdot t+\frac{\beta t^2}{2}, \qquad (2.1)$$

$$\omega(t)=\omega_0+\beta\cdot t\,. \qquad (2.2)$$

Один оберт ($N=1$) відповідає куту повороту $\varphi=2\pi$, а N обертів – $\varphi = 2\pi N$.

Оскільки обертання колеса починається зі стану спокою, то $\omega_0 = 0\ рад/с$ і замість (2.1) з (2.2) запишемо систему алгебраїчних рівнянь двох змінних t і β і вирішимо її:

$$\begin{cases}\varphi=2\pi N=\dfrac{\beta t^2}{2},\\ \omega=\beta\cdot t;\end{cases} \qquad \begin{cases}2\pi N=\dfrac{\beta}{2}t^2,\\ t=\dfrac{\omega}{\beta};\end{cases} \qquad \begin{cases}2\pi N=\dfrac{\beta}{2}\left(\dfrac{\omega}{\beta}\right)^2,\\ t=\dfrac{\omega}{\beta};\end{cases} \qquad \beta=\frac{\omega^2}{4\pi N}\,.$$

Обчислимо $\beta=\dfrac{20^2}{4\pi\cdot 10}=3{,}18\ рад/с^2$.

Відповідь: $\beta=3{,}18\ рад/с^2$.

§4 *Задачі для самостійного розв'язання*

2.1. Тіло, що обертається, збільшило свою кутову швидкість з *2* до *64,8 рад/с* за час, протягом якого відбулось *100* повних обертів. Знайти кутове прискорення тіла.

2.2. Автоматна куля діаметра $d=5{,}68$ *мм* має швидкість v= *700 м/с* і обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega=1{,}8\ 10^4$ *рад/с*. Знайти максимальну швидкість точок кулі.

2.3. Вал обертається з кутовим прискоренням $\beta=-1$ *рад/с*^{2}. Початкова кутова швидкість вала $\omega=10$ *рад/с*. Знайти середню кутову швидкість вала за $t=15$ *с* руку.

2.4. Вал обертається з кутовим прискоренням $\beta=-1$ *рад/с*^{2}. Скільки обертів N зробить вал при зменшенні частоти обертання від $n_1=1440$ *хв*$^{-1}$ до $n_2=360$ *хв*$^{-1}$? За який час це відбудеться?

2.5. Диск радіусом $R=10$ *см* обертається згідно з рівнянням $\varphi=A\,e^{\beta t}$, де $A=10$ *рад*, $\beta=0{,}1$ *с*$^{-1}$. Визначити тангенціальне a_τ, і нормальне a_n і повне прискорення a точок краю диска для моменту часу $c=10$ *с*.

2.6. Автомобіль, що має швидкість v=*100 км/год*, після вимикання двигуна проїхав відстань $s=1$ *км*. Чому дорівнює середнє кутове прискорення коліс автомобіля, якщо радіус колеса $R=380$ *мм*?

2.7. Колесо радіусом $R=0{,}1$ *м* обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу описується рівнянням $\varphi=A\sin Bt+ct^2$, де $A=1$ *рад*, $B=3$ *с*$^{-1}$, $c=2$ *рад/с*^{2}. Для точок на ободі колеса знайти через $t=2\pi/3$ *с* після початку руху: а) кутову швидкість; б) лінійну швидкість; в) кутове прискорення; г) тангенціальне прискорення; д) нормальне прискорення.

2.8. Визначити лінійну швидкість v і доцентрове прискорення a_n точок, що лежать на земній поверхні: 1) на екваторі; 2) на широті Москви ($\varphi=56°$).

2.9. Лінійна швидкість v_1 точок на колі обертового диска дорівнює 3 м/с. Точки, розташовані на $R=10$ *см* ближче до осі, мають лінійну швидкість $v_2=2$ *м/с*. Визначити частоту обертання диска.

2.10. Два паперових диски насаджені на загальну горизонтальну вісь так, що площини їх паралельні й відстоять на $d=30$ *см* один від одного. Диски обертаються із частотою $n=25$ *с*$^{-1}$. Куля, що летіла паралельно осі на відстані $r=12$ *см* від неї, пробила обидва диски. Пробоїни в дисках зміщені одна від одної на відстань $s=5$ *см*, яку відраховували вздовж дуги кола. Знайти середню шляхову швидкість <v> кулі в проміжку між дисками й оцінити створюване силами ваги зсув пробоїн у вертикальному напрямку. Опір повітря не враховувати.

2.11. На циліндр, що може обертатися навколо горизонтальної осі, намотана нитка. До кінця нитки прив'язали вантаж і надали йому можливість опускатися. Рухаючись рівноприскорено, вантаж за час $t=3\ с$ опустився на $h=1,5\ м$. Визначити кутове прискорення β циліндра, якщо його радіус $R=4\ см$.

2.12. Диск радіусом $R=10\ см$, що перебував у стані спокою, почав обертатися з постійним кутовим прискоренням $\beta=0,5\ рад/с^2$. Знайти тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точок на колі диска наприкінці другої секунди після початку обертання.

2.13. Диск радіусом $R=20\ см$ обертається відповідно до рівняння порівн. $\varphi=A+Bt+Ct^3$, де $A=3\ рад$, $B=-1\ рад/с$, $C=0,1\ рад/с^3$. Визначити тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точок на колі диска для моменту часу $t=10\ с$.

2.14. Маховик почав обертатися рівноприскорено й за проміжок часу $t=10\ с$ досяг частоти обертання $n=300\ хв^{-1}$. Визначити кутове прискорення β маховика й число N оборотів, яке він зробив за цей час.

2.15. Велосипедне колесо обертається із частотою $n=5\ с^{-1}$. Під дією сил тертя воно зупинилося через інтервал часу $\Delta t=1\ хв$. Визначити кутове прискорення β і число N обертів, що зробить колесо за цей час.

2.16. Колесо автомашини обертається рівноприскорено. Зробивши $N=50$ повних оборотів, воно змінило частоту обертання від $n_1=4\ с^{-1}$ до $n_2=6\ с^{-1}$. Визначити кутове прискорення β колеса.

2.17. Диск обертається з кутовим прискоренням $\beta=-2$ рад/с^2. Скільки оборотів N зробить диск при зміні частоти обертання від $n_1=240\ хв^{-1}$ до $n_2=90\ хв^{-1}$? Знайти час Δt, протягом якого це відбудеться.

2.18. Гвинт аеросаней обертається із частотою $n=360\ хв^{-1}$. Швидкість v поступального руху аеросаней дорівнює $54\ км/ч$. З якою швидкістю u рухається один з кінців гвинта, якщо радіус R гвинта дорівнює $1\ м$?

2.19. На токарному верстаті проточується вал діаметром $d=60\ мм$. Поздовжня подача h різця дорівнює $0,5\ мм$ за один оберт. Яка швидкість v різання, якщо за інтервал часу $\Delta t=1\ хв$ проточується ділянка вала довжиною $l=12\ см$?

2.20. Колесо, обертаючись рівноприскорено, через час $t=1\ хв$ після початку обертання набуде частоти $n=720\ об/хв$. Знайти кутове прискорення β колеса і число обертів N колеса за цей час.

РОЗДІЛ 3

ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§1 *Контрольні запитання*

1. Сформулюйте закони Ньютона.
2. До стелі вагона, що рухається рівномірно, підвішена куля. Яка відбудеться зміна в положенні кулі, якщо вагон:
   а) стане рухатись прискорено (сповільнено),
   б) поверне вбік,
   в) раптово зупиниться.
3. Як буде рухатися ракета, якщо на неї діятиме а) постійна сила, б) постійно спадаюча сила?
4. На рисунку 3.1 дано графік залежності швидкості тіла масою *1 кг* від часу. Що можна сказати про діючі на нього сили?

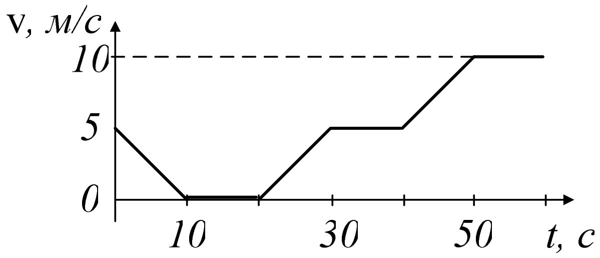


Рисунок 3.1

5. Сформулюйте закони збереження імпульсу, енергії.
6. Вертоліт масою m нерухомо висить у повітрі. Яку потужність розвивають двигуни вертольота, якщо швидкість повітря, що відкидають лопаті вертольота вниз, дорівнює v?
7. Як змусити гирю вагою 20 Н натягнути пружину, до якої вона прив'язана, із силою більшою, ніж 20 Н?
8. Чи можна так кинути сталеву кульку на підлогу, щоб вона підскочила на висоту, більшу ніж висота кидання?
9. Тіло, підвішене на пружині, коливається у вертикальній площині. Що можна сказати про роботу діючих у системі сил?
10. Нарисуйте графік залежності енергії пружно деформованого тіла від величини деформації?

§2 *Вказівки до розв’язання задач*

При вирішенні задач з даної теми слід засвоїти закони Ньютона, закони збереження імпульсу й енергії. Особливо треба звернути увагу на рух тіл під дією декількох сил, на застосування закону збереження імпульсу до удару куль. Необхідно також мати гарне уявлення про різні сили природи, їхню роботу, а також про умови виконання законів збереження імпульсу й енергії.

У таблиці 3.1 наведено деякі величини і формули з динаміки поступального руху.

Таблиця 3.1 – Деякі величини і формули динаміки поступального руху

Фізична величина	Формула
Імпульс	$\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$
Сила	$\vec{F} = m\vec{a}$ (2 закон Ньютона)
Кінетична енергія	$T = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$
Робота	$A = \int \vec{F} d\vec{s}$

§3 *Приклади розв'язання задач*

Задача 1. На горизонтальному столі розташований брусок масою 7 кг, пов'язаний з вантажем масою 5 кг ниткою, яка перекинута через нерухомий невагомий блок. Коефіцієнт тертя бруска по столу дорівнює 0,2. Знайти прискорення системи й силу натягу нитки при русі вантажів.

Дано:
$m_1 = 7$ *кг*
$m_2 = 5$ *кг*
$k = 0{,}2$

$a - ?$ $T - ?$

Розв'язок:

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для двох тіл (див. рис. 3.2):

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = \vec{F}_{тер} + \vec{T} + \vec{N} + m_1\vec{g}; \\ m_2\vec{a} = \vec{T} + m_2\vec{g}. \end{cases}$$

Запишемо ці рівняння у проекціях на координатну вісь x:

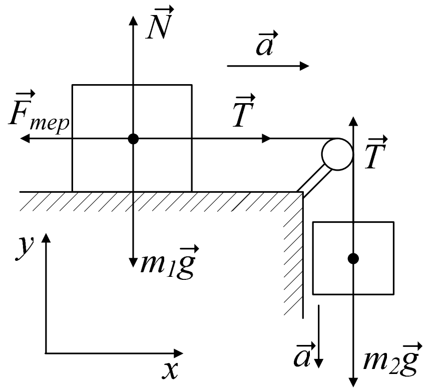


Рисунок 3.2

$$\begin{cases} m_1 a = -F_{тер} + T; \\ 0 = 0; \end{cases}$$

на координатну вісь y:

$$\begin{cases} 0 = N - m_1 g; \\ -m_2 a = T - m_2 g. \end{cases}$$

Додавши до цих рівнянь визначення сили тертя $F_{тер} = kN$, де k – коефіцієнт тертя, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь з чотирма невідомими ($F_{тер}, N, T, a$), розв'язавши, яку одержимо відповідь задачі:

$$\begin{cases} m_1 a = -F_{тер} + T; \\ 0 = N - m_1 g; \\ -m_2 a = T - m_2 g; \\ F_{тер} = kN. \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 a = -kN + T; \\ N = m_1 g; \\ -m_2 a = T - m_2 g; \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 a = -k m_1 g + T; \\ -m_2 a = T - m_2 g; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 a + k m_1 g; \\ T = m_2 g - m_2 a; \end{cases} \qquad m_1 a + k m_1 g = m_2 g - m_2 a;$$

$$m_1 a + m_2 a = m_2 g - k m_1 g;$$
$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - k m_1);$$
$$a = g\frac{m_2 - k m_1}{m_1 + m_2} = 9{,}8\frac{5 - 0{,}2\cdot 7}{7+5} = 2{,}94\ м/с^2;$$

$T = m_1 a + k m_1 g = m_1(a + kg) = 7(2{,}94 + 0{,}2\cdot 9{,}8) = 34{,}3\ Н$.

Відповідь: $T = 34{,}3\ Н$.

Задача 2. На підлогу з висоти *2 м* вільно падає м'яч масою *200 г* і підскакує на висоту *1,5 м*. Визначити переданий підлозі імпульс і кількість енергії, що перейшла в немеханічні форми при нецілком пружному зіткненні з підлогою (опором повітря знехтувати).

Дано:
$h_1 = 2\ м$
$h_2 = 1{,}5\ м$
$m = 200\ г$

Δp – ?
ΔE – ?

Розв'язок:

Впавши з висоти h_1, безпосередньо перед ударом м'яч має швидкість v_1, а одразу після удару по підлозі – швидкість v_2, яка дозволяє йому підійнятися на висоту h_2. За законом збереження енергії кінетична енергія м'яча перед ударом по підлозі дорівнює його потенціальній енергії перед початком падіння, а кінетична енергія після удару дорівнює потенціальній після закінчення підйому (див. рис. 3.3):

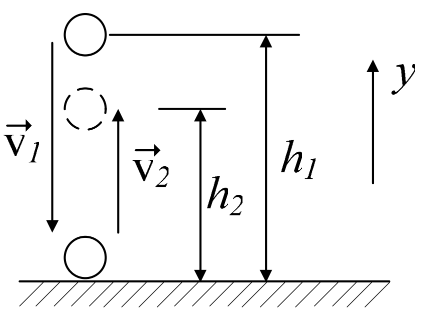


Рисунок 3.3

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh_1, \qquad \frac{mv_2^2}{2} = mgh_2. \qquad (3.1)$$

Їхня різниця є енергія, що перейшла в немеханічну форму:

$$\Delta E = mg(h_1 - h_2) = 0{,}2\cdot 9{,}8\cdot(2 - 1{,}5) = 0{,}98\ Дж.$$

Модулі швидкостей v_1 і v_2 виразимо з формул (3.1):

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \qquad v_2 = \sqrt{2gh_2}. \qquad (3.2)$$

Переданий підлозі імпульс чисельно рівний зміні імпульсу м'яча

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Врахувавши те, швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ мають протилежні напрямки, визначимо модуль зміни імпульсу $\Delta\vec{p}$:

$$\Delta p = m(v_1 + v_2) = m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}) = 0{,}2\cdot(\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 2} + \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 1{,}5}) \approx 2{,}34\ \frac{кг\cdot м}{с}.$$

Відповідь: $\Delta p = 2{,}34\ \frac{кг\cdot м}{с}$, $\Delta E = 0{,}98\ Дж$.

Задача 3. Куля масою m_1, що рухається горизонтально з деякої швидкістю v_1, зіштовхнулася з нерухомою кулею масою m_2 . Кулі абсолютно пружні, удар прямий, центральний. Яку долю ε своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

Дано:	Розв’язок:
m_1 m_2 v_1 $v_2 = 0$ *м/с*	
ε – ?	

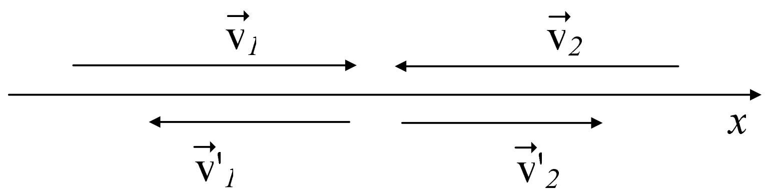


Рисунок 3.4

Нехай T і T' – кінетичні енергії першої кулі відповідно до і після зіткнення з першою кулею, а v_i і v'_i – швидкості кулі з номером i (i приймає значення 1 для першої кулі, або 2 – для другої) відповідно до і після зіткнення з іншою кулею. Доля ε кінетичної енергії, яку перша куля передала другій, через кінетичні енергії T і T' виразимо наступним чином

$$\varepsilon = 1 - \frac{T'}{T}.$$

Запишемо рівняння закону збереження імпульсу:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2.$$

Запишемо це рівняння у проекціях на координатну вісь x, врахувавши той факт, що $v_2 = 0$ *м/с*, і додамо ще рівняння закону збереження енергії:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2'^2}{2}. \end{cases}$$

Вирішивши цю систему рівнянь, знайдемо

$$v'_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Відношення кінетичних енергій

$$\frac{T'}{T} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} : \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{v_1'^2}{v_1^2} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

І величина ε: $\varepsilon = 1 - \dfrac{T'}{T} = 1 - \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \dfrac{4\, m_1\, m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$

Відповідь: $\varepsilon = \dfrac{4\, m_1\, m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$

§4 *Задачі для самостійного розв’язання*

3.1. Електровоз штовхає поперед себе два вагони масами $m_1 = m_2 = 60$ *т* з прискоренням $a = 0{,}1$ *м/с*^{2}. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}005$. З якою силою стиснуто пружини буферів вагонів?

3.2. Тіло масою $m = 5$ *кг* кинуто в горизонтальному напрямі зі швидкістю $v_1 = 10$ *м/с*. Знайти: а) приріст імпульсу тіла за перші $t_0 = 3$ *хв* вільного падіння; б) приріст імпульсу тіла, якщо воно кинуто зі швидкістю v_2=*7,9 км/с*.

3.3. На похилій площині з кутом нахилу α=*30°* лежить тіло. З яким мінімальним прискоренням треба рухати похилу площину, щоб вага тіла збільшилась вдвічі?

3.4. Снаряд має початкову швидкість v=*3 км/с*. На яку найбільшу висоту може піднятися снаряд? Опором повітря знехтувати.

3.5. Яким повинен бути мінімальний коефіцієнт тертя між шинами коліс і дорогою, щоб велосипедист міг рухатися вгору з нахилом (синус кута α нахилу дороги до горизонту) 0,02 з прискоренням $a=0{,}2$ *м/с*^{2}?

3.6. По похилій площині, яка утворює з горизонтом кут α, піднімають тіло. Коефіцієнт тертя тіла об похилу площину дорівнює f. Під яким кутом β до похилої площини треба спрямувати силу, щоб вона була найменшою?

3.7. Тіло лежить на похилій площині з кутом нахилу α. Коефіцієнт тертя тіла об площину дорівнює f. У скільки разів мінімальна сила, з якою треба діяти на тіло, щоб тягнути його на похилу площину вгору, більша за силу, необхідну для утримання тіла на похилій площині?

3.8. Вантаж масою m = *0,5 кг* прив'язали до гумового шнура довжиною l=*40 см*, відхилили його на кут α=*90°* і відпустили. Знайти довжину шнура в момент проходження вантажем положення рівноваги. Коефіцієнт пружності шнура $k=10^3$ *Н/м*.

3.9. Тіло масою m = *1 кг* обертається на нитці у вертикальній площині. У скільки разів сила натягу нитки в нижній точці буде більшою ніж у верхній?

3.10. Яка сила буде діяти на наконечник поливного шланга в ту мить, коли з нього почне витікати вода зі швидкістю v=*20 м/с*? Внутрішній поперечний переріз шланга S=*1 см*^{2}.

3.11. Снаряд, що мав імпульс p=*5000 кг·м/с*, розірвався у повітрі на два осколки з імпульсами p_1=*3000 кг·м/с* і p_2=*4000 кг·м/с*. Знайти кути між векторами $\vec{p}$ і $\vec{p}_1$ та $\vec{p}$ і $\vec{p}_2$.

3.12. Кулька масою m_1 = *100 г* має швидкість v_1 = *1 м/с* і пружно стикається з кулькою масою m_2=*200 г*, яка має швидкість v_2=*2 м/с*. Удар центральний. Визначити швидкості кульок після зіткнення. Розглянути два випадки: вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ направлені а) однаково; б) протилежно.

3.13. Два човни масами m_1 = *150 кг* і m_2 = *110 кг* рухаються зі швидкостями відповідно v_1 = *10 м/с* і v_2 = *15 м/с* назустріч один одному. Коли човни порівнялись, з кожного з них кинули вантажі масами m = *10 кг*. Знайти швидкості човнів після обміну вантажами.

3.14. Кулька масою m = *100 г* впала з висоти h_1 = *1 м* на горизонтальну плиту і підскочила вгору на висоту h_2 = *0,8 м*. Визначити імпульс p, набутий плитою.

3.15. На горизонтальну поверхню вертикально падає дощ. Густина крапель $n=10^4$ *м*$^{-3}$. Маса краплі m=*50 мг*, швидкість v= =*10 м/с*. Знайти «тиск» дощу на поверхню. Вважати, що краплі не відскакують від поверхні.

3.16. Дві кулі масами $m_1=100$ *г* і $m_2=200$ *г* котяться без ковзання назустріч одна одній зі швидкостями відповідно $v_1=1$ *м/с* і $v_2=2$ *м/с*. Визначити швидкості куль після центрального пружного зіткнення. Вважати, що після зіткнення кулі котяться без ковзання.

3.17. Дві кульки ртуті масами $m_1=10$ *мг* і $m_2=20$ *мг* котяться без ковзання вздовж прямої зі швидкостями $v_1=1$ *м/с* і v $m_2=2$ *м/с* відповідно. Визначити швидкість кульки, що утвориться після їхнього зіткнення, якщо вона котиться також без ковзання.

3.18. З окопу кинули гранату зі швидкістю $v_0=25$ *м/с* під кутом $\alpha=45°$ до горизонту, яка вибухнула через деякий час. На якій відстані від окопу міститься центр мас осколків, що впали на землю? Опором повітря знехтувати.

3.19. Граната розірвалася у повітрі на N осколків. Маса і-го осколка m_i , а його швидкість v_i . Знайти швидкість гранати в момент розриву.

3.20. Космонавт у скафандрі масою $m_1=150$ *кг* перебуває на орбіті штучного супутника Землі. При виконанні монтажних робіт він руками: переміщує балку масою $m_2=300$ *кг* і довжиною $1=10$ *м*. На яку максимальну відстань відносно Землі космонавт може перемістити балку, якщо він з балкою рухається вільно? Розмірами космонавта знехтувати.

3.21. Обчислити роботу, яку виконує на шляху $s=10$ *м* рівномірно зростаюча сила, якщо значення сили на початку руху – $F_1=10$ *Н*, а наприкінці руху – $F_2=40$ *Н*. Вектор сили завжди направлений вздовж прямолінійної траєкторії.

3.22. Автомобіль масою $m=1000$ *кг* почав рухатися по колу радіуса $R=100$ *м* з тангенціальним прискоренням $a_\tau=1$ *м/с*^{2}. Обчислити роботу двигуна, яку він виконує за один оберт автомабіля по колу. Коефіцієнт тертя $f=0{,}1$.

3.23. Яку роботу треба виконати для того, щоб витягти тіло масою $m=2$ *кг* на гірку з довжиною основи $l=1$ *м* і висотою $H=0{,}5$ *м*, якщо коефіцієнт тертя $f=0{,}2$?

3.24. Вираз потенціальної енергії частинки має вигляд: а) $U=2x^2-3x^3+5z$; б) $U=8xyz$. Визначити силу F, що діє на частинку.

3.25. Вираз потенціальної енергії частинки в деякому полі має вигляд $U(r) = r^3$, де r – відстань від центра поля до частинки. При якому r на частинку не діятиме сила з боку поля?

3.26. Вираз потенціальної енергії частинки має вигляд $U=2x^2-3y+4z^3$. Визначити: а) силу, що діє на частинку; б) роботу A, яку виконує поле при переміщенні частинки з точки $B_1(-2; 3; 1)$ в точку $B_2(2; 2; 2)$; в) як збільшиться кінетична енергія частинки при цьому?

3.27. Тіло масою $m=1$ *кг* кинуто зі швидкістю $v=10$ *м/с* під кутом $\alpha=30°$ до горизонту. Знайти залежність кінетичної і потенціальної енергії тіла від часу. Опором повітря знехтувати.

3.28. На столі лежить гнучка вірьовка, п'ята частина якої вільно звисає. Яку роботу потрібно виконати, щоб витягти звисаючу частину вірьовки на стіл?

Довжина вірьовки $l=1$ *м*, а її маса $m=1$ *кг*. Тертя не враховувати.

3.29. На столі лежить гнучка вірьовка масою $m=1$ *кг*, завдовжки $l=2$ *м*. Якщо четверту частину ($n=0{,}25$) вірьовки звісити зі столу, то вона почне зсковзувати з нього. Яку роботу виконає сила тертя, що діє на вірьовку, при її повному зковзуванні зі столу?

3.30. Кулька масою $m_1=0{,}01$ *кг* і швидкістю $v_1=500$ *м/с* пробиває кулю масою $m_2=5$ *кг*, яка висить на нитці. При цьому швидкість кульки зменшилася до $v'_1=100$ *м/с*. Яка частина енергії кульки перейшла в теплоту?

РОЗДІЛ 4
ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

§1 *Контрольні запитання*

1. Порівняйте моменти інерції двох суцільних циліндрів з однаковими радіусами, але зроблених з різних матеріалів.
2. Чому круто зварене яйце здатне довго обертатися, а сире яйце неможливо навіть розкрутити?
3. Напишіть рівняння основного закону динаміки обертального руху.
4. Що дозволяє визначити теорема Штейнера?
5. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
6. Чи однакову швидкість отримають дві кулі біля основи похилої площини, якщо перша куля скочується з неї без проковзування, а друга – з проковзуванням?
7. Чому лижник, який стрибнув з трампліна, при приземленні переміщує руки?

§2 *Вказівки до розв'язання задач*

При вирішенні задач з даної теми слід засвоїти закон динаміки обертального руху, закони збереження моменту імпульсу. Особливо звернути увагу на поняття: момент сили, момент інерції, момент імпульсу. У таблиця 4.1 наведено деякі величини і формули з динаміки поступального руху.

Таблиця 4.1 – Деякі величини і формули динаміки поступального руху

Фізична величина	Формула
Момент імпульсу	$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$
Момент сили	$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$
Кінетична енергія	$T=\dfrac{I\omega^2}{2}$
Робота	$A=\int M_z d\varphi$

§3 *Приклади розв'язання задач*

Задача 1. Знайти момент інерції тонкої однорідної проволоки маси m, зігнутої у формі квадрата із стороною a, відносно осі, що проходить через діагональ квадрата.

Дано:	Розв'язок:
m a	Оскільки проволока однорідна, то можна ввести величину, яка характеризує масу елемента проволоки одиничної довжини: ρ – лінійну густину $\rho = m/4a$.
I – ?	

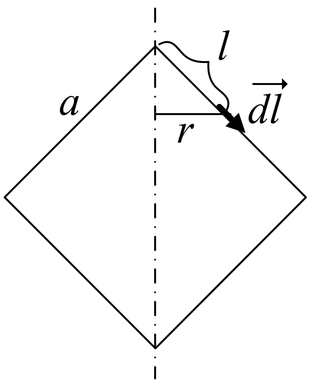


Рисунок 4.1

З міркувань симетрії та адитивних властивостей моменту інерції достатньо визначити момент інерції лише однієї сторони квадрата $I_{1/4}$. Загальний момент інерції

$$I = 4\, I_{1/4}.$$

Величину $I_{1/4}$ знайдемо, розглянувши нескінченно малий елемент $d\vec{l}$ проволоки, момент інерції якого відносно діагоналі квадрата дорівнює

$$dI = \rho\, r^2 dl.$$

Геометричній зміст величини r зрозумілий з рисунку 4.1. Кут між стороною квадрата та його діагоналлю – $45°$, тому $r = l\cdot\sin 45°$. Отже

$$dI = \frac{1}{2}\rho\, l^2 d\,l\,.$$

Загальний момент інерції

$$I = 4\cdot I_{1/4} = 4\int dI = 4\cdot\frac{1}{2}\rho\int_0^a l^2 dl = \frac{2}{3}\rho\, a^3 = \frac{1}{6}m\,a^2\,.$$

Відповідь: $I = \dfrac{1}{6}m\,a^2$.

Задача 2. Знайти прискорення вантажів і сили натягу ниток в системі, зображеній на рисунку 4.2; m_1=2 *кг* і m_2=3 *кг*, R_1=20 *см*, R_2=10 *см*. Нитки невагомі, тертям знехтувати. Момент інерції блока рівний I=0,02 *кг·м*^{2}.

Дано:	Розв'язок:
m_1=2 *кг* m_2=3 *кг* R_1=20 *см* R_2=10 *см* I=0,02 *кг·м*^{2}	Для двох вантажів запишемо у векторній формі рівняння другого закону Ньютона (див. рис. 4.2):
a_1 – ? a_2 – ? T_1 – ? T_2 – ?	

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1\vec{g}; \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}. \end{cases}$$

Запишемо ці рівняння у проекціях на координатну вісь y:

$$\begin{cases} -m_1 a_1 = T_1 - m_1 g; \\ m_2 a_2 = T_2 - m_2 g. \end{cases} \tag{4.1}$$

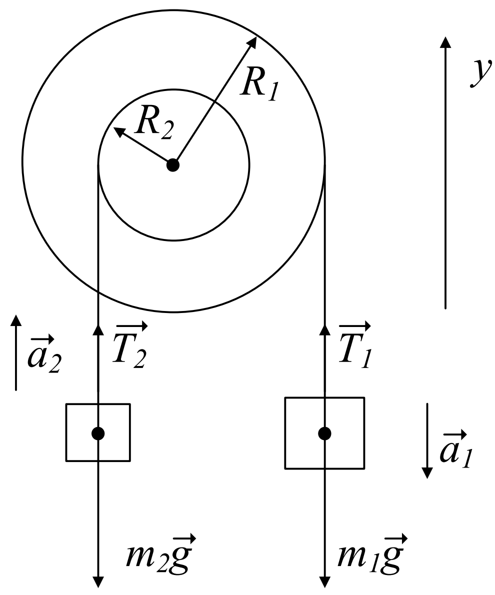


Рисунок 4.2

Рівняння динаміки обертального руху для блока у скалярному вигляді буде таким:

$$I\beta = T_1R_1 - T_2R_2\,, \qquad (4.2)$$

де β – кутове прискорення блока.

Кутове прискорення β пов’язане з лінійними прискореннями a_1 і a_2 формулами

$$\beta = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2}. \qquad (4.3)$$

Об’єднаємо вирази (4.1)–(4.3) у систему п’яти алгебраїчних рівнянь п’яти невідомих (a_1 , a_2 , T_1 , T_2 і β):

$$\begin{cases} -m_1a_1 = T_1 - m_1g; \\ m_2a_2 = T_2 - m_2g, \\ I\beta = T_1R_1 - T_2R_2\,, \;. \\ \beta = \dfrac{a_1}{R_1} = \dfrac{a_2}{R_2}. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Розв’яжемо цю систему:

$$\begin{cases} -m_1a_1 = T_1 - m_1g, \\ m_2a_1\dfrac{R_2}{R_1} = T_2 - m_2g, \\ \dfrac{I}{R_1}a_1 = T_1R_1 - T_2R_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1 = m_1g - m_1a_1, \\ T_2 = m_2g + m_2a_1\dfrac{R_2}{R_1}, \\ T_2 = T_1\dfrac{R_1}{R_2} - \dfrac{I}{R_1R_2}a_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = m_1g - m_1a_1, \\ T_1\dfrac{R_1}{R_2} - \dfrac{I}{R_1R_2}a_1 = m_2g + m_2a_1\dfrac{R_2}{R_1}; \end{cases} \begin{cases} T_1 = m_1g - m_1a_1, \\ T_1 = \dfrac{R_2}{R_1}\left(m_2g + m_2a_1\dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{I}{R_1R_2}a_1\right); \end{cases}$$

$$m_1g - m_1a_1 = \frac{R_2}{R_1}\left(m_2g + m_2a_1\frac{R_2}{R_1} + \frac{I}{R_1R_2}a_1\right);$$

$$m_1g - m_2g\frac{R_2}{R_1} = m_1a_1 + m_2a_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \frac{I}{R_1^2}a_1;$$

$$a_1 = g\frac{m_1 - m_2\dfrac{R_2}{R_1}}{m_1 + m_2\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2 + \dfrac{I}{R_1^2}} = gR_1\frac{m_1R_1 - m_2R_2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}. \qquad (4.5)$$

Тепер виконаємо обчислення за формулою (4.5).

$$a_1 = 9{,}8\cdot 0{,}2\frac{2\cdot 0{,}2 - 3\cdot 0{,}1}{2\cdot 0{,}2^2 + 3\cdot 0{,}1^2 + 0{,}02} \approx 1{,}5\,\frac{м}{с^2}.$$

Інші величини обчислимо за формулами (4.4).

$$\frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2} \quad\Rightarrow\quad a_2 = a_1\frac{R_2}{R_1} = 1{,}5\cdot\frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}75\,\frac{м}{с^2}.$$

$$\begin{array}{lcl} T_1 = m_1g - m_1a_1, & & T_1 = 2\cdot 9{,}8 - 2\cdot 1{,}5 = 16{,}6\ Н, \\ T_2 = m_2g + m_2a_1\dfrac{R_2}{R_1}; & \Rightarrow & T_2 = 3\cdot 9{,}8 + 3\cdot 1{,}5\cdot\dfrac{0{,}2}{0{,}1} = 31{,}7\ Н. \end{array}$$

Відповідь: $a_1 = 1{,}5\,\frac{м}{с^2}$, $a_2 = 0{,}75\,\frac{м}{с^2}$, $T_1 = 16{,}6\ Н$, $T_2 = 31{,}7\ Н$.

§4 *Задачі для самостійного розв'язання*

4.1. Знайти момент інерції тонкого однорідного кільця масою *m=200 г*, радіусом *R=30 см* а) відносно осі, що проходить вздовж діаметра кільця; б) відносно осі, яка є дотичною до кільця.

4.2. Визначити момент інерції труби масою *m=100 кг* відносно осі симетрії, якщо зовнішній і внутрішній радіуси труби дорівнюють відповідно R_1*=10 см* і R_2*=8 см*.

4.3. Знайти момент інерції пластинки у вигляді прямокутного паралелепіпеда зі сторонами *a=0,3 мм*, *b=200 мм*, *c=300 мм* відносно осі, що проходить через центр інерції пластинки перпендикулярно до найбільшої грані. Густина пластинки ρ*=21,5 г/см*^{3}.

4.4. В однорідному диску масою *m=2 кг* і радіусу *r=40 см* вирізано круглий отвір діаметром *d=20 см*, центр якого міститься на відстані *1=15 см* від осі диска. Знайти момент інерції *I* одержаного тіла відносно: а) осі, що проходить через центр диска перпендикулярно до його площини; б) осі, що проходить через центри диска і вирізу.

4.5. Через блок у вигляді диска масою *m=1 кг* перекинуто легку нитку, до кінців якої підвішені вантажі з масами m_1*=2 кг* і m_2*=3 кг*. Знайти прискорення вантажів і сили натягу нитки.

4.6. До одного кінця перекинутої через блок вірьовки підвішений вантаж масою m_1*=1 кг*. На другий кінець вірьовки діє сила $F=3t+2t^3$, де *t* – час. Блок має форму диска масою m_2*=3 кг*. З яким прискоренням рухається вантаж через t_1*=1 с* і t_2*=2 с* від початку дії сили?

4.7. Через блок у вигляді диска, який має масу *m=0,5 кг*, перекинуто легку нерозтяжну нитку, до кінців якої прив'язані вантажі з масами $m_1=2$ *кг* і $m_2=3$ *кг*. Визначити кутове прискорення диска, якщо систему залишити на саму себе. Чому дорівнює сила, з якою блок діє на вісь? Тертям знехтувати. Нитка не ковзає.

4.8. Гнучкий трос довжиною *1 м* перекинуто через легкий шків, що може обертатися. Обчислити прискорення кінця троса тоді, коли один його кінець міститься вище від другого на $h=0{,}2$ *м*.

4.9: Обруч радіуса R, який обертається в горизонтальній площині з кутовою швидкістю ω, опускають на горизонтальну поверхню. Коефіцієнт тертя обруча об поверхню f. Визначити кутове прискорення обруча. Скільки обертів зробить обруч на поверхні?

4.10. Циліндр масою $m=5$ *кг* і радіуса $R=10$ *см* обертається навколо своєї осі за законом $q=A\sin\omega t$. Як залежить від часу момент сили, що діє на циліндр, і момент імпульсу циліндра? В які моменти часу ці величини набувають максимальних значень?

4.11. Вал у вигляді суцільного циліндра радіуса $R=100$ *мм* насаджено на горизонтальну вісь. На циліндр намотано нитку, до вільного кінця якої підвішений вантаж масою $m=1$ *кг*. Знайти момент імпульсу системи відносно осі блока через $t=3$ *с* після початку руху вантажу.

4.12. Куля масою m, що летить горизонтально зі швидкістю v, влучає в кулю масою m_1 ($m<< m_1$), яка лежить на гладенькій поверхні. Точка зіткнення міститься у вертикальній площині, що проходить через центр кулі, на рівні, розміщеному нижче від центра на відстані r. Знайти кутову швидкість обертання кулі відносно миттєвої осі, а також лінійну швидкість центра кулі після зіткнення.

4.13. Кулька масою $m=50$ *г* скочується без проковзування по жолобу з висоти $h=30$ *см* і робить «мертву петлю» радіуса $R=10$ *см*. З якою силою кулька тисне на жолоб в нижній і верхній точках петлі?

4.14. Визначити прискорення центра кулі, яка скочується з похилої площини. Маса кулі $m=100$ *г*, похила площина утворює з горизонтом кут $\alpha=\pi/6$. Чому дорівнює сила тертя, що діє на кулю, та робота цієї сили? Проковзування відсутнє.

4.15. З вершини сферичної поверхні радіуса R скочується без проковзування маленька кулька. На якій висоті h над центром сфери кулька відділиться від поверхні сфери і полетить вільно?

4.16. Куля, швидкість якої $v_0=10$ *м/с*, закочується без проковзування на похилу площину. На яку висоту підніметься куля?

4.17. Якір двигуна обертається з частотою $n=2880$ $хв^{-1}$. Визначити обертаючий момент M, якщо двигун має потужність $N=1{,}2$ *кВт* при ККД $\eta=72$ %.

4.18. Диск масою $m=10$ *кг* і радіуса $R=0{,}2$ *м* лежить на горизонтальній поверхні. Яку роботу треба виконати, щоб повернути диск навколо осі на кут $\alpha=90°$? Коефіцієнт тертя диска об поверхню $f=0{,}4$.

4.19. Шків починає обертатися зі сталим кутовим прискоренням $\beta=4{,}5\cdot10^3$

рад/с$^{-2}$ і через t_1=*2 с* його момент імпульсу *L=250 кг·м*^{2}*/с*. Знайти кінетичну енергію шківа через t_2=*1 с* після початку обертання.

4.20. Яку потужність розвиває білка, що біжить всередині колеса? Маса білки m_1=*150 г,* маса колеса m_2=*200 г.* Швидкість білки відносно колеса v=2 *м/с,* радіус колеса *R=15 см,* момент сили тертя *M=0,01 Н·м.* Білку вважати матеріальною точкою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1-3. – М.: Наука, 1989.
2. Зисман Г. А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т. 1-3. – М.: Наука, 1994.
3. Дущенко В. П., Кучерук І. М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки, молекулярної фізики і термодинаміки. – К.: Вища школа, 1993.
4. Богацька І. Г., Головко Д. Б., МаляренкоД. А., Ментковський Ю. Л. Загальні основи фізики. Т. 1-2. – К.: Либідь, 1995.
5. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1990.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт
з курсу

Ф І З И К А

Розділ

"МЕХАНІКА"

(для студентів 1 курсу денної і заочної форми навчання за напрямами підготовки бакалаврів 6.170202 – Охорона праці, 6.070101 – Транспортні технології (за видами транспорту), 6.060101 – Будівництво, 6.060103 – Гідротехніка (водні ресурси), 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування, 6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій, 6.050201 – Системна інженерія, 6.090103 – Лісове і садово-паркове господарство)

Укладачі: **ПЕТЧЕНКО** Олександр Матвійович
НАЗАРЕНКО Євгеній Іванович
ОРЕЛ Євгеній Станіславович

Відповідальний за випуск: *О. М. Петченко*

За авторською редакцією

Комп'ютерний набір: *Є. І. Назаренко*

Комп'ютерне верстання: *І. В. Волосожарова*

План 2015, поз. 223М

Підп. до друку 05.05.2015 р. Формат 60 x 84/16
Друк на різографі Ум. друк. арк. 8,8
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції,12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014