

УДК 539.379 : 624.016 : 624.046

В.Н.РУДАКОВ, канд. техн. наук

Харьковская государственная академия городского хозяйства

### ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ (НДС) КВАЗИИЗОТРОПНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ (КПМ) ПРИ СЖАТИИ С ОБЖИМОМ В РАМКАХ ТЕОРИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

В рамках определяющих уравнений континуальной механики и теории скольжения разработана зависимость вида  $S_1/2\sigma_0 = \text{tg}\Phi/2 = m$ , где  $S_1$  - девиаторное напряжение,  $\sigma_0$  - гидростатическое давление,  $\Phi$  - угол наклона линий скольжения к плоскости, нормаль которой совпадает с основной осью нагружения,  $m$  - коэффициент растяжения. В пространстве напряжений  $|S_2|\sigma_0$   $|S_3|$ , где  $S_2, S_3$  - девиаторные напряжения, эта зависимость представляет поверхность кругового конуса 2-го рода, вписанного в тетрагональную бипирамиду, основанием которой является девиаторная плоскость, а угол раскрытия конуса  $\Phi$  - основным параметром кристаллической плоскости скольжения.

Область применения инженерных задач на сжатие с обжимом весьма обширна и многогранна. Это, в первую очередь, проектирование опор: мостов, транспортных эстакад, ЛЭП, пролётных строений станций метрополитенов и т.п., стоек рам каркасов многоэтажных зданий, сжатых элементов большепролётных конструкций, силовых конструкций тяжелого технологического оборудования в металлургии и машиностроении, хранилищ сыпучих материалов стационарного назначения и при транспортировке (например, перегородки сухогрузов). К этой области можно отнести также класс задач механики сыпучих и слабосвязанных материалов по определению основных деформационных характеристик: модуля деформации  $|E|$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  в лабораторных условиях и т.д.

Особо следует отметить, что все эти задачи относят к статически неопределимым и их решения на основе континуальной механики в большинстве случаев не являются строгими, даже, например, соотношения прочностных параметров (осевое сжатие, осевое растяжение и чистый срез) основных конструкционных строительных материалов не имеют строгого физического обоснования.

Предмет анализа уровня НДС включает в себя прогнозирование реакции КПМ на приложенную квазистатическую нагрузку, основывающееся на принятой физической модели КПМ.

Принятая физическая модель КПМ рассматривает реальный конструкционный материал в виде множества кристаллических зерен различной ориентации. Несомненно, конструкции и детали из этих материалов имеют размеры во много раз превышающие размеры кристал-

лических зерен. Такая мотивация позволяет считать поликристаллические материалы с зеренной структурой квазиизотропными.

В качестве главного механизма образования деформаций КПМ под нагрузкой является физическое скольжение в образе зернограничного проскальзывания [1]. При проскальзывании зерна перемещаются относительно друг друга, расходятся и вращаются.

На границе жесткие зерна КПМ взаимодействуют определенным образом. По утверждению Гляйтера и Чалмерса [2], граница жестких зерен (ГЖЗ) упорядочена и подвижна. Она построена из координационных полиэдров, в вершинах которых располагаются атомы. "Ширина" межзеренных границ составляет 5 ... 10 межатомных расстояний. Нами в качестве структурного элемента (СЭ) границы принят полиэдр Полинга [3], упорядоченная система которых представляет плотнейшую упаковку и удовлетворяет минимуму поверхностной энергии (принцип Гиббса-Кюри-Вульфа) [4].

Габитус СЭ ГЖЗ представляет собой тетрагональную бипирамиду, метрика которой

$$c/a = \operatorname{tg}\Phi, \quad (1)$$

где  $\Phi$  – угол наклона граней пирамиды к основанию, является материальной константой КПМ [3].

В основу разрабатываемых определяющих уравнений НДС КПМ положена взаимосвязь скалярных инвариантных параметров девиаторной плоскости  $S_i$  ( $i=1,2,3$ ) и гидростатического давления  $\sigma_0$  с основным параметром кристаллической плоскости скольжения – углом сдвига (скольжения)  $\Phi$ , который является метрикой СЭ ГЖЗ.

Далее рассмотрим равновесие элементарного триэдра, (вырезанного из сплошной среды), находящегося в объемном напряженном состоянии

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \neq 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные компоненты тензора напряжений. Условие (2) выражает цилиндрическое напряженное состояние при сжатии с обжимом в недеформируемой идеально-гладкой виртуальной оболочке. Совместим боковые ребра граней триэдра с координатными осями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рис.1). Наклонную грань триэдра  $abc$  проведем под углом  $\alpha$  к плоскости  $\sigma_2\sigma_3$ . В виду равенства  $\sigma_2 = \sigma_3$  и для упрощения примем ребра

$$oa = 1, oc = 1 \text{ и } ob = \operatorname{tg}2/\sqrt{2}. \quad (3)$$

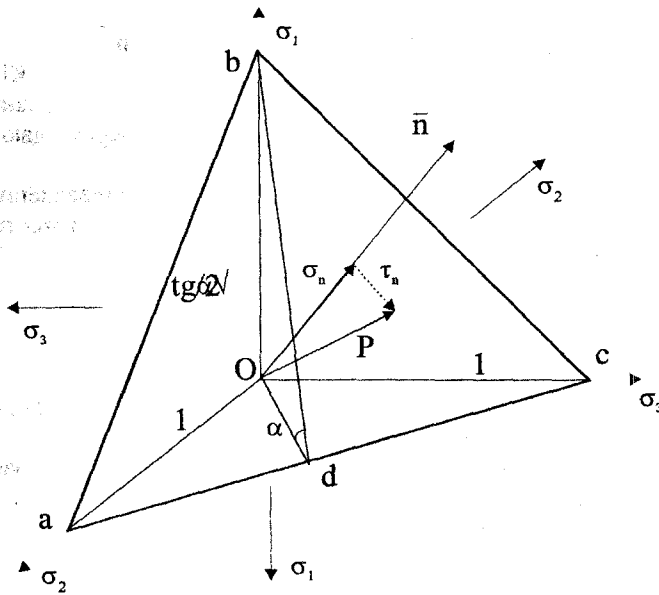


Рис. 1

Тогда получим:

$$ad=dc= 1/\sqrt{2}; \tag{4}$$

$$ad+cd=\sqrt{2}; \tag{5}$$

$$od=1/\sqrt{2}. \tag{6}$$

Направляющие косинусы  $\cos\alpha(\sigma_1, \bar{n})$ ;  $\cos\gamma(\sigma_2, \bar{n})$ ;

$\cos\beta(\sigma_3, \bar{n})$  нормали  $\bar{n}$  к наклонной грани abc в виду равенства

$$\cos^2\alpha+\cos^2\gamma+\cos^2\beta=1 \tag{7}$$

и (3 ... 6) будут

$$\cos^2\gamma=\cos^2\beta=(1-\cos^2\alpha)/2=\sin^2\alpha/2. \tag{8}$$

Тогда нормальная составляющая полного давления  $\sigma_n$  на наклонной площадке примет вид:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha / 2 + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha / 2, \quad (9)$$

а при условии

$$\sigma_2 = \sigma_3; \quad (10)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (11)$$

Касательную составляющую полного давления  $\tau_n$  на наклонной площадке определим из уравнения:

$$\tau_n = \sqrt{p^2 - \sigma_n^2}, \quad (12)$$

где полное давление

$$p^2 = \sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha / 2 + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha / 2. \quad (13)$$

Введя (9) и (13) в (12) и после элементарных преобразований при равенстве (10) имеем:

$$\tau_n = \cos \alpha \cdot \sin \alpha (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (14)$$

Представим соотношения (9) и (14) в форме

$$\tau_n = \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (15)$$

где  $\varphi$  – угол отклонения полного давления от нормали  $\bar{n}$  на наклонной площадке  $abc$ , и оценим зависимость (15) с позиций теории Мора [5] и теории Надаи [6] поочередно, т.е. примем вначале  $\alpha = 45^\circ$ , а потом  $\alpha = 54^\circ 44'$ .

По теории Мора угол  $\alpha = 45^\circ$  является экстремальным углом, определяющим наклонную плоскость скольжения, вдоль которой действует максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (16)$$

разрушающее реальный материал (условие текучести Треска-Сен-Ванана). Кроме того, в математической теории пластичности угол  $45^\circ$  определяет направление и ортогональность линий скольжения [7].

Приняв  $\alpha = 45^\circ$ , получим

$$\sigma_n = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3), \quad (17)$$

$$\tau_n = \tau_{\max}, \quad (18)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{tg} \varphi. \quad (19)$$

Достоверность полученных зависимостей (17)...(19) будем оценивать физическим параметром – коэффициентом бокового давления в покое:

$$k_s = \sigma_3 / \sigma_1. \quad (20)$$

Для этого преобразуем уравнение (19) в вид

$$\sigma_1(1 - k_s) = \sigma_1(1 + k_s) \operatorname{tg} \varphi, \quad (21)$$

откуда следует

$$k_s = (1 - \operatorname{tg} \varphi) / (1 + \operatorname{tg} \varphi). \quad (22)$$

Так как граничные условия для

$$k_s = |1 \dots 0|, \quad (23)$$

где  $k_s = 1$  для "идеальной жидкости" при  $\varphi = 0^\circ$  и  $k_s = 0$  для "идеального твёрдого тела" при  $\varphi = 90^\circ$ , то следуют выводы:

1. При  $\alpha = 45^\circ$  объемное напряженное состояние (2) преобразуется в плоское (17), т.е. теряет физический смысл;
2. Формула (22) непригодна для оценки НДС для реального КПМ при сжатии с обжимом;
3. Полученные математические зависимости (16 ... 19), (22) лишены физического смысла.

Приняв  $\alpha = 54^\circ 44'$ , имеем

$$\sigma_n = \sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3, \quad (24)$$

$$\tau_n = \tau_0 = \sqrt{2}(\sigma_1 - \sigma_3) / 3, \quad (25)$$

$$\tau_0 = \sigma_0 \operatorname{tg} \rho, \quad (26)$$

где  $\sigma_0$  – компонента шарового тензора – инвариантная скалярная величина;  $\tau_0$  – октаэдрическое касательное напряжение при условии (10);  $\rho$  – угол отклонения полного давления  $P$  от гидростатической оси.

В силу

$$|S_2| = |S_3| = \sigma_3 - \sigma_0 = (\sigma_1 - \sigma_3) / 3, \quad (27)$$

где  $S_2, S_3$  – главные компоненты девиаторного напряжения, преобразуем (25) в вид

$$\tau_0 = \sqrt{2} |S_2| \quad (28)$$

и подставив (28) в (26), получим

$$\sqrt{2} |S_2| = \sigma_0 \cdot \operatorname{tg} \rho. \quad (29)$$

Для оценки уравнения (29) с позиции принятой физической модели придадим ему геометрический смысл. Геометрическим образом уравнения (29) является "замечательный" разносторонний треугольник ABC (рис.2), у которого основание

$$|AB| = |OA| + |OB| \quad (30)$$

моделирует сумму основных параметров октаэдрической площадки  $|S_2|$  и  $\sigma_0$ , т.е.

$$|OA| = |S_2| \quad (31)$$

$$|OB| = \sigma_0 \quad (32)$$

$$\angle CAO = 54^\circ 44' \quad (33)$$

$$\angle CBO = \rho, \quad (34)$$

высота

$$|OC| = \tau_0, \quad (35)$$

гипотенуза

$$|AC| = T = \sqrt{3} |S_2|, \quad (36)$$

где  $T$  – интенсивность касательных напряжений,  
гипотенуза

$$|CB| = P, \quad (37)$$

где  $P$  – то же, что и в (13).

Для раскрытия физического смысла угла  $\rho$  (29), преобразуем треугольник ACB в треугольник AC<sub>1</sub>B с коэффициентом гомотетии  $K < 1$ , т.е. примем

$$K = 1/\sqrt{2}, \quad (38)$$

причем инвариантные скалярные величины  $|S_2|$  и  $\sigma_0$  сохраним без изменения.

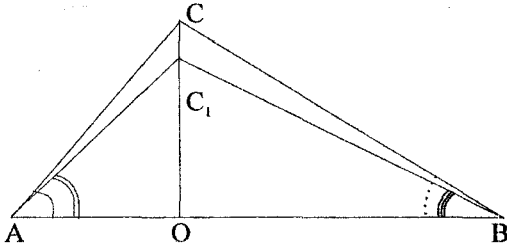


Рис. 2

Тогда высота

$$|OC_1| = |OA| = |S_2|, \quad (39)$$

гипотенуза

$$|AC| = |\tau_0|, \quad (40)$$

$$\angle OAC_1 = 45^\circ. \quad (41)$$

$$\angle OBC_1 = \theta. \quad (42)$$

В результате преобразования уравнение (29) примет вид

$$|S_2| = \sigma_0 \cdot \text{tg}\theta. \quad (43)$$

Для выяснения физического смысла гипотенузы  $BC_1$  и угла  $\theta$  совместим координатную плоскость  $|S_2|O|S_3|$  с октаэдрической площадкой таким образом, чтобы образовать пространственную систему координат  $|S_2|\sigma_0|S_3|$  (рис.3).

Замечая, что (27) тогда на плоскости  $|S_2|O|S_3|$  проведём биссектрисы а-а, б-б и на них отложим равные отрезки

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = \sqrt{2} |S_2|. \quad (44)$$

Соединив точки А, В, С, D, получаем квадрат со сторонами

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DF| = S_1, \quad (45)$$

в виду того, что отрезки oa, ob, oc, od на координатных осях  $|S_2|$  и  $|S_3|$ , отсекаемые прямыми AB, BC, CD и AD

$$|S_2| = |S_3| = 0,5 S_1. \quad (46)$$

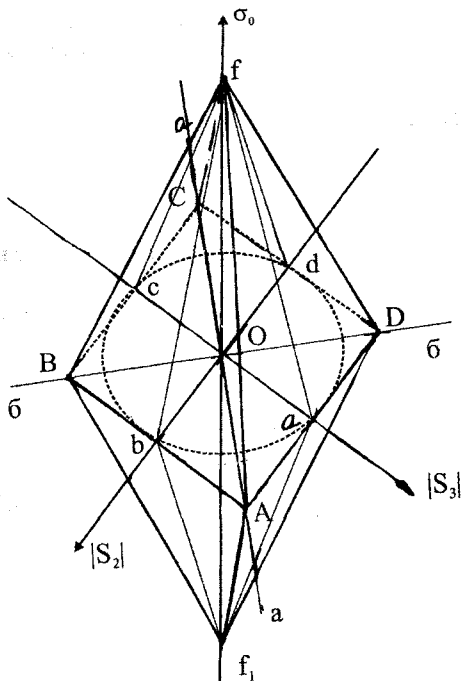


Рис. 3

В квадрат \$ABCD\$ впишем окружность радиусом

$$|r| = |S_2| = |S_3| \quad (47)$$

и, следовательно, диаметром

$$|D| = S_1, \quad (48)$$

т.е.

$$S_1 = |S_2| + |S_3| \quad (49)$$

или

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0. \quad (50)$$



Таким образом, учитывая (47)-(50), координатную плоскость  $|S_2|O|S_3|$  можно считать девиаторной.

Далее, на оси  $\sigma_0$  отложим

$$|of| = \sigma_0 \quad (51)$$

и соединив точку  $f$  с точками  $A, a, B, b, C, c, D, d$  в пространстве напряжений  $|S_2|\sigma_0|S_3|$  образуем тетрагональную пирамиду, рёбра которой

$$|Af| = |Bf| = |Cf| = |Df| = P, \quad (52)$$

где  $P$  – то же, что и в (13), а проекция ребер пирамиды на девиаторной плоскости

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = \tau_0, \quad (53)$$

где  $\tau_0$  – то же, что и в (25).

Апофемы боковых граней пирамиды  $af, bf, cf, df$  являются образующими вписанного кругового конуса, который образуется при вращении треугольника  $aof$  вокруг оси

$$|Of| = \sigma_0 \quad (54)$$

катетом

$$|oa| = |S_2| = |S_3| = |r|, \quad (55)$$

где  $r$  – то же, что и в (47). При этом треугольник  $aof$  является отображением треугольника  $AOF$  путем его поворота вокруг оси  $of$  с коэффициентом гомотетии

$$k = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}. \quad (56)$$

При преобразовании

$$\overset{\Delta}{ofA} = \rho, \quad (57)$$

где  $\rho$  – то же, что и в (26), отображен в половинный угол раскрытия конуса  $\Phi$ , т.е.

$$\overset{\Delta}{ofA} = \Phi/2. \quad (58)$$

Введя (58) в (43), имеем

$$|S_2| = \sigma_0 \cdot \text{tg} \Phi/2. \quad (59)$$

Отображая изометрически тетрагональную пирамиду  $ABCDf$  относительно девиаторной плоскости, получаем тетрагональную би-пирамиду с общей осью

$$|ff_1| = 2\sigma_0 \quad (60)$$

и вписанным круговым конусом 2-го рода.

Для описания поверхности конуса 2-го рода преобразуем (59) с учётом (46), в уравнение вида

$$S_1 / 2\sigma_0 = \operatorname{tg}\Phi / 2 = m, \quad (61)$$

где коэффициент  $m$  характеризует растяжение конуса в границах "идеальная жидкость" – "идеальное твёрдое тело". При  $\Phi=0^\circ$  ("идеальная жидкость")  $m=0$ , т.е. конус вырождается в отрезок прямой, совпадающий с осью  $\sigma_0$ , при  $\Phi=90^\circ$  ("идеальное твёрдое тело")  $m=1$ , т.е. конус вырождается в сферу с радиусом

$$|r| = |S_2| = \sigma_0. \quad (62)$$

Уравнение (61) находит опытное подтверждение в широком аспекте.

1. Кайбышев О.А., Валиев В.З. Границы зерен и свойства металлов. – М.: Металлургия, 1987. – 214 с.
2. Глайтер Г., Чалмерс Б. Большеугловые границы зерен / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 376 с.
3. Паскальская М.П. Кристаллография: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1976. – 391 с.
4. Костов И. Кристаллография / Пер. с болг. – М.: Мир, 1965. – 528 с.
5. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.
6. Надаи А. Пластичность и разрушение твёрдых тел / Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1954. – 647 с.
7. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

*Получено 18.05.2002*

УДК 69.059.25

А.ШЕВЧИК

*SIKA® POLAND, г.Варшава*

А.В.ПАНЧЕНКО

*SIKA® POLAND, г.Киев*

### **НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ ФИРМЫ SIKAR<sup>®</sup> ДЛЯ УСИЛЕНИЯ ДОРОЖНЫХ МОСТОВЫХ ОБЪЕКТОВ**

Рассматриваются композитные материалы для усиления бетонных конструкций.

Проблемы усиления мостовых объектов это интересная и очень трудная отрасль инженерного строительного дела. Сейчас эта проблема является особенно важной по отношению к дорожным мостам в связи с тем, что растет интенсивность и скорость движения, а также, увеличивается осевое давление на транспорте. Среди многочисленных методов усиления железобетонных конструкций наиболее часто применяются: введение дополнительной арматуры; введение внешнего напряжения (внешнее армирование); увеличение бетонного сечения (например, методом торкретирования); приклеивание стальных пане-