**ЗМІСТ**

[ВСТУП 4](#_Toc403378754)

[РОЗДІЛ 1 6](#_Toc403378755)

[ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТАТИЧНИХ РІШЕНЬ 6](#_Toc403378756)

[1.1. Критерії прийняття рішень в умовах гри з природою 6](#_Toc403378757)

[1.2. Критерії вибору рішення в умовах невизначеності 9](#_Toc403378760)

[1.2.1. Критерій Вальда 9](#_Toc403378761)

[1.2.2. Критерій Севіджа 11](#_Toc403378762)

[1.3. Вибір оптимальної стратегії 15](#_Toc403378763)

[РОЗДІЛ 2 16](#_Toc403378764)

[ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ. СТИСЛИЙ ОГЛЯД СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ 16](#_Toc403378765)

[2.1. Загальні поняття систем масового обслуговування 16](#_Toc403378766)

[2.2. Одноканальна СМО з обмеженням за довжиною черги 21](#_Toc403378767)

[2.3. Багатоканальна СМО з обмеженням за довжиною черги 23](#_Toc403378768)

[2.4. Визначення параметрів СМО 25](#_Toc403378769)

[2.4.1. Багатоканальна СМО з обмеженням місць у черзі: *n=2* 25](#_Toc403378772)

[2.4.2. Одноканальна СМО з обмеженням місць у черзі: *n=1* 26](#_Toc403378779)

[ВИСНОВОК І РЕКОМЕНДАЦІЇ 28](#_Toc403378780)

[СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 29](#_Toc403378781)

**ВСТУП**

Дослідження операцій (ДО) – це дисципліна, що займається розробкою й застосуванням методів знаходження оптимальних рішень на основі математичного моделювання у різних областях людської діяльності. ДО тісно пов'язане з системним аналізом, математичним програмуванням, теорією оптимальних рішень.

ДО – застосування математичних, кількісних методів для обґрунтування рішень у всіх галузях цілеспрямованої людської діяльності. ДО починається тоді, коли для обґрунтування рішень використовується той чи інший математичний апарат.

**Мета курсового проекту** – застосування теоретичних та практичних знань основ теорії ігор та статистичних рішень і теорії масового обслуговування (ТМО) для вибору і обґрунтування управлінських рішень в умовах невизначеності.

Необхідність приймати рішення, для яких не вдається повністю врахувати умови, що їх визначають, зустрічаються в усіх галузях техніки, економіки, соціальних наук. Планування завжди в більшій чи меншій мірі пов’язане з подібними факторами невизначеності. Тому необхідно максимально використовувати всю наявну інформацію, щоб, зваживши всі можливі рішення, вибрати серед них найкраще.

**Об’єкт дослідження** – автозаправочна станція (АЗС) з кількома заправочними колонками. Інтервали прибуття автомобілів на заправку та тривалість обслуговування є випадковими величинами. Передбачається витратити певні кошти на будівництво АЗС та придбання пального і одержати певний дохід від її роботи за умов різного попиту на пальне.

**УМОВА**

Ведеться будівництво АЗС. Залежно від прийнятого рішення – кількості запланованих колонок на станції *хі*  = {1,2,4,5} та кількості колонок *Пij* = = {1,2,3,5,6}, що можуть задовольнити потреби клієнтів і залежать від випадкових факторів, які невідомі керівництву АЗС, складено таблицю щомісячних доходів. Витрати на будівництво однієї колонки та закупку пального складають *В=40 тис. у. о*. Максимальний дохід, що приносить одна колонка за місяць *Д=50 тис. у. о.* У разі перевищення попиту над пропозицією керівництво АЗС може підвищити ціну на пальне на 10%.

Потік автомобілів, що надходить на заправку, є пуассонівський найпростіший. Середній інтервал прибуття автомобілів на АЗС складає середня тривалість обслуговування – експоненціальна, складає Число місць для очікування на майданчику біля АЗС

**ЗАВДАННЯ**

Змоделювавши ситуацію у вигляді гри з природою, визначити за умови ризику оптимальну кількість колонок, що забезпечує максимальний місячний прибуток *П*, з урахуванням коштів, витрачених на будівництво певної кількості колонок і пальне. Також визначити кількість колонок для найменш сприятливих умов, керуючись позицією крайнього песимізму.

Змоделювати АЗС як СМО з обмеженням місць у черзі, розрахувати параметри та характеристики якості функціонування *n* – канальної системи, де кількість каналів *n* визначено за відповідним критерієм вибору рішення. Також розрахувати параметри та характеристики СМО, для якої кількість каналів визначено за песимістичним критерієм.

Порівнюючи результати розрахунків, надати керівництву АЗС рекомендації щодо вибору стратегії, тобто оптимальної кількості колонок з урахуванням якості їх функціонування.

# **РОЗДІЛ 1**

# **ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТАТИЧНИХ РІШЕНЬ**

## **1.1. Критерії прийняття рішень в умовах гри з природою**

В теорії ігор розглядаються задачі прийняття рішень в умовах невизначеності, викликаної поведінкою розумного противника, який здійснює найменш вигідні для нас дії.

Але існує невизначеність, пов'язана не з протидією противника, а з недостатньою поінформованістю про умови проведення операції. Наприклад, може бути заздалегідь невідома погода в районі проведення операції, ціна на певний товар, рівень інтенсивності на ділянці автомагістралі.

Такі умови проведення операції залежать від дійсності, яку прийнято називати природою, поведінка якої невідома, але не містить свідомої протидії. Моделі таких операцій називають іграми з природою. Задачами прийняття рішень в умовах гри з природою займається теорія статистичних рішень.

Порівняємо процес прийняття рішення в умовах конфліктної ситуації та в умовах гри з природою. В задачі гри з природою можна розраховувати на більший виграш, припускаючи відсутність активної протидії противника. Зате в задачі з конфліктною ситуацією припущення про зловмисність противника знижує невизначеність ситуації. Оскільки у грі з природою зробити таке припущення не можна, то і прийняти обґрунтоване рішення, що дає більший виграш, важче.

Елементи задачі гри з природою

Постановка задачі:

* гравець *А* має *m* стратегій *А1, А2, ..., Аm*;
* умови проведення гри характеризуються станами *П1, П2, ..., Пn* які називають стратегії природи ( можливе позначення *S* – стратегії середовища);
* виграш гравця *А* при кожній парі стратегій *(Аi,Пj), i=1,..., m; j=1,..., n* позначають *аij* і задають матрицею виграшів *(аij).*

Задачі подібного типу розв`язують із застосуванням математичного апарату теорії статичних рішень. Для аналізу матриці виграшів *(аij)*, використовують ряд критеріїв вибору оптимальної стратегії гравця. Як правило, зі відсутності інформації про умови проведення операції застосовують **критерій Лапласа**, в умовах ризику – **критерій Севіджа**, при впевненості в успіху операції – **критерій Гурвіца**, і коли гравець орієнтується на найменш сприятливий стан природи, тобто на найгірший випадок, використовують **критерій Вальда**.

Постановка гри

Стратегії гравця : *хi = {1, 2, 4, 5} – 4;*

Стратегії природи : *Пj = {1, 2, 3, 5, 6}.*

Витрати на будівництво однієї колонки та закупку пального становлять *В = 40 тис.у.о.*

Витрати на будівництво *{1, 2, 4, 5}* колонок відповідно: *(40, 80,160, 200)*

Максимальний дохід, що приносить одна колонка за місяць –

*Д = 50 тис.у.о.*

Дохід від *{1, 2, 3, 5, 6}* колонок відповідно: *(50, 100, 150, 250, 300).*

Побудова матриці виграшів

Елементи матриці *аij* – це різниця між очікуваним доходом та затратами на будівництво колонок та закупку пального. Вона визначає прибутки, тобто у даному випадку – це задоволення потреб клієнтів на АЗС.

Вирахуємо елементи матриці. Прибуток будемо представляти в *тис.у.о.* Доповнимо матрицю допоміжними стовпцями і рядками: крайній лівий стовпчик – витрати на будівництво певної кількості колонок; верхній рядок – дохід від роботи певної кількості колонок; нижній рядок – найбільший виграш гравця *βj* при даному стані природи *Пj* .

[1.1]

Таблиця 1.1 – Матриця виграшів

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Дохід | 50 | 100 | 150 | 250 | 300 |  |
| Витрати |  | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |  |
| -40 | 1 | 10 | 15 | 15 | 15 | 15 | 10 |
| -80 | 2 | -30 | 20 | 30 | 30 | 30 | -30 |
| -160 | 4 | -110 | -60 | -10 | 60 | 60 | -110 |
| -200 | 5 | -150 | -100 | -50 | 50 | 75 | -150 |
|  |  | 10 | 20 | 30 | 60 | 75 |  |

Розрахунок елементів матриці виграшів

Орієнтуємось на стратегію гравця, тобто активного учасника. Нехай керівництво АЗС задіяло стратегію *x1*. Розрахуємо прибутки при різних станах природи *Пj*. Вважаємо, що збільшення ціни на *10%* сприяє збільшенню доходів на *10%.*

Стратегія ***x1***:

;

;

;

Стратегія ***x2****:*

;

;

;

;

Стратегія ***x3****:*

;

;

;

;

;

Стратегія ***x4****:*

;

;

;

;

.

1. 2. **Критерії вибору рішення в умовах невизначеності**

Вибір оптимального варіанта має відбуватися за критерієм, що певним чином відбивають поінформованість відповідальної особи про можливі наслідки вибраних рішень і про переваги тих чи інших наслідків. При виборі рішення керуються вирішальними правилами, що дозволяють визначити рішення, яке має перевагу над іншими за певним критерієм. Основою для побудови вирішальних правил служить інформація для відповідальної особи про переваги різних альтернатив.

Існує ряд критеріїв для вибору оптимальної стратегії .

* + 1. **Критерій Вальда**

Критерій Вальда використовує вирішальне правило, що відображає позицію крайньої обережності, песимізму, тому має ще назву "критерій обережного спостерігача" або ж "максимінний критерій". Особа, яка приймає рішення, орієнтується на найменш сприятливий випадок і приписує кожному варіанту найгірший з можливих результат, потім вибирає серед них найбільш вигідний, тобто очікує найкращого результату серед найгірших.

Оптимальна стратегія буде та, що гарантує виграш на менший, ніж "нижня ціна" гри з природою. Вирішальне правило має вид:

[1.2]

*;*

*;*

*;*

*.*

Матрицю виграшів доповнюють ще одним стовпчиком з найменших результатів кожного рядка. Вибирають той варіант стратегій, у рядку якого стоїть найбільше значення цього стовпчика. Критерій застосовується в умовах, коли гру з природою ведуть як гру з розумним противником. Тобто передбачають найбільш несприятливий стан природи, вибране таким чином рішення цілком включає ризик. Це означає, що особа, яка приймає рішення, не може зіткнутися з гіршим результатом, ніж той на який вона розраховує. Які б умови, тобто стани природи, не зустрілись, відповідний результат не буде нижчий від *W*.

Застосування критерію Вальда є виправдане, якщо рішення приймають за таких обставин:

* нічого не відомо про можливість появи станів природи;
* доводиться рахувати з появою різних станів природи;
* рішення реалізують лише один раз;
* необхідно включити будь-який ризик.

Ризик звичайно інтерпретують як можливість отримання небажаного результату. У ситуації прийняття рішень можливий ризик представляє собою величину, так би мовити, нереалізованої корисності рішення.

Таблиця 1.2 – Матриця Вальда

|  |  |
| --- | --- |
| *xi* |  |
| 1 | 10 |
| 2 | -30 |
| 4 | -110 |
| 5 | -150 |
| Опт. стратегія | *x1* |
| Виграш | 10 |
| К-сть колонок | 1 |

За отриманими результатами можна дати рекомендації АЗС: при песимістичному підході до справи треба задіяти одну заправку, тобто, застосувати стратегію , якій відповідає *1* колонка і виграш становить *10 тис.у.о.*

* + 1. **Критерій Севіджа**

Критерій Севіджа застосовують у ситуації, коли потрібно уникнути будь-якого ризику. Для кожного варіанта особа, яка приймає рішення , оцінює втрати в порівнянні з найкращим можливим результатом , а за тим із сукупності найгірших результатів вибирає кращий згідно з вирішальним правилом. Це відповідає позиції відносного песимізму. Суть критерію Севіджа полягає у прагненні уникнути великого ризику при виборі рішення (стратегії).

Оптимальна стратегія буде та, при якій величина ризику в найгірших умовах (коли ризик найбільший) мінімальна. Вирішальне правило має вид:

*S =*  [1.3]

Кожний елемент матриці виграшів віднімають від найбільшого результату відповідного стовпчика і з цих різниць будують матрицю ризиків, яку доповнюють стовпчиком найбільших ризиків. Вибирають ту стратегію, у рядку якої стоїть найменше для цього стовпчика значення.

Зазначимо, що ризик – величина додатна:

*=-=-≥0* [1.4]

ЇЇ можна трактувати як максимальний додатковий виграш, якого можна було б досягти, якби в стані замість стратегії вибрати іншу, оптимальну для цього стану стратегію.

Критерій такий же песимістичний, як і критерій Вальда, але з орієнтацією на ризик , тому ще називається “критерій мінімізації ризиків”.

Якщо ж орієнтуватися на величину, обернену до величини ризику   
 =-≤0 [1.5]

То одержимо іншу модифікацію критерію Севіджа – "критерій мінімізації жалкувань".

*S = maximinj* [1.6]

Від одного елементу матриці виграшів віднімають найбільший результат відповідного стовпчика і з цих різниць будують матрицю жалкувань, яку доповнюють стовпчиком найменших жалкувань. Вибирають ту стратегію, у рядку якої стоїть найбільше для цього стовпчика значення.

Жалкування можна трактувати як змінювання доходу відносно найбільшого доходу для даного стану природи. Це величина завжди від’ємна і характеризує максимально можливі (для кожного стану) втрати у випадку вибору стратегії . Ці втрати і потрібно мінімізувати.

Тому критерії Севіджа мають ще назву мінімаксних. Їх застосовують, коли ризик прийнятий (допустимий), і замовник вкладає стільки коштів, щоб потім не пожалкувати, що вклав мало.

Для знаходження оптимальної стратегії за критерієм Севіджа (мінімізація ризиків) потрібно побудувати матрицю ризиків (табл. 1.3). Елементами матриці ризиків є величини ризиків , що представляють собою різницю між найбільшим виграшем при даному стані природи *S* та виграшем, який гарантує вибрана стратегія гравця .

Розраховуєм значення *rij*за формулою (1.4) та будуємо матрицю ризиків (табл.1.3).

*=10 – 10 = 0;*

*= 10 + 30= 40;*

*= 10 + 110 = 120;*

*= 10 + 150 = 160;*

*=20 – 15 = 5;*

*=20 – 20 = 0;*

*=20 + 60 = 80;*

*=20 + 100 = 120;*

*=30 – 15 = 15;*

*=30 – 30 = 0;*

*=30+10 = 40;*

*=30 + 50 = 80;*

*=60 – 15 = 45;*

*= 60 – 30 =30;*

*= 60 – 60 = 0;*

*= 60 – 50 = 10;*

*= 75 – 15 = 60;*

*= 75 – 30 =45;*

*= 75 –60 = 15;*

*=75 – 75 = 0.*

Таблиця 1.3 – Матриця ризиків

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | *max* |
| 1 | 0 | 5 | 15 | 45 | 60 | 60 |
| 2 | 40 | 0 | 0 | 30 | 45 | 45 |
| 4 | 120 | 80 | 40 | 0 | 15 | 120 |
| 5 | 160 | 120 | 80 | 10 | 0 | 160 |
|  | 10 | 20 | 30 | 60 | 75 |  |

Максимальний ризик при застосуванні кожної стратегії у крайньому правому стовпчику матриці ризиків (табл. 1.3).

Оптимальною стратегією за критерієм Севіджа буде та, за якої ризик мінімальний. За отриманими даними (табл. 1.4) мінімальний ризик дорівнює *45*, для двох колонок, а виграш при цьому становить *45 тис.у.о.*

Таблиця 1.4 – Критерій Севіджа

|  |  |
| --- | --- |
|  | *max* |
| 1 | 60 |
| 2 | 45 |
| 4 | 120 |
| 5 | 160 |
| Опт.стратегія |  |
| Виграш | *45* |
| К-сть колонок | *2* |

* 1. **Вибір оптимальної стратегії**

За всіма результатами вибраних критеріїв будуємо порівняльну таблицю та визначаємо оптимальну стратегію за моделлю гри з природою:

Таблиця 1.5 – Вибір оптимального рішення за моделлю гри з природою

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Умови прийняття рішення | позиція крайнього песимізму | Умова ризику |
| Критерій вибору | Вальда | Севіджа |
| Оптимальна стратегія (к-ть колонок) | 1 колонка | 2 колонки |
| Виграш,тис.у.о. | 10 | 45 |

За одержаними результатами можна надати такі рекомендації дирекції АЗС: при песимістичному підході до справи треба будувати стратегію *x1* за критерієм Вальда. Максимальний виграш може бути *10 тис. у. о*. Проте Севідж рекомендує стратегію *x2*. При мінімальному ризику виграш буде становити 45 *тис. у. о.*

РОЗДІЛ 2

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ.

СТИСЛИЙ ОГЛЯД СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

* 1. **Загальні поняття систем масового обслуговування**

Системи масового обслуговування – це такі системи, в які у випадкові моменти часу надходять заявки на обслуговування, при цьому заявки, що надійшли обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування.

Поступово в обслуговуючу систему, вимога приєднується до черги інших (раніше надійшли) вимог. Канал обслуговування вибирає вимогу, яка знаходяться в черзі, з тим, щоб приступити до його обслуговування. Після завершення обслуговування чергової вимоги канал обслуговування приступає до обслуговування наступної вимоги, якщо таке є в блоці очікування.

Цикл функціонування системи масового обслуговування подібного роду повторюється багаторазово протягом усього періоду роботи обслуговуючої системи. При цьому передбачається, що перехід системи на обслуговування чергової вимоги після завершення обслуговування попередньої вимоги відбувається миттєво, у випадкові моменти часу.

Прикладами систем масового обслуговування можуть служити:

* пости технічного обслуговування автомобілів;
* пости ремонту автомобілів;
* персональні комп'ютери, обслуговуючі надходять заявки або вимоги на рішення тих або інших завдань;
* станції технічного обслуговування автомобілів;
* аудиторські фірми;
* відділи податкових інспекцій, які займаються прийманням і перевіркою поточної звітності підприємств;
* телефонні станції і т. д.

Основними компонентами системи масового обслуговування будь-якого виду є:

* вхідний потік вимог або заявок на обслуговування;
* дисципліна черги;
* механізм обслуговування.

***Вхідний потік вимог***

Для опису вхідного потоку потрібно задати імовірнісний закон, що визначає послідовність моментів надходження вимог на обслуговування і вказати кількість таких вимог в кожному черговому надходженні. При цьому, як правило, оперують поняттям «імовірнісний розподіл моментів надходження вимог». Тут можуть надходити як одиничні, так і групові вимоги (вимоги надходять групами у систему). В останньому випадку звичайно мова йде про систему обслуговування з паралельно-груповим обслуговуванням.

***Дисципліна черги***

Дисципліна черги – це важливий компонент системи масового обслуговування, він визначає принцип, відповідно до якого надходять на вхід обслуговуючої системи вимоги підключаються з черги до процедури обслуговування. Найчастіше використовуються дисципліни черги, що визначаються такими правилами:

* першим прийшов – перший обслуговуєшся;
* прийшов останнім – обслуговуєшся першим;
* випадковий відбір заявок;
* відбір заявок за критерієм пріоритетності;
* обмеження часу очікування моменту настання обслуговування (має місце чергу з обмеженим часом очікування обслуговування, що асоціюється з поняттям «допустима довжина черги»).

***Механізм обслуговування***

Механізм обслуговування визначається характеристиками самої процедури обслуговування і структурою обслуговуючої системи. До характеристик процедури обслуговування відносяться: тривалість процедури обслуговування і кількість вимог, що задовольняються в результаті виконання кожної такої процедури. Для аналітичного опису характеристик процедури обслуговування оперують поняттям «імовірнісний розподіл часу обслуговування вимог».

Слід зазначити, що час обслуговування заявки залежить від характеру самої заявки або вимог клієнта і від стану і можливостей обслуговуючої системи. У ряді випадків доводиться також враховувати ймовірність виходу обслуговуючого приладу після закінчення деякого обмеженого інтервалу часу.

Структура обслуговуючої системи визначається кількістю і взаємним розташуванням каналів обслуговування (механізмів, приладів і т. п.). Перш за все, слід підкреслити, що система обслуговування може мати не один канал обслуговування, а декілька; система такого роду здатна обслуговувати одночасно кілька вимог. У цьому випадку всі канали обслуговування пропонують одні й ті ж послуги, і, отже, можна стверджувати, що має місце паралельне обслуговування.

Математична модель системи масового обслуговування (СМО) включає наступні основні елементи:

- потік вимог, що надходять на вхід системи (вхідний потік);

- чергу, що складається з вимог, які очікують на обслуговування;

- систему обслуговування; вихідні потоки обслужених, втрачених вимог та вимог, що надходять на повторне обслуговування;

- характеристики якості системи; механізм (дисципліну) обслуговування (рис. 2.1).

Рисунок 2.1 – Структура СМО

**Потік втрачених вимог**

**Потік вимог на**

**повторне обслуговування**

**Вхідний потік вимог**

**Черга**

**(черги)**

**Обслуговуючий**

**пристрій**

**(пристрої)**

**Вихідний потік вимог**

Система обслуговування може складатися з декількох різнотипних каналів обслуговування, через які має пройти кожне обслуговуване вимога, тобто в обслуговуючій системі процедури обслуговування вимог реалізуються послідовно. Механізм обслуговування визначає характеристики вихідного (обслугованого) потоку вимог.

Розглянувши основні компоненти систем обслуговування, можна констатувати, що функціональні можливості будь-якої системи масового обслуговування визначаються наступними основними факторами:

* імовірнісним розподілом моментів надходжень заявок на обслуговування (одиничних або групових);
* імовірнісним розподілом часу тривалості обслуговування;
* конфігурацією обслуговуючої системи (паралельне, послідовне або паралельно-послідовне обслуговування);
* кількістю і продуктивністю обслуговуючих каналів;
* дисципліною черги;
* потужністю джерела вимог.

В якості основних критеріїв ефективності функціонування систем масового обслуговування в залежності від характеру завдання можуть виступати:

* ймовірність негайного обслуговування надійшла заявки;
* ймовірність відмови в обслуговуванні надійшла заявки;
* відносна і абсолютна пропускна здатність системи;
* середній відсоток заявок, які отримали відмову в обслуговуванні;
* середній час очікування в черзі;
* середня довжина черги;
* середній дохід від функціонування системи в одиницю часу і т.п.

Предметом теорії масового обслуговування є встановлення залежності між факторами, що визначають функціональні можливості системи масового обслуговування, і ефективністю її функціонування. У більшості випадків всі параметри, що описують системи масового обслуговування, є випадковими величинами або функціями, тому ці системи ставляться до стохастичним системам.

Випадковий характер потоку заявок (вимог), а також, в загальному випадку, і тривалості обслуговування приводить до того, що в системі масового обслуговування відбувається випадковий процес.

Незалежно від характеру процесу, що протікає в системі масового обслуговування, розрізняють два основних види СМО:

* системи з відмовами, в яких заявка, що надійшла в систему в   
  момент, коли всі канали зайняті, отримує відмову і відразу ж покидає чергу;
* системи з очікуванням (чергою), в яких заявка, що надійшла в момент, коли всі канали обслуговування зайняті, стає в чергу і чекає, поки не звільниться один із каналів.

Системи масового обслуговування з очікуванням діляться на системи з обмеженим очікуванням і системи з необмеженим очікуванням.

У системах з обмеженим очікуванням може обмежуватися:

* довжина черги;
* час перебування в черзі.

У системах з необмеженим очікуванням заявка, що стоїть в черзі, чекає обслуговування необмежено довго, тобто поки не підійде черга.

Всі системи масового обслуговування розрізняють по числу каналів обслуговування:

* одноканальні системи;
* багатоканальні системи.

Наведена класифікація СМО є умовною. На практиці найчастіше системи масового обслуговування виступають в якості змішаних систем. Наприклад, заявки очікують початку обслуговування до певного моменту, після чого система починає працювати як система з відмовами.

* 1. **Одноканальна СМО з обмеженням за довжиною черги**

Граф стану даної системи наведений на рис. 4.

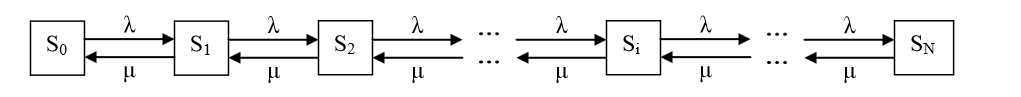


Рисунок 2.2 – Розмічений граф стану одноканальної СМО з обмеженням за довжиною черги

Стани СМО мають таку інтерпритацію:

*S0* – "канал вільний";

*S1* – "канал зайнятий" (черги немає);

*S2* – "канал зайнятий" (одне замовлення знаходиться в черзі);

………………………………………………………………………..

*Si* – "канал зайнятий" (*і-1* замовлення знаходиться в черзі);

………………………………………………………………………..

*SN* – "канал зайнятий" (*N* замовлень знаходиться в черзі).

*Граничні ймовірності системи:*

[2.1]

[2.2]

Формули для розрахунку параметрів та показників якості функціонування СМО наведено в табл.2.1.

Таблиця 2.1 – Одноканальна СМО з обмеженням за довжиною черги

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Основні параметри | | Розрахункові формули |
| 1 | Приведена щільність заявок |  |
| 2 | Відносна пропускна здатність |  |
| 3 | Абсолютна пропускна здатність |  |
| 4 | Імовірність станів СМО | *;*  *;*  *;*  *…………………………*  *…………………………* |
| 5 | Імовірність відмови |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Характеристики функціонування* | | *Математична модель* |
| 1 | Середнє число заявок у черзі |  |
| 2 | Середнє число заявок у системі |  |
| 3 | Середній час очікування у черзі |  |
| 4 | Середній час перебування у системі |  |

## **Багатоканальна СМО з обмеженням за довжиною черги**

Прикладом СМО з обмеженням за довжиною черги є автозаправочна станція (АЗС) з *n* колонками.

Нехай на майданчику біля станції можуть очікувати в черзі на заправку не більше *m* автомобілів одночасно. Якщо в черзі вже знаходиться *m* автомобілів, то чергова машина, що надходить до станції, в чергу не стає, а проїжджає мимо (одержує відмову). Потік машин, що надходять для заправки, має інтенсивність (*автомобілі за хвилину*). Процес заправки триває в середньому *хв*.

Граф станів даної СМО представляє собою схему загибелі і розмноження (рис.2.3).

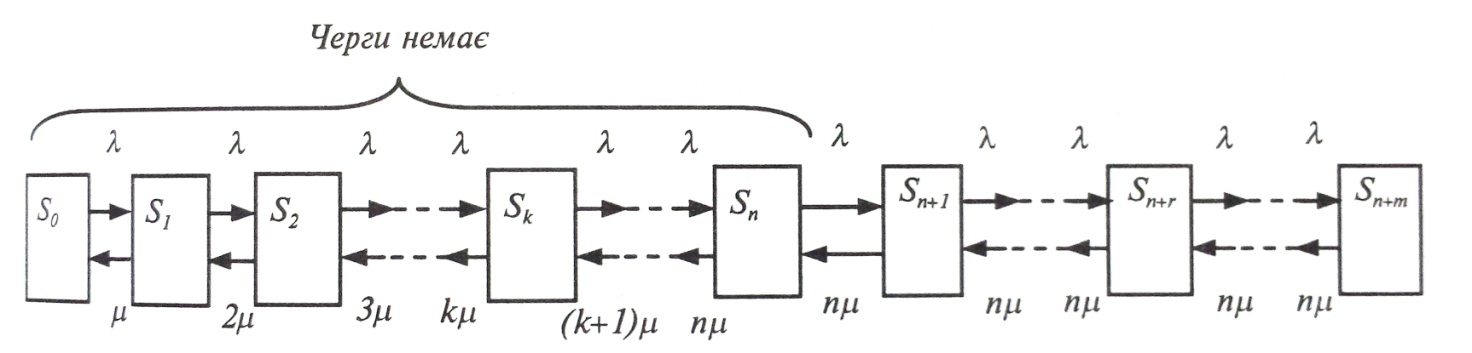


Рисунок 2.3 – Розмічений граф станів багатоканальної СМО

з обмеженням за довжиною черги

Стани системи нумеруються за числом заявок, що знаходяться в системі: *S0* – канали вільні, черги немає;

*S1* – один канал зайнято, решта вільні, черги немає;

*S2* – два канали зайнято, решта вільні, черги немає;

……………………………………..

*Sk* – *k* каналів зайнято,решта вільні, черги немає;

……………………………………..

*Sn* – зайнято всі *n* каналів, черги немає;

*Sn+1* – зайнято всі *n* каналів, одна заявка стоїть у черзі;

……………………………………………………

*Sn+r* – зайнято всі *n* каналів, *r* заявок стоять у черзі;

…………………………………………………….

*Sn+m* – зайнято всі *n* каналів, *m* заявок стоять у черзі.

Процес утворення черг та затримок у багатоканальних СМО описано моделями, що наведені в табл. 2.2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Основні параметри  Таблиця 2.2 – Багатоканальна СМО з обмеженням за довжиною черги | | Розрахункові формули |
| 1 | Приведена щільність заявок |  |
| 2 | Імовірність станів СМО | *;*  *; ; ...*  *; ... ; ...*  *; ... .*  *r – кількість заявок у черзі;*  *m – кількість місць для очікування;* |
| 3 | Імовірність відмови |  |
| 4 | Відносна пропускна здатність |  |
| 5 | Абсолютна пропускна здатність |  |
| Характеристики функціонування | | Математична модель |
| 1 | Середнє число заявок у черзі | *=* |
| 2 | Середнє число заявок у системі |  |
| 3 | Середнє число зайнятих каналів |  |
| 4 | Середній час очікування у черзі | *=* |
| 5 | Середній час перебування у системі |  |

* 1. **Визначення параметрів СМО**

1. 1. 1. **Багатоканальна СМО з обмеженням місць у черзі: *n=2***

Параметри СМО:

або 18 *авт/год* (*на вході до сиситеми*);

або 15 *авт/год* (*в каналі обслуговування*);

(*приведена щільність заявок*).

Iмовірності станів СМО:

Перевірка:

.

**Показники ефективності функціонування СМО:**

* ймовірність відмови:

;

* відносна пропускна здатність:

*або* 96,5%;

* абсолютна пропускна здатність:

*або*17*авт/год;*

* середнє число заявок у черзі:

;

* середнє число зайнятих каналів:

;

* середнє число заявок у системі:
* середній час очікування у черзі:

;

* середній час перебування у системі:

.

### 



### **Одноканальна СМО з обмеженням місць у черзі: *n=1***

Пaраметри СМО:

або 18 авт/год (на вході до сиситеми);

або 15 авт/год (в каналі обслуговування);

(приведена щільність заявок).

*Iмовірності станів СМО:*

*;*

*;*

*;*

*;*

*.*

*Перевірка:*

.

**Показники ефективності функціонування СМО:**

* ймовірність відмови:

;

* відносна пропускна здатність:

*або* 74,3%;

* абсолютна пропускна здатність:

*а або* 13*авт/год;*

* середнє число заявок у черзі:

;

* середнє число заявок у системі:

;

* середній час очікування у черзі:

;

* середній час перебування у системі:

.

# **ВИСНОВОК І РЕКОМЕНДАЦІЇ**

З отриманих результатів (табл.3.1) можна зробити такі висновки: при використанні багатоканальної системи масового обслуговування імовірність відмови становитиме *3,5%,* а при застосуванні одноканальної СМО аж *25,7%.* При застосуванні багатоканальної СМО з відмовами АЗС буде здатна обслуговувати *17* автомобілів за годину, а при одноканальній СМО – *13* автомобілів за годину. І, нарешті, середній час перебування автомобілів на АЗС при застосуванні багатоканальної СМО складає *5,2* хвилини, а при одно канальній – *8,96* хвилин. Звісно, що такі умови будуть вигідними для водіїв і цілком їх влаштовуватимуть, адже, коли буде *2* колонки, їм не треба буде довго чекати в черзі, щоб заправити свій автомобіль, тому що, як видно з розрахунків, час скорочується майже у два рази порівняно з тим, якщо буде одна колонка. А це значить потрібно будувати АЗС з *2* колонками.

Таблиця 3.1 – Характеристики функціонування АЗС як СМО при різних стратегіях керівництва

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Хар-ка  Умови прийн | К-сть колонок | *p0* | *Pвідм,*  *%* | *q,*  *%* | *Q,*  *авт/*  *год* | *͞k* | *͞nчрг* | *͞nс* | *͞tчрг,*  *хв.* | *c,*  *хв.* |
| Севіджа | 2 | 0,285 | 3,5 | 96,5 | 17 | 1,104 | 0,334 | 1,438 | 1,168 | 5,168 |
| Вальда | 1 | 0,150 | 25,7 | 74,3 | 13 | - |  |  |  |  |

# **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: ФМ, 1962. — 564 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. М., «Советскоерадио»,1972. — 552с.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Учеб. пособие для студентов вузов.— К.: ВШ, 1979.— 392 с.
4. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах.— М: Радио и связь, 1984.— 184 с.
5. Кунда Н.Т. Дослідження операцій у транспортних системах. Навч. посібн. для студентів напряму «Транспортні технології» ВНЗ. – К.: ВД «Слово», 2008. — 400 с.
6. Кунда Н.Т. Елементи дослідження операцій у транспортних системах. Навч. посібн. для студентів напряму «Транспортні технології» ВНЗ. – К.: ВД «Слово», 2007. — 182 с.
7. Четверухін Б.М. Дослідження операцій в транспортних системах. Частина 3. Спеціальні методи дослідження операцій. Навчальний посібник. – К.: НТУ, 2004. — 148 с.