$\frac{A_5}{A_1} \approx 0{,}06$, что при $\cos\varphi = 0{,}55$ соответствует указанным требованиям.

В случае $A' / A = 0{,}44$ по приведенным выше значениям коэффициентов Фурье находим

$$\frac{A_3}{A_1} \approx 0{,}31; \qquad \frac{A_5}{A_1} \approx 0{,}13,$$

что явно выше требуемых стандартом значений. Нормированные значения содержания высших гармоник достигаются при $A' / A \leq 0{,}2$, как отмечалось выше.

Таким образом, предварительный расчет параметров работы комплекта "разрядная лампа – индуктивный ПРА" предлагаемым методом позволяет установить допустимое активное сопротивление балласта (характеристик обмотки дросселя), при котором обеспечивается достаточно приемлемая форма тока в той или иной схеме стабилизации режимов работы ламп индуктивным балластом.

1.Мвуджо Е.А. Исследование формы тока в схеме стабилизации комплекта "разрядная лампа – индуктивный балласт" с применением синус-квадратичной аппроксимации динамики проводимости плазмы разряда // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.38. – К.: Техніка, 2001. – С.225-230.

2.Намитоков К.К., Пахомов П.Л., Харин С.Н. Математическое моделирование процессов в газоразрядной плазме. – Алма-Ата: Наука, 1988. – 208 с.

3.ГОСТ 16809-78. Аппараты пускорегулирующие для газоразрядных ламп. Общие технические условия. – М.: Изд-во стандартов, 1981. – 56 с.

4.Справочная книга по светотехнике / Под ред. Ю.Б.Айзенберга. – М.: Энергоатомиздат, 1995. – 525 с.

Получено 30.04.2002

УДК 621.3

А.А.ХАРИСОВ, канд. техн. наук
Харьковская государственная академия городского хозяйства

К ВОПРОСУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ПРЯМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ

Рассматривается вопрос распределения плотности постоянного электрического тока в поперечном сечении прямых цилиндрических проводников.

В существующей практике расчетов электрических и магнитных полей, создаваемых прямыми цилиндрическими проводниками по которым протекает постоянный электрический ток, обычно априорно полагается, что плотность тока в поперечном сечении проводников распределяется равномерно

$$J = I / S, \tag{1}$$

где I – постоянный электрический ток в проводнике; S – площадь поперечного сечения проводника.

Однако, реальное распределение субъектов носителей тока в поперечном сечении проводников при постоянном токе далеко не такое простое, а как и во многих других случаях диафрагмированных, преимущественно направленных, перемещающихся статистических ансамблях, должно принимать некое нормальное (колоколообразное) распределение по скоростям, а следовательно и плотности тока в направлении преимущественного перемещения.

В пользу нормального распределения постоянного тока в поперечном сечении прямых цилиндрических проводников свидетельствует и известное явление пинч-эффекта, т.е. явление стягивания носителей электрического тока к центру инерции поперечного сечения проводников, по которым проходит постоянный ток, вследствие воздействия на субъекты носителей тока ими же создаваемого магнитного поля.

Предварительный анализ с учетом выше сделанных замечаний показывает, что в наиболее простом случае прямого круглого цилиндрического проводника с установившимся постоянным током и температурным режимом, среднестатистическое распределение плотности тока в плоскости поперечного сечения проводника при отсутствии внешнего электромагнитного поля представляется в виде

$$J_0(x,y) = \frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right] \text{ или}$$

$$J_0(\vec{r}) = \frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\exp\left[-\frac{r^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right], \tag{2}$$

где x, y или $\vec{r}$ – текущие координаты в прямоугольной или полярной декартовой системе координат в плоскости поперечного сечения проводника с началом координат в точке симметрии поперечного сечения проводника; $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} J_0(x,y)dy$ – полный ток в плоскости поперечного сечения прямого круглого цилиндрического проводника; r_0 – внешний радиус прямого круглого цилиндрического проводника; l – длина проводника.

С целью проверки адекватности выше представленного распределения плотности тока в поперечном сечении прямых круглых цилиндрических проводников при протекании через них постоянных токов, задаваясь распределением плотности тока (2), найдем выражение их омического сопротивления через электромагнитные поля, создаваемые полным током проводника.

В качестве исходного расчетного выражения для этой цели используем известное энергетическое соотношение электродинамики сплошности сред [1]

$$RI^2 = \int [\vec{E}\vec{H}]d\vec{f}, \tag{3}$$

где R – омическое сопротивление проводника; I – полный ток проводника; $\vec{E}, \vec{H}$ – напряженность электрического и магнитного поля, создаваемые полным током проводника; $\int ... d\vec{f}$ – интегрирование ведется по поверхности проводника.

В качестве граничного условия задачи принимаем проекцию напряженности электрического поля по оси z в точке $z = 0$, делящую проводник на две симметричные половины:

$$E_z(x,y)\big|_{z=0} = \frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)\gamma_0(T)} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right], \tag{4}$$

где $\gamma_0(T)$ – удельная проводимость материала проводника; l – длина прямого круглого цилиндрического проводника по оси z.

Так как электрический ток в проводнике и проекция напряженности электрического поля по оси z в точке $z = 0$ имеет постоянные значения, задача удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

При таких условиях задачи при определении сопротивления проводника по формуле (3) интегрирование проводится по плоскости $z=0$. Кроме того, решение задачи достаточно найти в области $z>0$, предусмотрев увеличение значений полей, в два раза в решении системы электростатических уравнений Максвелла.

Итак, для определения компонент напряженности электромагнитного поля, создаваемых током проводника, используем электростатические уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0;\ \frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x};\\ &\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_x}{\partial x}=0;\ \frac{\partial H_y}{\partial y}-\frac{\partial H_x}{\partial x}=\gamma_0(T)E_z.\end{aligned} \tag{6}$$

Переходя к компонентам поля Фурье, получим:

$$\begin{aligned}&E_{xk}=j\frac{k_x}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz};\ E_{yk}=j\frac{k_y}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz};\\ &H_{xk}=-j\gamma_0(T)\frac{k_y E_{zk}}{k^2};\\ &H_{yk}=j\gamma_0(T)\frac{k_x E_{zk}}{k^2};\ k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}.\end{aligned} \tag{7}$$

В общем виде значение компоненты поля Фурье E_{zk}, удовлетворяющее граничному условию (5), принимаем в форме

$$E_{xk}=j\frac{k_x}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}E_k(\int J)\exp\left[j\vec{k}\vec{r}-kz\right]d\vec{k}, \tag{8}$$

где

$$E_k(\int J)=\frac{1}{\gamma_0(T)}\int J(\vec{r})\exp(-j\vec{k}\vec{r}) \tag{9}$$

– постоянная интегрирования.

Применяя обратное преобразование Фурье к (7), получим решение системы электростатических уравнений Максвелла в виде

$$E_x(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{k_x}{k} d\vec{k} ;$$

$$E_y(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{k_y}{k} d\vec{k} ; \qquad (10)$$

$$H_x(\vec{r}) = -j \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{k_y}{k} d\vec{k} ;$$

$$H_y(\vec{r}) = j \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{k_x}{k} d\vec{k} .$$

Принимая в уравнениях (10) $z = 0$ и подстановки их $\left[\vec{E}\vec{H}\right]_{z=0} = E_x(\vec{r})H_y(\vec{r}) - E_y(\vec{r})H_x(\vec{r})$ в (3), получим искомое значение мощности омических потерь в прямом круглом цилиндрическом проводе в виде

$$I^2 R = \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|E_k(\int J)\right|^2 \frac{d\vec{k}}{k} . \qquad (11)$$

Воспользовавшись граничным условием (4), выражением постоянной интегрирования (9) и интегралом Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha\xi^2) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} ,$$

получим значение постоянной интегрирования

$$E_k(\int J) = \frac{I}{\gamma_0(T)} \exp\left[- \frac{k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right] . \qquad (12)$$

После подстановки постоянной интегрирования (12) в (11) и перехода в цилиндрическую систему координат в k-пространстве получаем

$$RI^2 = \frac{I^2}{4\pi^2\gamma_0(T)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}{4} \right] \times \exp(jk\cos\varphi) d\varphi dk. \quad (13)$$

Сокращая токи с обеих сторон уравнения (13) и заменяя последний интеграл в его правой части функцией Бесселя, приходим к выражению

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma_0(T)} \int_0^{\infty} J_0(k) \exp\left[-\frac{k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}{4} \right] dk \cdot \quad (14)$$

Используя для вычисления интеграла по dk в (14) известное соотношение [2]

$$\int_0^{\infty} J_0(k) \exp\left[-\frac{k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}{4} \right] dk = \left[\frac{\pi}{2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2} \right]^{1/2} = \frac{2l}{r_0^2}, \quad (15)$$

находим значение омического сопротивления прямого круглого цилиндрического проводника в виде классического закона Ома

$$R = \frac{l}{\gamma_0(T)\pi r_0^2}. \quad (16)$$

В случае прямых эллиптических цилиндрических проводников с установившимся токовым и температурным режимом, для которых закон Ома записывается в виде

$$R = \frac{l}{\gamma_0(T)\pi ab}, \quad (17)$$

распределение плотности тока в их поперечном сечении принимает вид эллиптического нормального распределения

$$J_0(x,y) = \frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{ab}{l}\right)} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{ab}{l}\right)^2}\right], \qquad (18)$$

где a и b – полуоси поперечного сечения эллиптического цилиндрического проводника соответственно по осям x, y.

В общем случае для прямых цилиндрических проводников с произвольной формой поперечного сечения, омическое сопротивление проводника представляется выражением

$$R = \frac{l}{\gamma_0(T)}\left(\frac{2}{\pi ab + F}\right), \qquad (19)$$

где a и b – полуоси эллипса вписанного в поперечное сечение проводника (или круга $a = b$); F – площадь поперечного сечения прямого цилиндрического проводника.

При этом максимальная плотность тока колоколообразного распределения будет всегда находиться в точке центра инерции поперечного сечения прямого цилиндрического проводника.

И, наконец, для сравнения найдем выражение закона Ома для прямого цилиндрического проводника в предположении равномерного распределения плотности тока

$$J(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{I}{\pi\left(\dfrac{r_0^2}{l}\right)^2}, & |\vec{r}| \le r_0, \\ 0 & |\vec{r}| > r_0. \end{cases} \qquad (20)$$

В этом случае граничное условие, т.е. проекция напряженности электрического поля по оси z в точке $z = 0$ и общее решение системы электростатических уравнений Максвелла принимают вид

$$E_z(\vec{r})\big|_{z=0} = \frac{I}{\gamma_0(T)\pi\left(\dfrac{r_0^2}{l}\right)^2}, \quad \vec{r} \le r_0; \qquad (21)$$

$$\left.\begin{aligned}
E_x(\vec{r}) &= \frac{j}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J)\exp\left[j\vec{k}\vec{r}-kz\right]\frac{k_x}{k}\,d\vec{k};\\
E_y(\vec{r}) &= \frac{j}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J)\exp\left[j\vec{k}\vec{r}-kz\right]\frac{k_y}{k}\,d\vec{k};\\
H_x(\vec{r}) &= -\frac{j}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J)\exp\left[j\vec{k}\vec{r}-kz\right]\frac{k_y}{k^2}\,d\vec{k};\\
H_y(\vec{r}) &= \frac{j}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J)\exp\left[j\vec{k}\vec{r}-kz\right]\frac{k_x}{k^2}\,d\vec{k}.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Подставляя (21) в (8), получаем

$$E_k(\int J) = \frac{I}{\gamma_0(T)}\int\frac{I}{\pi\left(\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\exp\left(-j\vec{k}\vec{r}\right)\cdot \tag{23}$$

После подстановки постоянной интегрирования в (11) и ввода цилиндрической системы координат в $\vec{k}$-пространстве приходим к выражению

$$R = \frac{4}{\pi\gamma_0(T)}\int\limits_0^{\infty}\frac{J_1^2\left(k\frac{r_0^2}{l}\right)}{k^2}dk, \tag{24}$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода.

Значение интеграла в (24) известно [2]

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{J_1^2\left(k\frac{r_0^2}{l}\right)}{k^2}dk = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{r_0^2}{l}. \tag{25}$$

Подставив значение интеграла (25) в (24), получим выражение сопротивления прямого круглого цилиндрического проводника постоянного тока в предположении равномерного распределения плотности тока в его поперечном сечении

$$R = \frac{16l}{3\pi^2 r_0^2\gamma_0(T)}. \tag{26}$$

Как видим, в предположении равномерного распределения плотности тока в поперечном сечении прямого круглого цилиндрического проводника полученное значение сопротивления существенно отличается от классического закона Ома.

1.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.:ГИФМЛ, 1959.

2.Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. – М.: ГИФМЛ, 1963.

Получено 16.05.2002

УДК 681.3

В.П.ШПАЧУК, д-р техн. наук
Харьковская государственная академия городского хозяйства
О.В.ТОНИЦА, канд. физ.-матем. наук
Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
В.С.ТОНИЦА
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ КОНСТРУКЦИИ ФИЛЬЕРЫ ЭКСТРУДЕРА КАПИЛЛЯРНОГО СТЕРЖНЯ АВТОРУЧКИ

Приводятся разработанные методы и алгоритмы автоматизации проектирования фильеры экструдера капиллярного стержня авторучки. Разработки основаны на использовании алгебро-логических методов теории R_3-функций (международная аббревиатура – RFM – R-functions method) и процессов формирования химических волокон.

Основным элементом капиллярной авторучки является капиллярный стержень, который производят из полимерной полой нити диаметром 0,6-1,2 мм порезкой ее на куски длиной 30-40 мм с последующей особой заточкой наконечника и хвостовой части. Нить получают на экструдере путем продавливания через фильеру расплава полимерного материала. Стабильность процесса формирования и качество получаемой нити во многом обусловлены конструкцией и качеством изготовления фильеры, являющейся сложнейшим и важнейшим элементом установки [1-6].

Качественные и эксплуатационные характеристики средства письма, такие как плавность и чистота письма, равномерность и длина письма, отсутствие вибрации при письме, в значительной степени зависят от капиллярных и механических свойств пишущего стержня. Поэтому данная работа ставит своей целью разработку методов и алгоритмов создания капиллярного наконечника авторучки с заданными пишущими и механическими свойствами на основе автоматизированных методов проектирования фильеры и капиллярного стержня.