

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОРОДСКОГО
ХОЗЯЙСТВА

УДК 539.9
УДК 691.58.668.3
№ госрегистрации 0107U000258

УТВЕРЖДАЮ:

**Проректор по научной работе,
проф.**

В.Т. Семенов

« » февраля 2008 г.

ОТЧЕТ

по госбюджетной научно-исследовательской работе за 2007 г.
**«Теоретические и экспериментальные исследования эксплуатационных
и прочностных характеристик объектов транспортной техники,
стержневых и оболочечных элементов строительных конструкций»
(промежуточный)**

**Декан ЭТ факультета,
профессор**

В.Ф. Харченко

« » _____ 2008.

**Начальник научно-
исследовательского
сектора, профессор**

М.С. Золотов

« » _____ 2008.

**Зав. кафедры теоретической
и строительной механики,
профессор**

В.П. Шпачук

« » _____ 2008.

г. Харьков

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ:

Руководитель НИР зав.кафедры, профессор, доктор техн. наук;	Шпачук В.П. (раздел 1)
профессор, канд. техн. наук;	Пушня В.А. (раздел 2.1)
профессор, канд. техн. наук;	Золотов М.С. (раздел 3.1)
доцент, канд. техн. наук;	Андриевская Л.С. (раздел 2.3)
доцент, канд. техн. наук;	Гарбуз А.О. (раздел 2.2)
доцент, канд. техн. наук;	Жуков В.Ф. (раздел 2.4)
доцент, канд. техн. наук;	Кузнецов А.Н. (раздел 2.5)
доцент, канд. техн. наук;	Середа Н.В. (раздел 3.2)
доцент, канд. техн. наук;	Скляр В.А. (раздел 2.3)
доцент, канд. техн. наук;	Рубаненко А.И. (раздел 2.5)
доцент, канд. техн. наук;	Чупрынин А.А. (раздел 3.2)
доцент	Засядько Н.А. (раздел 2.3)
ст. преподаватель	Колодий Л.И. (раздел 2.2)

аспирант	Голиков М.В. (раздел 2.4)
аспирант	Рамин Аббаси (раздел 3.2)
аспирант	Байвалинов Д.Н. (раздел 2.2)
инженер	Громаковская Г.Л. (введение)
зав. лабораторией	Зиганшина Р.М. (реферат)
зав. лабораторией	Смолянинов М.Ю. (выводы)

РЕФЕРАТ

Отчет по НИР содержит 53 стр., 12 рис., 14 литературных источника.

Объект исследования: тонкостенные конструкции; цилиндрические панели; пространственные покрытия.

Предмет исследования: методика расчета и конструкции тонкостенных пространственных покрытий; численное моделирование деформирования тонких оболочек.

Научная новизна полученных результатов: Широкое использование современных материалов, обуславливает разработку новых методов расчетов тонкостенных пространственных покрытий, которые учитывают неоднородность материала и нелинейность его свойств.

Представлены численные алгоритмы реализации метода разложения в двойные тригонометрические ряды и метода конечных элементов (МКЭ), который в настоящее время является базовым методом численного моделирования напряженно-деформированного состояния. При этом использование современной компьютерной техники позволяет находить оптимальные конструктивные решения. Тонкостенное покрытие рационально конструировать в виде выпуклой полой оболочки.

Ключевые слова: тонкостенные конструкции; цилиндрические панели; пространственные покрытия, пологие оболочки, оболочки вращения, двойные тригонометрические ряды, метод конечных элементов, деформирование неоднородных конструкций.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение	6
1. Тонкостенные пространственные покрытия	8
2. Цилиндрические оболочки	11
2.1. Общие сведения	11
2.2. Цилиндрическая панель	14
2.3. Разрешающие уравнения	19
2.4. Перемещения	24
2.5. Решение в двойных тригонометрических рядах	25
3. Купола	35
3.1. Общие сведения	35
3.2. Купола, круглые в плане	36
3.3. Купола, квадратные в плане	43
Выводы	51
Перечень ссылок	52

ВВЕДЕНИЕ

Первый раздел посвящен тонкостенным пространственным покрытиям и их классификации.

В строительстве широко используются элементы, расчетная схема которых соответствует тонкостенным пространственным конструкциям. Тонкостенные пространственные покрытия в отличие от плоскостных систем работают под нагрузкой в обоих направлениях. Вследствие благоприятных условий статической работы такие конструкции требуют наименьшего расхода материалов, в них отношение собственной массы к полезной нагрузке минимально. Тонкостенными пространственными железобетонными конструкциями можно перекрывать без промежуточных опор большие площади до 1 га и более.

Второй раздел посвящен моделированию тонкостенных цилиндрических покрытий.

В настоящее время в строительстве широко используются элементы, расчетная схема которых соответствует тонкостенным пространственным конструкциям. Они часто используются для перекрытий больших площадей без промежуточных опор.

Раздел посвящен постановке и методу расчета задач деформирования оболочных конструкций, в частности цилиндрических панелей, которые можно использовать для покрытия прямоугольных в плане помещений.

В настоящее время достаточно хорошо исследовано деформирование тонкостенных конструкций, и получены аналитические и численные решения для отдельных элементов конструкций. Исследование всей конструкции, используя современные конечно-элементные пакеты, имеет свои недостатки, в частности высокую стоимость и трудоемкость расчетов. Исследование производится численными методами с использованием двойных тригонометрических рядов.

Третий раздел посвящен исследованию и анализу напряженно-деформированного состояния покрытий круглых и квадратных в плане зданий и сооружений методом конечных элементов (МКЭ).

Широкое использование современных материалов, обуславливает разработку новых методов расчетов, которые учитывают неоднородность материала и нелинейность его свойств. Учет нелинейных факторов позволяет более адекватно смоделировать процессы деформирования конструкций. Кроме того, условия эксплуатации строительных конструкций в современных условиях характеризуются высокими внешними воздействиями, что часто приводит к тому, что материал начинает работать за пределами упругости. Вместе с тем, обеспечение высокой надежности и долговечности элементов конструкций, при одновременном уменьшении времени проектирования и сокращении расходов, требует создания современных методов моделирования и расчетов.

Актуальность моделирования состоит в нахождении численных алгоритмов для реализации метода разложения в двойные тригонометрические ряды и метода конечных элементов, который в настоящее время является базовым методом численного моделирования напряженно-деформированного состояния. При этом использование современной компьютерной техники позволяет находить оптимальные конструктивные решения.

РАЗДЕЛ 1

ТОНКОСТЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОКРЫТИЯ

Тонкостенные пространственные покрытия в отличие от плоскостных систем (плит, балок, ферм, арок и др.) работают под нагрузкой в обоих направлениях. Вследствие благоприятных условий статической работы такие конструкции требуют наименьшего расхода материалов, в них отношение собственной массы к полезной нагрузке минимально.

Тонкостенные пространственные покрытия находят все большее применение в различных большепролетных промышленных и гражданских зданиях и сооружениях. Тонкостенные конструкции, особенно волнистые своды, изготавливаются не только из железобетона, но и из его разновидности – армоцемента, представляющего собой мелкозернистый бетон, густоармированный рядами тканых сеток. Толщина армоцемента может составлять всего 10 – 20 мм.

Железобетонные тонкостенные пространственные покрытия можно разделить на две основные группы: оболочки одинарной кривизны и оболочки двоякой кривизны.

Оболочки одинарной кривизны делятся на цилиндрические, конические и коноидальные.

Оболочки двоякой кривизны подразделяются на оболочки вращения (купола), оболочки переноса, волнистые своды и висячие оболочки

Тонкостенные пространственные конструкции могут быть и других типов или проектироваться составными, т.е. представлять собой сочетание нескольких однотипных или различных оболочек. Железобетонные оболочки, как правило, образуются по поверхностям переноса или поверхностями вращения. Различают поверхности положительной и отрицательной Гауссовой кривизны. Если произведение главных кривизн во всех точках положительное, т.е. центры кривизны расположены по одну

сторону от поверхности, то она имеет положительную Гауссову кривизну. В противном случае поверхности имеют отрицательную Гауссову кривизну. Примером поверхности с положительной Гауссовой кривизной являются: цилиндрическая оболочка, в которой один из главных радиусов кривизны $R=\infty$; оболочка вращения - купол, оболочка двоякой кривизны на прямоугольном плане, которая может быть частью оболочки вращения или образовываться переносом (перемещением) какой либо кривой (образующей) по двум другим кривым (направляющим). Поверхность отрицательной Гауссовой кривизны может быть образована перемещением образующей (плоской кривой или прямой) по двум направляющим.

Применение оболочек позволяет не только значительно уменьшать расход материалов, но и придавать зданиям большую архитектурную выразительность.

Железобетонные оболочки называют тонкостенными, если их толщина не превышает $1/20$ меньшего из радиусов кривизны. В общем случае в нормальных сечениях оболочки действуют внутренние усилия, которые можно разбить на две группы:

- 1) продольные силы N_1, N_2 и сдвигающие силы $S=S_{12}=S_{21}$;
- 2) изгибающие моменты M_1 и M_2 , поперечные силы Q_1 и Q_2 крутящие моменты $H_{12}=H_{21}$. Первая группа усилий характеризует безмоментное состояние оболочек, вторая группа является следствием изгиба оболочек. При соблюдении ряда условий в оболочках можно избежать появления второй группы усилий или свести их к минимальным значениям.

Условием безмоментной работы оболочек являются: свобода горизонтальных и угловых перемещений краев оболочек (условие опирания), положительность Гауссовой кривизны по всей поверхности и отсутствие отверстий, резкого изменения толщины, сосредоточенных нагрузок, скачкообразного изменения сплошной нагрузки и др. Отметим, что даже при нарушении условий безмоментной работы оболочки в каком-либо месте

появления второй группы усилий ограничивается весьма малым участком. Наиболее частой причиной нарушения безмоментного состояния оболочек являются условия опирания, однако и при этом 70-80% поля оболочек двоякой кривизны могут испытывать практически лишь сжимающие усилия, чем и объясняется эффективность оболочек.

РАЗДЕЛ 2

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

2.1. Общие сведения

Цилиндрическая оболочка образуется из изогнутой по цилиндрической поверхности тонкой плиты, усиленной по свободным сторонам бортовыми элементами. По торцам оболочка опирается на диафрагмы.

Расчет прочности длинной цилиндрической оболочки круглого симметричного профиля на действие вертикальной симметричной нагрузки по стадии предельного равновесия. Расчет производится как для железобетонной балки корытообразного сечения в предположении, что ниже нейтральной оси вследствие образования трещин бетон исключен из работы, а в сжатой зоне сечения напряжения достигли призмочной прочности бетона. Условие прочности сечения можно записать в следующем виде

$$M_{\text{сеч}} \geq M, \quad (2.1)$$

где $M_{\text{сеч}}$ - момент внутренних сил, действующих в сечении оболочки, относительно центра окружности, по которой очерчено поперечное сечение оболочки;

M - момент внешних сил относительно той же точки.

Момент внутренних сил определяется из выражения:

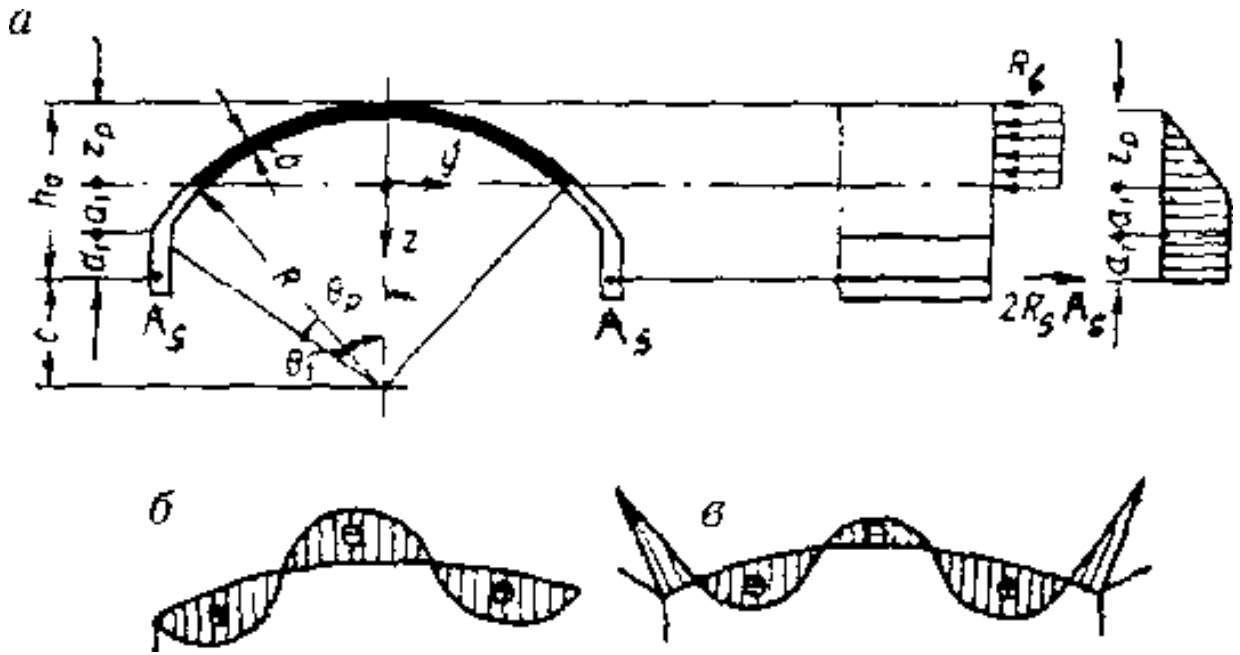
$$M_{\text{сеч}} = 2(R_b \delta R \sin \theta_p - c A_s R_s) \quad (2.2)$$

где d и R — толщина и радиус цилиндрической оболочки;

θ_p - половина центрального угла дуга сжатой зоны сечения;

c - расстояние от центра тяжести растянутой арматуры до центра окружности, по которой очерчено сечение оболочки;

A_s - площадь растянутой арматуры, расположенной в одном бортовом элементе.



**Рис. 2.1. К расчету длинной цилиндрической оболочки:
 а - схема усилий, действующих в продольном направлении;
 б - эпюра поперечных изгибающих моментов в одноволновой оболочке;
 в - то же, в средней волне многоволновой оболочки**

Для определения положения нейтральной оси все усилия, действующие на сечение оболочки, спроектируем на ось x :

$$R_b \theta_p R \delta = R_s A_s. \quad (2.3)$$

Подставив значение $K_s A_s$ из уравнения (2.3) в (2.2) и имея в виду выражение (2.1), получим:

$$M = 2(R_b \delta R \sin \theta_p - c R_b \theta_p R \delta).$$

После преобразования последнего выражения окончательно получим уравнение

$$\sin \theta_p - c R \theta_p - M / 2 R_b \delta R = 0, \quad (2.4)$$

которое можно решить методом последовательного приближения. С этой целью в первом приближении можно принять за $\theta_p = \theta_0$.

Далее из уравнения (2.4) определяется v_p , а затем из выражения (2.3) площадь растянутой арматуры A_s .

Из статического расчета оболочки, как балки, определяются лишь продольные нормальные усилия. Далее по значениям нормальных усилий из условий равновесия определяются сдвигающие усилия.

Для определения поперечных изгибающих моментов и нормальных сил, действующих в поперечном направлении, в середине пролета оболочки выделяется полоска единичной ширины. По ее краям прикладываются полученные усилия сдвига и из условия равновесия этих усилий и внешней нагрузки определяются изгибающие моменты и нормальные силы в поперечных сечениях.

На рис. 2.1, б, в представлены эпюры поперечных изгибающих моментов в однопролетной и многопролетной оболочках. Схема армирования длинных цилиндрических оболочек показана на рис. 2.2.

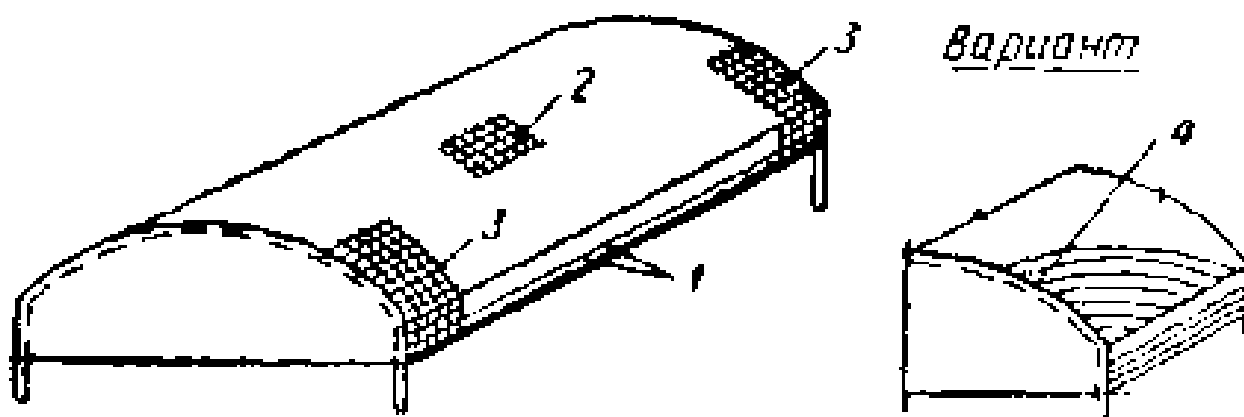


Рис. 2.2. Схема армирования длинной цилиндрической оболочки:
 1 - основная сетка оболочки; 2 - основная рабочая арматура;
 3 - дополнительные опорные сетки; 4 - наклонная арматура

2.2. Цилиндрическая панель

В настоящее время в строительстве широко используются элементы, расчетная схема которых соответствует тонкостенным пространственным конструкциям. В частности цилиндрическим панелям. Тонкостенные пространственные покрытия в отличие от плоскостных систем работают под нагрузкой в обоих направлениях, следовательно, такие конструкции требуют наименьшего расхода материалов, в них отношение собственной массы к полезной нагрузке минимально. Тонкостенные пространственные железобетонные конструкции используются для перекрытий больших площадей без промежуточных опор.

Раздел посвящен постановке и методу расчета задач деформирования оболочных конструкций, в частности цилиндрических панелей, которые можно использовать для покрытия прямоугольных в плане помещений.

В настоящее время достаточно хорошо исследовано деформирование тонкостенных конструкций, и получены аналитические и численные решения

для отдельных элементов конструкций. Исследование всей конструкции, используя современные конечно-элементные пакеты, имеет свои недостатки, в частности высокую стоимость и трудоемкость расчетов [1, 2].

Гипотезы, положенные В.З. Власовым [3,4] в основу полубезмоментной теории цилиндрической оболочки, используются для построения уравнений основного напряженного состояния оболочки двойкой кривизны.

Это уравнения, описывающие деформацию гибких оболочек всех типов рассматриваемых в книге [5]. Обсуждается погрешность этих уравнений и пределы их применимости.

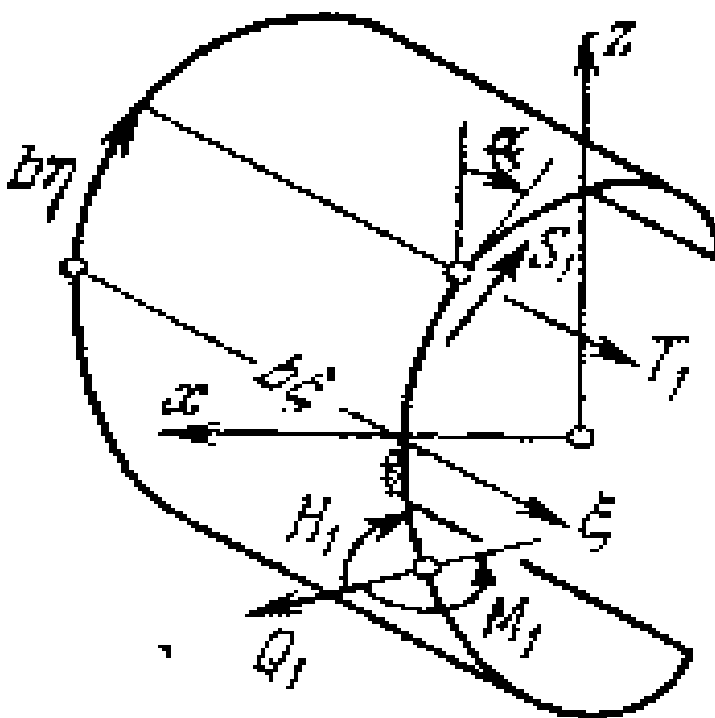


Рис. 2.3. Цилиндрическая оболочка.

1. Исходные положения. Для расчета цилиндрической оболочки успешно применяются [4] гипотезы, отражающие характерные черты основного

напряженного состояния оболочки. Эти гипотезы сводятся к следующему:

1) В уравнениях равновесия можно пренебречь усилием Q_1 и моментами M_1, H_1 , а также принять:

$$S_1 \approx S_2 \approx S, \quad H_1 \approx H_2 \approx H$$

(обозначения усилий, моментов и координат показаны на рис. 2.3)

2) Относительное удлинение ε_2 вдоль профиля поперечного сечения оболочки-линии η и относительный сдвиг γ в срединной поверхности малы сравнительно с производными перемещений. При помощи выражений ε_2, γ через перемещения эта гипотеза представляется приближенными равенствами ($A_1 = A_2 = b$).

$$\frac{\partial v}{b \partial \eta} + \frac{\omega}{R_2} = \varepsilon_2 \approx 0 \quad \frac{\partial u}{b \partial \eta} + \frac{\partial v}{b \partial \xi} = \gamma \approx 0 \quad (2.5)$$

3) В соотношениях упругости можно не учитывать часть удлинения ε_1 , связанную с усилиями T_2 , и часть момента M_2 , связанную с параметром χ_1 . Это означает принятие соотношений упругости в упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{T_1}{Eh} - \frac{\nu T_2}{Eh} \approx \frac{T_1}{Eh} \\ \varepsilon_2 &= \frac{T_2 - \nu T_1}{Eh} \\ \gamma &= 2 \frac{1 + \nu}{Eh} S \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$M_2 = D\chi_2 + \nu D\chi_1 \approx D\chi$$

$$M_1 = D\chi_2 + \nu D\chi_1 + \nu D\chi_2$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1 + \nu)} \tau$$

Или, для более общего случая неоднородной ортотропной оболочки:

$$\varepsilon_1 \approx B_1 T_1; \quad \varepsilon_2 \approx -B'_\nu T_1 + B'_2 T_2; \quad \gamma = B'_G S; \quad (2.7)$$

$$M_2 \approx D_2 \chi_2; \quad M_1 \approx D_\nu \chi_2 + D_1 \chi_1; \quad H = 2D_G \tau. \quad (2.8)$$

Простой и определенный критерий применимости этих упрощений при описании основного, медленно изменяющегося вдоль оболочки напряженного состояния, дал А.Л. Гольденвейзер для круговой цилиндрической оболочки. При описании деформации в тригонометрических рядах вызванное краевой нагрузкой напряженное состояние, отвечающее членам ряда $\cos(n\eta)$, $\sin(n\eta)$, соответствует указанным гипотезам, если выполнено условие [6]:

$$n^2 \ll \sqrt{12} \frac{b}{h}. \quad (2.9)$$

Напряженное состояние, отвечающее приведенным трем гипотезам, В.В. Новожилов назвал полубезмоментным [7]. Он указал, что эти гипотезы эквивалентны внесению в уравнения общей теории оболочек упрощений, выражающих медленную изменчивость вдоль оболочки (по ξ), сравнительно с изменением по η , любой из функций, описывающих напряженное состояние:

$$\left| \frac{\partial^2 F}{A_1 \partial \xi^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 F}{A_2 \partial \eta^2} \right|.$$

Обратимся к оболочке более общего сравнительно с цилиндрической вида. Это оболочка (рис. 2.4), срединная поверхность которой образуется движением плоской кривой линии η , когда плоскость линии η скользит одной из своих точек по плоской кривой s , оставаясь ортогональной линии η и не вращаясь вокруг нее.

Координаты ξ, η введем (рис. 2.4) аналогично цилиндрической оболочке (рис. 2.3): $b\eta$ - длина дуги линии η . Причем постоянную b подберем так, чтобы на краях оболочки было $\eta = 0, \pi$, а при наличии симметрии относительно плоскости $z = 0$ на краях $\eta = \pm\pi$; $b\xi$ - длина дуги линии s .

Обозначая радиусы кривизны линии $\eta = \text{const}$ и линии s через R, R_m , получим выражения параметров Ламе и параметров кривизны:

$$A_1 = b \frac{R}{R_m} ; \quad A_2 = b \frac{1}{R_1} = \frac{\cos \alpha}{R} ; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{d\alpha}{bd\eta} ; \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sin \alpha}{R} ; \quad \left(\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_{21}} = 0 \right)$$

Кривизна образующей может зависеть от продольной координаты: $R=R(\eta\xi)$. Однако практический интерес представляет прежде всего случай постоянной продольной кривизны, когда образующие и линия s дуги окружности, $R = R(\eta)$. Далее принимается, что изменение V вдоль оболочки значительно медленнее, чем изменение любой функции F , характеризующей напряженное состояние:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{F}{R} \approx \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial \xi} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A_1 F \approx A_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} . \quad (2.11)$$

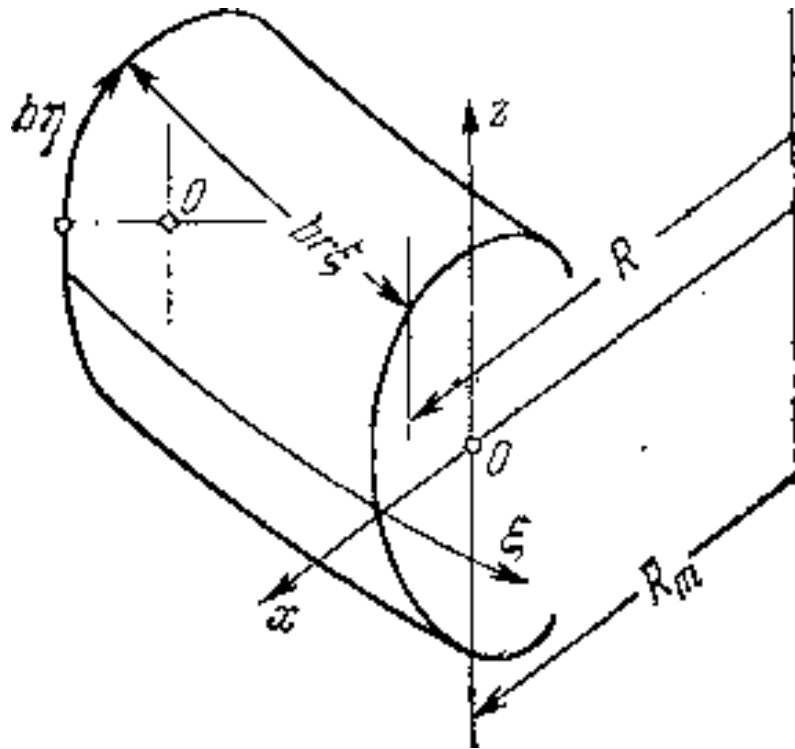


Рис. 2.4 Участок гибкой оболочки.

Для описанной оболочки двойкой кривизны при достаточно малой продольной кривизне основное напряженное состояние будет, очевидно, того же типа, что в цилиндрической оболочке. Составим соответствующие уравнения для гибкой оболочки двойкой кривизны на основе предположений полубезмоментной теории цилиндрической оболочки. Погрешность и пределы применимости таких уравнений обсудим в дальнейшем.

2.3. Разрешающие уравнения

Первые две гипотезы полубезмоментной теории примем в следующем виде (более приспособленном для нелинейной задачи, когда в число разрешающих функций не входят перемещения).

- 1) В уравнениях равновесия могут быть отброшены члены, включающие величины N_1 , N_2 , M_1 (и выражающуюся через них поперечную силу Q_1).
- 2) В уравнениях неразрывности можно отбросить члены, включающие величины γ , ε_2 (и выражающийся через них параметр λ_2).

Согласно этим предположениям можно отбросить подчеркнутые члены следующих уравнений равновесия и неразрывности уравнений, записанных для рассматриваемой оболочки в соответствии с (2.10), (2.11):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial r S_2}{\partial \eta} + S_1 \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{rb}{R'_1} Q_1 &= rb(-q_1 - Q_2 \tau + S_1 \lambda_1 + T_2 \lambda_2) \\ \frac{\partial S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial r T_2}{\partial \eta} - T_1 \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{rb}{R'_2} Q_2 &= rb(-q_2 - Q_1 \tau - T_1 \lambda_1 - S_2 \lambda_2) \\ \frac{T_1}{R'_1} + \frac{T_2}{R'_2} - \frac{\partial r Q_2}{rb \partial \eta} - \frac{\partial Q_1}{rb \partial \xi} &= q_n - S_1 \tau - S_2 \tau\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$rb Q_2 = \frac{\partial r M_2}{\partial \eta} - M_1 \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial H_1}{\partial \xi}$$

$$rb Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial r H_2}{\partial \eta} - rb(H_1 + M_2 \lambda_2)$$

$$S_1 - \frac{H_2}{R'_2} = S_2 - \frac{H_1}{R'_1} = S\quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial r^2 \tau}{r \partial \eta} + \frac{R_1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{r^2 \gamma}{2R_1^2} \right) - \frac{rb}{R'_1} \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{\partial r \chi_1}{\partial \eta} + x_2 \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{R_2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\gamma}{R_2^2} \right) - \frac{rb}{R'_2} \lambda_1 = 0$$

$$\frac{rb}{R'_1} x_2 + \frac{rb}{R'_1} x_1 - \frac{\partial r \lambda_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi} = rb \tau^2$$

$$rb \lambda_1 = -\frac{\partial r \varepsilon_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma}{2 \partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial r}{\partial \eta}\quad (2.14)$$

$$rb \lambda_2 = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \xi} - \frac{\partial r^2 \gamma}{2r \partial \eta}$$

Здесь использовано обозначение r для безразмерного радиуса кривизны линии ξ

$$r = \frac{R}{R_m}.$$

Уравнения равновесия и неразрывности (2.12) (2.14) для полубезмоментного напряженного состояния в линейном приближении можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial r^2 S}{r \partial \eta} &= -rbq_1 \\ \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial r T_2}{\partial \eta} - T_1 \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{rb}{R_2} Q_2 &= -rbq_2 \\ \frac{1}{R_1} T_1 + \frac{1}{R_2} T_2 - \frac{\partial r Q_2}{rb \partial \eta} &= q_n, \\ rb Q_2 &= \frac{\partial r M_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi} - \frac{\partial r^2 \tau}{r \partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{\partial r \chi_1}{\partial \eta} + \chi_2 \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{rb}{R_2} \lambda_1 &= 0 \\ \frac{1}{R_1} \chi_2 + \frac{1}{R_2} X_1 - \frac{\partial r \lambda_1}{rb \partial \eta} &= 0 \\ rb \lambda_1 &= -\frac{\partial r \varepsilon_1}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Из этих уравнений следуют формулы

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{r^2} \int \left(r \frac{\partial T_1}{\partial \xi} r + r^2 b q_1 \right) d\eta \\
T_2 &= -\frac{R_2}{R_1} T_1 + \frac{R_2}{r} \frac{\partial^2 r M_2}{b^2 \partial \eta^2} + q_n r b \\
\tau &= \frac{1}{r^2} \int r d\eta \\
x_1 &= -\frac{R_2}{R_1} x_2 - \frac{R_2}{r} \frac{\partial^2 r \varepsilon_1}{b^2 \partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

С помощью этих формул из вторых уравнений равновесия и неразрывности (15.15) исключаются все неизвестные, кроме двух, и эти уравнения представляются в виде

$$\begin{aligned}
h^\circ L T_1 - W \frac{M_2}{b} &= b q_\Sigma \\
q_\Sigma &= -r^2 \frac{\partial q_1}{\partial \xi} + \frac{\partial r^3 q_2}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} r^2 \frac{\partial r \rho q_n}{\partial \eta} \\
h^\circ L \chi_2 + W \frac{\varepsilon_1}{b} &= 0 \\
L T_1 &= \frac{r}{h^\circ} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial}{\partial \eta} r^2 s T_1 + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} r^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \rho c T_1 \\
W M_2 &= \frac{\partial}{\partial \eta} r^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \rho \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} r M_2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{r^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} r M_2 \\
\rho &= \frac{R_2}{b} \\
(h^\circ &= \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)b}}, \mu = \frac{b}{R_m h^\circ}, s = \sin \alpha, c = \cos \alpha)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Введенные здесь обозначения оператора L, оператора В.З. Власова W и ρ широко используются в дальнейшем.

С помощью соотношений упругости (2.6) две неизвестные в уравнениях (2.17) выражаются через остальные две. Это дает систему двух разрешающих уравнений с двумя неизвестными.

Ограничиваясь, для упрощения, изотропной оболочкой постоянной толщины, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} LT_1 - Ehh^\circ W\chi^2 b &= \nu q_\Sigma / h^\circ \\ L\chi_2 b Ehh^\circ + WT_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Эти уравнения можно представить в комплексной форме

$$(L - iW)T_1 = bq_\Sigma / h^\circ, T = T_1 - iEhh^\circ \chi_2 b. \quad (2.19)$$

В случае цилиндрической оболочки, когда $\mu=0$, $r=1$, $L=\partial^2/\partial\xi^2$, система (2.19) получает вид уравнений В.З. Власова. В частности, для круговой цилиндрической оболочки ($\rho=1$) это система с постоянными коэффициентами, из которой одна неизвестная легко исключается, что приводит к уравнению

$$\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + h^{\circ 2} \left(\frac{\partial^4}{\partial\eta^4} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right)^2 \chi_2 = - \left(\frac{\partial^4}{\partial\eta^4} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) q_\Sigma$$

Система уравнений полубезмоментной теории, в частности уравнения (2.18), имеет восьмой порядок по η , но лишь четвертый порядок по ξ . Поэтому только на краях $\eta = \text{const}$ можно удовлетворить всем четырем граничным условиям общей теории тонких оболочек.

На каждом из краев $\xi = \text{const}$ удовлетворяются лишь два условия. На этих краях отпадают условия, включающие моменты N_1 , M_1 и усилие Q_1 , которые в полубезмоментном напряженном состоянии являются второстепенными.

Точно так же не могут накладываться граничные условия на параметры деформации γ , ε_2 , λ_2 , отбрасываемые в уравнениях неразрывности, и на составляющие перемещения, непосредственно связанные с этими параметрами.

Граничные условия на краях $\xi = \text{const}$ должны включать тангенциальные усилия T_1 , S или соответствующие перемещения u , v и параметры деформации ε_1 , χ_2 .

Замечание. Уравнения вида (2.16) (2.18) неэффективны, когда на некоторых участках оболочки поперечная кривизна $1/R_2$ равна нулю. В таких случаях неприменимы выражения T_2 , χ_1 по (2.16) и соответственно оператор W . Свободные от указанного ограничения разрешающие уравнения можно получить, используя выражения T_2 и χ_1 согласно вторым из уравнений равновесия и неразрывности (2.15).

Появление в этом варианте уравнений интегралов от разрешающих функций (T_2, χ_2) не связано с существенными трудностями, если вести решение в тригонометрических рядах.

2.4. Перемещения

В линейном приближении исходное предположение полубезмоментной теории (2.5) позволяет просто выразить компоненты перемещениями u и v через перемещения по нормали w .

ИЗ СООТНОШЕНИЯ (2.9) СЛЕДУЕТ

$$\begin{aligned} v &= -\int \frac{\omega}{R_2} b d\eta \\ u &= \frac{\partial}{\partial \xi} \iint \omega \frac{b}{R_2} d\eta^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Параметры деформации оболочки выражаются через перемещения согласно формулам, которые для оболочки рассматриваемой формы имеют

вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon' + \frac{\partial u}{b\partial\xi} + \frac{\omega}{R} \cos\alpha - \frac{v}{R} \sin\alpha, \\
\vartheta_1 &= -\frac{\partial\omega}{b\partial\eta} + \frac{v}{R_2} \cos\alpha, \\
\vartheta_2 &= -\frac{\partial\omega}{b\partial\eta} + \frac{v}{R_2}, \chi_2 = \frac{\partial\vartheta}{b\partial\eta}
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

Здесь выделена часть ε' продольного удлинения ε_1 , не связанная с деформацией поперечного сечения оболочки линии η , а u, v, w составляющие перемещения за вычетом перемещений данного поперечного сечения $\xi = \text{const}$ как недеформируемой фигуры. Выделение ε' и соответствующей части перемещений расширяет пределы применимости линейных соотношений между перемещениями и параметрами деформации. (Разумеется, положив $\varepsilon'=0$, получим из (2.21) формулы, включающие полные перемещения).

Из формул (2.20), (2.21) следует

$$\vartheta_2 = -\frac{\partial\omega}{b\partial\eta} - \frac{1}{R_2} \int \frac{\omega}{R_2} b d\eta.
\tag{2.22}$$

При помощи формул (2.20) (2.22) и соотношений упругости (2.6) величины T_1, M_2 в уравнении равновесия (15.13) выражаются через ω . Такое уравнение нашло широкое применение для решения задач изгиба труб [8,9].

2.5. Решение в двойных тригонометрических рядах

Будем искать решение уравнений полубезмоментной теории (2.12) при помощи рядов Фурье [10] в виде

$$\begin{aligned}
x &= x_B(\xi, \eta) + \sum_j x^j(\eta) \sin \frac{j\pi b}{l} \xi \\
T &= T_B(\xi, \eta) + \sum_j T^j(\eta) \sin \frac{j\pi b}{l} \xi
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Граничные условия на краях $\xi=0$, l/b должны выполняться путем соответствующего выбора функций x_B , T_B и определения введенных в эти функции постоянных.

Например, если на краях $\xi=0$, l/b заданы значения функций x , T , то x_B , T_B при $\xi=0$ l/b должны равняться заданными $x(0, \eta)$, $x(l/b, \eta)$. (Входящие в x , T по (2.23) ряды при $\xi=0$, l/b равны нулю.) В таком случае можно принять x_B , T_B изменяющимися по ξ линейно:

$$\begin{aligned}
x_B &= x(0, \eta) \left(1 - \xi \frac{b}{l}\right) + x\left(\frac{l}{b}, \eta\right) \xi \frac{b}{l} \\
T_B &= T(0, \eta) \left(1 - \xi \frac{b}{l}\right) + T\left(\frac{l}{b}, \eta\right) \xi \frac{b}{l}.
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

Уравнения, определяющие функции x^j, T^j получим, подставив разложения (2.23) в уравнения (2.12) и приравнявая коэффициенты при $\sin(j\pi b \xi/l)$ в обеих частях каждого уравнения. Для пары функций x^j , T^j при $j=1, 2, \dots$ получается отдельная система двух дифференциальных уравнений (переменные разделяются)

$$\begin{aligned}
Wx^j - L^j T^j &= q^j - A^j \\
L^j x^j + W^j T^j &= -B^j
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
L^j &= -\frac{1}{h^0} m_j^2 - \mu \frac{d}{d\eta} r^2 s + \mu \frac{d}{d\eta} r^2 \frac{d}{d\eta} \rho c, \\
m_j &= j \frac{\pi b}{l}
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

Здесь введены обозначения коэффициентов Фурье рядов, представляющих распределенную нагрузку, и заданные на краях $\xi=0$, l/b значения x , T :

$$\sum_j q^j \sin m_j \xi = q^\circ \Sigma$$

$$\sum_j \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} \sin m_j \xi = \begin{bmatrix} Wx_B - LT_B \\ Lx_B + WT_B \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Необходимо подчеркнуть, что ряды Фурье функций x_B , T_B дифференцировать по ξ нельзя. Например, дифференцирование рядов

$$1 = \frac{4}{\pi} \frac{\sin m_1 \xi}{1} + \frac{4}{\pi} \frac{\sin m_2 \xi}{3} + \dots, \quad \xi = \frac{2}{\pi} \sin m_1 \xi - \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \sin m_2 \xi - \dots,$$

которые входят в разложения функций x_B , T_B , определенных в (2.24), дает расходящиеся ряды.

Решение уравнений (2.25) можно искать с помощью тригонометрических рядов по $\cos(n\eta)$, как описано выше.

В частности, для оболочки, замкнутой по линии η (трубы), разрешающие функции определяются рядами (2.23) и разложениями

$$T^j = \frac{1}{2} b_0^j + \sum_n b_n^j \cos n\eta,$$

$$x^j = \sum_n a_n^j \cos n\eta \quad (2.28)$$

($n = 1, 2, \dots$)

причем условия замкнутости трубы определяют выражения коэффициентов Фурье функций T^j , x^j через неизвестные g^j, f^j :

$$T^j = T_M^j - T_B^j + E_x g^j$$

$$x^j = E_x f^j$$

$$[T^j T_M^j T_B^j g^j f^j] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^{j_0} & N^{\circ j} & \frac{1}{2} T_{B0}^j & 0 & 0 \\ T_1^j & M_z^{\circ j} x_1 & T_{B1}^j & g_1^j & f_1^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Подстановка разложений x^j , T^j по (2.28), (2.28) в уравнения (2.25) приводит к системе алгебраических уравнений (где необходимо учесть сказанное о E_x , W и $WE_x = W$ при $r \approx 1$)

$$\begin{aligned} WE_x f^j - L^j E_x g^j &= q^j - A_j + L^j (T_M^j - T_B^j) \\ WE_x g^j + L^j E_x f^j &= -B^j - W(T_M^j - T_B^j) \\ L^j &= -\frac{m_j^2}{h^{\circ}} \tilde{r}_+ - \mu \Lambda \tilde{r}^2 \tilde{s}_+ - \mu \Lambda \tilde{r}^2 \Lambda \tilde{\rho}_+ \tilde{c}_+ \end{aligned} \quad (2.30)$$

Для кругового сечения, отсюда следуют уравнения, сходные с (2.25),

$$\begin{aligned} Wx^j - L^j T^j &= q^j - A_j \\ L^j x^j + WT^j &= -B \\ x^j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2^j \\ \dots \end{bmatrix} \\ T^j &= \begin{bmatrix} N^{\circ j} - \frac{1}{2} T_{B0}^j \\ M_z^{\circ j} - T_{B1}^j \\ b_2^j \\ \dots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь и в формуле (2.30) использованы обозначения коэффициентов Фурье функции $T_B(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} T_B &= \sum_j \sin m_j \xi \left(\sum_n T_{Bn}^j \cos n \eta + \frac{1}{2} T_{B0}^j \right) \\ (j, n &= 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Разумеется, когда матрица W может быть представлена в виде, соответствующем $r=1$, уравнения (2.31) сводятся к более простой системе алгебраических уравнений, аналогичной уравнениям (2.29).

Как видно из формул (2.31), нулевой и первый коэффициенты рядов $T^j(\eta)$, $x^j(\eta)$ (2.28) определены помимо уравнений (2.30) или (2.31). Соответственно в системе (2.31) выпадают уравнения, образуемые при помощи строк номер нуль и номер один матриц W , L^j . названные уравнения удовлетворяются с точностью полубезмоментной теории тождественно. Это, конечно, отражает свойство системы дифференциальных уравнений.

Решение систем алгебраических уравнений (2.30) или (2.31) завершает определение x , T в виде двойных тригонометрических рядов. При этом, как показывают примеры расчета, число членов сумм, необходимое для описания деформации трубы очень невелико. Данный вариант решения проще, чем решение в ординарных рядах. Отпадает необходимость вычисления корней характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений. Преимуществом решения в двойных рядах является также возможность рассмотреть случай переменной продольной кривизны

$$R = R(\xi, \eta)$$

С другой стороны, решение в ординарных рядах Фурье дает более наглядную картину изменения напряженного состояния вдоль оболочки и может оказаться более удобным при некоторых вариантах условий на краях.

В качестве примера рассмотрено напряженное состояние цилиндрической панели, которая является открытой оболочкой, деформирующегося под действием собственного веса. Конструкция, толщиной $h=20$ см, квадратная в плане (со стороной $l=10$ м), выполнена из бетона. В расчетах варьировалась высота подъема f в пределах $f=(0...5)$ м. На рис. 3 приведена рассматриваемая оболочки. Расчеты были проведены в

соответствии с полубезмоментной теорией при помощи двойных тригонометрических рядов.

Установлено, что наименьшая интенсивность напряжений будет в панели, высота которой равняется 0.76 м. Анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод, что тонкостенное покрытие рационально конструировать в виде выпуклой пологой оболочки, в которых стрела подъема значительно меньше размеров пролета. На рисунке 2.6 приведены нормальные напряжения σ_x на внутренней поверхности. Напряжения σ_y показаны на рис. 2.7, 2.8.

Ввиду пологости оболочки разница в статической работе и геометрическом построении разных поверхностей несущественна, в них изгибающие моменты появляются лишь в той части оболочки, которая контактирует с опорами.

Большая же часть площади оболочки обычно подвергаются лишь действию продольных сжимающих усилий.

В углах оболочки сдвигающие силы достигают наибольших значений, что вызывает появление в этих местах значительных главных растягивающих напряжений. Для восприятия этих напряжений угловые зоны оболочек больших пролетов целесообразно армировать диагональной напрягаемой арматурой.

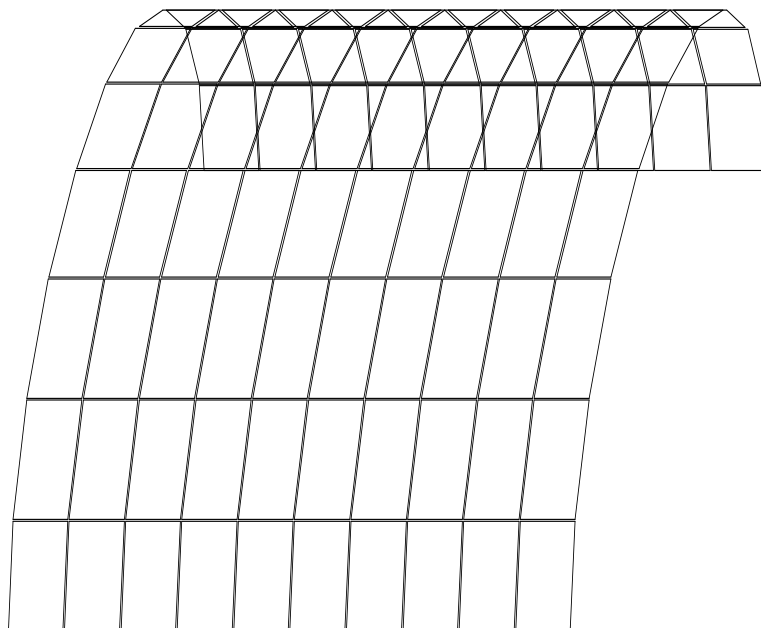


Рис. 2.5. Цилиндрическая панель.

Рис. 2.6

Рис. 2.7

Рис. 2.8

РАЗДЕЛ 3

КУПОЛА

3.1. Общие сведения

В настоящее время в строительстве широко используются элементы, расчетная схема которых соответствует тонкостенным пространственным конструкциям. Тонкостенные пространственные покрытия в отличие от плоскостных систем работают под нагрузкой в обоих направлениях.

Вследствие благоприятных условий статической работы такие конструкции требуют наименьшего расхода материалов, в них отношение собственной массы к полезной нагрузке минимально. Тонкостенными пространственными железобетонными конструкциями можно перекрывать без промежуточных опор большие площади до 1 га и более.

Широкое использование современных материалов, обуславливает разработку новых методов расчетов, которые учитывают неоднородность материала и нелинейность его свойств. Учет нелинейных факторов позволяет более адекватно смоделировать процессы деформирования конструкций. Кроме того, условия эксплуатации строительных конструкций в современных условиях характеризуются высокими внешними воздействиями, что часто приводит к тому, что материал начинает работать за пределами упругости. Вместе с тем, обеспечение высокой надежности и долговечности элементов конструкций, при одновременном уменьшении времени проектирования и сокращении расходов, требует создания современных методов моделирования и расчетов.

Железобетонные купола применяются для покрытий круглых и квадратных в плане зданий и сооружений. Они являются одним из наиболее рациональных и выгодных типов пространственных тонкостенных конструкций.

Купола выполняются из монолитного и сборного железобетона. Монолитные купола в основном выполняют гладкими, а сборные ребристыми. В зависимости от характера образующей купола могут быть сферическими, коническими и т.д.

В зависимости от отношения стрелы подъема к диаметру опорного кольца различают купола пологие и подъемистые. Очертание поверхности куполов принимается по архитектурным соображениям, а также исходя из статической работы конструкции.

Нелинейные задачи деформирования неоднородных конструкций принадлежат к числу наиболее сложных в современной механике.

3.2. Купола, круглые в плане

Поверхность куполов, для покрытий круглых в плане зданий и сооружений, образуется вращением плоской кривой около неподвижной прямой. Поэтому они называются оболочками вращения. Купольное покрытие состоит из двух основных конструктивных элементов: оболочки и опорного кольца.

Опорное кольцо, работая на растяжение, обеспечивает работу оболочки главным образом на сжатие. Определение усилий в оболочке купола по безмоментной теории. Опираание купола считается статически определимым в том случае, если купол по контуру опирается на шарнирно-подвижные опоры, направленные по касательной к меридиану оболочки (рис. 3.1, а).

При статически определимом опирании и действии распределенных осесимметричных нагрузок в тонкостенных куполах с плавным изменением

толщины оболочки возникают ничтожные изгибающие моменты и поперечные силы. Поэтому они могут быть рассчитаны без учета изгибающих моментов и поперечных сил, т.е. по так называемой безмоментной теории.

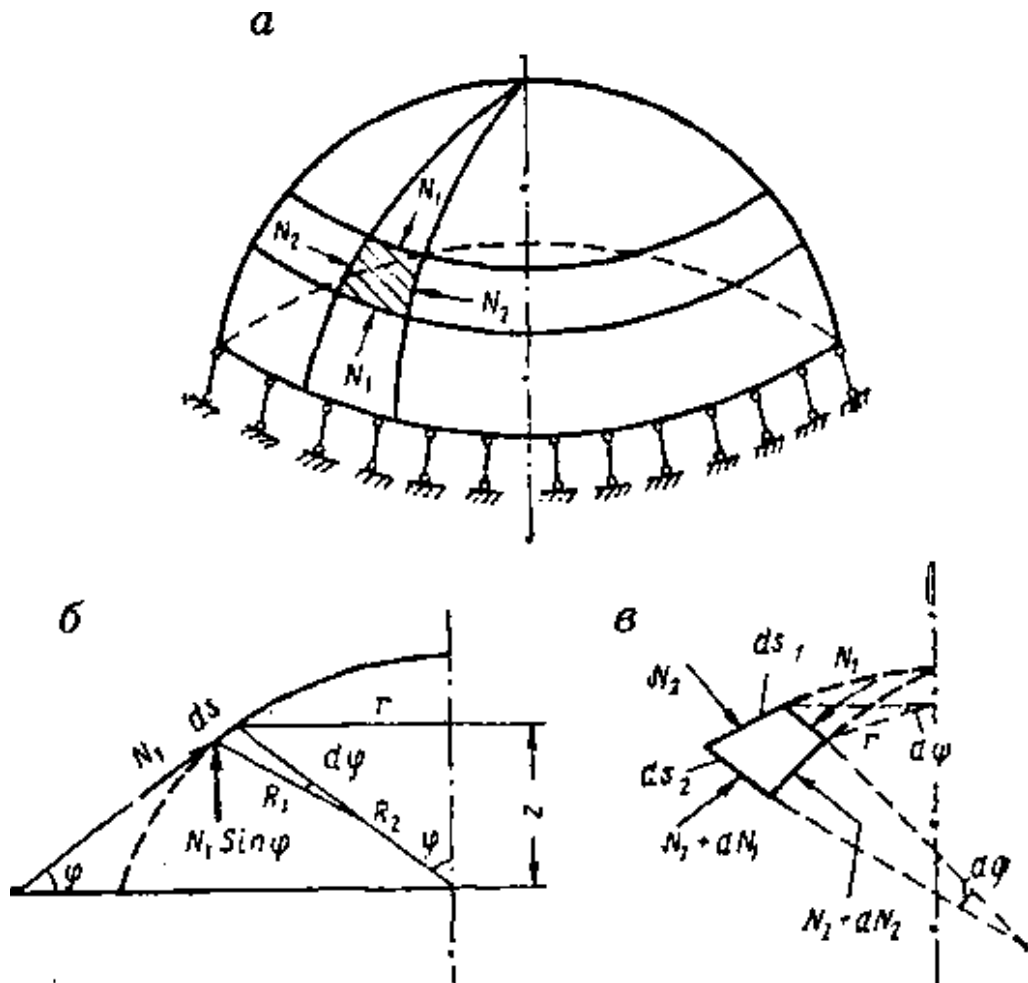


Рис. 3.1. К расчету купола по безмоментной теории

Для определения усилия в оболочке купола рассмотрим напряженное состояние элемента, выделенного из купола двумя меридиональными и двумя кольцевыми сечениями. Меридиональные усилия обозначим N_1 , кольцевые N_2 , а усилие в опорном кольце N_0 .

Из условия равновесия усилий, приложенных к рассматриваемому элементу (рис. 3.1, б),

$$N_1 \sin\varphi * 2\pi r = P_\varphi, \quad (3.1)$$

откуда меридиональное усилие

$$N_1 = P_\varphi / 2\pi r \sin\varphi \quad (3.2)$$

где P_φ - нагрузка на сегмент, ограниченный углом φ .

Обозначив составляющую нагрузки, нормальную к поверхности купола, через Z , составим уравнение проекций внутренних усилий и нагрузки на нормаль к поверхности элемента (рис. 3.1, в):

$$2N_1 ds_2 \sin d\varphi / 2 + 2N_2 ds_1 * \sin\varphi \sin d\Psi / 2 - Z ds_1 ds_2 = 0 \quad (3.3)$$

Принимая во внимание, что

$$ds_1 = R_1 d\varphi, \quad ds_2 = r d\Psi = R_2 \sin\varphi d\Psi$$

и что вследствие малости углов $d\varphi$ и $d\Psi$

$$\sin d\Psi / 2 \approx d\Psi / 2, \quad \sin d\varphi / 2 \approx d\varphi / 2,$$

уравнение (3.3) запишем в виде

$$N_1 R_2 d\varphi d\Psi \sin\varphi + N_2 R_1 d\varphi d\Psi \sin\varphi = Z R_1 R_2 \sin\varphi d\varphi d\Psi.$$

Отсюда получаем основное расчетное уравнение

$$N_1 / R_1 + N_2 / R_2 = Z \quad (3.4)$$

Теперь определим горизонтальную проекцию усилия N_1 :

$$H = N_1 \cos\varphi = P_\varphi \operatorname{ctg}\varphi_0 / 2\pi r$$

На уровне опорного кольца $\varphi = \varphi_0$ и величина распора

$$H_0 = P_{\varphi_0} \operatorname{ctg}\varphi_0 \quad (3.5)$$

Усилия Y_0 действуют на опорное кольцо в радиальном направлении по его периметру; поэтому растягивающее усилие в опорном кольце

$$N_0 = H_0 = P_{\varphi_0} \operatorname{ctg} \varphi_0 / 2\pi \quad (3.6)$$

Для сферического купола $R_1=R_2=R$, меридиональные и кольцевые усилия определяют из выражений:

$$N_1 = P_{\varphi} / 2\pi R \sin^2 \varphi; \quad N_2 = ZR - N_1 \quad (3.7)$$

При действии снеговой нагрузки q

$$P_{\varphi} = q\pi r^2 = q\pi R^2 \sin^2 \varphi; \quad Z = q\cos^2 \varphi$$

Представляя значения P_{φ} и Z формулы (3.7), получим

$$N_1 = q\pi R^2 \sin^2 \varphi / 2\pi R \sin^2 \varphi = qR / 2$$

$$N_2 = qR \cos^2 \varphi - qR / 2 = qR / 2 (2\cos^2 \varphi - 1) = qR \cos^2 \varphi.$$

Последнее выражение показывает, что в меридиональном направлении купол во всех точках испытывает сжатие, а в кольцевом направлении: при $\varphi = 0-45^\circ$ испытывает сжатие, при $\varphi > 45^\circ$ - растяжение, а при $\varphi = 45^\circ$ кольцевые усилия равны нулю (шов перехода).

Растягивающее усилие в опорном кольце

$$N_0 = qR^2 / 4 \sin 2\varphi. \quad (3.8)$$

При расчете купола на нагрузку q от собственного веса меридиональные и кольцевые усилия в опорном кольце определяют на основании выражений (3.2), (3.4) и (3.6) при

$$Z = q\cos \varphi \quad \text{и} \quad P_{\varphi} = 2\pi R^2 q\cos \varphi$$

Вместе с тем, известно, что безмоментные условия опирания купола практически создать невозможно, поэтому по краям купола в узкой приопорной зоне появляются меридиональные изгибающие моменты.

Учитывать эти условия наиболее просто при решении задачи методом сил или методом деформаций. Для этого выбирается основная система. С этой целью при методе сил купол отделяется от опорного кольца, а взамен отброшенных связей прилагаются неизвестные краевые усилия

меридиональный момент M и горизонтальное усилие (распор) H (рис. 3.2). Для определения этих усилий составляются канонические уравнения метода сил:

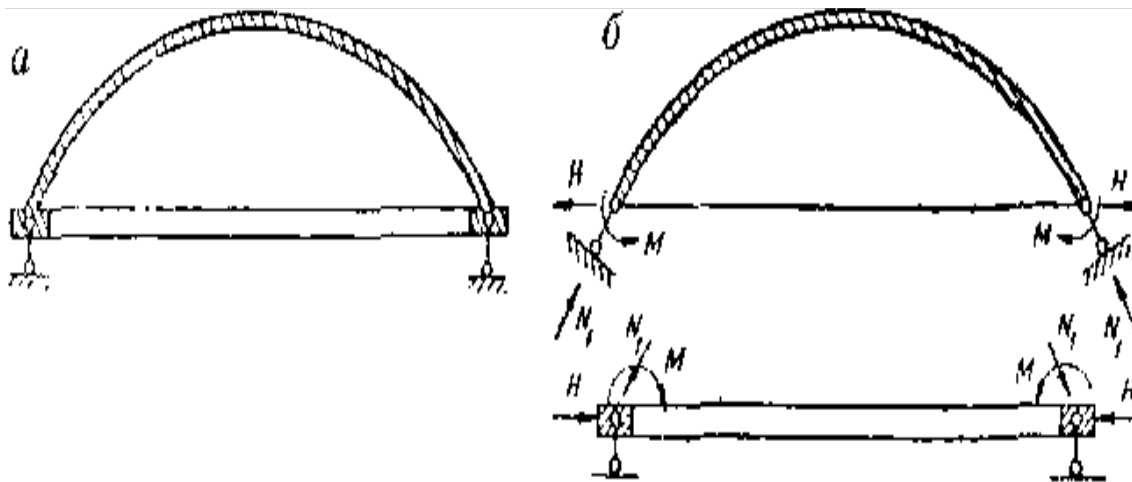


Рис. 3.2. Учет краевого изгиба в куполах

а - заданная расчетная схема; б - основная система

$$\begin{aligned} a_{11}M + a_{12}H + a_{10} &= 0 \\ a_{21}M + a_{22}H + a_{20} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Первое уравнение выражает условие, что взаимный угол поворота сечений в примыкании купола к опорному кольцу от суммарного воздействия всех силовых факторов в заданной системе должен быть равен нулю (в противном случае раскроется трещина). Второе уравнение является условием отсутствия взаимных линейных смещений в том же месте.

В уравнениях (3.9) a_{11} , a_{21} , и a_{10} взаимные углы поворота краевого контура оболочки и опорного кольца соответственно от $M=1$, $H=1$ и внешней нагрузки; a_{21} , a_{22} , и a_{20} взаимные линейные смещения в горизонтальной плоскости от тех же воздействий. Указанные коэффициенты и свободные члены канонических уравнений могут быть определены по формулам Руководства [11].

После определения M и H канонических уравнений (3.9) окончательные значения меридиональных и кольцевых усилий N_1 и N_2 и меридионального момента M в сечениях оболочки определяют наложением на безмоментное состояние краевых усилий от M и H .

Например,

$$N_1 = N_1^0 + N_{1M}^0 + N_{1H}^0 H,$$

Где N_1^0 , N_{1M}^0 , N_{1H}^0 - усилия в рассматриваемом сечении основной системы соответственно от внешней нагрузки, единичного краевого момента $M=1$ и единичного краевого распора $H=1$.

Расчет куполов по методу предельного равновесия может быть применен в случаях, когда не требуется обеспечения трещиностойкости конструкций. Если усилия в оболочке, найденные по безмоментной теории, всюду, кроме наружного контура кольца, не являются растягивающими, то в предельном состоянии будет наблюдаться схема разрушения, показанная на рис. 3.3, а. Купол расчленяется системой сквозных меридиональных трещин, соединенных по концам кольцевым пластическим шарниром.

Примем нагрузки осесимметричными, отношение диаметра опорного кольца к стреле подъема не более 10, опирание купола по всему периметру, а армирование состоящим из меридиональных и кольцевых стержней, образующих верхнюю и нижнюю сетки арматуры.

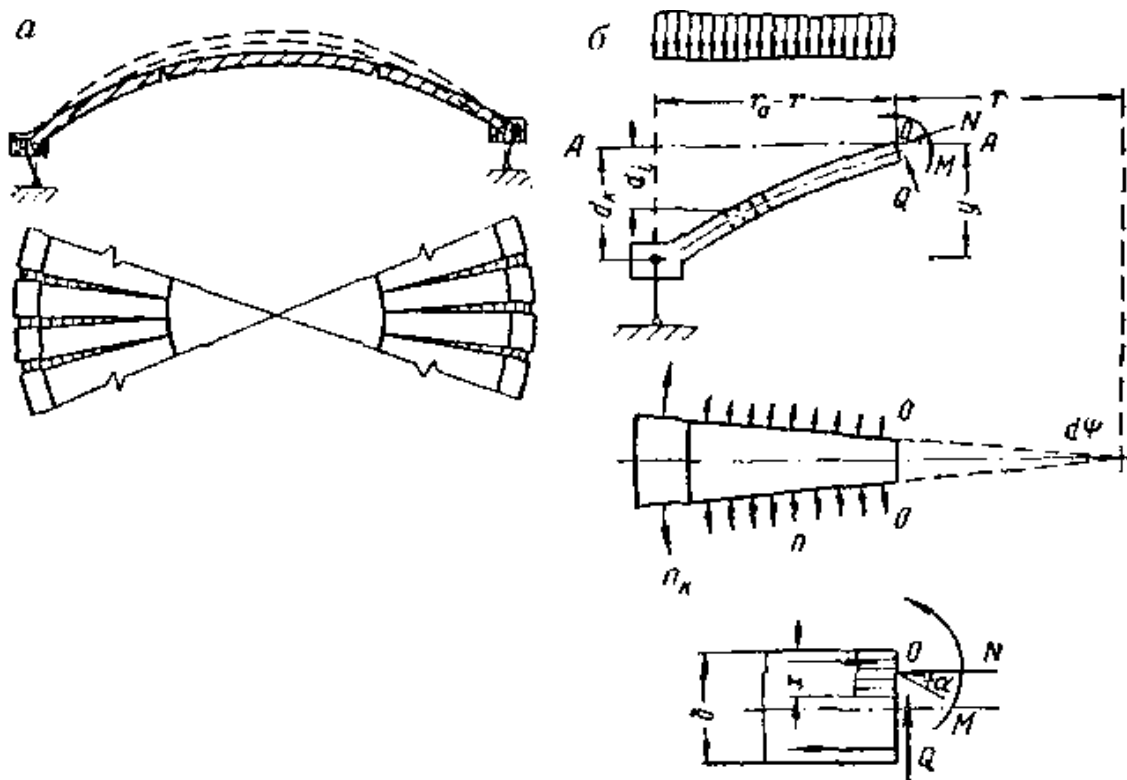


Рис. 3.3. К расчету купола по методу предельного равновесия:

а - схема разрушения купола;

б - схема усилий, действующих на выделенный элемент в предельном состоянии

Из уравнения моментов относительно оси 0-0 всех сил, действующих на элемент, ограниченный двумя меридиональными трещинами и кольцевым пластичеаким шарниром (рис. 3.3, б), получим:

$$M = mr + \sum n_i d_i \quad (3.10)$$

где M - момент от внешних нагрузок, включая опорные реакции;

m - момент относительно оси 0-0 предельных усилий в меридиональной арматуре на 1 м кольцевого шарнира;

r - радиус кольцевого пластического шарнира;

n_i - предельные усилия в кольцевых стержнях;

d_i - расстояния по вертикали от рассматриваемого стержня до горизонтальной плоскости, содержащей ось пластического шарнира.

При определении разрушающей нагрузки купола радиус пластического шарнира определяют из условия минимальной разрушающей нагрузки, а при подборе арматуры - из условия максимального армирования.

Армирование оболочки купола назначают по конструктивным соображениям, а по расчету подбирают только арматуру опорного кольца. При этом требуемое количество арматуры оказывается меньше, чем при расчете купола как упругой системы.

3.3. Купола, квадратные в плане

В работе для исследования куполов, квадратных в плане представлены численные алгоритмы реализации метода конечных элементов (МКЭ), который в настоящее время является базовым методом численного моделирования напряженно-деформированного состояния. При этом использование современной компьютерной техники позволяет находить оптимальные конструктивные решения.

Оболочки двоякой кривизны - весьма рациональные конструкции. Для покрытия прямоугольных в плане помещений наиболее простыми, с точки зрения расчета и изготовления, являются оболочки, срединная поверхность которых очерчена по поверхности переноса или сферической.

В настоящее время достаточно хорошо исследовано деформирование тонкостенных конструкций, и получены аналитические и численные решения для некоторых элементов конструкций, однако эти методы оказываются неприемлемыми при рассмотрении сложных элементов строительных конструкций.

Общая схема МКЭ рассмотрена в работах [12, 13]. Далее используем принятые в них основные обозначения и допущения и известные соотношения для изгиба оболочек, уточнив геометрические зависимости за счет нелинейных составляющих деформаций нейтральной поверхности оболочки [14].

Рассмотрим деформированное состояние оболочки, предполагая, что прогибы точек ее срединной поверхности могут быть одного порядка с ее толщиной. Используя принятое допущение о нерастяжимости и несжимаемости материала оболочки в направлении толщины, запишем геометрические зависимости для случая неосесимметричного напряженно-деформированного состояния оболочек вращения. Т.к. рассматривается тонкая оболочка, то можно принять, что углы поворота $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}$, связанные с прогибом, значительно превышают значения производных $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \varphi}$, относящихся к деформациям в массиве материала.

$$e_{11} = e_{11}^m + zc_{11} ;$$

$$e_{22} = e_{22}^m + zc_{22} ;$$

$$e_{12} = e_{12}^m + 2zc_{12} ;$$

$$e_{11}^m = e_{11}^1 + e_{11}^n ;$$

$$e_{22}^m = e_{22}^1 + e_{22}^n ;$$

$$e_{12}^m = e_{12}^1 + e_{12}^n ;$$

$$e_{11}^1 = \frac{\partial u}{\partial s} ;$$

$$e_{22}^1 = \frac{\partial v}{r \partial s} + \frac{u}{r} \cos \alpha + \frac{w}{r} \sin \alpha ;$$

$$\begin{aligned}
e_{12}^1 &= \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \cos \alpha; \\
e_{11}^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2; \quad e_{22}^n = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2; \\
e_{12}^n &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \\
c_{11} &= \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \\
c_{22} &= \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \\
c_{12} &= 2 \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \varphi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \varphi} \cos \alpha + \frac{v}{r^2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\sin \alpha}{r},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где e_{11} , e_{22} , e_{12} - вектор полных деформаций оболочки, компоненты соответствуют:

e_{11} , e_{22} - линейным деформациям оболочки по направлениям x , φ ;

e_{12} - деформации сдвига;

e_{11}^m , e_{22}^m , e_{12}^m - деформации в срединной поверхности;

c_{11} , c_{22} , c_{12} - изменения кривизн в выбранных направлениях и кручение, которые имеют место в срединной поверхности оболочки при деформировании;

$(u_1, u_2, u_3)^T$ - вектор перемещений в точке оболочки. Здесь обозначено: $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Координата z принята нормальной к образующей.

Индексами "1" и "n" будем обозначать соответственно линейную и нелинейную составляющие деформаций в срединной поверхности.

Не конкретизируя уравнений состояния материала оболочки, запишем связь компонент тензоров деформаций \underline{T}_e и напряжений \underline{T}_s в обратной форме. Учитывая введенный вектор деформаций, после некоторых

преобразований соотношения между деформациями и напряжениями в оболочке можем записать в виде:

$$\sigma_{ij} = \bar{b}_{ijkl} \cdot (\epsilon_{kl}^m - \epsilon^v) + z \cdot \bar{d}_{ijkl} \cdot (\chi_{kl} - \chi_{kl}^-). \quad (3.12)$$

Деформации, согласно общей схеме МКЭ, определяются следующим образом:

$$[\epsilon] = [B][U], \quad (3.13)$$

где $[\varepsilon]$ - вектор деформаций;

$[B]$ - матрица деформаций элемента;

$[U]$ - вектор перемещений, компонентами которого являются перемещения и углы поворота в узлах элемента.

Полученные в матричной форме геометрические зависимости позволяют записать физические соотношения в следующем виде:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] - [\sigma_v] - [\sigma_N],$$

или, с учетом (3.13):

$$[\sigma] = [D][B][U] - [\sigma_v] - [\sigma_N], \quad (3.14)$$

где $[\sigma]$ - вектор напряжений;

$[D]$ - матрица напряжений элемента;

$[\sigma_v], [\sigma_N]$ - компоненты напряжений, вызванные объемными (температурными) деформациями, нелинейными составляющими упругих деформаций соответственно.

Далее, следуя схеме МКЭ, разрешающее уравнение можно записать в виде:

$$[F] = [K][U] - [F]_T - [F]_N - [F]_0, \quad (3.15)$$

где $[F]$ - вектор узловых сил;

$[F]_T, [F]_N, [F]_0$ - дополнительные силы в узлах, обусловленные соответствующими составляющими напряжений;

$[K]$ - матрица жесткости элемента, которая определяется следующим соотношением:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv. \quad (3.16)$$

В рассмотренной постановке основные особенности исходной и приобретаемой при деформировании неоднородности и нелинейности свойств материала конструкции включены в вектор нагрузок и учитываются слагаемыми $[F]_T, [F]_N$. Вместе с тем неоднородность упругих свойств внутри элемента сохраняется и должна быть учтена при вычислении матриц жесткости каждого элемента.

Система уравнений (3.15) является нелинейной, так как матрица жесткости сохраняют нелинейные составляющие деформаций. Для линеаризации используется метод последовательных приближений, в котором при каждой следующей итерации происходит уточнение нелинейных слагаемых. Таким образом, можно сделать вывод, что существенным отличием описанного в работе метода моделирования напряженно-деформированного состояния неоднородных тонкостенных конструкций, от известных публикаций по данной теме является малоисследованная область применения МКЭ для неоднородных конструкций с учетом их нелинейного деформирования. При этом неоднородность может быть как начальная (многослойные элементы, неоднородные материалы), так и приобретенная (неравномерный нагрев, пластичность, ползучесть).

В качестве примера рассмотрено напряженное состояние эллиптического купола, который является открытой оболочкой, деформирующегося под действием собственного веса. Конструкция, толщиной $h=20$ см, квадратная в плане (со стороной $l=10$ м), выполнена из бетона. В расчетах варьировалась высота подъема f в пределах $f=(1...10)$ м.

На рис. 3.4 приведено конечноэлементное разбиение оболочки. В расчетах использовался треугольный трехузловой элемент с шестью степенями свободы в узле. Установлено, что наименьшая интенсивность напряжений будет в куполе, высота которого равняется 1.23 м.

Анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод, что тонкостенное покрытие рационально конструировать в виде выпуклой пологой оболочки, в которых стрела подъема значительно меньше размеров пролета. Ввиду пологости оболочки разница в статической работе и геометрическом построении разных поверхностей несущественна. Поэтому в таких оболочках изгибающие моменты появляются лишь в той части оболочки, которая контактирует сопорами. Большая же часть площади оболочки обычно подвергаются лишь действию продольных сжимающих усилий. В углах оболочки сдвигающие силы достигают наибольших значений, что вызывает появление в этих местах значительных главных растягивающих напряжений, направленных под углом 45° к краю оболочки. Для восприятия этих напряжений угловые зоны оболочек больших пролетов целесообразно армировать диагональной напрягаемой арматурой.

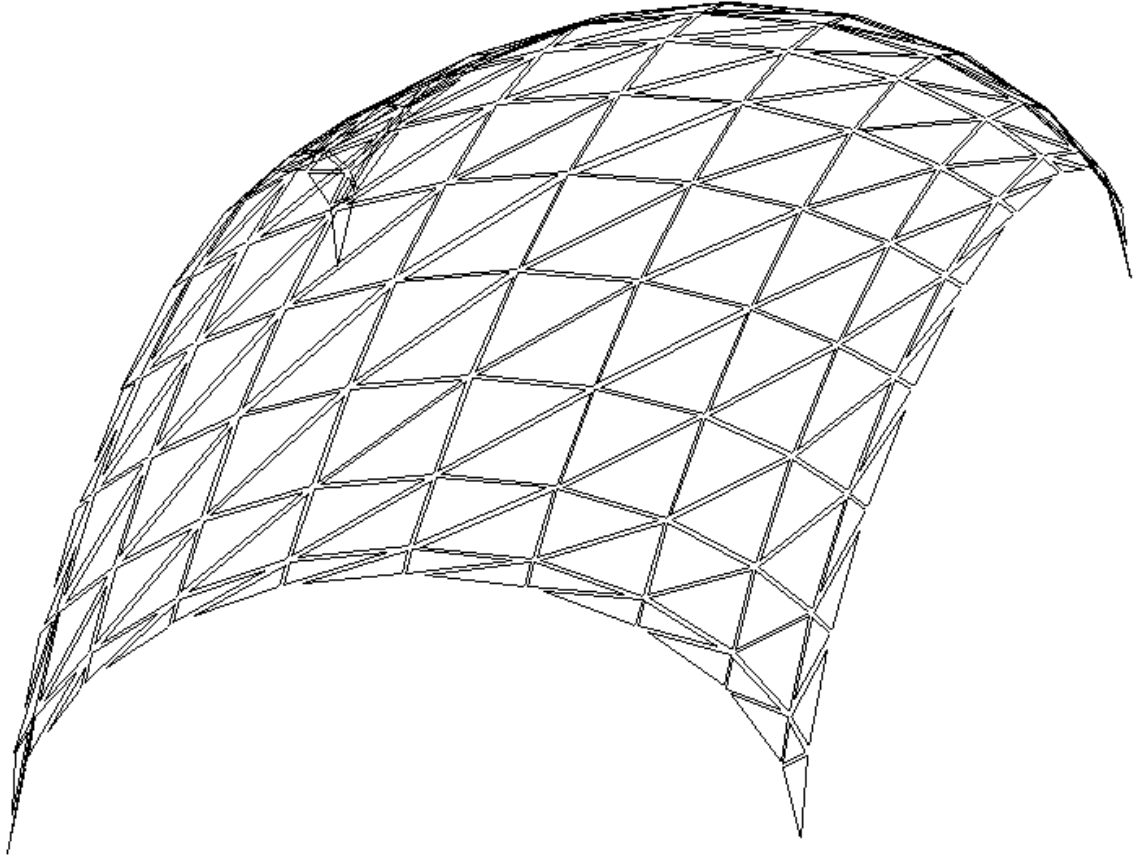


Рис. 3.4. Конечноеlementное разбиение.

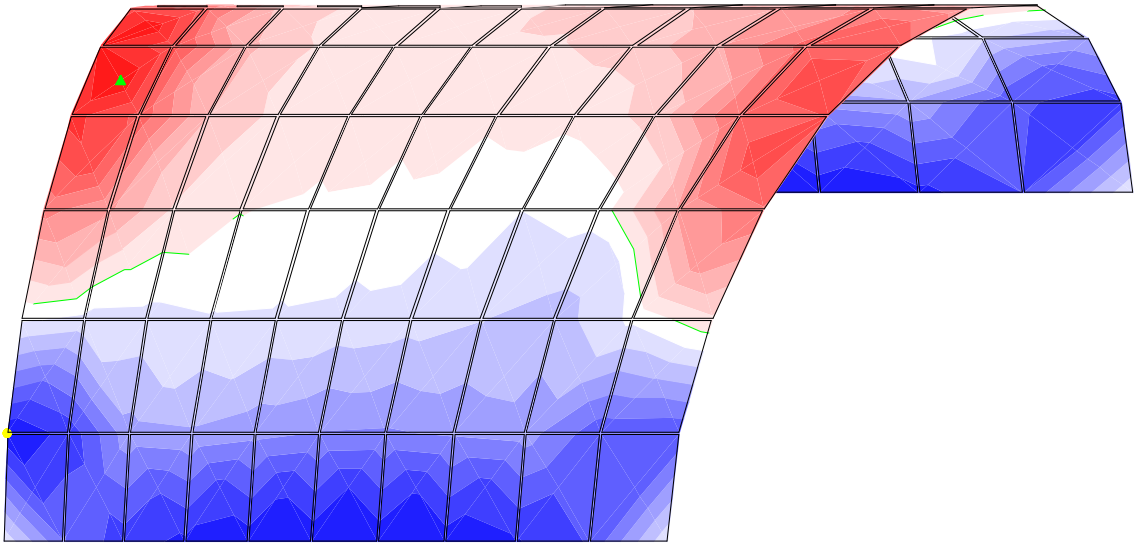
ВЫВОДЫ

Тонкостенное покрытие рационально конструировать в виде выпуклой полой оболочки, в которых стрела подъема значительно меньше размеров пролета. Ввиду пологости оболочки разница в статической работе и геометрическом построении разных поверхностей несущественна. Поэтому в таких оболочках изгибающие моменты появляются лишь в той части оболочки, которая контактирует с опорами. Большая же часть площади оболочки обычно подвергается лишь действию продольных сжимающих усилий. В углах оболочки сдвигающие силы достигают наибольших значений, что вызывает появление в этих местах значительных главных растягивающих напряжений, направленных под углом 45° к краю оболочки. Для восприятия этих напряжений угловые зоны оболочек больших пролетов целесообразно армировать диагональной напрягаемой арматурой.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. А.А. Чупрынин. Прогнозирование прочностной надежности тонкостенных элементов строительных конструкций // Коммунальное хозяйство городов. Научно-технический сборник. Серия: технические науки и архитектура. Вып. 49. «Техніка». 2003 г. Киев. С. 348-351.
2. D. Breslavsky, A. Chuprynin, Yu. Korytko, O. Tatarinova. Method of asymptotic expansion in cyclic 2D creep-damage problems // Book of abstracts. The second international conference “Nonlinear Dynamics”. Kharkov: NTU “KhPI”, 2007. – P 24.
3. Власов В.З., Общая теория оболочек и ее приложения в технике, Гостехиздат, 1949.
4. Гибкие оболочки Э. Л. Аксельрад, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976г., 376 с.
5. Постнов В.А., Слезина И.Т. Учет физической и геометрической нелинейности в задачах изгиба оболочек вращения при использовании метода конечных элементов // Изв. АН РФ, МТТ. - 2004. - №6. - С. 78-85.
6. Гольденвейзер А.Л., Терия упругих тонких оболочек, М.: Гостехиздат, 1953.
7. Новожилов В.В., Теория тонких оболочек, изд. 2-е, Л.: Судпромгиз, 1962.
8. Ильин В.П., Устойчивость кривых тонкостенных труб с подкрепленными краями при изгибе, Инж. Ж. МТТ, № 2 (1968).
9. Ледовской И.В. и др. К вопросу об изгибе кривых тонкостенных труб конечной длины, Труды ЛИСИ, № 68 (1968).
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М: Наука. 1998, 336 с.

- 11.Руководство по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий. – М.: Стройиздат, 1979.
- 12.Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике, М., Мир, 1975. – 539 с.
- 13.Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. - М.: Машиностроение, 1988. - 292 с.
- 14.Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки: Пер. с англ. - М.: Наука, 1982. - 568 с.

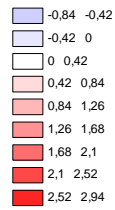
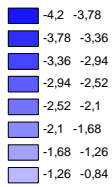
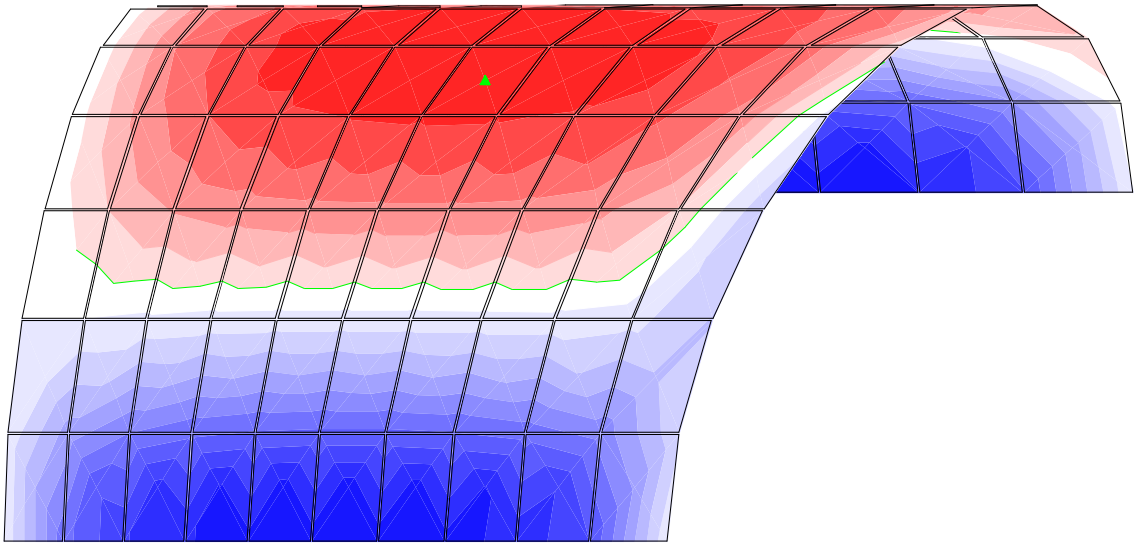


Dark Blue	-0,63 -0,54
Blue	-0,54 -0,45
Light Blue	-0,45 -0,36
Very Light Blue	-0,36 -0,27
White	-0,27 -0,18
Lightest Blue	-0,18 -0,09
White	-0,09 0
White	0 0,09

Lightest Blue	0,09 0,18
White	0,18 0,27
Very Light Blue	0,27 0,36
Light Blue	0,36 0,45
White	0,45 0,54
Lightest Blue	0,54 0,63
White	0,63 0,72
Very Light Blue	0,72 0,81
Light Blue	0,81 0,9

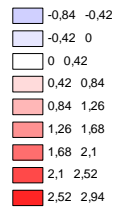
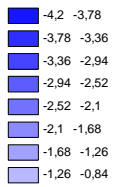
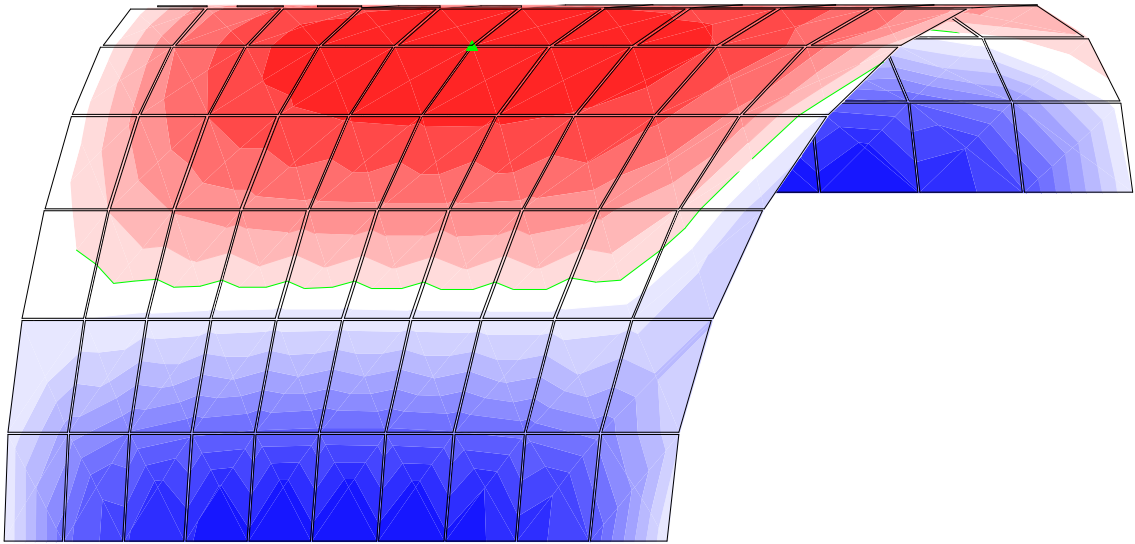
Сх низ (Т/м2). Загружение 1

Напряжения σ_x на внутренней поверхности



Су верх (Т/м2). Загружение 1

Напряжения σ_y на наружной поверхности



Су низ (Т/м2). Загружение 1

Напряжения σ_y на внутренней поверхности

