УДК 624.131.51

О.А.РУБАН, канд. техн. наук
Днепропетровский государственный технический университет железнодорожного транспорта
Ю.Б.БАЛАШОВА, канд. техн. наук
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, г.Днепропетровск
Н.И.БЕЛОУС
ПСК, г.Днепродзержинск

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТЫХ ГРУНТОВЫХ МАССИВОВ

Приводится формулировка и решение вариационной задачи о сдвиге грунтового массива. Для решения поставленной задачи используются три уравнения равновесия, условие прочности Кулона-Мора и заранее определенная точка приложения активного давления.

Применение вариационного исчисления для определения устойчивости слоистых грунтовых массивов было рассмотрено ранее [1]. Формы потери устойчивости, имеющие место в армированных сооружениях, определяются как внешними воздействиями, так внутренними усилиями (рис.1).

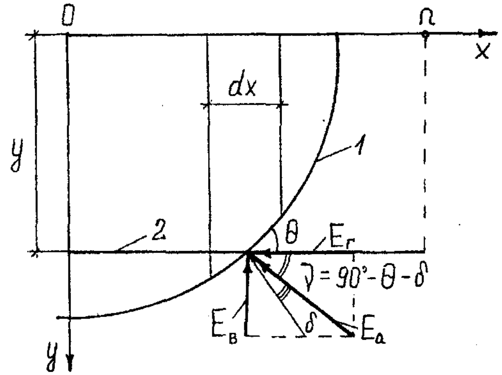

Рис.1 – Расчетная схема слоистого массива:
1 – поверхность скольжения; 2 – арматура

Основным внутренним усилием является активное давление грунта [2, 3]. Для обоснования формы потери устойчивости армогрунтового массива в виде выпора армированной части необходимо сравнить положение и величину активного давления грунта на армогрунтовые сооружения и реактивной силы от армированного упорной конструкции.

Поскольку точка приложения силы $\overline{E}$ определяется расчетом, вариационная задача о выпоре грунта видоизменяется [4]: помимо условий равновесия

$$\sum X \to \int_{x_0}^{x_1} G^{11}dx + \int_{x_1}^{x_n} G^{21}dx = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y \to \int_{x_0}^{x_1} G^{12}dx + \int_{x_1}^{x_n} G^{22}dx = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M \to \int_{x_0}^{x_1} G^{13}dx + \int_{x_1}^{x_n} G^{23}dx = 0, \qquad (3)$$

где

$$G^{11} = \tau_1 + \sigma_1 \overline{y}'; \quad G^{21} = -\tau_2 + \sigma_{21} y'; \qquad (4)$$

$$G^{12} = \tau_1 \overline{y}' - \sigma_1 + \gamma \cdot h; \quad G^{22} = -\tau_2 y' - \sigma_2 + \gamma \cdot h; \qquad (5)$$

$$G^{13} = x\tau_1 \overline{y}' - \overline{y}\tau_1 - x\sigma_1 - \sigma_1 \overline{y} \cdot \overline{y}' + x \cdot \gamma \cdot h_1, \qquad (6)$$

$$G^{23} = -x\tau_2 y' + y\tau_2 - x\sigma_2 - \sigma_2 y \cdot y' + x \cdot \gamma \cdot h_2. \qquad (6^а)$$

должно соблюдаться также условие

$$\int_{x_0}^{x_1} G^{14}dx = 0, \quad G^{14} = \sigma_1 (x - x_E), \qquad (7)$$

где x_E – абсцисса точки приложения E (рис.2).

Мы приходим к следующей вариационной задаче.

Найти экстремум функционала давления

$$I = \frac{A}{\cos\varphi_1} \int_{x_0}^{x_1} \sigma_1 dx, \quad A = \sqrt{1 + k^2}, \qquad (8)$$

при условиях (1)–(3) и (7), если $\tau_1 = \sigma_1 tg\varphi_1$, $\tau_2 = \sigma_2 tg\varphi_2 + C_2$, $\overline{y} = kx$, $y = ax + b$.

Для этой задачи

$$F^{*(1)} = \frac{A\sigma_1}{\cos\varphi_1} + \lambda_1 G^{11} + \lambda_2 G^{12} + \lambda_3 G^{13} + \lambda_4 G^{14}, \qquad (9)$$

$$F^{*(2)} = +\lambda_1 G^{21} + \lambda_2 G^{22} + \lambda_3 G^{23}, \qquad (10)$$

где λ_i – числовые множители Лагранжа.

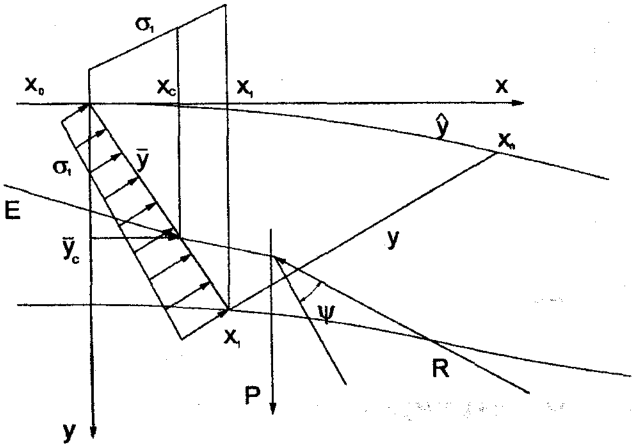

Рис.2 – Схема к расчету точки приложения активного давления

Подставляя (9) и (10) в уравнения Эйлера-Лагранжа, получим:

$$\frac{A}{\cos\varphi_1} + \lambda_1(tg\varphi_1 + k) + \lambda_2(k \cdot tg\varphi_1 - 1) + \lambda_3 A^2 x + \lambda_4(x - x_E) = 0, \quad (11)$$

$$\lambda_1 y' - \lambda_2 - \lambda_3 x - \lambda_3 yy' + (\lambda_3 y - \lambda_3 xy - \lambda_2 y' - \lambda_1) tg\varphi_2 = 0. \quad (12)$$

Отсюда следует система относительно λ_i:

$$\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_4 = 0, \qquad (13)$$

$$\lambda_1(a - tg\varphi_2) - \lambda_2(1 + a tg\varphi_2) = 0, \qquad (14)$$

$$\frac{A}{\cos\varphi_1} + \lambda_1(tg\varphi_1 + k) + \lambda_2(k \cdot tg\varphi_1 - 1) = 0. \qquad (15)$$

Напряжения σ_1 и σ_2 находятся из уравнений (1)–(3) и (7):

$$a_{11}S_1 + a_{12}S_2 = B_1, \qquad (16)$$

$$a_{21}S_1 + a_{22}S_2 = B_2, \qquad (17)$$

$$A^2 M_1 + (1 + a^2) M_2 + a_{12} b S_2 = B_3, \qquad (18)$$

$$M_1 - x_E S_1 = 0, \qquad (19)$$

где

$$a_{11} = tg\varphi_1 + k\ ;\ a_{12} = a - tg\varphi_2\ ; a_{21} = ktg\varphi_1 - 1\ ;$$
$$a_{22} = -(1 + a \cdot tg\varphi_2)\ ; \qquad (20)$$

$$B_1 = c_2(x_n - x_1)\ ;\ B_2 = ac_2(x_n - x_1) - \gamma \int_{x_0}^{x_n} hdx\ ;$$

$$B_3 = bc_2(x_n - x_1) + \gamma \int_{x_0}^{x_n} xhdx\ ; \qquad (21)$$

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_1} \sigma_1 dx\ ;\ S_2 = \int_{x_1}^{x_n} \sigma_2 dx\ ;\ M_1 = \int_{x_0}^{x_1} x\sigma_1 dx\ ;\ M_2 = \int_{x_1}^{x_n} x\sigma_2 dx\,. \qquad (22)$$

Заметим, что аналогично (19)

$$M_a - x_R S_2 = 0\ , \qquad (23)$$

где x_R – абсцисса точки приложения R (рис.2). Следовательно, (18) преобразуется к виду

$$a_{31}S_1 + a_{32}S_2 = B_3\,, \qquad (24)$$

где

$$a_{31} = A^2 x_E\ ;\ a_{32} = a_{12}b + (1 + a^2)x_R. \qquad (25)$$

Очевидно, из (16) и (17) находятся S_1 и S_2, а затем из (24) находится x_R. По S_1 и S_2, x_E и x_R (или M_1 и M_2) определяются σ_1 и σ_2. Например:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \sigma_1 dx = S_1, \\ &\int_{x_0}^{x_1} x\sigma_1 dx = x_E S_1 = M_1. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Полагая

$$\sigma_1 = a_m x^m + a_n x^n \quad (0 \le m < n), \qquad (27)$$

Получим

$$\left.\begin{aligned} a_m \frac{x_1^{m+1}}{m+1} + a_n \frac{x_1^{n+1}}{n+1} = S, \\ a_m \frac{x_1^{m+2}}{m+2} + a_n \frac{x_1^{n+2}}{n+2} = M. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Определитель этой системы отличен от нуля, и, следовательно, коэффициенты a_m и a_n функции σ_1 определяются однозначно.

В случае вертикального сечения $x_0 x_1 (x_0 = x_1, k = \infty,\ kx_1 = \overline{y}_1)$ система (16), (17), (19) и (24) принимает вид

$$\overline{S}_1 + a_{12} S_2 = B_1; \quad (29)$$

$$tg\varphi_1 \cdot \overline{S}_1 + a_{22} S_2 = B_2\ ; \quad (30)$$

$$\overline{y}_E \overline{S}_1 + a_{32} S_2 = B_3; \quad (31)$$

$$\overline{M}_1 - \overline{y}_E \overline{S}_1 = 0, \quad (32)$$

где $\overline{y}_E$ – ордината точки приложения E,

$$\overline{S}_1 = \int\limits_{\overline{y}_{01}}^{\overline{y}_1} \sigma_1 d\overline{y}; \quad \overline{M}_1 = \int\limits_{\overline{y}_{01}}^{\overline{y}_1} \overline{y} \sigma_1 d\overline{y}. \quad (33)$$

1.Рубан О.А., Балашова Ю.Б., Калекин Н.В., Рубан А.А. Методика расчета локальной устойчивости слоистого грунтового массива на подработках с учетом скорости перемещения подвижной нагрузки // Зб. наук. пр. «Будівельні конструкції», №54. – К.: НДІБК, 2001. – С. 576-584.

2.Швец В.Б., Гинзбург Л.К., Гольдштейн В.М. и др. Справочник по механике и динамике грунтов / Под ред. В.Б. Швеца. – К.: Будівельник, 1987. – 232 с.

3.Гольдштейн М.Н., Царьков А.А., Черкасов И.И. Механика грунтов, основания и фундаменты. – М.: Транспорт, 1981. – 320 с.

4. Дорфман А.Г., Дудинцева И.Л. Применение вариационного метода к расчету оползневого давления на подпорные стенки // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1969. – №4. – С. 16-17.

Получено 17.05.2002