тона с косвенным армированием: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – М., 1985. – 24с.

Получено 18.01.2002

УДК 539.3

Л.С.АНДРІЄВСЬКА, канд. техн. наук
Харківська державна академія міського господарства
І.О.МОРАЧКОВСЬКА, канд. техн. наук
Національний технічний університет "ХПІ", м.Харків

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ЗГИНУ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ІЗ СКЛАДНИМ ПЛАНОМ

Розглядається методика розрахунку гнучких пологих оболонок на базі розв'язання варіаційно-структурним методом (RFM) послідовностей варіаційних рівностей для поданих у роботі функціоналів.

Рівняння оболонок геометрично нелінійної теорії пологих оболонок є нелінійними завдяки фізичній та геометричної нелінійності базових рівнянь [1-3]. У роботі [2] розглянута лінеаризація цих рівнянь за схемою методу Ньютона – Канторовича (МНК). Після лінеаризації за схемою МНК система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{gathered}
\nabla^2\left(D_1^n\nabla^2 w_{n+1} - S_2^n\nabla^2\varphi_{n+1}\right) - \Delta_k\varphi_{n+1} - L\left(D_2^n, w_{n+1}\right) - \\
- L\left(S_2^n, \varphi_{n+1}\right) - L\left(w_n, \varphi_{n+1}\right) - L\left(\varphi_n, w_{n+1}\right) = q + L\left(w_n, \varphi_n\right), \qquad (1) \\
\nabla^2\left(S_2^n\nabla^2 w_{n+1} + H_1^n\nabla^2\varphi_{n+1}\right) + \Delta_k w_{n+1} + L\left(S_1^n, w_{n+1}\right) - \\
- L\left(H_2^n, \varphi_{n+1}\right) + L\left(w_n, w_{n+1}\right) + \tfrac{1}{2}L\left(w_n, \varphi_n\right) = 0 .
\end{gathered}$$

У рівняннях (1) складові $L(D_2, w)$, $L(S_2, \varphi)$, $L(S_1, w)$, $L(H_2, \varphi)$ враховують суттєву неоднорідність змінних властивостей оболонки при пружно-пластичному деформуванні. Для їхнього розв'язання за методом змінних параметрів пружності (МЗПП) коефіцієнти D_1, D_2, S_1, S_2, H_1, H_2 у цих рівняннях повинні послідовно перераховуватися, починаючи з початкового розв'язання задачі пружного деформування оболонки. Вихідна задача є зазвичай нелінійною за рахунок існування в рівняннях складових $L(\varphi, w)$ та $\frac{1}{2}L(\varphi, w)$. До системи (1) необхідно додати відповідні крайові умови.

Лінійна система (1) є еквівалентною за енергетичною мірою наступній послідовності варіаційних рівностей $(n = 0,1,2,\ldots)$:

$$\delta K^{(n+1)}=0; \qquad (2)$$

$$K^{(n+1)}\left(w_{n+1},\varphi_{n+1}\right)=\iint\limits_S\left\{\frac{1}{2}D_1^n\left(w_{n+1,xx}^2+w_{n+1,yy}^2\right)+\left(D_1^n-D_2^n\right)w_{n+1,xx}w_{n+1,yy}+\right.$$

$$+D_2^n w_{n+1,xy}^2-\left(S_1^n+S_2^n\right)w_{n+1,yy}\varphi_{n+1,xx}-\left(S_1^n+S_2^n\right)w_{n+1,xx}\varphi_{n+1,yy}+2S_1^n\varphi_{n+1,xy}w_{n+1,xy}-$$

$$-S_2^n\left(w_{n+1,yy}\varphi_{n+1,yy}+w_{n+1,xx}\varphi_{n+1,xx}\right)-\frac{1}{2}H_1^n\left(\varphi_{n+1,xx}^2+\varphi_{n+1,yy}^2\right)-\left(H_1^n-H_2^n\right)\varphi_{n+1,xx}\varphi_{n+1,yy}- \qquad (3)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varphi_{n+1,y}w_{n+1,y}w_{n,xx}+\varphi_{n+1,x}w_{n+1,x}w_{n,yy}-\left(\varphi_{n+1,x}w_{n+1,y}+\varphi_{n+1,y}w_{n+1,x}\right)w_n\right)-$$

$$\left.-\left[\left(q-\varphi_{n,yy}w_{n,xx}-\varphi_{n,xx}w_{n,yy}\right)w_{n+1}-\left(w_{n,yy}w_{n,xx}-w_{n,xy}^2\right)\varphi_{n+1}\right]\right\}dS\ .$$

Ітераційна послідовність розв'язків системи рівнянь (2) припускає як початкове наближення прийняти розв'язок задачі пружного деформування, що відповідає системі рівнянь (1) при додатковому припущенні: $L(\varphi_0,w_0)=0$, $L(w_0,w_0)=0$. Процес продовжується доти, поки не виконується нерівність $\left\|U_{n+1}-U_n\right\|\le\varepsilon$, де ε – наперед задана величина. Однак збіжність такої послідовності суттєво залежить від початкового наближення в околі точки $U_n=(\varphi_n,\ w_n)^T$.

Для вдалого вибору початкового наближення при ітераціях за схемою МНК застосовано метод послідовного навантаження (МПН), що є методом продовження розв'язків за малим параметром. За цим методом зовнішнє навантаження передбачає послідовне додавання малого довантаження на оболонки, і задачі про їхнє деформування розв'язуються окремо для кожного такого кроку довантаження. Одержані на попередніх кроках розв'язки у вигляді приростів функцій прогину $\dot{w}_{(k)}\ \Delta p_{(k)}$ та мембранних зусиль $\dot{\varphi}_{(k)}\ \Delta p_{(k)}$ використовують при розв'язанні задачі для наступного кроку довантаження.

У роботі отримано систему рівнянь для пошуку $\dot{w}_{(k)}$ та $\dot{\varphi}_{(k)}$ у вигляді

$$\nabla^2\left(D_1\nabla^2\dot{w}_{(k)}-S_2\nabla^2\dot{\varphi}_{(k)}\right)-\Delta_k\dot{\varphi}_{(k)}-L\left(D_2,\dot{w}_{(k)}\right)-L\left(S_1,\dot{w}_{(k)}\right)-$$
$$-L\left(\dot{\varphi}_{(k)},w_{(k-1)}\right)-L\left(\varphi_{(k-1)},\dot{w}_{(k)}\right)=Q\ , \qquad (4)$$
$$\nabla^2\left(S_2\nabla^2\dot{w}_{(k)}+H_1\nabla^2\dot{\varphi}_{(k)}\right)+\Delta_k\dot{w}_{(k)}+L\left(S_1,\dot{w}_{(k)}\right)+L\left(H_2,\dot{\varphi}_{(k)}\right)-$$
$$-L\left(\dot{w}_{(k)},w_{(k-1)}\right)=0.$$

Легко обґрунтувати, що система (4) є еквівалентною рівнянням стаціонарності функціоналу

$$\delta I_{(k)} = 0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} I_{(k)} = \int\limits_S \Big\{ & \tfrac{1}{2} D_1 \left(\dot{w}^2_{(k),11} + \dot{w}^2_{(k),22}\right) + \left(D_1 - D_2\right)\dot{w}_{(k),11}\dot{w}_{(k),22} + D_2 \dot{w}^2_{(k),12} - \\ & -\left(S_1 + S_2\right)\left(\dot{\varphi}_{(k),22}\dot{w}_{(k),11} + \dot{\varphi}_{(k),11}\dot{w}_{(k),22}\right) - S_2\left(\dot{\varphi}_{(k),11}\dot{w}_{(k),11} + \dot{\varphi}_{(k),22}\dot{w}_{(k),22}\right) + \\ & - 2S_1\dot{\varphi}_{(k),12}\dot{w}_{(k),12} - \tfrac{1}{2} H_1\left(\dot{\varphi}^2_{(k),22} + \dot{\varphi}^2_{(k),11}\right) - \left(H_1 - H_2\right)\dot{\varphi}_{(k),11}\dot{\varphi}_{(k),22} - H_2\dot{\varphi}^2_{(k),12} - \\ & -\left(k_1\dot{\varphi}_{(k),22} + k_2\dot{\varphi}_{(k),11}\right)\dot{w}_{(k)} - \dot{\varphi}_{(k),11}\dot{w}_{(k),22}w_{(k-1)} - \dot{\varphi}_{(k),22}\dot{w}_{(k),11}w_{(k-1)} + \\ & + 2\dot{\varphi}_{(k),12}\dot{w}_{(k),12}w_{(k-1)} - \frac{1}{2}\dot{w}_{(k)}\dot{w}_{(k),22}\varphi_{(k-1),11} - \frac{1}{2}\dot{w}_{(k)}\dot{w}_{(k),11}\varphi_{(k-1),22} + \\ & + \frac{1}{2}\dot{w}_{(k)}\dot{w}_{(k),12}\varphi_{(k-1),12} - Q\frac{1}{2}\dot{w}_{(k)}\Big\} dS . \end{aligned} \tag{6}$$

Система рівнянь (5) складає рівняння для екстремалей функціоналу типу Лагранжа, заданому на відповідних кінематичним рівнянням швидкостях приростів невідомих функцій прогину і мембранних зусиль оболонки. Вона є лінійною відносно швидкостей приростів невідомих задачі $\dot{w}_{(k)}$, $\dot{\varphi}_{(k)}$. Коефіцієнти цих рівнянь підраховують за даними розв'язань задачі на попередньому кроці навантаження, якщо відповідно є знайденими $w_{(k-1)}$, $\varphi_{(k-1)}$. На кожному кроці довантаження при підрахунках уточнюються напруження в оболонці за співвідношеннями теорії малих пружно-пластичних деформацій О.А.Ілюшина ($\sigma_{33} = \sigma_z = 0$).

Розв'язання варіаційних рівностей (2) і (5) здійснено варіаційно-структурним методом (RFM). Це дозволяло на k-му кроці навантаження знайти наближений розв'язок задачі пружно-пластичного деформування оболонок й уточнити його за методом Ньютона – Канторовича.

Основою RFM є побудова структур розв'язань, що послідовно розглянута в роботі для двовимірної області Ω, зайнятої оболонкою у плані, із загальною формою границі Γ, частини якої Γ_i, $i = \overline{1,m}$. На базі відомих у теорії R–функцій методів запропоновані структури розв'язань крайових задач для оболонок з поширеними у практиці крайовими умовами. Для цього застосовано поширену систему R–функцій – R_0 і метод побудови нормалізованих до першого порядку рівнянь границь Γ складних областей Ω за відомими предикатами із заданих опорних областей. Окрім цього, використано відомі в теорії R–функцій диференціальні оператори у вигляді похідних вищих порядків за нормаллю та дотичною або дугою граничного контуру Γ двовимірної області, які продовжуються у внутрішню область.

Розглянуто повні за метриками структури відповідних енергетичних функціоналів (3) та (6). Для розв'язань $u_k = (\dot{w}_k, \dot{\varphi}_k)^T$ крайової задачі (4) на k-му кроці довантаження і для розв'язань $U_n = (w_n,\ \varphi_n)^T$ ці структури визначено формулами: $u_k = B(\Phi_k, \omega, \omega_i)$, $U_n = B(\Phi_n, \omega, \omega_i) + U_0$, де B – оператор, відповідний заданим крайовим умовам; ω, ω_i – рівняння границі області та її частин; U_0 – відома функція. Прийняті структури при будь-якому виборі невизначених компонентів Φ_k, Φ_n точно задовольняють відповідним крайовим умовам. Невизначені компоненти цих структур Φ_k, Φ_n були вибрані із функціонального простору M у вигляді наступного наближення: $\Phi_{k(n)}(x,y) \approx \Phi^N_{k(n)}(x,y) = \sum\limits_{i}^{N} C_{k(n)i}\eta_i(x,y)$,

де C_{ki} – невизначені коефіцієнти, а $\{\eta_i(x,y)\}_{i=\overline{1,N}}$ – відомі послідовності, повні за метрикою розглянутого лінійного простору M. Необхідна послідовність координатних функцій, на множині яких відшукується точка стаціонарності відповідного функціоналу, може бути одержана після підстановки $\Phi_{k(n)}$ у структури розв'язань.

Для крайової задачі виду (4) в області Ω з границею Γ, що описується нормалізованою до першого порядку функцією $\omega(x,y)$ і задовольняє умовам: $\omega(x,y) \geq 0$, $\forall(x,y) \in \Omega$, $\omega_{,n} = 1$, $\forall(x,y) \in \Gamma$, розглянуто різні крайові умови. Для рухомого в плані, жорстко закріпленого контуру $\dot{w}_{(k)} = 0,\ \dot{w}_{(k)},_n = 0,\ \dot{\varphi}_{(k)},_{nn} = 0,\ \dot{\varphi}_{(k)},_{\tau n} = 0$ структури мали вигляд: $\dot{w}_{(k)} = \omega^2\Phi_{1(k)}, \dot{\varphi}_{(k)} = \omega^2\Phi_{2(k)}$. Разом з тим, для рухомого у плані шарнірно обпертого контуру $\dot{w}_{(k)} = 0,\ \dot{w}_{(k)},_{nn} + \nu\dot{w}_{(k)},_{\tau\tau} = 0, \dot{\varphi}_{(k)},_{nn} = 0,\quad \dot{\varphi}_{(k)},_{\tau n} = 0$ структури мали вигляд $\dot{w}_{(k)} = \omega\Phi_{1(k)}, \dot{\varphi}_{(k)} = \omega^2\Phi_{2(k)}$. Для нерухомого жорстко закріпленого контуру структури задовольняли лише головним кінематичним умовам і мали такий вигляд: $\dot{w}_{(k)} = \omega^2\Phi_{1(k)}$,

$\dot{\varphi}_{(k)} = \Phi_{2(k)}$. Для нерухомого шарнірно опертого контуру структури задовольняли головним кінематичним умовам і приймались у вигляді: $\dot{w}_{(k)} = \omega\Phi_{1(k)}, \dot{\varphi}_{(k)} = \Phi_{2(k)}$.

У наведених структурах повні системи функцій було обрано степеневими поліномами. Аналогічно побудовано структури для крайових задач виду (1), де, на відміну від попереднього, крайові умови записують відносно повних значень для невідомих функцій нормального прогину та мембранних зусиль $U_n = (w_n,\ \varphi_n)^T$.

Для функціоналу (6), заданого на функціях $\dot{w}_{(k)}, \dot{\varphi}_{(k)}$, невизначені коефіцієнти $\{C_{ki}\}$ структур для розв'язань $u_k = (\dot{w}_k, \dot{\varphi}_k)^T$ в роботі розшукувалися за прямим варіаційним методом Рітця. Система рівнянь Рітця у цьому випадку набуває вигляду: $\left[\hat{A}\right]X = \hat{B}$, де $\left[\hat{A}\right], \hat{B}$ – матриця і вектор, $X = (\ \{C_{ki}\}_{i=1}^{N_1},\ \{C_{ki}\}_{i=1}^{N_2})^T$ – вектор, складений з послідовностей невідомих компонент відповідних структур. Аналогічно, для функціоналу (3) невизначені компоненти $\{C_{ni}\}$ структур для розв'язань $U_n = (w_n,\ \varphi_n)^T$ отримано із системи рівнянь Рітця: $[A]Y = B$, де $[A], B$ – матриця і вектор, $Y = (\ \{C_{ni}\}_{i=1}^{N_1},\ \{C_{ni}\}_{i=1}^{N_2})^T$ – вектор, складений з послідовностей невідомих компонент, відповідних для цього випадку структур. Елементи матриць $\left[\hat{A}\right]$, $[A]$ і векторів $\hat{B}, B$ надано інтегралами по двовимірній області Ω. Для їхнього обчислення використано високоточні k-вузлові квадратурні формули Гаусса. Для підрахунку елементів матриць фізичних співвідношень інтеграли за товщиною оболонки підраховано за 5-ти й 7-ми вузловими формулами Ньютона –Котеса. У розрахунках досліджено вплив параметрів діаграми деформування матеріалів на напружено-деформований стан оболонок під зовнішнім тиском, для сферичних оболонок визначено вплив межі текучості σ_T для матеріалів з лінійним зміцненням за межами пластичності, простежено формування зон пластичності на поверхнях оболонки при малих прогинах та тих, що перевищували товщину. Результати в окремих випадках порівняні з відомими. Встановлено, що за наведеною методикою вони добре збігаються з останніми.

1.Андриевская Л.С. Устойчивость подкрепленных выпуклых оболочек при осевом растяжении // Динамика и прочность машин. Вып.50. – Харьков: Вища школа, 1985. – С.44-49

2.Курпа Л., Морачковська І. Розрахунок гнучких пологих оболонок складної форми в плані при пружно-пластичному згині // Машинознавство. – 2000. – №3 (33). – С.21-26

3.Morachkovska I.O., Kurpa L.V. The Variational–Structural Method for the Elasto–Plastic Analysis of thin shallow shells // The 6–th Conference "Shell Structures, Theory and Applications", Gdansk (Poland) 1998.–P. 209-210.

Отримано 01.03.2002

УДК 624.074.7

О.В.ПУСТОВОЙТОВ
Харьковская государственная академия городского хозяйства

СТЕКЛОПЛАСТБЕТОННЫЕ ТРУБЧАТЫЕ СВАИ

Рассматривается разработанная конструкция стеклопластбетонной трубчатой сваи с внешним стеклопластиковым армированием, отличающаяся повышенной долговечностью и высокой прочностью. Показаны преимущества новой конструкции перед обычными железобетонными сваями.

Конструкции, имеющие кольцевую слоистую структуру, в последнее время широко применяются в технике. Они обычно состоят из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. К таким конструкциям относятся разработанные в Харьковской государственной академии городского хозяйства стеклопластбетонные трубчатые сваи с грунтовым ядром. Они особенно эффективны для свайных оснований жилых домов, промышленных и гидротехнических сооружений, так как способны воспринимать большие осевые нагрузки и значительные изгибающие моменты. Использование их позволяет заметно сократить стоимость, трудозатраты и длительность возведения фундаментов.

Характерной особенностью конструкций стеклопластбетонных трубчатых свай является то, что в них кроме бетонного трубчатого сердечника имеется стеклопластиковый предварительно напряженный слой (оболочка), который благодаря полимерному связующему (склеивающий слой) имеет необходимую связь с бетонным сердечником.

Потребность в применении стеклопластикового слоя обусловлена целым рядом обстоятельств. Так, известно, что железобетонные сваи