Это закон нормального вероятностного распределения! В данном случае он выступает оценкой устойчивого равновесия системы управления. Характер кривой определяется уравнением

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-Ra)^2 / \sigma^2} . \tag{1}$$

После того как затраты на новую технологию покрываются, рост прибыли начинает ограничиваться общими ресурсами и избыточностью системы, а для его увеличения нужно снижать долю ресурсов управления.

Следовательно, при обоснованном анализе ресурсов управления можно обеспечить не только устойчивость управления, но и рациональное их использование (необходимость и достаточность) с целью получения оценки требований к упрощению математической модели и размерности сложных оптимизационных задач управления в конкретных технологиях [2].

Используя оценки параметров распределения (1) (или величина математического ожидания критерия, или требуемая допустимая дисперсия), можно формировать практические требования к критерию выбора стратегии управления, сложности и точности решения задач управления, при реализации технологии управления сложными системами. Такой критерий будет устойчив по отношению к ошибкам практической реализации.

В дальнейших исследованиях авторов будет представлена формализация данного подхода на примерах различных сложных систем.

1.Красков Ю. Новые технологии // Компьютерная газета. № 35-41. – Минск, 2001.
2.Моисеев Н.И. Математические модели системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

Получено 11.01.2002

УДК 621.327.534

К.А.СОРОКА, канд. техн. наук
Харьковская государственная академия городского хозяйства
Г.М.КОЖУШКО. канд. техн. наук
ОАО "Полтавский завод газоразрядных ламп"

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ РТУТИ В ЛЮМИНЕСЦЕНТНОЙ ЛАМПЕ

Предложена математическая модель, которая описывает процесс изменения плотности паров ртути вдоль лампы при изменении положения ее холодной зоны.

В ртутьсодержащих лампах низкого давления основная часть ртути находится в жидкой фазе. Когда лампа нагревается, ртуть частично или полностью испаряется. При неравномерном нагреве ртуть в более нагретом месте испаряется, диффундирует в объеме лампы и конденсируется в холодной точке. Скорость испарения ртути зависит от температуры нагрева. Численно ее можно рассчитать, используя приведенную в литературе зависимость плотности насыщенных паров ртути от температуры [1]. Аналогично рассчитывается и скорость конденсации.

Рассмотрим уравнение диффузии применительно к люминесцентной лампе. Поскольку длина лампы l значительно больше ее диаметра, то можно ограничиться одномерным случаем. Уравнение диффузии имеет вид [2]

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Здесь $c(x,t)$ – плотность паров ртути; x – координата; t – время; D – коэффициент диффузии.

Граничные условия определяются процессами испарения и конденсации. Примем, что на одном из концов лампы при $x=0$ температура T_1. Будем считать температуру T_1 и скорость испарения ртути постоянными. Граничное условие при $x=0$ будет

$$\left.\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} Q, & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t_0 < t \end{cases}, \qquad (2)$$

где Q – скорость испарения; t_0 – время полного испарения ртути.

Далее примем, что ртуть конденсируется на другом конце лампы. Условием конденсации является равенство плотности паров ртути плотности насыщенных паров c_2 при температуре конденсации. Следовательно

$$\left.c(x,t)\right|_{x=l} = c_2. \qquad (3)$$

В начальный момент времени лампа находилась при постоянной температуре и плотность паров ртути во всем объеме лампы была постоянной. Предположим, что начальная температура лампы равна температуре холодной точки. Тогда имеем

$$\left.c(x,t)\right|_{t=0} = c_2. \qquad (4)$$

Условия (2)-(4) являются начальными условиями дифференциального уравнения (1). Для его решения введем новую переменную:

$$\sigma(x,t) = c(x,t) - c_2. \qquad (5)$$

Это позволит перейти к уравнению с нулевыми начальными условиями. Используем преобразование Лапласа в виде [2]

$$\bar{\sigma}(x,s)=\int_0^\infty \sigma(x,t)\exp\{-st\}dt \qquad (6)$$

и получим уравнения

$$\begin{cases} s\bar{\sigma}=D\dfrac{\partial^2\bar{\sigma}}{\partial x^2} \\ \bar{\sigma}\Big|_{x=l}=0 \\ \dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial x}\Big|_{x=0}=\dfrac{Q}{s}-\dfrac{Q}{s}\cdot\exp\{-st_0\} \end{cases} \qquad (7)$$

(здесь и далее для более компактной записи аргумент не приводится).

В уравнении (7) уже учтено начальное условие (4). Характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2=\frac{s}{D}. \qquad (8)$$

Его корни

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{s}{D}} \qquad (9)$$

и общее решение уравнения (7) следующее:

$$\bar{\sigma}=A\exp\left\{\sqrt{\frac{s}{D}}x\right\}+B\exp\left\{-\sqrt{\frac{s}{D}}x\right\}. \qquad (10)$$

Постоянные интегрирования A и B в решении (10) определены с использованием краевых условий (7):

$$A=-B\exp\left\{-2\sqrt{\frac{s}{D}}l\right\}; \qquad (11)$$

$$B=-\frac{\dfrac{Q}{s}-\dfrac{Q}{s}\exp\{-st_0\}}{\sqrt{\dfrac{s}{D}}\left(1+\exp\left\{-2\sqrt{\dfrac{s}{D}}l\right\}\right)}. \qquad (12)$$

Используя гипергеометрические функции [3], решение уравнения для изображения функции плотности преобразуем к виду

$$\overline{\sigma} = \frac{Q\left(\exp\{-st_0\}-1\right)sh\sqrt{\frac{s}{D}}(l-x)}{s\sqrt{\frac{s}{D}}ch\sqrt{\frac{s}{D}}l}. \tag{13}$$

Для дальнейших преобразований представим это решение в виде суммы двух функций:

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_2}, \tag{14}$$

где

$$\overline{\sigma_1} = -\frac{\frac{Q}{s}sh\sqrt{\frac{s}{D}}(l-x)}{\sqrt{\frac{s}{D}}ch\sqrt{\frac{s}{D}}l}; \tag{15}$$

$$\overline{\sigma_2} = \overline{\sigma_1}\exp\{-st_0\}. \tag{16}$$

При выполнении обратного преобразования Лапласа использовали теорему Ващенко – Захарченко [2]. Формулу (15) представим в виде отношения двух обобщенных полиномов:

$$\overline{\sigma_1} = \frac{\Phi_1(s)}{\psi_1(s)}. \tag{17}$$

Используя теорему Ващенко – Захарченко, оригинал функции $\overline{\sigma_1}$ находим в виде ряда

$$\sigma_1(x,t) = L^{-1}\left(\overline{\sigma_1}(x,s)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_1(s_n)}{\psi'(s_n)}\exp\{s_n t\}, \tag{18}$$

где s_n – корни знаменателя (полинома $\psi_1(s)$), которые равны соответственно

$$s_1 = 0;\quad s_n = -\frac{\mu_n^2 D}{l^2},\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{19}$$

Здесь

$$\mu_n = (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Значения числителя (функции $\Phi_1(s)$) соответствующие корням знаменателя при n=1, 2, …, следующие:

$$\Phi_1(s_n) = -\frac{Ql}{\mu_n}\sin\left(1-\frac{x}{l}\right) \tag{21}$$

и нулевой корень (при n=0):

$$\Phi_1(s_0) = Q(l-x). \tag{22}$$

Значения производной знаменателя в тех же точках равны

$$\psi_1'(s_n) = -\frac{1}{2}\mu_n \sin\mu_n \qquad \text{при} \qquad n \neq 0, \tag{23}$$

$$\psi_1'(s_0) = 1 \qquad \text{при} \qquad n_0 = 0. \tag{24}$$

С учётом (23) – (26) оригинал функции $\overline{\sigma}_1(s)$ имеет вид

$$\sigma_1(x,t) = -Q(l-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ql\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\mu_n^2\sin\mu_n}\exp\left\{-\frac{\mu_n^2 D}{l^2}t\right\}. \tag{25}$$

Для нахождения оригинала функции использовали теорему запаздывания и получили:

$$\sigma_1(x,t) = \begin{cases} Q(l-x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{Ql\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\mu_n^2\sin\mu_n}\exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 D}{l^2}t\right\} & \text{при } t \geq t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases} \tag{26}$$

Возвращаясь к начальным переменным, общее решение уравнения диффузии получаем в следующем виде:

$$c(x,t) = \begin{cases} c_2 - Q(l-x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2Ql\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\mu_n^2\sin\mu_n}\exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 D}{l^2}t\right\} & \text{при} \quad t \leq t_0 \\ c_2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2Ql\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{\mu_n^2\sin\mu_n}\exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 D}{l^2}t\right\} - \exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 D}{l^2}(t-t_0)\right\} & \text{при} \quad t > t_0. \end{cases} \tag{27}$$

Проверим соответствие решения уравнения (27) начальным условиям. Для проверки условия (2) находим производную по координате

$$\left.\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} Q + \sum\limits_{n=1}^{\infty} - \dfrac{2Ql \sin \mu_n \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{l\mu_n^2 \sin \mu_n} \exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 D}{l^2} t\right\} & = Q \\ \left. \sum\limits_{n=1}^{\infty} - \dfrac{2Ql \sin \mu_n \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{l\mu_n^2 \sin \mu_n} \exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 D}{l^2} t\right\} - \exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 D}{l^2}(t - t_0)\right\} \right|_{x=0} & = 0. \end{cases} \quad (28)$$

При x=0 косинусы от μ_n равны нулю, поскольку μ_n соответствуют корням знаменателя. Следовательно, условие (2) выполняется.

Условие (3) при $x=l$ выполняется, поскольку все слагаемые в числителе суммы равны нулю.

И, наконец, для проверки условия (4) рассмотрим первое выражение в формуле (27):

$$c(x,t)\big|_{t=0} = -Q(l-x) + 2Ql \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}}{(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}}. \quad (29)$$

Используя представленное в [4] значение суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2} x}{(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x\right), \quad (30)$$

можем убедиться, что условие (4) также выполняется. Следовательно, полученное решение удовлетворяет уравнению (1) с рассматриваемыми начальными условиями. Формула (27) описывает процесс изменения плотности паров ртути вдоль лампы в течение времени t.

Для упрощения использования этого уравнения с целью получения обобщенных результатов введем число Фурье [2]:

$$F_0 = \frac{Dt}{l^2}. \quad (31)$$

Рассмотрим изменение плотности паров ртути в зависимости от значения числа Фурье. Амплитуды слагаемых ряда (27) при возрастании числа Фурье уменьшаются. Уже при значении числа Фурье, равном 0,01, в ряде (27) можно ограничиться пятью первыми слагаемыми. При $F_0 \geq 0{,}1$ для практических расчетов можно учитывать только два первых слагаемых суммы, а при $F_0 \geq 0{,}3$ достаточно учитывать только первый член суммы. Анализ полученных результатов показывает, что в начальный момент плотность паров ртути возрастает и стремится к линейному распределению в лампе в зависимости от расстояния от места испарения. После полного испарения ртути в наиболее нагретом месте плотность паров ртути выравнивается и стремится к постоянной величине – плотности насыщенных паров при температуре холодной точки лампы. Время установления постоянной плотности паров ртути равно сумме времени испарения капель ртути, находящихся в более нагретых местах лампы, и времени выравнивания плотности паров ртути. Выравнивание плотности паров ртути происходит по экспоненциальному закону с постоянной времени, равной

$$\tau = \frac{4l^2}{\pi^2 D}. \qquad (32)$$

Расчеты показывают, что для давления и состава наполняющих инертных газов, характерных для люминесцентных ламп, постоянная времени выравнивания плотности паров ртути не превышает 5 мин. Выравнивание плотности паров ртути для ламп мощностью 40 Вт в условиях работы при температурах окружающей среды 25 ± 10 °С составляет 10-15 мин.

Результаты этих исследований были использованы для определения времени переконденсации ртути в холодную зону при разработке установки измерения свободной ртути в люминесцентной лампе методом неразрушающего контроля [5], а также для определения времени заполнения колбы парами ртути при различных условиях дозировки ее в лампу и времени стабилизации электрических и световых параметров при измерении ламп.

1.Несмеянов А. Н. Давление пара химических элементов. – М.: АН СССР, 1961. – 396 с.

2.Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

3.Бронштейн И. Н., Семендяева К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, Лейпциг: Тойбнер, 1981. – 720 с.

4.Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

5.Намитоков К. К., Брезинский В. Г., Сорока К. А., Кожушко Г. М., Багиров С. А. Способ определения количества ртути в трубчатой люминесцентной лампе. Авт. свид. СССР №1786538, опуб. в БИ №1, 1993.

Получено 11.01.2002