МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

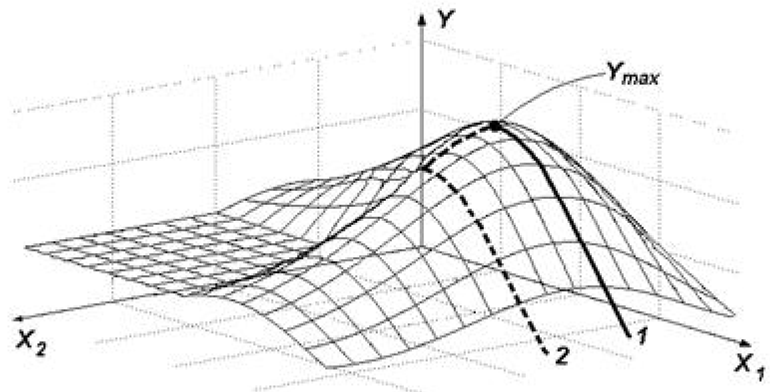
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт з дисципліни

«ПЛАНУВАННЯ І ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ»

(для студентів 5 курсу денної форми навчання за спеціальностями 8.06010302 «Раціональне використання і охорона водних ресурсів», 8.06010108 «Водопостачання та водовідведення»)



Харків
ХНУМГ
2014

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Планування і обробка результатів експерименту» (для студентів 5 курсу денної форми навчання за спеціальностями 8.06010302 «Раціональне використання і охорона водних ресурсів», 8.06010108 «Водопостачання та водовідведення») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: О. О. Ковальова. – Х.: ХНУМГ, 2014. – 74 с.

Укладач: О. О. Ковальова

Рецензент: доц., к. т. н. Г. І. Благодарна

Затверджено кафедрою водопостачання, водовідведення та очищення вод, протокол № 4 від 14.10.2014 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Планування і обробка результатів експерименту необхідні як студентам технічних вузів, так і інженерам-дослідникам і інженерам-технологам. Недостатнє знання ними сучасних методів математичного опрацювання та аналізу результатів експерименту викликає звичайно серйозні утруднення і призводить до застосування спрощених і недостатньо обґрунтованих прийомів. Це відноситься до питань добору емпіричних формул і оцінки їхніх параметрів, оцінки істинних значень величин, що вимірюються, і точності вимірів, дослідження кореляційних залежностей.

Дисципліна «Планування і обробка результатів експериментів» передбачає проведення практичних робіт.

Виконуючи практичні роботи, студенти закріплюють навички теоретичного та практичного застосування основних методів опрацювання й аналізу результатів експерименту до різноманітних питань водопідготовки.

ЗМ 1. ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ. МЕТОДИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Практична робота №1.
Основні поняття планування та методологія експерименту. Планування експерименту з ціллю опису дослідного об'єкту

Ціль роботи

Вивчити основні поняття в області планування експерименту. Освоїти методику складання плану-програми експерименту.

Теоретичні пояснення

Планування експерименту в широкому сенсі цього слова - основа життєдіяльності людини. На першій стадії внаслідок розумової діяльності виникають **ідеї, задуми**, будуються **гіпотези**, зважуються різні **варіанти** втілення задуманого (рис. 1.1).

На другій стадії здійснюється **експериментальна перевірка**, втілення ідей в деякий продукт. Експериментальна перевірка може здійснюватися як на кінцевому продукті, так і на його зменшеній або збільшеній фізичній моделі.

Експериментальній перевірці передує власне планування експерименту, яке включає наступні пункти:

1. обґрунтування, розуміння факту необхідності експерименту.
2. вибір факторів і рівнів
3. вибір змінної відгуку для оптимізації
4. вибір плану (числа реплік, способу рандомізації)
5. власне експеримент

І, нарешті, на третій стадії відбувається осмислення, оцінка виробленого продукту, а з погляду планування експерименту відбувається

6. аналіз даних експерименту
7. формулювання висновків і рекомендацій.

Таким чином, в широкому сенсі планування експерименту – один з найстародавніших і фундаментальніших видів наукової діяльності.

Основна **мета планування** експерименту – це пошук найкращого, оптимального в деякому розумінні рішення.

Формалізація мети планування виражається у вигляді деякої функції, яку називають **цільовою функцією**.

Побудова цільової функції найбільш відповідальний і найбільш важкий момент всього процесу планування. Коли вона побудована, то діє строгий математичний **алгоритм пошуку екстремуму**.

При побудові ж самої функції потрібна широка науково-технічна обізнаність в даній області. Так, наприклад, при проектуванні якої-небудь споруди для складання цільової функції необхідно брати до уваги технічні, технологічні, техніко-економічні, екологічні, естетичні і багато інших аспекти, зв'язані з використанням споруди.

Експеримент (від латинського *experimentum* – проба, дослід).

У словнику Іноземних Слів дається таке визначення: експеримент - науково поставлений дослід, спостереження досліджуваного явища в умовах, що точно враховуються, дозволяють стежити за ходом явища і відтворювати його кожного разу при повторенні цих умов.

У Енциклопедичному Словнику експеримент визначається як предметна діяльність в науці. Згідно цьому визначенню, наприклад, написання наукової статті або проглядання наукового журналу – вже експеримент.

Друге визначення ширше. Перше – більш підходить до істоти дисципліни "Планування експерименту".

Саме властивість відтворення - **відтворюваності** експерименту лежить в основі алгоритму планування.

Техніка планування: на кожному кроці ставиться невелика серія дослідів, в кожному з яких варіюються за певними правилами всі фактори. Математична обробка результатів експерименту дозволяє виробити умови проведення такої серії дослідів, направлених до досягнення оптимуму.

Експеримент може бути **фізичним** і **модельним**.

Фізичний експеримент - це реальний експеримент на устаткуванні з речовинними матеріалами. Це найбільш трудомісткий, енергоємний і дорогий вид діяльності. Планування експерименту зароджувалося і розвивалося застосовно саме до таких областей діяльності як металургія, хімічна промисловість, харчова промисловість, транспорт.

Модельний експеримент може бути трьох типів.

- він може бути фізичним. В цьому випадку модель може відрізнятися від об'єкту масштабом і, можливо, природою;
- модель може бути абстрактною психологічною, неформалізованою на рівні логічного мислення. Це найвитонченіша модель;
- модель може бути формалізованою математичною.

Щоб, експериментуючи на абстрактній моделі, одержувати правильні відомості про об'єкт дослідження потрібно побудувати досить точну модель. А оскільки принципово неможливо точно описати всі можливі зовнішні впливаючі фактори на процес функціонування об'єкту дослідження, то модель описується імовірнісний, статистично.

В основному планування експерименту застосовується в областях, де без фізичного моделювання не обійтися: у хімічній, харчовій промисловості, металургії і т.п.

Для фахівця у області водопідготовки планування експерименту може служити основою для моделювання процесів, систем, технологічних апаратів, природних і техногенних явищ і ситуацій і т.д. Моделювання супроводжує природоохоронні спеціальності постійно. Це і підбір дози необхідного реагенту в лабораторних умовах для реальних виробничих установок або технологічних ліній, і перевірка режиму роботи пілотної установки на модельних розчинах води, і вибір оптимальних систем водовідведення в умовах невизначеності, і прогностичні розрахунки стану навколишнього середовища. Для цього необхідна наявність **математичного опису об'єкта** проектування, або математичної моделі, покладеної в основу комп’ютерної моделі на відповідній мові програмування.

Така модель повинна відображати функціональну взаємодію елементів і їх сполучень, просторові зв'язки і розташування.

Застосування планування експерименту, поза сумнівом, організує і оптимізує діяльність експериментатора.

Окрім основної задачі – отримання оптимального рішення, планування експерименту дозволяє розв’язати такі задачі:
- пошук оптимальних умов
- побудова інтерполяційних формул
- вибір суттєвих факторів
- оцінка і уточнення констант теоретичних моделей
- вибір допустимої гіпотези про механізм явища і ін.

Експеримент, який ставиться для вирішення задач оптимізації, називається **екстремальним**, оскільки пов'язаний з пошуком екстремуму деякої функції.

Планування експерименту – це процедура вибору числа і умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для вирішення поставленої задачі з необхідною точністю.

Особливості планування експерименту:
- прагнення до мінімізації загального числа дослідів;
- одночасне варіювання всіма змінними, що визначають процес, за спеціальними правилами – алгоритмам;
- вибір чіткої стратегії, що дозволяє ухвалювати обґрунтовані рішення після кожної серії експериментів.

Об'єкт дослідження. Для конструктора об'єкт дослідження – це створена їм абстрактна модель сконструйованого приладу, всі функціональні зв'язки між елементами якого описані, тобто відомі. З погляду процедури планування експерименту Об'єкт дослідження – це “чорна скриня” з кінцевим числом входів і виходів.

Рис. 1.1 – Схема “чорної скрині”

Входи “чорної скрині” називають ***факторами*** (*дія на процес*), виходи ***відгуками*** (*результати роботи процесу*).

Кожен відгук є функція *k-змінних* – факторів

$$y_i = f(x_1, x_2, ..., x_k)$$

Функція *f* називається функцією відгуку. Це може бути детермінована або статистична функція залежно від властивостей об'єкту дослідження.

Об'єкт може бути описаний або безпосередньо сукупністю функцій відгуку, або системою рівнянь: лінійних, нелінійних, диференціальних, інтегральних, інтегро-дифференційних. При цьому функції відгуку можуть в явному вигляді і не існувати, але у будь-якому випадку модель об'єкту повинна містити явно або неявно **непорожню безліч рішень** у вигляді функцій відгуку.

Кількісна характеристика функції відгуку, вибрана як мета екстремального експерименту, називається ***параметром оптимізації***.

Умови проведення експерименту припускають, що значення факторів вибрані. І експеримент полягає у визначенні значень функцій відгуку.

Фактор може мати безперервну або дискретну область зміни. Проте, зважаючи на обмежену точність представлення безперервного фактору, він може бути описаний за допомогою **дискретного набору рівнів**. Ця угода істотно полегшує побудову експерименту і спрощує оцінку його складності.

Складність експерименту визначається числом всіляких станів "чорної скрині". Наприклад, якщо для всіх *k-факторів* існує *p* рівнів, то число станів буде $p_к$. Так система з 5 факторами на 5 рівнях має 3125 станів, а 410 = 1049000 – 10 факторів на 4-х рівнях.

Прямий перебір зважаючи на величезне число станів нераціональний, якщо неможливий, тому вдаються до процедури планування експерименту.

Екстремальний експеримент – метод вибору мінімальної кількості дослідів, необхідних для відшукування оптимальних умов.

Параметр оптимізації є відгуком, реакцією на дію факторів, які визначають поведінку досліджуваної, проектованої системи. Відгуки системи лежать в багатьох аспектах, кількісне вираження яких не завжди однозначно. Різні дослідники часто мають уявлення, що сильно відрізняються, про оптимальність того або іншого аспекту. Не по всіх параметрах оптимізації існують уніфіковані рекомендації, і тому вибір критеріїв оптимізації часто є мистецтвом.

Серед параметрів оптимізації необхідно вибрати один параметр, по якому шукається оптимум. Вся решта параметрів при цьому служить вже як обмеження. Тут також можливо безліч шляхів постановки задачі оптимізації.

Вимоги до параметра оптимізації:

1. Він повинен бути кількісним, задаватися числом. Безліч значень, яка може приймати параметр оптимізації, називається його <u>областю визначення</u>. Область визначення може бути дискретною і безперервною, обмеженою і необмеженою.
2. Параметр оптимізації потрібно <u>уміти вимірювати</u>, тобто мати в своєму розпорядженні відповідний прилад для прямого вимірювання або мати в своєму розпорядженні методику непрямих вимірювань. Але якщо такий прилад не існує або дуже дорогий, то вдаються до прийому, званого <u>ранжируванням</u> або ранговим підходом. При цьому параметрам оптимізації привласнюються оцінки – ранги за здалегідь вибраною шкалою: двобальної, п'ятибальної і т.д. У простому випадку область може містити два значення: так – ні, годна продукція

– брак. Ранг – це кількісна, але суб'єктивна оцінка. Така оцінка не дозволяє вивчити тонкі ефекти.

Прикладом рангового підходу може служити суддівство у фігурному катанні або гімнастиці. Ранговий підхід використовується при визначенні твердості матеріалу за заданою шкалою твердостей, наприклад, Монса.

3. Параметр оптимізації повинен задовольняти вимозі однозначності в статистичному сенсі. Заданому набору значень факторів повинно відповідати одне з точністю до помилки експерименту значення параметра оптимізації. Зворотне, очевидно, невірно одному і тому ж значенню параметра оптимізації можуть відповідати різні набори факторів.

4. Параметр оптимізації повинен задовольняти умові коректності, тобто він повинен дійсно оцінювати ефективність функціонування системи в заздалегідь вибраному сенсі.

5. Параметр оптимізації повинен підкорятися принципу "колективізму", він не повинен зводитися в ранг абсолюту. Він повинен бути ефективним з погляду досягнення кінцевої мети. Ефективність системи оцінюється завжди в цілому. Часто система складається з підсистем, кожна з яких оцінюється своїм локальним параметром оптимізації. При цьому оптимальність кожної з підсистеми не виключає можливості загибелі системи в цілому.

6. Параметр оптимізації повинен бути ефективний в статистичному сенсі. З декількох параметрів оптимізації найбільш ефективний той, який визначається з можливою найбільшою точністю. Якщо ця точність недостатня, доводиться звертатися до збільшення числа дослідів.

7. Параметр оптимізації повинен задовольняти вимозі універсальності або повноти. Під універсальністю параметра оптимізації розуміється його здатність всебічно характеризувати об'єкт.

Наприклад, технологічні параметри в загальному сенсі не враховують економіку. Цей недолік усувається підрозділом області визначення технологічних параметрів оптимізації по квалітетам, визначуваним за ранговим принципом: десятибальній системі з урахуванням рівня виробництва. У свою чергу технологічні допуски розділяються по трьох рівнях точності:

- економічний рівень – 9-10 квалітет
- виробничий рівень – 6-8 квалітет
- технічний рівень – 4-5 квалітет.

8. Бажано, щоб параметр оптимізації мав фізичний сенс, був простим і легко обчислюваним.

Для простоти доцільно нормувати параметр оптимізації з тим, щоб він приймав значення від нуля до одиниці.

Вибрати параметр оптимізації, що задовольняє всім вимогам практично неможливо. Вимоги частіше використовуються для порівняння декількох можливих параметрів оптимізації і вибору, що найбільш відповідає даним вимогам.

Розробка плану-програми експерименту

План-програма включає найменування теми дослідження, робочу гіпотезу, методику експерименту, перелік необхідних матеріалів, приладів, установок, список виконавців експерименту, календарний план робіт і кошторис на виконання експерименту. У ряді випадків включають роботи по конструюванню і виготовленню приладів, апаратів, пристосувань, методичне їх обстеження, а також програми дослідних робіт на заводах, будівництві і т.п.

Основу плану-програми складає методика експерименту. Методика є систему прийомів або способів для послідовного найбільш ефективного експериментального дослідження, і включає: мету і задачі експерименту; вибір варіюючих факторів; обгрунтування засобів і потрібної кількості вимірювань; опис проведення експерименту, обгрунтування способів обробки і аналізу результатів експерименту.

Визначення мети і задачі експерименту — один з найбільш важливих етапів. На основі аналізу інформації, гіпотези і теоретичних розробок обгрунтовують мету і задачі експерименту. Вся наукова інформація дозволяє в тому або іншому ступені судити про очікувані закономірності процесу, що вивчається, а, отже, і визначити задачі експерименту. Чітко, конкретно обгрунтовані задачі — це великий вклад в їх рішення. Кількість задач не повинна бути дуже великою (3-4 задачі), у великому дослідженні їх може бути 8-10.

Вибір варіюючих факторів — це встановлення основних і другорядних характеристик, що впливають на досліджуваний процес. Спочатку аналізують розрахункові (теоретичні) схеми процесу. На основі цього класифікують всі фактори і складають з них ряд, що убуває по важливості, для даного експерименту. Правильний вибір основних і другорядних факторів грає важливу роль в ефективності експерименту, оскільки експеримент зводиться до знаходження залежностей між цими факторами. В окремих випадках важко відразу виявити роль основних і другорядних факторів. При цьому необхідно виконати невеликий за об'ємом попередній пошуковий дослід.

Основним принципом встановлення ступеня важливості характеристики є її роль в досліджуваному процесі. Для цього вивчають процес залежно від якоїсь однієї змінної при решті постійних. Такий принцип проведення експерименту виправдовує себе тільки в тих випадках, коли змінних характеристик мало (1-3). Якщо ж змінних величин багато, доцільний принцип багатофакторного аналізу.

Обгрунтування засобів вимірювань — це вибір необхідних для спостережень і вимірювань приладів, устаткування, машин, апаратів і ін. Експериментатор повинен бути добре ознайомлений з вимірювальною апаратурою, що випускається в країні. Щорічно видаються каталоги на засоби вимірювання, по яких можна замовити ті, що випускаються вітчизняним приладобудуванням ті або інші засоби вимірювань. В першу чергу використовують стандартні машини і прилади, що серійно випускаються, робота на яких регламентується інструкціями, Гостами і іншими офіційними документами.

Дуже відповідальною частиною є встановлення точності вимірювань і погрішностей. Методи вимірювань повинні базуватися на законах спеціальної науки — метрології, що вивчає засоби і методи вимірювань.

При експериментальному дослідженні одного і того ж процесу (спостереження і вимірювання) повторні відліки на приладах, як правило, не однакові. Відхилення пояснюються різними причинами — неоднорідністю властивостей тіла (грунт, матеріал, конструкція і т.д.), що вивчається, недосконалістю приладів і класом їх точності, суб'єктивними особливостями експериментатора і ін. Чим більше випадкових факторів, що впливають на дослід, тим більше відхилення окремих вимірювань від середнього значення. Це вимагає повторних вимірювань, отже, необхідно знати їх потрібну мінімальну кількість. Під потрібною мінімальною кількістю вимірювань розуміють таку їх кількість, яка в даному досліді забезпечує стійке середнє значення вимірюваної величини, що задовольняє заданому ступеню точності. Встановлення потрібної мінімальної кількості вимірювань має велике значення, оскільки забезпечує отримання найбільш об'єктивних результатів при мінімальних витратах часу і засобів.

У методиці детально проектують процес проведення експерименту. На початку складають послідовність (черговість) проведення операцій вимірювань і спостережень. Потім ретельно описують кожну операцію окремо з урахуванням вибраних засобів для проведення експерименту. Велику увагу приділяють методам контролю якості операцій, що забезпечують при мінімальній (раніше встановленому) кількості вимірювань високу надійність і задану точність. Розробляють форми журналів для запису результатів спостережень і вимірювань.

Важливим розділом методики є вибір методів обробки і аналізу експериментальних даних. Обробка даних зводиться до систематизації всіх цифр, класифікації, аналізу. Результати експериментів повинні бути зведені в легкі для читання форми запису — таблиці, графіки, формули, номограми, що дозволяють швидко співставляти одержані результати.

Особлива увага в методиці повинна бути приділена математичним методам обробки і аналізу дослідних даних — встановленню емпіричних залежностей, апроксимації зв'язків між варійованими характеристиками, знаходженню критеріїв і довірчих інтервалів і ін. Далі визначають об'єм і трудомісткість експериментальних досліджень, які залежать від глибини теоретичних розробок, ступеня точності прийнятих засобів вимірювань. Чим чітко сформульована теоретична частина дослідження, тим менше об'єм експерименту. Можливі три випадки проведення експерименту.

1. Теоретично одержана аналітична залежність, яка однозначно визначає досліджуваний процес. Наприклад $y = 3e^{-2x}$. В цьому випадку об'єм експерименту для підтвердження даної залежності мінімальний, оскільки функція однозначно визначається експериментальними даними.
2. Теоретичним шляхом встановлений тільки характер залежності. Наприклад $y = ae^{-bx}$. В цьому випадку задано сімейство кривих.

Експериментальним шляхом необхідно визначити *a* і *b*. При цьому об'єм експерименту зростає.

3. Теоретично не вдалося одержати яких-небудь залежностей. Розроблені тільки припущення про якісні закономірності процесу. У багатьох випадках доцільний пошуковий експеримент. Об'єм експериментальних робіт зростає. Тут доречний метод математичного планування експерименту.

Контрольні запитання:

1. Що таке *планування експерименту*?
2. Сформулюйте етапи планування.
3. Основна ціль планування.
4. Що таке *експеримент*?
5. Що означає *фізичний* і *модельний* експеримент?
6. Визначення об'єкту вишукування.
7. Техніка планування експерименту.
8. Які задачі вирішує планування експерименту?
9. Що таке *математична модель*?
10. Що таке *параметр оптимізації*?
11. Вимоги до параметру оптимізації.
12. Що включає план-програма експерименту?
13. З чого складається методика експерименту?
14. Три випадки проведення експерименту.

Практична робота №2.
Загальні відомості про помилки вимірювань

Ціль роботи

Освоїти операції з наближеними числами. Вивчити способи визначення помилок вимірювання і міри точності.

Теоретичні пояснення

Погрішність – кількісна характеристика неоднозначності результату вимірювання. Її оцінюють виходячи зі всієї інформації, накопиченої при підготовці і виконанні вимірювань. Цю інформацію обробляють для сумісного визначення остаточного результату вимірювання і його погрішності. Остаточний результат не можна розцінювати як "дійсне значення" вимірюваної фізичної величини, оскільки в цьому немає сенсу із-за наявності погрішності.

Погрішність може бути виражена в одиницях вимірюваної величини x, - у такому разі вона позначається Δx і носить назву **абсолютної погрішності.** Проте абсолютна погрішність не відображає якості вимірювань: наприклад, абсолютна погрішність 1 мм при вимірюванні розмірів приміщення свідчить про високу якість вимірювання, та ж погрішність абсолютно неприйнятна при вимірюванні діаметру тонкого дроту.

Критерієм якості вимірювання є відношення абсолютної погрішності до остаточного результату вимірювання

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

Це відношення безрозмірне. Величину δx називають **відносною погрішністю** і використовують як в абсолютному, так і в відсотковому вираженні. Високій точності вимірювання відповідає мале значення відносної погрішності.

Основні типи погрішностей:

- **Промахи або грубі погрішності** – виникають унаслідок несправності вимірювальних приладів або помилок в експерименті, зроблених через неувагу.
- **Приладова погрішність** – систематична погрішність, присутня в результатах вимірювань, виконаних за допомогою будь-якого вимірювального приладу. Приладова погрішність, як правило, невідома і не може бути врахована. Її можна оцінити тільки шляхом порівняння показань приладу з показаннями іншого, точнішого. Іноді результати спеціально проведеного порівняння приводять в паспорті приладу, проте частіше вказують максимально можливу погрішність для приладів даного типа.
- **Модельна погрішність.** У основу будь-якого експериментального дослідження, зв'язаного з вимірюваннями, закладена модель. Модель містить фізичний опис досліджуваного об'єкту або процесу, який дозволяє скласти його математичний опис, а саме, набір функціональних співвідношень, що включають фізичні величини. Невірно побудована модель, в якій не знайшли відображення якісь важливі процеси або фактори, що впливають на результат вимірювань, також приводить до невідповідностей. Як наслідок, вимірювані в експерименті величини, що обчислюються за отриманими з моделі робочими формулами, містять погрішності, які носять назву модельних погрішностей. До розряду модельних може бути віднесена погрішність зважування на важельних вагах. Згідно закону Архімеда вага тіла і гирь зменшується через дію виштовхуючої сили повітря. Нагадаємо, що вага 1 $м^3$ повітря рівна приблизно 10Н. Для того, щоб правильно знайти масу зважуваного тіла, знову ж таки, потрібно ввести поправки на втрату ваги гирями і самим тілом.
- **Випадкові погрішності** – при повторних вимірюваннях погрішності цього типа показують свою випадкову природу. Виникають вони внаслідок безлічі причин, спільна дія яких на кожне окреме вимірювання неможливо врахувати або наперед встановити. Такими причинами можуть виявитися, наприклад, незначні коливання температури різних деталей і вузлів установки, скачки напруги, вібрації, турбулентні рухи повітря, тертя в механізмах, помилки прочитування показань приладів і т.п. Єдино можливий спосіб об'єктивного обліку випадкових погрішностей полягає у визначенні їх статистичних закономірностей, що виявляються в результатах багатократних вимірювань. Розраховані статистичні оцінки вносять в остаточний результат вимірювання.

Однією з грубих помилок, які допускають студенти, є знаходження погрішності вимірювання як

$$\Delta x = x_{експеримент} - x_{таблиця},$$

де $x_{експеримент}$ – набутого в процесі експерименту середнього значення величини

$x_{таблиця}$ – значення, узяте з довідника або розраховане виходячи з теоретичних уявлень. Метою експерименту є саме перевірка існуючих теорій і уточнення табличних значень.

З іншого боку, при виконанні учбових лабораторних робіт корисно порівняти отримані результати з довідковими табличними величинами і, у разі значної їх розбіжності, проаналізувати, які експериментальні фактори і модельні погрішності могли привести до цього.

Операції з наближеними числами. Помилки вимірювання і міри точності

Майже всі вимірювання і математичні операції дають наближені значення шуканих величин. Складові наближеного числа можуть бути *вірними, сумнівними* і *невірними.*

Постулати:

1. Якщо погрішність числа не вказана, то його абсолютна погрішність рівна половині одиниці розряду останньої цифри.
2. Розряд старшої цифри погрішності показує розряд сумнівної цифри в числі.
3. У якості значущих цифр можуть бути тільки вірні і сумнівні цифри.
4. Якщо погрішність числа не вказана - всі цифри значущі.
5. Під значущими цифрами числа розуміють послідовність цифр без урахування місця коми, а для чисел менше одиниці - без урахування нуля перед комою і подальших нулів (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Результат	Число значущих цифр	Граничні значення помилки	Δx	Максимальна помилка $(\Delta x/xi)\cdot 100\%$
3	1	2,5 - 3,5	0,5	16,7
3,5	2	3,45 - 3,55	0,05	1,4
3,55	3	3,545 - 3,555	0,005	0,14

Враховуючи, що інженерні розрахунки припускаються помилки 2-5%, то недоцільно видавати результати з більш ніж двома значущими цифрами.

1	…	…	0,5	50%
1,5	…	…	0,05	3,3%
1,55	…	…	0,005	0,3%
0,1	…	…	0,05	50%
0,15	…	…	0,005	3,3%
0,155	…	…	0,0005	0,3%

Приклад 1.1. Число 216,8 + 2,3 слід записувати як 216 + 2,3, а цифру 8 відкинути як невірну, бо тут вже цифра 6 є сумнівною.

Округлення слід проводити до найближчого *парного* числа, причому при округленні відкидають всі цифри, що стоять праворуч від розряду, до якого проводиться округлення. Останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю, якщо найближча відкидана цифра рівна і більше 5, або не змінюють, якщо вона менше 5. Якщо ж відкидають тільки одну цифру 5 (або після неї йдуть нулі), *то останню* цифру, що *залишається,* збільшують на одиницю, якщо вона непарна, і залишають без зміни, якщо вона парна.

Приклад 1.2. *До округлення:* *5,825; 5,784; 5,500; 6,500.*
Після округлення: 5,8; 5,8; 6,0; 6,0.

6. Округляти слід тільки кінцевий результат при ланцюжкових розрахунках на мікрокалькуляторах.

Складання і віднімання. Вважається, що розряд сумнівної цифри суми співпадає із старшим розрядом сумнівних цифр доданків, тому сума округляється до цього розряду. (Для більшої упевненості в доданках залиште один зайвий розряд).

Приклад 1.3. Дані числа: 1,13777·104; 2,7077·102; -1,1677·10^3. Останні цифри сумнівні. Потрібно визначити суму.

Рішення: $(113,7 + 2,7 - 11,6)\cdot 10^2 = 104,8\cdot 10^2 = 1,048\cdot 10^4$.

Тут 8 - сумнівна цифра.

7. При множенні і діленні початкові дані доцільно округляти до кількості значущих цифр, що містяться в числі з найменшою їх кількістю.

Приклад 1.4.

1. *Помножити числа 8831 і 0,024, останні цифри сумнівні:*

$$8,831\cdot 103\cdot 2,4\cdot 10^{-2} = 2,1\cdot 10^2$$

Оскільки при множенні невірної цифри на вірну виходить невірна, а при множенні сумнівної на вірну вже сумнівна, то доцільно провести округлення до цієї цифри.

2. *Розділити 67 на 0,375. Останні цифри цих чисел сумнівні:*

$$\frac{6,7\cdot 10^1}{3,75\cdot 10^{-1}} = 1,787\cdot 10^2 \approx \left(1,8\cdot 10^2\right).$$

В цьому випадку старшою сумнівною цифрою результату ділення є перша цифра після коми. Тому правильніше буде запис, що стоїть в дужках.

Звичайно, якщо перемножуються або діляться два числа, кожне з яких характеризується *n* значущими або точними цифрами, то слід враховувати максимум (*n*-1) значущих цифр в кінцевому результаті.

Приклад 1.5. Розрахуйте площу прямокутника із сторонами 28,23 і 12,59 см.

Рішення. Відповідь $28{,}23 \cdot 12{,}59 = 355{,}42$ см^2 невірний, оскількидійсне значення може знаходитися між $28{,}225 \cdot 12{,}585 = 355{,}21$ см^2 і $28{,}235 \cdot 12{,}595 = 355{,}62$ см^2.

Таким чином, шукана площа рівна $355{,}4 \pm 0{,}2$ см^2.

При використанні наближених чисел ведуть два паралельні розрахунки: один – з граничними значеннями, що приводять до мінімуму, а інший – до максимуму.

Приклад 1.6. Дано два значення: 50 ± 3 і 30 ± 2. Визначити величину відносної помилки складання, різниці, множення і ділення.

1. *Складання.* Дійсне значення лежить між 47 + 28 = 75 і 53 + 32 = 85. Відносна помилка суми рівна (85 - 75) / (85 + 75) = 10 / 160 = 0,0625 (6,25%).
2. *Віднімання.* Дійсне значення лежить між 47 - 32 = 15 і 53 - 28 = 25 ("перехресне" віднімання, тобто максимальне значення одного числа віднімається з мінімального значення іншого і мінімальне значення одного числа - з максимального значення іншого).

Відносна помилка різниці рівна

(25 - 15) / (25 + 15) = 10 / 40 = 0,25 (±25 %).

3. *Множення.* Дійсне значення лежить в межах від $47 \cdot 28 = 1316$ до $53 \cdot 32 = 1696$. Відносна помилка добутку рівна

$$\frac{1316 - 50 \cdot 30}{50 \cdot 30} = \frac{1316 - 1500}{1500} = \frac{-184}{1500} = -0{,}123\ (-12{,}3\%);$$

$$\frac{1696 - 50 \cdot 30}{50 \cdot 30} = \frac{196}{1500} = 0{,}131\ (13{,}1\%).$$

4. *Ділення.* Дійсне значення лежить між 47 / 32 = 1,469 і 53 / 28 = 1,893 ("перехресне" ділення). Відносна помилка частного

$$\frac{1{,}469 - 50/30}{50/30} = \frac{1{,}469 - 1{,}667}{1{,}667} = -0{,}119\ (-11{,}9\%);$$

$$\frac{1{,}893 - 50/30}{50/30} = 0{,}136\ (13{,}6\%).$$

Таким чином, зі всіх арифметичних операцій найбільшу помилку дає віднімання, а мінімальну - складання.

Приклад 1.7. Знайти наближену відносну помилку добутку: (40±10%)·(30±5%).

Рішення. Згідно формули (1) з [3, табл. 5.2] отримуємо (1200 ± 10% ± 5%), або шукана величина буде рівна 1200 ± 15%.

Приклад 1.8. Знайти приблизну відносну помилку частного:

[(500 + 20)·(200 +15)] / (400 – 20).

Рішення. Цьому приватному відповідає (500 + 4%)·(200 + 7,5%) / (400 - 5%).

Згідно формул (1) і (6) з [3, табл. 5.2] приблизна відносна помилка рівна 4 + 7,5 + 5 = 16,5%.

Таким чином, остаточний результат

(500 · 200/400) ± 16,5% = 250 ± 16,5% або А 250 ± 41, тобто в межах 209 і 291.

<u>Приклад 1.9.</u> Довжина, ширина і висота цеглини рівні x_1, x_2, x_3 см з відносними помилками 0,01. Знайти максимальну абсолютну помилку об'єму.

Рішення. Згідно формули (2) з [3, табл. 5.2] максимальна помилка в об'ємі рівна 0,01 + 0,01 + 0,01 = 0,03 (3%). Тоді максимальна абсолютна помилка рівна $0{,}03 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ см^3.

<u>Приклад 1.10.</u> Фізико-хімічний аналіз складу, наприклад води, супроводжується систематичними і випадковими помилками. Таріровкою встановлено, що систематична помилка дорівнює 5%. Випадкові помилки підкоряються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням σ = 15%.

Знайти:

а) ймовірність визначення складу води з помилкою, що не перевищує по абсолютній величині 30%;

б) ймовірність того, що визначуваний фізико-хімічний склад води не перевершить істинного.

Рішення. Щільність ймовірності випадкової помилки має вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{x} - x_i)}{2 \cdot \sigma^2}\right] = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{x} - 2)}{450}\right].$$

Згідно формулі (5.3.33) з [3] маємо

$$P(|x_i| < 30) = P(-30 < x_i < 30) = \left[\Phi\left(\frac{30+5}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-30+5}{15}\right)\right] = [\Phi(2{,}33) - \Phi(-1{,}67)].$$

Оскільки $\Phi(-1) = -\Phi(1)$, то $P(|x_i| < 30) = [\Phi(2{,}33) + \Phi(1{,}67)]$. З Додатку А знаходимо Φ (2,33) = 0,4901; Φ (1,67) = 0,4525. Тоді P ($|x_i|$< 30) = 0,4901 + 0,4525 = 0,9426.

Ймовірність того, що визначуваний фізико-хімічний склад води не перевершить істинного

$$P(-\infty < x_i < 0) = [\Phi(0{,}5) + \Phi(\infty)].$$

Оскільки, з Додатку А знаходимо Φ (0,5) = 0,1915, звідки $P(-\infty < x_i < 0)$ = 0,5 + 0,1915 = 0,6915.

<u>Висновок:</u> Ймовірність виконання умови (а) цього завдання рівна ≈ 94,3%, а умови *(б)* - ≈ 69,2%.

Методи виключення грубих помилок

Груба помилка може привести до появи як значення, що різко виділяється, так і значення, візуально не відмітного від основної маси спостережень. Ці помилки звичайно особливо добре помітні при розташуванні результатів розрахунків або експериментів у порядку убування значень або при побудові графіків ("відскок крапок").

Статистичні методи виявлення грубих помилок слід застосовувати лише тоді, коли додаткова інформація про якість вимірювань *або неповна, або ненадійна.*

У будь-якому випадку до виключення "підозрілих" значень з вибірки потрібно підходити з особливою обережністю.

Метод виключення при відомій σ. Нехай ми маємо вибірку $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в якій є підозріле значення x^*. Алгоритм перевірки може бути наступним:

1. Підрахуємо середнє арифметичне значення $\bar{x}_0$ по формулі

$$\bar{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i / n \tag{1.1}$$

і середню квадратичну погрішність σ з виразу

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2,\ \sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{1.2}$$

виключивши з цих розрахунків значення x^*.

2. Знайдемо відношення

$$t = \left|x^* - \bar{x}\right| / \left(\sigma\sqrt{(n+1)/n}\right). \tag{1.3}$$

3. Визначимо по таблицях вірогідність 1 - 2$\Phi(t)$ (Додатки А і В)

4. Якщо виконується умова

$$1 - 2\Phi(t) < q, \tag{1.4}$$

то вважається, що значення x^* підлягає вибраковуванню. Тут q - прийнятий в розрахунках рівень значущості, а n - об'єм вибірки. У інженерних розрахунках звичайно приймається рівень значущості: 0,1; 1,0; 5,0 %.

Вважають, що значення x^* містить грубу помилку з надійністю виведення $P = 1 - q$. Значення $t = t(P)$, для якого $1 - 2\Phi(t) = q$ і, значить, $2\Phi(t) = P$, називається *критичним значенням* відношення (1.3) при надійності P.

Приклад 1.11. Якщо $q = 0{,}01$ (1% рівень), то $P = 99$ %, критичне значення $t = t(P) = 2{,}576$ (див. Додаток В). Якщо відношення (1.3) буде більше 2,576, то значення x^*, що "вискакує", можна бракувати з надійністю висновку 0,99 (99%).

Приклад 1.12. У вибірці з 1000 результатів незалежних вимірювань з середньою квадратичною помилкою $\sigma = 14{,}2$ виявлене одне значення x^*, що "вискакує" = 120,2. Середнє з інших 1000 - 1 = 999 результатів $\bar{x} = 84{,}5$. Чи можна вважати, що значення, що "вискакує", містить грубу помилку і його потрібно виключити з подальших розглядів.

Рішення. З відношення (1.1.3) маємо

$$\mathrm{t} = |84{,}5 - 120{,}2| / (14{,}2\sqrt{1001/1000}) \approx 2{,}50.$$

За Додатком В для $t = 2{,}5$ оцінюємо вірогідність $1 - 2\Phi(t) = 0{,}01242 < 0{,}013$. Отже, з надійністю виведення $P > 0{,}987$ (98,7%) можна рахувати, що значення $x^* = 120{,}2$ слід виключити. Якщо ж Вас задовольняє тільки велика надійність (наприклад, $P = 99\%$), то виключати x^* з подальшого розгляду не можна.

Виключення помилок при невідомій σ. Якщо величина σ невідома наперед, то вона спочатку оцінюється приблизно за наслідками вимірювань [3, п. 5.4.10]. У подібному випадку замість σ використовують *емпіричний стандарт*

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}. \tag{1.5}$$

Перевірку починають з визначення відношення

$$t(x^*) = \left|x^* - \bar{x}\right| / S. \tag{1.6}$$

Далі можливі варіанти:

1. Якщо

$$t(x^*) < 2/\left(3\sqrt{q}\right) = K, \tag{1.7}$$

де q - заданий рівень значущості, те сумнівне значення x^* залишають у вибірці.

2. Відношення (1.6) порівнюють з критичним значенням $tn(P)$ з Додатку С. Якщо при даному числі n прийнятних значень відношення (1.1.6) опиниться між двома критичними значеннями при надійності P_1 і P_2 ($P_2 > P_1$), то з надійністю висновку більше за P_1 можна вважати, що значення, що "вискакує", містить грубу помилку.

3. Згідно методиці "вибраковування" по критерію Смірнова-Граббса, якщо невідомі a та σ, то можна скористатися величиною:

$$\overline{T}^* = \left|x^* - \bar{x}\right| / S^*, \tag{1.8}$$

де

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}. \tag{1.9}$$

Потім по наперед заданому рівню значущості q в Додатку D знаходимо критичне значення C_q, що відповідає числу спостережень n. Якщо $T^* > C_q$, то сумнівне значення x^* значущо відхиляється від середнього x і може бути виключено як помилкове.

4. Д. Химмельблау рекомендує спостереження x^* відкидати, якщо виконується нерівність:

$$\left|x^* - \bar{x}\right| / S^* > C, \tag{1.10}$$

де С - константа, яка знаходиться через t-критерій Ст'юдента (Додаток Е) по виразу:

$$\left[\frac{n \cdot C^2 (k + k_0 - 1)}{k\left[k + k_0 - (n \cdot C^2)/k\right]}\right]^{1/2} \approx t_{q=0{,}05}^{k+k_0-1}, \tag{1.11}$$

де $к = n - 1$ - число мір свободи оцінки дисперсії S^2; k_0 - будь-яке число додаткових мір свободи (звичайно $k_0 = 0$).

Оцінка може проводитися багато разів. Середнє квадратичне відхилення S розраховується кожного разу по вибірці, що залишилась.

<u>Приклад 1.13.</u> *Є дані вибіркових спостережень за тривалістю повного осадження забруднень в судинах Лисенко. Тривалість окремих дослідів склала, хвил.:*

10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 20.

Сумнівним здається останній результат x_{10} = 20. Чи є підстави його виключити? Перевіримо.

<u>*Варіант 1.*</u>

$$\bar{x} = \frac{10 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 14}{9} = 12{,}1;$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - 12{,}1\right)^2} \approx 1{,}27;$$

$$t = (20 - 12{,}1)^2 / 1{,}27 = 6{,}22.$$

Приймаємо рівень значущості q = 0,05. Тоді по формулі (1.7) маємо

$$K = 2/\left(3\sqrt{q}\right) = 2/\left(3\sqrt{0{,}05}\right) = 2{,}98.$$

Умова (1.7) не виконується. Значить, за цим способом значення x^* = 20 не залишається у вибірці.

<u>*Варіант 2.*</u> За Додатком С критичне значення $t_n(P)$ для n = 10 навіть при P = 0,999 рівняється 5,01, тобто t = 6,22 > t_n(0,999)= 5,01, та ми маємо право виключити значення x^* = 20 з виборки. З Додатку С слідує, що це значення можна було б не виключати тільки при n = 7 та P = 0,999, де t_7(0,999) = 6,37.

<u>*Варіант 3.*</u> При тих же умовах вибраковка за критерієм Смірнова-Граббса показує:

- середня величина, що розрахована за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{1}^{10} x_i = 12{,}9;$$

- оцінка середньоквадратичного відхилення S^* за формулою (1.9) рівняється 2,62;
- за формулою (1.8) T^* = (20,0 - 12,9)/2,62 = 2,71;
- за Додатком D навіть при рівні значущості q = 0,025 та n = 10 $C_{0,025}$ = 2,414 < T^* = 2,71.

Таким чином, гіпотеза про однорідність вишукуваного ряду відхиляється та останнє значення x^* = 20 можна вважати нетипічним.

Для остаточної обробки цього ряду розрахуємо нові значення середньої величини

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{1}^{9} x_i = 12{,}1$$

та оцінку середньоквадратичного відхилення S, але вже за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{1}{9-1}\sum_{1}^{9}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \approx 1{,}27.$$

<u>*Варіант 4.*</u> З розрахунку за варіантом 1 маємо, що $\bar{x} = 12{,}1$, а оцінка дисперсії за дев'ятьма значеннями, що залишилися, буде рівна $S = 1{,}27$.

Для рівня значущості $q = 0{,}05$, $n = 9$, $k = 9 - 1 = 8$ за Додатком Е маємо $t = 2{,}31$. Тоді за формулою (1.11) маємо:

$$\left[\frac{9 \cdot C^2 (8+0-1)}{8\left[8+0-(9\cdot C^2)/8\right]}\right]^{1/2} \approx 2{,}31^{(8+0-1)}.$$

Методом проб та помилок отримуємо $C \approx 2{,}849$.

Рішення рівняння (1.11) методом підстановки трудомістко. Відповідні алгебраїчні перетворення приводять (1.11) до виду

$$C = \left\{\frac{(k^2 + k\cdot k_0)\cdot t_q^{2(k+k_0-1)}}{n\left[k + k_0 - 1 + t_q^{2(k+k_0-1)}\right]}\right\}^{1/2}$$

або при $k_0 = 0$

$$C = \left\{\frac{k^2 \cdot t_q^{2(k-1)}}{n\left[k - 1 + t_q^{2(k-1)}\right]}\right\}^{1/2}. \tag{1.12}$$

Для наших умов за формулою (1.12) $C \approx 2{,}846$. Тоді, згідно оцінки (1.10), $\frac{20{,}0 - 12{,}1}{1{,}27} = 4{,}89 > C = 2{,}846$, тому спостереження $x_{10} = 20$ можна виключити з подальших розрахунків.

Контрольні запитання:

1. Що таке *погрішність вимірювання*?
2. Чим абсолютна погрішність відрізняється від відносної?
3. Що таке приладова (систематична) погрішність?
4. Що таке модельна погрішність?
5. Що таке випадкова погрішність і які причини приводять до її появи?
6. Операції з наближеними числами.
7. Помилки вимірювання і міри точності.
8. Методи виключення грубих помилок.

ЗМ 2. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕХНОЛОГІЇ ОЧИЩЕННЯ ВОДИ. АНАЛІЗ ТА ОФОРМЛЕННЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Практична робота №3. Основні статистичні характеристики. Обробка результатів наукових досліджень методами кореляційного та регресійного аналізів. Методи графічного зображення результатів експериментів

Ціль роботи

Вивчити основні статистичні характеристики. Освоїти обробку результатів наукових досліджень методами кореляційного і регресійного аналізу. Розглянути методи графічного зображення результатів експериментів.

Теоретичні пояснення

Теорія статистичного оцінювання розглядає два основні види оцінок: точкові та інтервальні.

Точковою оцінкою називають деяку функцію результатів спостереження $S_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значення якої в даних умовах береться за найбільше наближення до значення параметра S генеральної сукупності.

Проте при вибірці невеликого об'єму точкова оцінка S_n^* може істотно відрізнятися від дійсного значення параметру, тобто приводити до грубих помилок. Тому у разі малої вибірки часто використовують інтервальні оцінки.

Інтервальною оцінкою називають числовий інтервал (S_1^*, S_2^*), визначуваний за результатами вибірки, відносно якого можна стверджувати з визначеною, близькою до одиниці, ймовірністю, що він містить значення оцінюваного параметра генеральної сукупності.

Середні значення та їх оцінки

Випадкова величина x повністю задається **щільністю ймовірності** $\rho(x)$ (інші назви – розподіл ймовірності, розподіл величини x).

Середнє значення $\langle x \rangle$ вимірюваної величини x вказує центр розподілу, біля якого групуються результати окремих вимірювань:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Методи обчислення середніх

<u>Приклад 2.1.</u> Змішуються дві рідини об'ємом 2 і 5 літрів з концентраціями якоїсь речовини 500 і 200 мг/л відповідно. Визначити концентрацію речовини в суміші.

Рішення. За формулою (5.4.6) [3] маємо

$$\bar{x} = \sum p_i x_i / \sum p_i = (2 \cdot 500 + 5 \cdot 200)/(2+5) = 285{,}7 \text{ мг/л}, \qquad (2.1)$$

а за формулою (5.4.7) [3]

$$S_* = \sqrt{\sum p_i (x_i - \bar{x})^2 / \sum p_i}\ , \tag{2.2}$$

$$S_* = \sqrt{\frac{2(500 - 285{,}7)^2 + 5(200 - 285{,}7)^2}{2 + 5}} = 135{,}5 \text{ мг/л.}$$

Зважене стандартне відхилення визначається по формулі (5.4.8) [3]

$$S = \sqrt{\frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1) + ... + S_k^2(n_k - 1)}{\sum n_k - k}}\ . \tag{2.3}$$

<u>Приклад 2.2</u>. Нехай серія з N дослідів дала наступні значення:

$n_1 = 10,$	$\bar{x}_1 = 10,$	$(S_1 = 2),$	$S_1^2 = 4,$
$n_2 = 12,$	$\bar{x}_2 = 9,$	$(S_2 = 3),$	$S_2^2 = 9,$
$n_3 = 6,$	$\bar{x}_3 = 7,$	$(S_3 = 1),$	$S_3^2 = 1.$

Потрібно визначити вибіркове зважене середнє $\bar{x}$, зважене стандартне відхилення і відношення стандартного відхилення до середнього значення (коефіцієнт варіації V) [3, с. 80].

Рішення.

$$\bar{x} = \frac{(10 \cdot 10 + 12 \cdot 9 + 6 \cdot 7)}{28} = 8{,}93\,;$$

$$S = \sqrt{\frac{4 \cdot (10 - 1) + 9 \cdot (12 - 1) + 1 \cdot (6 - 1)}{28 - 3}} = 2{,}37\,;$$

$$S^2 = 5{,}6\,.$$

Коефіцієнт варіації, визначуваний по формулі (5.4.9) [3], рівний:

$$V = S / \bar{x}, \quad \bar{x} \neq 0, \quad V = 2{,}37 / 8{,}93 = 0{,}265.$$

<u>Приклад 2.3.</u> Дана вибірка, приведена табл. 2.1. Визначити значення медіани Me і моди Mo.

Рішення. Оскільки медіана лежить між 20-м і 21-м членами ряду, а 2+3+5+6 = 16 і 2+3+5+6+10 = 26, то *Me* належить до п'ятого класу (інтервалу). Тоді при $x_{Me} = 9$, $b = 2$, $n = 40$, $\sum m_{Me-1} = 16$, $m_{Me} = 10$ за формулою (5.4.14) [3] маємо:

$$Me = \tilde{x} = x_{Me} + b \cdot \left(\frac{0{,}5 \cdot n - \sum m_{Me-1}}{m_{Me}} \right), \tag{2.4}$$

де x_{Me} - нижня межа класу (інтервалу), що містить медіану; b - ширина медіанного інтервалу; $\sum m_{Me-1}$ - сума накопичених частот, передуючих медіанному інтервалу; m_{Me} - частота медіанного інтервалу.

$$Me = \tilde{x} = 9 + 2 \cdot \left(\frac{0{,}5 \cdot 40 - 16}{10} \right) = 9{,}8\,.$$

Таблиця 2.1 – Розрахункова виборка

Інтервал	Середина інтервалу	Частота m_i	Сума накопичених частот
1<x<3	2	2	2
3<x<5	4	3	5(2+3)
5<x<7	6	5	10(5+5)
7<x<9	8	6	16(10+6)
9<x<11	10	10	26(16+10)
11<x<13	12	9	35(26+9)
13<x<15	14	5	40(35+5)
		$n = 40$	

Для нашого випадку середнє значення вибірки за формулою (2.1)

$$\bar{x} = \frac{(2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 12 \cdot 9 + 14 \cdot 5)}{40} = 9{,}3\,.$$

Величину *Mo* підрахуємо за формулою (5.4.15) [3]:

$$Mo = x_{Mo} + b \cdot \frac{m_{Mo} - m_{Mo-1}}{2 \cdot m_{Mo} - m_{Mo-1} - m_{Mo+1}}, \qquad (2.5)$$

де x_{Mo} - нижня межа інтервалу, що містить моду; b - величина модального інтервалу; m_{Mo} - частота модального інтервалу; m_{Mo-1} - частота інтервалу, передуючого модальному; m_{Mo+1} - частота інтервалу, наступного за модальним.

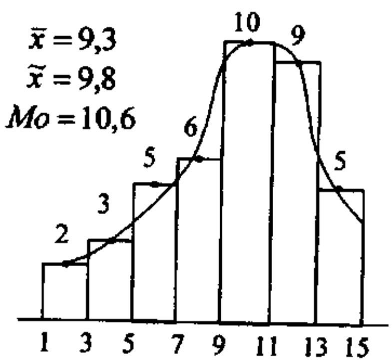


Рис. 2.1

$$Mo = 9 + \frac{2 \cdot (10 - 6)}{2 \cdot 10 - 6 - 9} = 10{,}6\,.$$

Тут *Mo* є максимумом апроксимуючої параболи, що проходить через точки: (x_{Me-1}, m_{Me-1}); (x_{Me}, m_{Me}); (x_{Me+1}, m_{Me+1}). Для негативно-асиметричного унімодального розподілу справедливо нерівність $\bar{x} < \tilde{x} < Mo$ (рис. 1.2.1). Для симетричного унімодального безперервного розподілу значення *Mo, Me* і $\bar{x}$ *співпадають*.

Теоретичні середні (моменти розподілу)

Третій центральний момент служить для характеристики *асиметрії* (або *скошеності)* розподілу (рис. 2.2) і визначається за формулою

$$\mu_3 = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^3 / (n-1)\,. \qquad (2.6)$$

Четвертий центральний момент служить для характеристики "крутизни" розподілу (рис. 2.3)

$$\mu_4 = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^4 / (n-1)\,. \qquad (2.7)$$

На практиці зручніше користуватися безрозмірними величинами, наприклад, в даному випадку - *коефіцієнтом асиметрії* A_x

$$A_x = \mu_3 / S_x^3 \qquad (2.8)$$

та *ексцесом*

$$C_x = (\mu_4 / S_x^4) - 3\,. \qquad (2.9)$$

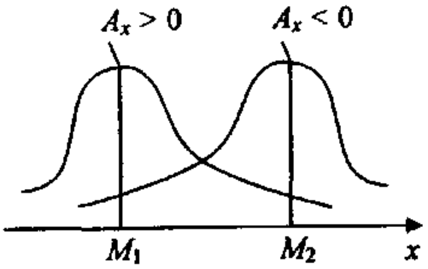


Рис. 2.2

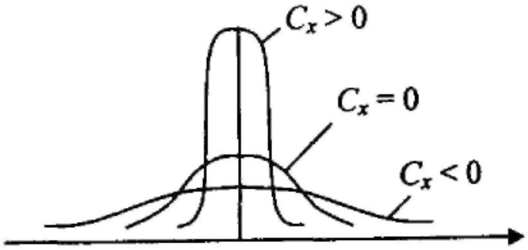


Рис. 2.3

<u>*Приклад 2.4*</u>*. Для умов прикладу 2.3 в нашому випадку маємо:*

$$\sum_1^n (x_i - \bar{x})^3 = 2\cdot(2-9{,}3)^3 + 3\cdot(4-9{,}3)^3 + 5\cdot(6-9{,}3)^3 + 6\cdot(8-9{,}3)^3 +$$

$$+10\cdot(10-9{,}3)^3 + 10\cdot(10-9{,}3)^3 + 9\cdot(12-9{,}3)^3 + 5\cdot(14-9{,}3)^3 = -717{,}8.$$

Тоді μ_3 = -717,8/(40 - 1) = -18,4,

Відкіля за формулою (2.8) при S = 3,34 $\quad A_x$ = -18,4/3,34^3 = -0,494.

Тоді μ_4 = 11577,4 / 39 = 296,8, відкіля за формулою (2.9) маємо

$$C_x = (296{,}8/3{,}34^4) - 3 = -0{,}615.$$

Помилка в оцінці показника асиметрії:

$$S_A = \sqrt{\frac{6\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+3)}}. \qquad S_A = \sqrt{\frac{6\cdot(40-1)}{(40+1)\cdot(40+3)}} = 0{,}364, \qquad (2.10)$$

а розсіяння A_x і S_A визначаються дисперсіями:

$$S_{Ax} = \sqrt{6/(n+3)}, \qquad (2.11) \qquad S_{SA} = 2\cdot\sqrt{6/(n+5)}, \qquad (2.12)$$

$$S_{Ax} = \sqrt{6/(40+3)} = 0{,}374, \qquad S_{SA} = 2\cdot\sqrt{6/(40+5)} = 5{,}480.$$

Якщо в формулах (2.8) та (2.9) замість 5 допустити S_* = 3,30, то A_{x*} = -0,512, а C_{x*} = -0,497.

Оцінки довірчих меж для дійсного значення виміряної величини

<u>*Приклад 2.5.*</u> *Нехай для сорока вимірювань, результати яких приведені в прикладі 2.3, відомо, що S_* = 3,30, $\bar{x}$ =9,3. Потрібно оцінити дійсне значення вимірюваної величини X з надійністю P = 0,95.*

Рішення. За Додатком В для $P = 2\Phi(t)$ = 0,95 знаходимо t = 1,960. Отже, з надійністю 0,95 по залежності (5.4.50) [3] можна вважати, що довірча оцінка має вигляд

$$|X - \bar{x}| < t(P)\cdot\sigma/\sqrt{n}\,, \qquad (2.13)$$

$$|X - \bar{x}| = |X - 9{,}3| < 1{,}960\cdot(3{,}3/\sqrt{40}) = 1{,}02,$$

тобто значення X лежить в інтервалі (8,28; 10,32) або $X = \bar{x} \pm 1{,}02$.

Приклад 2.6. Для умов попереднього прикладу за Додатком Е маємо $t(0{,}95;\ 40 - 1) = 2{,}023$. Тоді за формулою (5.4.52) [3]

$$|X - \bar{x}| < t(P;k) \cdot S / \sqrt{n-1}\,, \qquad (2.14)$$

$$|X - \bar{x}| < 2{,}023 \cdot (3{,}3 / \sqrt{40-1}) = 1{,}07,$$

тобто. значення X лежить в інтервалі $X = 9{,}3 \pm 1{,}07$.

За правилом трьох сигм (5.4.54) [3] при невідомій σ

$$|X - \bar{x}| < 3S / \sqrt{n}\,, \qquad (2.15)$$

а для нашого випадку

$$X = 9{,}3 \pm 3 \cdot 3{,}3/\sqrt{40} \approx 9{,}3 \pm 1{,}6.$$

Приклад 2.7. *У циліндрі з висотою стовпа води 0,7-1,0 м визначався час осадження окремих частинок піску. Розрахункові значення швидкості осадження (v) приведені в табл. 2.2. Потрібно знайти розподіл статистичної ймовірності швидкості осадження (гідравлічної крупності) частинок піску фільтруючого матеріалу. Провести оцінку математичного очікування і середньоквадратичного відхилення. Оцінити найбільш вірогідну швидкість осадження частинок піску.*

Рішення.

1. Діапазон зміни швидкостей осадження від $V_{\max} = 36{,}1$ до $V_{\min} = 15{,}1$ ділимо на n інтервалів. Кількість інтервалів можна вибирати по напівемпіричній формулі

$$n = 1 + 3{,}32 \cdot \lg N = 1 + 3{,}32 \cdot \lg 100 \approx 7{,}64\,, \qquad (2.16)$$

де N - число частинок, для яких проводилося визначення швидкостей осадження (у нашому випадку $N = 100$).

Число інтервалів n, одержане за формулою, округляється до найближчого цілого (приймаємо $n = 7$).

2. Визначається довжина інтервалу варіаційного ряду

$$\Delta = (x_{\min} - x_{\max}) / n = (36{,}1 - 15{,}1) / 7 = 3{,}0\,.$$

Таблиця 2.2 - Результати визначення швидкостей осадження частинок піску

№ п.п.	V, см/с	№ п.п.	V, см/с	№ п.п.	V, см/с	№ п.п.	V, см/с	№ п.п.	V, см/с
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22,4	21	22,4	41	23,2	61	25,0	81	24,1
2	21,0	22	21,0	42	27,1	62	24,1	82	21,7
3	25,0	23	26,0	43	30,9	63	31,0	83	21,7
4	22,4	24	21,0	44	24,1	64	25,0	84	28,3
5	15,1	25	34,2	45	20,3	65	23,2	85	26,0
6	23,2	26	32,5	46	20,1	66	24,1	86	22,4
7	16,7	27	31,0	47	19,7	67	24,1	87	22,4
8	19,1	28	31,0	48	21,7	68	29,6	88	26,0
9	26,0	29	26,0	49	25,0	69	28,3	89	21,7
10	24,1	30	28,3	50	24,1	70	27,1	90	21,7
11	23,2	31	28,3	51	26,0	71	27,1	91	21,7
12	27,1	32	21,0	52	26,0	72	28,3	92	26,0

Продовження таблиці 2.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	19,7	33	29,5	53	24,1	73	23,2	93	27,1
14	19,7	34	28,3	54	21,7	74	26,0	94	21,7
15	21,0	35	26,0	55	25,0	75	26,0	95	22,4
16	26,0	36	25,0	56	24,1	76	25,0	96	22,4
17	32,5	37	23,2	57	29,5	77	36,1	97	30,9
18	28,3	38	34,2	58	25,0	78	30,9	98	28,3
19	24,1	39	23,2	59	31,0	79	28,3	99	27,1
20	26,0	40	20,3	60	27,1	80	27,1	100	26,0

3. Визначається кількість m числа частинок піску, швидкості яких потрапили у відповідні інтервали (x_{m-1}, x_m).

4. Визначається статистична ймовірність (частість) попадання швидкості осадження у відповідний інтервал

$$P_i = m_i / N . \tag{2.17}$$

Результати розрахунків представлені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 - Визначення частості попадання

№ інтер-вала	Інтервали варіаційних рядів	Число попадань в інтервал m_i	Частість $P_i = m_i / N$	Середина інтервалу $\bar{x}_i$	Сумарна частість
1	15,1-18,1	2	0,02	16,6	0,02
2	18,1-21,1	12	0,12	19,6	0,14
3	21,1-24,1	23	0,23	22,6	0,37
4	24,1-27,1	31	0,31	25,6	0,68
5	27,1-30,1	20	0,20	28,6	0,88
6	30,1-33,1	9	0,09	31,6	0,97
7	33,1-36,1	3	0,03	34,6	1,00

За результатами розрахунків побудуємо гістограму розподілу швидкості осадження частинок піску (рис. 2.4). З рисунка видно, що найбільш вірогідне значення швидкості осадження - це 25,0-26,0 см/с (25,6 см/с). Статистична ймовірність появи даної випадкової величини складає 31,0 %.

Визначимо параметри статистичного розподілу:

- математичне очікування $\bar{x}$ і стандартне відхилення S по формулах (1.1) та (1.5)

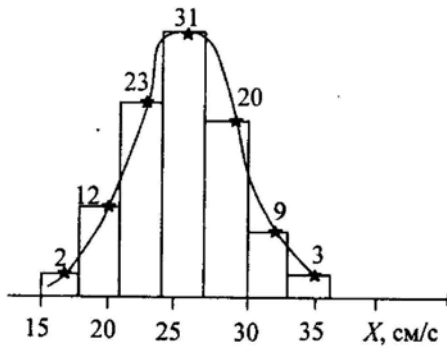


Рис. 2.4 - Гістограма розподілу швидкості осідання часток піску

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i P_i ,$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 P_i} .$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i P_i = 0{,}02 \cdot 16{,}6 + 0{,}12 \cdot 19{,}6 + 0{,}23 \cdot 22{,}6 +$$

$$+ 0{,}31 \cdot 25{,}6 + 0{,}20 \cdot 28{,}6 + 0{,}09 \cdot 31{,}6 + 0{,}03 \cdot 34{,}6 = 25{,}4.$$

$$\bar{x} = 25{,}4 \text{ см/с}.$$

$$S = \sqrt{\begin{gathered}0{,}02 \cdot (16{,}6 - 25{,}4)^2 + 0{,}12 \cdot (19{,}6 - 25{,}4)^2 + 0{,}23 \cdot (22{,}6 - 25{,}4)^2 + 0{,}31 \cdot (25{,}6 - 25{,}4)^2 + \\ + 0{,}20 \cdot (28{,}6 - 25{,}4)^2 + 0{,}09 \cdot (31{,}6 - 25{,}4)^2 + 0{,}03 \cdot (34{,}6 - 25{,}4)^2\end{gathered}} =$$

$$= \sqrt{15{,}715} = 3{,}96$$

$$S = 3{,}96 \text{ см/с} \approx 4{,}0 \text{ см/с}.$$

Згідно правила трьох сигм (3σ), математичне очікування швидкості осідання лежить в межах:

$$\bar{x} - \frac{3S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \bar{x} + \frac{3S}{\sqrt{n}}, \text{ тобто в нашому випадку } 24{,}2 \leq \bar{X} \leq 26{,}6.$$

Величину математичного очікування можна оцінити і за формулою (2.15).

Порівняння дисперсій і середніх значень

Порівняння дисперсій

Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей

Приклад 2.8. По двох незалежних вибірках n_1 = 10 і n_2 = 15, витягнутим з нормальних сукупностей X_1 и X_2, знайдені виправлені вибіркові дисперсії S_{x1}^2 = 0,86 и S_{x2}^2 = 0,43. При q = 0,05 перевірити H_o: $D(X_1) = D(X_2)$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X_1) > D(X_2)$.

Рішення. $F_{спостер.}$ = 0,86 / 0,43 = 2,0, оскільки H_1: $D(X_1) > D(X_2)$ - критична область правостороння. За Додатком F $F_{кр}$. = 2,65 при q = 0,05; k_1 = 10-1 = 9; k_2 = 15-1 = 14.

Оскільки $F_{спостер.} < F_{кр.}$, то вибіркові генеральні дисперсії розрізняються незначущо.

Приклад 2.9. Щільність зерен в шматку шихти, г/м^3, узятої з двох незалежних вибірок X_1 і X_2, приведена нижче:

x_1	2,41	2,38	2,43	2,50	2,44	2,41	2,52
x_2	2,65	2,70	2,73	2,66	2,63	2,71	2,73

При q = 0,1 перевірити H_o: $D(X_1) = D(X_2)$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X_1) \neq D(X_2)$.

Рішення. За формулою (1.1) визначаємо $\bar{x}_i$, а за формулою (1.5) – S_i. Тоді $\bar{x}_1$ = 2,44; $\bar{x}_2$ = 2,69; S_1^2 = 0,05; S_2^2 = 0,04. При цьому $F_{набл.}$ = 0,05 / 0,04 = 1,25. Критична область двостороння, оскільки конкуруюча гіпотеза має вигляд $D(X_1) - D(X_2)$. За цих умов за правилом № 2 [3, с. 104] при k_1 = 7-1 = 6 і k_2 = 7-1 = 6 і q_1= q / 2 = 0,1 / 2 = 0,05 та за Додатком F маємо $F_{кр}$ = 4,28 > $F_{спостер.}$, тобто гіпотезу H_1 відкидаємо, оскільки обидва вимірювання були виконані з однаковою точністю. Можна переходити до порівняння середніх (див. приклади 2.12 и 2.14).

Порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральною дисперсією нормальної сукупності

<u>Приклад 2.10.</u> По трьох незалежних вибірках однакового об'єму n = 11 з нормальних генеральних сукупностей визначені вибіркові дисперсії: S_1^2 *= 0,25;* S_2^2 *= 0,36;* S_3^2 *= 0,49.*

Потрібно: а) при рівні значущості q = 0,05 перевірити нульову гіпотезу про однорідність дисперсій; б) оцінити генеральну дисперсію; в) розрахувати інтервальні оцінки дисперсій.

Рішення: А. Розрахункове значення критерію Кохрена:

$$G_{набл.} = S_{\max}^2 / \sum_{i=1}^{l} S_i^2 = \frac{0{,}49}{(0{,}25 + 0{,}36 + 0{,}49)} = 0{,}4454. \qquad (2.18)$$

За Додатком Н при рівні значущості q = 0,05, числі мір свободи k = 11 - 1 = 10 і числі вибірок l = 3 критична точка $G_{кр.}$(0,05; 10; 3) = 0,6025. Оскільки ($G_{набл.}$ < $G_{кр}$), вважаємо, що виправлені вибіркові дисперсії розрізняються незначуще (тобто дисперсії однорідні).

Б. Враховуючи однорідність дисперсій S_1^2, S_2^2 и як оцінку генеральної дисперсії приймаємо середню арифметичну виправлену дисперсію:

$$D_r = (0{,}25 + 0{,}36 + 0{,}49)/3 \approx 0{,}37. \qquad (2.19)$$

В. За Додатком G $\chi_{q/2}^2$ = 20,5, а $\chi_{1-q/2}^2$ = $\chi_{0,975}^2$ = 3,25. Тоді інтервальну оцінку дисперсії можна визначити з умови

$$\frac{S_x^2 \cdot k}{\chi_{q/2}^2} \le \sigma_x^2 \le \frac{S_x^2 \cdot k}{\chi_{1-q/2}^2}, \qquad (2.20)$$

де σ_x^2 - дисперсія змінної *X;* $\chi_{q/2}^2$ - значення χ^2-розподілу для рівня значущості *q*/2; $\chi_{1-q/2}^2$ - значення χ^2-розподілу при рівні значущості (*1-q/*2); k = n - 1 - число ступенів свободи; S_x^2 - виправлена вибіркова дисперсія.

$$\frac{0{,}25 \cdot 10}{20{,}5} \le \sigma_{x1}^2 \le \frac{0{,}25 \cdot 10}{3{,}25}; \;\; 0{,}12 \le \sigma_{x1}^2 \le 0{,}77; \; 0{,}18 \le \sigma_{x2}^2 \le 1{,}11; 0{,}24 \le \sigma_{x3}^2 \le 1{,}51.$$

Порівняння середніх

Порівняння двох середніх генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі (великі незалежні вибірки n_i > 30)

<u>Приклад 2.11.</u> Є дві незалежні вибірки n_1 = 50 і n_2 = 60, витягнуті з нормальних генеральних сукупностей концентрації зважених речовин в річці до і після населеного пункту. Знайдені вибіркові середні: $\bar{x}_1$ *=10 мг/л і* $\bar{x}_2$ *= 13 мг/л. Генеральні дисперсії відомі:* $\sigma_{1(x_1)}^2$ = 8, $\sigma_{1(x_2)}^2$ = 10. *Потрібно при рівні значущості q = 0,01 перевірити нульову гіпотезу H_o:* $M(x_1) = M(x_2)$ *проти гіпотези:*

а) H_1: $M(x_1) \neq M(x_2)$; *б)* H_1: $M(x_1) < M(x_2)$.

Рішення: Знайдемо спостережуване значення критерію:

$$z_{набл.} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2_{(x_1)}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{(x_2)}}{n_2}}} = \frac{10 - 13}{\sqrt{\frac{8}{50} + \frac{10}{60}}} = -5{,}25. \quad (2.21)$$

За умовою (*а*) конкуруюча гіпотеза має вигляд H_1: $M(x_1) \neq M(x_2)$, тому критична область двостороння. Знайдемо праву критичну точку з рівності

$$\Phi(z_{кр}) = (1-q)/2 = (1-0{,}01)/2 = 0{,}495. \quad (2.22)$$

За таблицею функції Лапласа (Додаток В) знаходимо $z_{кр}$ = 2,58. Оскільки $\left|z_{спостер.}\right| > z_{кр}$, то, відповідно до правила 1, нульову гіпотезу відкидаємо, тобто вибіркові середні розрізняються значуще.

По умові (*б*) конкуруюча гіпотеза має вид H_1: $M(x_1) < M(x_2)$. Знайдемо допоміжну точку з рівності

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2q)/2 = (1-2 \cdot 0{,}01)/2 = 0{,}490. \quad (2.23)$$

За таблицею Лапласа (Додаток А) знаходимо $z_{кр}$ = 2,33. Оскільки $z_{спостер.}$= –5.25 < –2,33, то за правилом 3 нульову гіпотезу відкидаємо і вважаємо, що $M(x_1) < M(x_2)$.

Після знаходження $z_{спостер.}$ за формулою (2.21) задаємо бажану ймовірність виведення *P* і за нею знаходимо в Додатку В відповідне значення *t(P)* (наприклад, при *P* = 0,99 знаходимо *t* = 2,576, а при *P* = 0,95 визначаємо *t* = 1,960). Тоді, якщо $\left|z_{спостер.}\right|$ > *t(P),* то розбіжність середніх значень можна вважати значущою з надійністю виведення *P*.

Порівняння двох середніх нормальних генеральних сукупностей, дисперсії яких невідомі і однакові (малі незалежні вибірки n_i < 30)

<u>Приклад 2.12.</u> Дані дві незалежні малі вибірки n_1 = 16 і n_2 = 20 з нормальної генеральної сукупності X_1 і X_2 з вибірковими середніми $\bar{x}_1$ = 42 і $\bar{x}_2$ = 40 та виправленими дисперсіями S^2_{x1}= 0,70 і S^2_{x2}= = 0,37. Потрібно при рівні значущості q = 0,05 перевірити гіпотезу H_o: $M(x_1) = M(x_2)$ проти альтернативної гіпотези:

а) H_1: $M(x_1) \neq M(x_2)$; *б)* H_1: $M(x_1) > M(x_2)$.

Рішення: Виправлені дисперсії різні, тому заздалегідь перевіримо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, використовуючи критерій Фішера (див. приклади 2.8, 2.9).

Знайдемо відношення більшої дисперсії до меншої:

$F_{розр.}$ = 0,70 / 0,37 = 1,89.

Враховуючи, що дисперсія S^2_{x1} значно більша S^2_{x2}, приймаємо як конкуруючу гіпотезу H_1: $D(x_1) > D(x_2)$. Тут критична область - правостороння.

За Додатком F, при рівні значущості q = 0,05 і мірах свободи $k_1 = n_1$ - 1 = 16 - 1 = 15 і $k_2 = n_2$ - 1 = 20 - 1 = 19 знаходимо критичну точку $F_{кр}$ (0,05; 15; 19) = 2,23.

Оскільки $F_{розр.} < F_{кр}$, то приймається гіпотеза H_0 про рівність генеральних дисперсій. Якщо гіпотеза про рівність дисперсій підтверджується, то можна порівняти середні.

Визначимо розрахункове значення критерію Ст'юдента по формулі

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_{x1}^2 + (n_2 - 1)\cdot S_{x2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \qquad (2.24)$$

Якщо $$\left|T_{спост.}\right| < t_{двост.кр.}(q; k = n_1 + n_2 - 2), \qquad (2.25)$$

то гіпотеза H_0 приймається, якщо не виконується, то приймається конкуруюча гіпотеза H_1.

$$T_{розр.} = \frac{42 - 40}{\sqrt{(16 - 1)\cdot 0{,}70 + (20 - 1)\cdot 0{,}37}} \cdot \sqrt{\frac{16 \cdot 20 \cdot (16 + 20 - 2)}{16 + 20}} = 8{,}30.$$

За умовою (*а*) конкуруюча гіпотеза має вид H_1: $M(x_1) \neq M(x_2)$, тому при рівні значущості 0,05 і числі мір свободи $k = n_1 + n_2 - 2)$ = 16 + 20 - 2 = 34 знаходимо за Додатком критичну точку $t_{двост.кр.}$ (0,05; 34) = 2,032. Оскільки $T_{розр.}$ = 8,3 > $t_{двост.кр.}$. = 2,032, тобто умова (2.25) не виконується, то вважаємо, що значення $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$ відрізняються значущо.

За умовою (*б*) конкуруюча гіпотеза має вид H_1: $M(x_1) > M(x_2)$, тому при q =- 0,05 і k = 34 знаходимо за Додатком E критичну точку $t_{правост.кр.}$= 1,69. Оскільки умова (2.25) не виконується, вважаємо, що $\bar{x}_1$ дійсно більше $\bar{x}_2$.

Перевірка гіпотези про рівність середніх

Методи порівняння середніх значень, викладені в прикладах 2.11 та 2.12, застосовні і для вирішення задачі перевірки гіпотези про рівність середніх.

Порівняння вибіркової середньої з гіпотетичної генеральної середньої нормальної сукупності (дисперсія генеральної сукупності невідома)

<u>*Приклад 2.13.*</u> *По вибірці об'ємом n = 6, витягнутої з нормальної генеральної сукупності, знайдене вибіркове середнє межі міцності при стискуванні зразків-балочок* $\bar{x}$ *= 431,1 кгс/см2 і виправлене середнє квадратичне відхилення S = 4,71. Потрібний при рівні значущості q = 0,05 перевірити гіпотезу* H_0*: a =* a_0 *= 435 при конкуруючій гіпотезі* H_1*:* $a \neq a_0$ *= 435.*

Рішення: Находимо критерій перевірки T за формулою

$$T = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/S, \qquad (2.26)$$

де S - виправлене среднє квадратичне відхилення, що визначається за формулою (1.5), має розподіленняСт'юдента з $k = n - 1$ ступенями свободи.

$$T = \frac{(431{,}1 - 435{,}0)\sqrt{6}}{4{,}71} = -2{,}03.$$

За Додатком Е при $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$ находимо критичну точку $t_{двост.кр.}(0{,}05;\ 5) = 2{,}57$. Оскільки виконується умова

$$T_{спост.} < t_{двост.кр.}(q;\ k = n-1), \tag{2.27}$$

то гіпотеза H_0: $a = a_0$, приймається, тобто приходимо до висновку, що вибіркове среднє $\bar{x}$ = 431,1 трохи відрізняється від гіпотетичної генеральної середньої a_0 = 435.

Порівняння двох середніх нормальних генеральних сукупностей з невідомими дисперсіями (залежні вибірки)

Приклад 2.14. Знайдені наступні межі міцності при розколюванні двох складів шихти, МПа:

x_1	20,1	19,9	20,3	18,3	21,0	20,7	20,3
x_2	22,7	23,0	22,9	22,9	21,3	22,4	21,0

При рівні значущості q = 0,05 встановити, значущо або незначущо розрізняються середні значення межі міцності. Передбачається, що розподіл нормально.

Рішення. Знайдемо різницю, віднімаючи з чисел першого рядка числа другої. Одержимо:

d_i: - 2,6; - 3,1; - 2,6; - 4,5; - 0,3; - 1,7; - 0,7.

Знайдемо вибіркову середню, враховуючи, що $\sum d_i$ = -15,5; $\bar{d}$ = -15,5 / 7 = -2,2. Тоді виправлене середнє квадратичне відхилення буде рівне

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \left[\sum d_i\right]^2 / n}{n-1}} = 1{,}44, \tag{2.28}$$

а спостережуване значення критерію $T_{спост}$

$$T_{спост} = \bar{d}\sqrt{n} / S_d = -2{,}2\sqrt{7} / 1{,}44 = -4{,}03. \tag{2.29}$$

По Приложению Е находим критическую точку

$$t_{двост.кр.}(0{,}05;\ 6) = 2{,}45 < \left|T_{спост.}\right| = -4{,}03. \tag{2.30}$$

Так как условие $\left|T_{спост.}\right| < t_{двост.кр.}$. не выполняется, считаем, что средние значения измерений предела прочности отличаются значимо.

Перевірка гіпотези нормальності закону розподілу випадкової величини

Приклад 2.15. З урахуванням вихідних даних, приведених в прикладі 2.3, і подальших розрахунках в прикладі 2.4, маємо: n = 40; l = 7; A_x = -0,494; C_x = -0,615; A_x^* = -0,512; C_x^* = -0,497; x = 9,3; S^* = 3,30; S = 3,25. Потрібно перевірити гіпотезу нормальності розподілу випадкової величини наближеним методом.

Рішення. Помилку оцінки показника асиметрії A_x визначимо за формулою

$$S_{Ax} = \sqrt{\frac{6\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+3)}} = \sqrt{\frac{6\cdot(40-1)}{(40+1)\cdot(40+3)}} = \sqrt{\frac{6{,}39}{41{,}43}} = 0{,}133, \tag{2.31}$$

а помилку оцінювання C_x - за формулою

$$S_{Cx} = \sqrt{\frac{24 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n-1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 38 \cdot 37}{39^2 \cdot 43 \cdot 45}} = 0{,}107 . \quad (2.32)$$

Оскільки $\dfrac{|A_x = -0{,}494|}{(2...3)} \approx (0{,}165...0{,}267) > S_{Ax} = 0{,}133$,

а $\dfrac{|C_x = -0{,}615|}{(2...3)} \approx (0{,}205...0{,}308) > S_{Cx} = 0{,}107$,

то можна поставити під сумнів нормальність закону розподілу досліджуваної величини.

Застосовний критерій χ^2, для чого вихідні дані і частину розрахунків представимо в табличній формі.

Для застосування критерію χ^2 об'єднаємо крайні інтервали, щоб число даних в кожному інтервалі було не менше п'яти. Одержані дані представлені в перших двох стовпцях табл. 2.4. Крайні інтервали узяті нескінченними. У третьому стовпці підраховані відношення

$$t_i = \frac{x_i - x}{S} = \frac{x_i - 9{,}3}{3{,}25} . \quad (2.33)$$

Таблиця 2.4 – Перевірка нормальності закону розподілення

Інтервали	m_i	t_i	$\Phi(t_i)$	p_i	m_i - np_i	$(m_i$ - $np_i)2 / np_i$
-∞ ... 5	5	-1,323	-0,4071	0,0929	1,284	0,444
5 ... 7	5	-0,708	-0,2605	0,1466	-0,864	0,127
7 ... 9	6	-0,092	-0,0367	0,2238	-2,952	0,973
9 ... 11	10	0,523	0,1991	0,2358	0,568	0,034
11 ... 13	9	1,138	0,3725	0,1734	2,064	0,614
13 ... +∞	5	∞	0,5000	0,1275	-0,100	0,002
	Σ 40			1,0000		2,194 = χ^2_p

Так, для правого кінця, наприклад, першого інтервалу, це буде t_1 = (5 - 9,3)/3,25 = - 1,323. У четвертому стовпці приведені відповідні значення інтеграла ймовірності $\Phi(t_i)$ з Додатку А. По значенням $\Phi(t_i)$ в п'ятому стовпці обчислена ймовірність p_i, як різниці відповідних значень, наприклад $\Phi(t): p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$, p_2 = -0,2605 - (-0,4071) = 0,1466. При обчисленні ймовірності p_1 враховано, що $\Phi(-\infty)$ = - 0,5. Порівняння χ^2_p= 2,194 с $\chi^2_{кр.}$, одержаних при числі мір свободи k = 6 - 3 = 3 і рівні значущості q = 0,05, показує, що немає підстави сумніватися в нормальності розподілу, оскільки $\chi^2_p = 2{,}194 < \chi^2_{кр.} = 7{,}8$.

Визначення теоретичного закону розподілу

<u>Приклад 2.16.</u> *Для умов прикладу 2.6 визначити теоретичний закон розподілу швидкості осадження зерен піску фільтруючого матеріалу.*

Попередній аналіз одержаної гістограми показує, що теоретичним законом розподілу може бути нормальний закон (закон Гауса).

Для перевірки гіпотези про те, що швидкість осадження підпорядкована нормальному закону розподілу, використовуємо один з найбільш поширених критеріїв - критерій Пірсону (χ^2), який визначається за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^{k} \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}, \tag{2.34}$$

де m_i - число попадань у відповідний інтервал; n - об'єм вибірки (у нашому випадку n = 100); P_i - ймовірність попадання в *i-й* інтервал; k - кількість інтервалів.

Критерій χ^2 передбачає порівняння кількості елементів, що потрапили в *i-й* інтервал з вибірки об'ємом n з кількістю елементів, які в середньому потрапляли б в цей інтервал з вибірки того ж об'єму, у разі вірності висунутої нами гіпотези про закон розподілу. Іншими словами, порівнюється відносна частота попадання в інтервал з гіпотетичною ймовірністю попадання в нього.

Критерій Пірсону має число мір свободи, рівне $n = k - l - 1$, де l - кількість оцінюваних параметрів в законі розподілу.

При нормальному законі розподілу оцінюється дисперсія і математичне очікування, тобто $l = 2$.

При використанні критерію χ^2 необхідно враховувати, що інтервали з кількістю елементів менше 10 необхідно об'єднувати з сусідніми. При цьому кількість мір свободи, природно, зменшується.

Раніше одержаний варіаційний ряд (табл. 2.3) перетворюється в новий (табл. 2.5).

Таблиця 2.5 - Перетворений варіаційний ряд

№ інтервалу	Інтервали варіаційних рядів	Число попадань в інтервал, m	Частість, $P_i = m_i / n_i$
1	15,1-21,1	14	0,14
2	21,1-24,1	23	0,23
3	24,1-27,1	31	0,31
4	27,1-30,1	20	0,20
5	30,1-36,1	12	0,12

Розрахунки, пов'язані з перевіркою гіпотези про нормальний розподіл, проведемо в табл. 2.6.

Таблиця 2.6 – Перевірка гіпотези нормальності розподілу

m_i	t_{i-1}	t_i	$\Phi(t_{i-1})$	$\Phi(t_i)$	$P_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$	$n \cdot \overline{P}$	$m_i - n\overline{P}$	$(m_i - n\overline{P})^2$	$(m_i - n\overline{P})^2 / nP$
14	-2,60	-1,09	-0,495	-0,362	0,133	13,3	0,7	0,49	0,037
23	-1,09	-0,33	-0,362	-0,133	0,229	22,9	0,1	0,01	0,00
31	-0,33	0,43	-0,133	0,166	0,299	29,9	1,1	1,21	0,04
20	0,43	1,19	0,166	0,383	0,217	21,7	-1,7	2,89	0,133
12	1,19	2,70	0,383	0,496	0,113	11,3	0,7	0,49	0,043
100						Σ=99			Σ = 0,253

Тут t_i і t_{i-1} - нормовані випадкові величини, визначувані за формулою:

$$t = (x_i - \overline{x}) / \sigma ,$$

Наприклад, (15,1 - 25,4) / 3,96 = -10,3 / 3,96 = -2,6;
(21,1 - 25,4) / 3,96 = -4,3 / 3,96 = -1,09.

x_i; x_{i-1} - нормовані межі інтервалів варіаційних рядів; $\Phi(t_i)$; $\Phi(t_{i-1})$ - значення нормованих функцій Лапласа від t_i і t_{i-1}, визначаються по таблицях (Додатки А і В); $P_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$ - гіпотетична ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (t_{i-1} - t_i); nP - гіпотетична частота попадання випадкової величини у відповідний інтервал.

Порівняння розрахункової величини критерію χ^2 = 0,253 з критичним його значенням $\chi^2_{кр.}$ = 5,99, одержаним для заданого рівня значущості q = *5%* і числа мір свободи n = 5 - 2 - 1 =2 говорить про те, що $\chi^2 < \chi^2_{кр.}$ і що швидкість осадження зерен фільтруючого матеріалу має нормальний розподіл ймовірності генеральної сукупності, який можна виразити наступною формулою:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_i - \overline{x})^2}{2\sigma^2} \right]. \qquad (2.35)$$

Після підстановки $\overline{x}$ = 25,4 і σ = 3,96 отримаємо

$$y = \frac{1}{3{,}96\sqrt{2 \cdot 3{,}14}} \exp\left[-\frac{(x_i - 25{,}4)^2}{2 \cdot 3{,}96^2} \right] = 0{,}1 \cdot \exp\left[-0{,}032 \cdot (x - 25{,}4)^2 \right],$$

де y - щільність ймовірності розподілу випадкової величини; x - випадкова величина (швидкість осадження).

Обробка результатів наукових досліджень методами кореляційного і регресійного аналізів

Обробка результатів експерименту

Експеримент проводиться відповідно до вибраної матриці планування, або плану. План є множина з N точок *K-мірного* факторного простору.

На цьому просторі діє декілька функцій, що описують поведінку відгуків плану. Значення відгуків за допомогою кодування за шкалою бажаності зводяться до одного значення узагальненого відгуку.

Таким чином, внаслідок проведення експерименту N точкам факторного простору, співставляється N експериментальних точок узагальненої функції відгуку.

Сама функція невідома і представлена внаслідок проведення одного кроку планування своїми N значеннями. З цих N значень вибирається найбільш оптимальне. Вибір відбувається відповідно до перевірки гіпотез про відмінність двох середніх і однорідності дисперсій.

Отже, вибрана одна точка факторного простору, що доставляє локальний оптимум на безлічі N точок факторного простору. Постулювавши гладкість і безперервність функції відгуку, ми можемо підібрати таку околицю цієї оптимальної точки, що функція узагальненого відгуку наближатиметься гіперплощиною $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_K)$, заданою на факторному просторі. Різниці

$$\xi_i = y_i - \Psi_i, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

називаються нев'язністю.

Величина нев'язності визначається як помилкою експерименту, так і придатністю лінійної моделі, пов'язаної величиною області експерименту. І обидві ці причини змішані.

Ступінь ефективності наближення функції узагальненого відгуку гіперплощиною визначається за допомогою оцінної функції, заданої на безлічі нев'язності.

Як оцінні функції U використовують: суму квадратів або суму модулів нев'язності, або мінімаксний критерій

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2, \quad U = \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|, \quad U = \min\max|\xi_i|$$

В принципі можуть бути використані і інші оцінки, наприклад, сума модулів кубів нев'язності. Оцінки порівнюють по величині погрішності коефіцієнтів регресії і простоті обчислень. В цьому відношенні метод найменших квадратів найбільш оптимальний.

Метод найменших квадратів

Метод найменших квадратів приводить до мінімально можливої залишкової суми квадратів відгуку, або нев'язності, і в цьому сенсі є оптимальною оцінкою коефіцієнтів моделі.

Функцію відгуку у області експерименту ми представляємо у вигляді лінійного рівняння за факторами:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{M} b_j x_j$$

Дане рівняння називається рівнянням регресії.

На кожному кроці планування експерименту відбувається обчислення коефіцієнтів b_j. Для кожного досліду рівняння регресії виконується приблизно, з точністю до нев'язності:

$$y_i - b_0 - \sum_{k=1}^{M} b_k x_{ki} = \xi_i$$

Метод найменших квадратів полягає в тому, що коефіцієнти моделі b_j вибирають з умови

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - b_0 - \sum_{k=1}^{M} b_k x_{ki})^2 = \min.$$

Для досягнення мінімуму функції $U(b_k)$ необхідно прирівняти всі приватні похідні нулю: $\partial U / \partial b_k = 0$. Після простих перетворень одержуємо

$$Nb_0 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} b_k x_{ki} = \sum_{i=1}^{N} y_i \quad b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{ki} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} b_k x_{ki}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{ki}.$$

Тепер прийшов час пригадати про чудові властивості матриці планування. Згідно властивості <u>симетричності</u> матриці планування сума, алгебри елементів будь-якого, вектор стовпця (будь-якого фактору) рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ki} = 0$$

А за умовою нормування

$$\sum_{i=1}^{N} x^2{}_{ki} = N$$

Крім того, ми скористаємося ортогональністю матриці планування, а саме

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ki} x_{mi} = 0, \quad k \neq m, \quad k, m = 1,2,..,M.$$

З урахуванням цих властивостей одержуємо відомі вирази для коефіцієнтів моделі плану

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, \quad b_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i x_{ki}, \quad k = 1,2,..,M.$$

Формули для обчислення коефіцієнтів взаємодії мають аналогічний вигляд

$$b_{km} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i x_{ki} x_{mi}, \quad k \neq m, \quad k, m = 1,2,..,M.$$

Таким чином, прості формули обчислення коефіцієнтів регресії – є слідство застосування методу МНК до ортогональної, симетричної і нормованої матриці планування

Кореляційний аналіз

Під кореляцією розуміється всякий зв'язок між двома або декількома досліджуваними явищами. Кореляція може бути детерміністичною або випадковою (імовірнісною). Перший тип зв'язку визначається строгими закономірностями, які описуються фізико-хімічними формулами.

При кореляційному аналізі перевіряється лише самий факт зв'язку, тобто статистична гіпотеза про відсутність або наявність зв'язку. Сама природа величин, між якими такий випадковий зв'язок передбачається, дозволяє судити про нього як про імовірнісний. Результат кореляційного аналізу також носить статистичний характер, тому що висновок про наявність або відсутність зв'язку приймається за деякою наперед заданою довірчою імовірністю.

Прикладом задачі кореляційного аналізу може служити дослідження впливу температурного режиму на вихід якого-небудь хімічного продукту в складному технологічному процесі. При цьому зі збільшенням температури можливо не тільки підвищення швидкості досліджуваної реакції, але і протікання побічних реакцій, а також і зворотна реакція розкладання продукту. Тому зв'язок між температурою і виходом можна охарактеризувати як випадкову.

Лінійна кореляція

Як правило при кореляційному аналізі досліджуються тільки лінійні зв'язки між величинами, а статистичні критерії свідчать про наявність або відсутність передбачуваного лінійного зв'язку. Тому негативна відповідь при перевірці гіпотези про кореляцію може означати не тільки відсутність зв'язку, але і можливу наявність нелінійної залежності між досліджуваними величинами.

Для кількісної оцінки лінійної кореляції користуються вибірковим коефіцієнтом парної кореляції r_{xy} – безрозмірною величиною до значень середніх квадратичних відхилень досліджуваних величин:

$$r_{xy}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i\right]^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left[n\sum_{i=1}^{n}y_i\right]^2\right)}}.$$

Коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною не перевершує одиниці ($|r_{xy}| \le 1$) і може приймати такі значення:

1) $r_{xy} = 0$ - цей випадок відповідає відсутності зв'язку між x і y (рис. 2.5, а);
2) $r_{xy} = +1$ - між x і y існує строгий позитивний лінійний зв'язок (рис. 2.5, б);
3) $r_{xy} = -1$ - між x і y існує строгий негативний зв'язок (рис. 2.5, в);
4) $-1 < r_{xy} < +1$ - це випадок, що найбільше часто зустрічається, і тут про кореляцію судять уже лише з точки зору більшої або меншої імовірності.

Розмір коефіцієнта кореляції $|r_{xy}|$ служить тільки для оцінки тісноти лінійного зв'язку між величинами x і y: чим ближче абсолютна величина коефіцієнта до 1, тим зв'язок сильніше; чим ближче $|r_{xy}|$ до нуля, тим зв'язок менше. Якщо випадкові величини x і y пов'язані точною лінійною функціональною залежністю

$$y = a \cdot x + b,$$

то $r_{xy} = \pm 1$. Знак «+» або «–» потрібно використати в залежності від знака коефіцієнту a ($a > 0$ або $a < 0$).

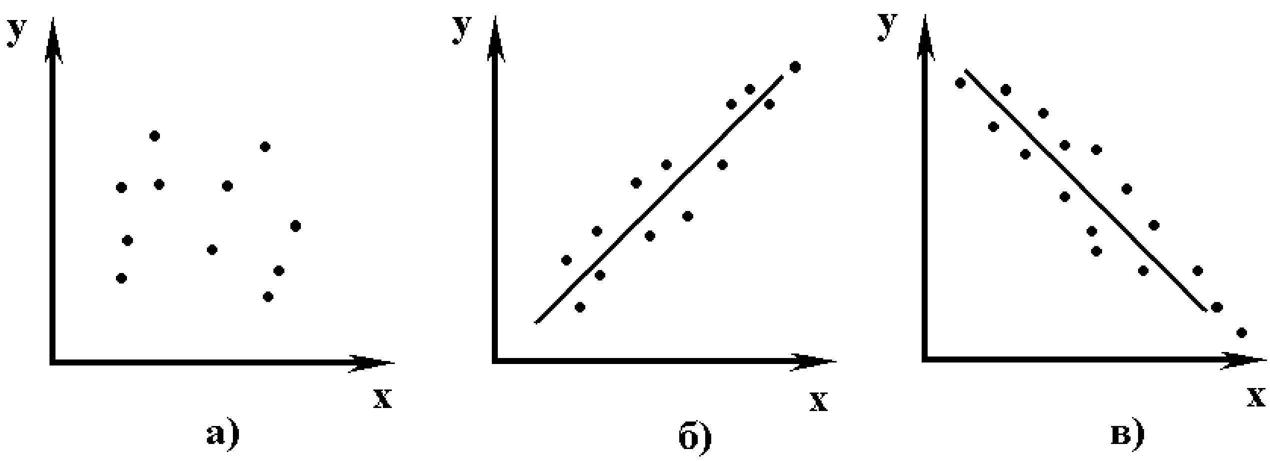


Рис. 2.5 - Кореляційна залежність між випадковими величинами x і y

Залежність коефіцієнта кореляції перевіряється шляхом порівняння абсолютної величини емпіричного коефіцієнта кореляції, помноженої на $\sqrt{n-1}$, із його критичними значеннями при заданому ступені надійності (рівня довірчості) Р. Критичні значення $H = |r_{xy}|\sqrt{n-1}$ при числі вимірів n до 10 для різноманітних значень надійності складають:

при $P = 0,9$ $H = 1,65$;
при $P = 0,95$ $H = 1,90$;
при $P = 0,99$ $H = 2,29$.

Якщо для емпіричного коефіцієнта кореляції r_{xy} $H = |r_{xy}|\sqrt{n-1}$ виявиться більше критичного значення H, то з надійністю P слід відкинути гіпотезу про некорельованість аналізованих величин.

При інженерних розрахунках рівень довірчості $P = 0,95$ достатній.

Регресійний аналіз

Дослідження й оптимізація складних, неорганізованих систем можливі лише за допомогою статистичних, імовірнісних методів. Вихідною точкою для таких досліджень є аналог фізичної формули – *математичної моделі* системи, що носить назву *моделі експерименту* або *рівняння регресії*. Проте не завжди експериментальний матеріал дає можливість знайти зручний і точний вид моделі. У більш загальному випадку математична модель створюється на підставі статистичного методу – регресійного аналізу.

Регресійний аналіз – це дослідження регресійного рівняння – лінійної моделі плану. Дослідження проводиться в рамках методу найменших квадратів (МНК). Регресійний аналіз базується на трьох постулатах.

Перший постулат.

Параметр оптимізації y є *випадкова величина* з нормальним законом розподілу.

Для перевірки нормальності необхідно провести десятки паралельних дослідів. Далі користуються одним з критеріїв згоди.

Найбільшого поширення в практиці набув критерій Пірсону. Ідея цього методу полягає в контролі відхилень гістограми експериментальних даних від гістограми з таким же числом інтервалів, побудованої на основі розподілу, збіг з яким визначається, в даному випадку з нормальним розподілом.

При великому числі паралельних дослідів розмах відгуку наближається до інтервалу трьох сигм.

Хай, наприклад, в результаті n > 50-ти паралельних дослідів середнє значення відгуку, мінімальне і максимальні значення $\bar{y}$, $y_{\min}$, $y_{\max}$, обчислили оцінку дисперсії s^2. Вибрали m інтервалів, обчислили величину інтервалу Δ, кванта, і підрахували частотності попадання k_i, i = 1, 2,…, m значень відгуку в i-тий інтервал, тим самим підготували дані для побудови гістограми.

Для визначення теоретичних частотностей, наприклад, в MathCad

1) задаємо ранжирувану змінну i: = 0…m - 1
2) визначаємо значення середин інтервалів $z_i = z_{min} + (1/2 + i)\Delta$
3) обчислюємо вектор теоретичних частотностей за формулою K_i = dnorm(z_i, $\bar{y}$, s^2)·n.

Використання критерію Пірсону полягає в підрахунку величини хі-квадрат

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(k_i - K_i)^2}{K_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(k_i - nP_i)^2}{nP_i},$$

де k_i, K_i – експериментальні і теоретичні значення частот в *i-тому* інтервалі розбиття, m – число інтервалів розбиття, P_i – значення ймовірності в тому ж інтервалі розбиття, $n = \sum_{i=1}^{m} k_i$.

Число мір свободи змінної хі-квадрат в критерії Пірсону обчислюється в даному випадку за формулою $\upsilon = m$ - 3, а не за формулою n - 1, як в критерії Бартлета. Дві міри свободи задіяні на обчисленні двох сум в чисельнику і знаменнику відношення критерію Пірсону.

Отже, задавшись рівнем значущості, частіше всього 0,05, звертаємося до функції квантилів хі-квадрат розподілу, що має в MathCad ім'я dchisq, з параметрами dshisq(1-0.05, m-3). Якщо обчислене за дослідними даними значення критерію Пірсону χ^2 менше ніж обчислене за функцією квантилів, то гіпотеза нормальності приймається, інакше відкидається.

При порушенні нормальності ми позбавляємося можливості встановлення ймовірності, з якою справедливі ті або інші вислови щодо результатів експерименту.

<u>Другий постулат</u>. Дисперсія відгуку не залежить від його абсолютної величини. Перевірка здійснюється за допомогою перевірки дисперсії на однорідність із застосуванням критеріїв Фішера або Бартлета. Порушення цього постулату неприпустимо. При порушенні однорідності дисперсії вдаються до функціонального перетворення відгуку. Перетворення шукається методом проб і помилок. Звичайно починають з логарифма.

Сенс нелінійного перетворення в тому, що він підкреслює, або виділяє один інтервал зміни змінної перед іншим. Наприклад, квадратичне перетворення підкреслює великі величини, а малі (менші 1) ще більше зменшує. Логарифм, навпаки, "притримує" швидкість росту монотонно зростаючих величин, і тому логарифми дисперсій можуть вже виявитися однорідними, тоді як самі дисперсії неоднорідні.

Третій постулат. Значення факторів суть "невипадкові" величини. Це несподіване твердження означає, що встановлення кожного фактору на заданий рівень і його підтримку на цьому рівні істотно точніше, ніж помилка відтворюваності.

Четвертий постулат. Фактори не корельовані. Для матриці планування ця властивість виконується автоматично через властивість ортогональності.

Перевірка адекватності моделі

Перевірка адекватності моделі – це перевірка придатності обчислених після реалізації плану коефіцієнтів лінійної моделі.

На рис. 2.6 приведені два графіки з однаковими лініями регресії і однаковим розташуванням експериментальних точок (середніх значень) відносно лінії регресії, але з різною дисперсією. Розкид відносно середніх значень показується відрізками, що становлять довірчий інтервал $\pm t \cdot s_{\{y\}}$. Коефіцієнт перед стандартом визначається величиною довірчої ймовірності.

Модель можна вважати адекватною тільки у випадку А. В даному випадку розкид в точках такого ж порядку, що і розкид відносно лінії.

У випадку Б досліди "дуже" точні. Потрібна складніша модель, нелінійна, щоб точність її прогнозу була порівнянна з точністю експерименту.

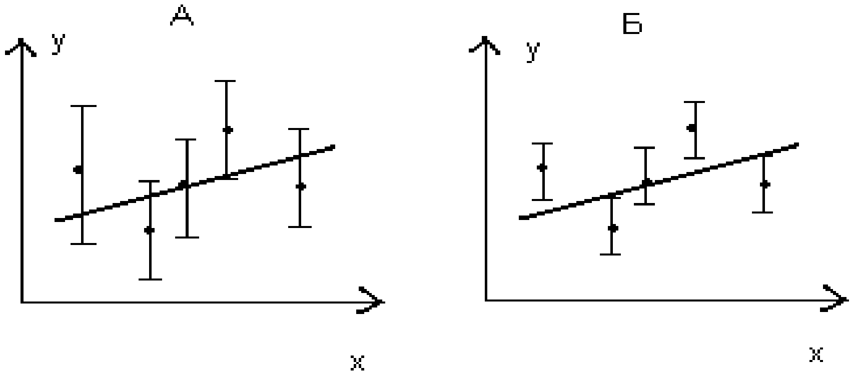


Рис. 2.6 – Перевірка адекватності

Для перевірки адекватності моделі обчислюють залишкову дисперсію, або дисперсію адекватності за формулами:

1) якщо немає паралельних дослідів то

$$s^2_{АД} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta y_i^2}{f},$$

де $\Delta y_i = y_i - \sum_{k=0}^{M} b_k x_{ki}$ залишкова різниця є *i-та* нев'язність, *M* - число факторів, *f* – число мір свободи дисперсії адекватності, яке обчислюється за правилом:

число різних дослідів мінус число визначуваних коефіцієнтів, рівне числу факторів +1:

$$f = N - (k + 1).$$

2) За наявності числа повторних дослідів n, рівного для всіх рядків плану, при розрахунку дисперсії адекватності обчислюють залишкову різницю відгуків за іншою формулою:

$$\Delta y_i = \bar{y}_i - \sum_{k=0}^{M} b_k x_{ki} = \bar{y}_i - \hat{y}_i,$$

тобто обчислюють відхилення регресійної прямої від середнього значення паралельних дослідів.

Але найголовніше сама дисперсія адекватності множиться на число паралельних дослідів:

$$s_{АД}^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i^2}{f}$$

При n = 1 дану формулу переходить в першу формулу дисперсії адекватності.

Повторні досліди накладають жорсткіші умови на перевірку адекватності, і для ухвалення гіпотези адекватності потрібна більша відповідність експериментальних і розрахункових точок.

3) Найбільш загальний випадок є нерівномірне дублювання дослідів. В цьому випадку

$$s_{АД}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{f}$$

Для перевірки гіпотези про адекватність моделі використовують критерій Фішера (F-критерій) для відношення двох дисперсій: залишкової дисперсії до дисперсії відтворюваності

$$F = \frac{s_{АД}^2}{s_{\{y\}}^2}$$

Більше значення – в чисельнику, менше в знаменнику, тобто експериментальне значення критерію Фішера завжди більше 1.

Якщо експериментальне значення F не перевищує табличного значення, то гіпотеза адекватності моделі приймається, інакше її відкидають.

Якщо модель адекватна, тобто відношення дисперсій адекватності і відтворюваності не перевищує табличного, дисперсії не помітні по критерію Фішера, то можемо побудувати лінійну регресійну функцію на $к$-мірному факторному просторі, і переходити до наступного кроку планування, але цікаво перевірити значущість окремих коефіцієнтів регресії.

Перевірка значущості коефіцієнтів

Перевірка здійснюється або побудовою довірчого інтервалу, або за допомогою критерію Ст'юдента.

А) *побудова довірчого інтервалу*

Приймемо без доказу такий факт, що при використанні повного експерименту фактору або регулярних дробових реплік довірчі інтервали для всіх коефіцієнтів (у тому числі і ефектів взаємодії) рівні один одному.

Дисперсія будь-якого коефіцієнта регресії обчислюється за формулою

$$s^2_{\{b\}} = \frac{s^2_{\{y\}}}{f}, \quad f = \sum_{i=1}^{N}(n_i - 1),$$

де $s^2_{\{y\}}$ - дисперсії відтворюваності, n_i – число паралельних дослідів в *і-тому* експерименті, N - число рядків матриці планування, f_i – число мір свободи при обчисленні дисперсії відтворюваності в *і-тому* рядку плану.

Хай перший постулат регресійного аналізу про те, що відгуки суть випадкові величини з нормальним розподілом, виконаний в результаті перевірки по критерію Пірсону. Тоді коефіцієнти регресії також випадкові величини з нормальним розподілом. Розглянемо величину

$$\tau = \frac{1}{f}\frac{\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{ni}(b_{i,j} - \beta_{i,j})}{S_{\{b\}}} = \frac{\Delta b}{S_{\{b\}}}$$

Величина τ має розподіл Ст'юдента.

Нагадаємо, що середнє арифметичне центрованих відносно середнього і нормованих на дисперсію випадкових величин з нормальної генеральної сукупності має розподіл Ст'юдента.

У цьому виразі відома, тільки одна величина – СКО коефіцієнта регресії. Другу величину – значення випадкової величини ф визначимо, задавшись рівнем значущості α. Для цього ми звертаємося до функції квантилів зворотного інтегрального розподілу Ст'юдента з аргументами $P = 1 - \alpha/2$, оскільки розподіл Ст'юдента симетрично відносно нуля, і f - числом мір свободи при обчисленні випадкової величини:

$$t = qt(1\text{-}\alpha/2, f).$$

Квантиль t - є величина напівінтервалу. Ймовірність знаходження в інтервалі $[-t, t]$ для випадкової величини τ рівна $P = 1 - \alpha$. Тому довірчий інтервал Δb_j визначається як

$$\Delta b = \pm t \cdot s_{\{b\}},$$

P – довірча ймовірність.

Формулу для довірчого інтервалу можна записати в наступній еквівалентній формі:

$$\Delta b = \pm \frac{t \cdot s_{\{y\}}}{\sqrt{f}}$$

Коефіцієнт значимо, якщо його абсолютна величина більше довірчого інтервалу.

Б) <u>*використання критерію Ст'юдента*</u>

Коефіцієнт Ст'юдента можна використовувати і безпосередньо. Розділимо останню нерівність на стандарт коефіцієнта регресії:

$$t = \frac{|\Delta b|}{s_{\{b\}}} < \frac{|b_j|}{s_{\{b\}}} \quad \Rightarrow \quad t < \frac{|b_j|}{s_{\{b\}}}$$

У лівій частині нерівності коштує табличне значення коефіцієнта Ст'юдента. У правій - експериментально обчислювані значення.

Якщо критерій Ст'юдента опинився менше відношення коефіцієнт-СКО погрішності коефіцієнтів, то гіпотеза про те, що коефіцієнт значимо приймається з ймовірністю P.

Приклад. Нехай в результаті повного експерименту фактору 2^3 помилка з двома паралельними дослідами в кожному рядку плану погрішність відтворюваності $s_{\{y\}} = 1$. Обчислені коефіцієнти: $b_0 = 10$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = -0.5$. Побудувати довірчий інтервал і перевірити значущість коефіцієнтів.

Дисперсія коефіцієнтів регресії $s^2_{\{bj\}} = 1/8, \quad s_{\{bj\}} = \sqrt{1/8} = 0{,}354$. Табличне значення критерію Ст'юдента при рівні значущості 0,05 і числі мір свободи $f = 8$ $qt(0.975, 8) = 2{,}3$.

Таким чином, довірчий інтервал коефіцієнтів регресії $\Delta b_j = \pm 2{,}3 \cdot 0{,}354 = \pm 0{,}814$.

Отримали, що всі коефіцієнти регресії окрім b_3 значущі, оскільки їх абсолютна величина більше довірчого інтервалу, а для b_3 - вона менше.

Дисперсія передбаченого значення відгуку

Значення дисперсії коефіцієнта регресії можна використовувати для визначення дисперсії передбаченого відгуку по рівнянню регресії в деякій точці факторного простору $\bar{x}^*$.

Значення відгуку обчислюється в результаті підстановки цієї точки в рівняння регресії:

$$y_{N+1} = \hat{y} = \sum_{i=0}^{N} b_i x_i^*$$

Дисперсія передбаченого відгуку обчислюється за формулою

$$s^2_{\{\hat{y}\}} = \sum_{i=0}^{N} x_i^{*2} s^2_{\{bi\}}.$$

ПРИКЛАДИ

Оцінювання коефіцієнта кореляції

Вважається, що коефіцієнт кореляції r_{xy} є мірою лінійної взаємозалежності між величинами x і y. У інженерній практиці рекомендується приймати наступну міру цієї взаємозалежності [3, с. 118]:

r_{xy}:	>0,9	0,8 - 0,9	0,6 - 0,8	0,4 - 0,6	0,2 - 0,4
Залежність:	функціональна	сильна (суттєва)	помірна	слабка	несуттєва

<u>Приклад 2.17.</u> Потрібно провести регресійний аналіз залежності часу досягнення граничної втрати натиску у фільтрі ($t_н$) від розміру зерен завантаження (d). Вихідні результати і розрахунки приведені в табл. 2.7.

Рішення. Відомо, що мірою лінійної залежності двох змінних є кореляційне співвідношення і коефіцієнт кореляції. Парний коефіцієнт кореляції можна оцінити за допомогою виразів:

- для малих вибірок

$$r = \sum\left[(x_i - \bar{x}) \cdot (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})\right] / \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2}\ ; \qquad (2.36)$$

- для великих вибірок

$$r = \frac{\sum xy - (\sum x) \cdot (\sum y)/n}{\sqrt{\left[\sum x^2 - (\sum x)^2/n\right] \cdot \left[\sum y^2 - (\sum y)^2/n\right]}}. \qquad (2.37)$$

Таблиця 2.7 - Вихідні дані і проміжні розрахунки

(*d*, см) (x_i)	τ_1 (y_1)	τ_2 (y_2)	$\bar{\tau}$ ($\bar{y}_i$)	$x_i - \bar{x}$	$\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot 10^{-4}$	$(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot$ $(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})$
0,120	16,7	16,6	16,65	-0,015	-3,84	2,25	14,74	0,0576
0,125	17,8	18,1	17,95	-0,010	-2,54	1,00	6,45	0,0254
0,130	19,3	19,4	19,35	-0,005	-1,14	0,25	1,30	0,0057
0,135	20,4	20,5	20,45	0,000	-0,04	0,00	0,00	0,0000
0,140	21,6	21,7	21,65	0,005	1,16	0,25	1,34	0,0058
0,145	23,0	23,1	23,05	0,010	2,56	1,00	6,55	0,0256
0,150	24,0	24,3	24,15	0,015	3,86	2,25	14,90	0,0579
$\bar{x}$ = 0,135			$\bar{\bar{y}}$ = 20,49			Σ = 7,00	Σ = 45,28	Σ = 0,178

Вважається [3, с. 121], що краща оцінка коефіцієнта кореляції *p* виходить за формулою

$$r^* = r \cdot \left[1 + \frac{1 - r^2}{2 \cdot (n-3)}\right]. \qquad (2.38)$$

За формулою (1.2.36), з урахуванням даних з табл. 1.2.7, маємо:

$$r = 0{,}178 / \sqrt{0{,}0007 \cdot 45{,}28} = 0{,}9998$$

або

$$r^* = 0{,}9998 \cdot (1 + (1 - 0{,}9998^2)/[2 \cdot (7-3)]) = 0{,}99985.$$

Коефіцієнт детермінації *B* буде рівний $B = r^2 = 0{,}9996$, а $(r^*)^2 = 0{,}9997$.

Таким чином, залежність між часом досягнення граничних втрат натиску у фільтрі і розміром зерен завантаження дуже добре корельована.

Після знаходження довірчих меж для m_z (при довірчій ймовірності p = 0,95)

$$z_1 = z - 1{,}96/\sqrt{n-3} \quad \text{і} \quad z_2 = z + 1{,}96/\sqrt{n-3} \tag{2.39}$$

можна знайти довірчі межі для генерального коефіцієнта кореляції, підставляючи z_1 і z_2 у формулу:

$$r = thz = (e^{2z} - 1)/(e^{2z} + 1) \tag{2.40}$$

Тоді для даного прикладу маємо

- стандарт розподілу

$$\sigma_r \approx (1 - r^2)/\sqrt{n} \approx (1 - 0{,}9998^2)/\sqrt{7} = 0{,}00015; \tag{2.41}$$

- довірчі межі p

$$p = r \pm \frac{1{,}96 \cdot (1 - r^2)}{\sqrt{n}} = 0{,}9998 \pm \frac{1{,}96 \cdot (1 - 0{,}9998^2)}{\sqrt{7}} = 0{,}9998 \pm 0{,}0003; \tag{2.42}$$

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0{,}9998}{1-0{,}9998} \approx 4{,}6; \tag{2.43}$$

$$\sigma_z = 1/\sqrt{n-3} = 1/\sqrt{7-3} = 0{,}5. \tag{2.44}$$

Тоді з довірчою ймовірністю p = 0,95 значення m_z знаходиться в межах:

$$m_z = z \pm 1{,}96/\sqrt{n-3} = 4{,}6 \pm 1{,}96/\sqrt{7-3} = 4{,}6 \pm 0{,}98;$$

$$z_1 = 4{,}6 - 0{,}98 = 3{,}62 \quad \text{и} \quad z_2 = 4{,}6 + 0{,}98 = 5{,}58;$$

$$r_{x1} = thz_1 = (e^{2 \cdot 3{,}62} - 1)/(e^{2 \cdot 3{,}62} + 1) = 0{,}99857;$$

$$r_{x2} = thz_2 = (e^{2 \cdot 5{,}58} - 1)/(e^{2 \cdot 5{,}58} + 1) = 0{,}99997,$$

тобто при рівні значущості q = 0,05 величина вибіркового коефіцієнта кореляції знаходиться в межах 0,99857 < p < 0,99997.

Оцінювання прямої регресії

Для умов нашого прикладу проведемо аналіз шуканої залежності $\tau = f(d)$ (рис. 2.7). Як слідує з цього малюнка, результати дослідів по досягненню граничних втрат тиску в першому наближенні можна описати рівнянням лінійним типу:

$$\hat{y} = a_{yx} + b_{yx} \cdot x$$

або

$$\hat{x} = a_{xy} + b_{xy} \cdot y = a' + b_{xy} \cdot y.$$

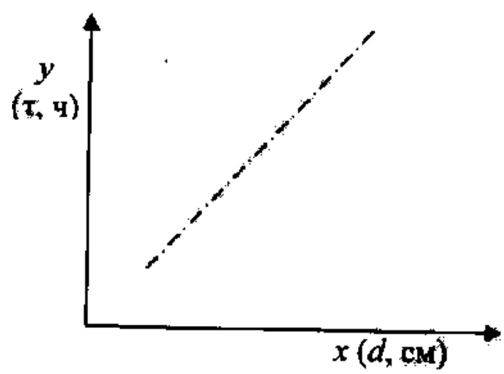


Рис 2.7 – Графік залежності $\tau = f(d)$

Розрахунки, пов'язані з визначенням коефіцієнтів регресії, проведемо в табличній формі.

Таблиця 2.8 – Розрахункові дані

x	$\bar{y}$	$x\bar{y}$	x^2	$\bar{y}^2$
0,120	16,65	2,00	0,0144	277,2
0,125	17,95	2,24	0,0156	322,2
0,130	19,35	2,52	0,0169	374,4
0,135	20,45	2,76	0,0182	418,2
0,140	21,65	3,03	0,0196	468,7
0,145	23,05	3,34	0,0210	531,3
0,150	24,15	3,65	0,0225	592,9
$\sum x = 0{,}945$	$\sum \bar{y} = 143{,}45$	$\sum x\bar{y} = 19{,}54$	$\sum x^2 = 0{,}1282$	$\sum \bar{y}^2 = 2984{,}5$

Тоді:

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{7 \cdot 19{,}54 - 0{,}945 \cdot 143{,}45}{7 \cdot 0{,}1282 - (0{,}945)^2} = 278{,}8\,; \qquad (2.45)$$

$$a_{yx} = \frac{\sum y - b_{yx}\sum x}{n} = \frac{143{,}45 - 278{,}8 \cdot 0{,}945}{7} = -17{,}14\,; \qquad (2.46)$$

$$b_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - (\sum y)^2} = \frac{7 \cdot 19{,}54 - 0{,}945 \cdot 143{,}45}{7 \cdot 2948{,}5 - (143{,}45)^2} = 0{,}0039\,; \qquad (2.47)$$

$$a_{xy} = \frac{\sum x - b_{xy}\sum y}{n} = \frac{0{,}945 - 0{,}0039 \cdot 143{,}45}{7} = 0{,}0553\,. \qquad (2.48)$$

Оцінювання регресії $\hat{y}$ за x $\qquad \hat{y} = -17{,}14 + 278{,}8x$,

а оцінювання регресії $\hat{x}$ за y $\qquad \hat{x} = 0{,}0553 + 0{,}0039y$.

Для визначення координати точки перетину знайдених рівнянь регресії представимо друге рівняння у вигляді

$$y = (\hat{x} - 0{,}0553)/0{,}0039 = 256{,}4\hat{x} - 14{,}2 = b^*_{xy} \cdot x - a^*_{xy}\,,$$

тоді, прирівнюючи праві частини рівнянь, маємо:

$$256{,}4x - 14{,}2 = -17{,}4 + 278{,}8x;$$

$$x = x_0 = \frac{17{,}14 - 14{,}2}{278{,}8 - 256{,}4} = 0{,}131\,,$$

звідкіля $y_0 = 256{,}4 \cdot 0{,}131 - 14{,}2 \approx 19{,}39$.

У знайдених рівняннях регресії коефіцієнти b_{yx} і b^*_{xy} є кути нахилу відповідних прямих. Тоді кут між цими прямими

$$tg\alpha = tg(\alpha_y - \alpha_x) = \frac{b_{yx} - b^*_{xy}}{1 + b_{yx} \cdot b^*_{xy}} = \frac{b_{yx} - 1/b^*_{xy}}{1 + b_{yx}/b^*_{xy}} = \frac{b_{yx} \cdot b_{xy} - 1}{b_{xy} + b_{yx}} = \frac{278{,}8 - 256{,}4}{1 + 278{,}8 \cdot 256{,}4} \approx 0{,}000313$$

тобто $\alpha < 12'$.

Перевіримо, наскільки адекватно одержане рівняння y = -17,14 + 278,8x описує процес $\tau_н = f(d)$. Розрахунки, необхідні для визначення адекватності, проведемо в табличній формі.

Спершу перевіримо відтворюваність дослідів по критерію Кохрена [3, п. 5.4.10]. Розрахункове значення критерію складе

$$G_{набл.} = \frac{S^2_{\max}}{\sum S^2} = \frac{0{,}045}{0{,}075} = 0{,}6. \qquad (2.49)$$

Таблиця 2.9 – Розрахунки за визначенням адекватності моделі

x	Результати дослідів			S^2	y_p	$(y_p - \bar{y})^2$
	y_1	y_2	$\bar{y}$			
0,120	16,7	16,6	16,65	0,005	16,32	0,1089
0,125	17,8	18,1	17,95	0,045	17,71	0,0576
0,130	19,3	19,4	19,35	0,005	19,10	0,0625
0,135	20,4	20,5	20,45	0,005	20,50	0,0025
0,140	21,6	21,7	21,65	0,005	21,89	0,0576
0,145	23,0	23,1	23,05	0,005	23,29	0,0576
0,150	24,0	24,3	24,15	0,005	24,68	0,1089
				Σ = 0,075		0,4556

Табличне значення критерію Кохрена визначаємо за Додатком Н. При рівні значущості q = 0,05 і числі мір свободи $k = m$ - 1= 2 - 1 = 1.

G (0,05; l) = 0,7271.

Таким чином, умов $G_{спост.} \le G_{табл.}$ виконується, тобто дисперсії однорідні, і як генеральної дисперсії можна прийняти середню арифметичну виправлених дисперсій, або:

$$S^2_{відтвор.} = \sum_{i=1}^{N} S_i^2 / N = 0{,}075/7 \approx 0{,}011. \qquad (2.50)$$

Дисперсія адекватності визначається за формулою

$$S^2_{ад.} = \frac{m}{N-B} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(y_p - \bar{y}\right)^2 = \frac{2}{7-2} \cdot 0{,}4556 = 0{,}182, \qquad (2.51)$$

де B - число членів знайденого рівняння y_p = -17,14 + 278,8x.

Розрахункове значення крітерию Фішера

$$F_p = S^2_{ад.} / S^2_{відтвор.} = 0{,}182/0{,}011 = 16{,}56. \qquad (1.2.52)$$

При рівні значущості q = 0,05, числах мір свободи дисперсії адекватності $k_{ад.}$ = 7 – 2 = 5 і відтворюваності $k_{відтвор.}$ = $n(m$ - 1) = 7(2 - 1) = 7 табличне значення критерію Фішера складе F(0,05; $\kappa_{ад}$ = 5; $\kappa_{відтвор}$ = 7) = 3,97 (Додаток F).

Оскільки $F_p > F_m$, вважається, що рівняння y = - 17,14 + 278,8x неадекватно описує процес $\tau_н = f(d)$. *)*. Найбільш коректним рішенням в ситуації, що склалася, ймовірно, можна рахувати перехід до рівняння іншого ступеня і підвищення точності вимірювання параметра y_i.

<u>Приклад 2.18.</u> Аналіз апріорно одержаної інформації показує, що при видобуванні нікелю із стічних вод електрохімічним способом існує залежність між ефектом видобування (кількістю витягуваного нікелю %) і щільністю струму. Необхідно визначити міру цієї залежності і її вигляд або математичний опис (рівняння регресії) виходу нікелю від щільності струму. Результати досліджень представлені в табл. 2.10.

Таблиця 2.10 – Вихідні та розрахункові дані

№ п/п	Ефект, %			Щільність току, x	$x_i - \bar{x}$	$\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot 10^{-4}$	$(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})$
	y_1	y_2	$\bar{y}$						
1	8,5	9,7	9,1	0,7	-0,56	-7,27	0,31	52,85	4,07
2	11,1	12,9	12,0	0,9	-0,36	-4,37	0,13	19,1	1,57
3	14,1	16,1	15,1	1,1	-0,16	-1,27	0,03	16,1	0,20
4	15,0	15,8	15,4	1,25	-0,01	-0,97	0,00	0,94	0,01
5	22,0	23,0	22,5	1,6	0,34	6,13	0,12	37,6	2,08
6	24,0	24,2	24,1	2,0	0,74	7,73	0,55	59,8	5,72
$\sum \bar{y} = 98{,}2$; $\bar{\bar{y}} = 16{,}37$				$\sum x = 7{,}55$; $\bar{x} = 1{,}26$			$\Sigma = 1{,}11$	$\Sigma = 186{,}39$	$\Sigma = 13{,}65$

Рішення. Коефіцієнт кореляції, визначуваний по вираженню (2.36), рівний:

$$r_{xy} = \frac{13{,}65}{\sqrt{1{,}11 \cdot 186{,}39}} = \frac{13{,}65}{14{,}38} = 0{,}95\,.$$

У нашому випадку r_{xy} = 0,95, отже, залежність між щільністю струму x і ефектом видобування (виходом) нікелю по струму - *функціональна.*

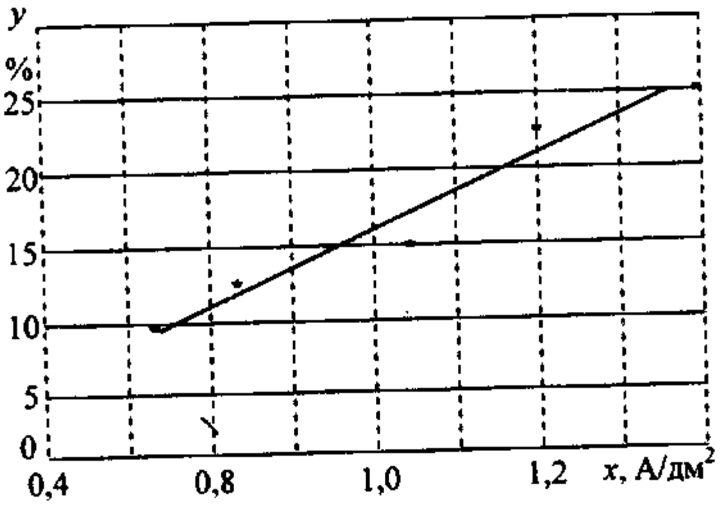


Рис. 2.8 – Залежність ефекту видобування нікелю (y) від щільності струму (x)

Знайдемо математичний опис залежності виходу нікелю (ефекту електрохімічного видобування) від щільності струму. Спочатку проведемо графічний аналіз шуканої залежності. Для цього, за даними табл. 2.10, побудуємо графік $y = f(x)$ (рис. 2.8).

Таблиця 2.11 – Розрахунок коефіцієнтів регресії

№ п/п	y	x	x^2	xy	y_p
1	9,1	0,7	0,49	6,37	9,6
2	12,0	0,9	0,81	10,8	12,0
3	15,1	1,1	1,21	16,61	14,4
4	15,4	1,25	1,56	19,25	16,3
5	22,5	1,6	2,56	36,00	20,5
6	24,1	2,0	4,00	48,20	25,3
Σ	98,2	7,55	10,63	137,23	

Як видно з рис. 2.8, результати дослідів по видобуванню нікелю в першому наближенні можна описати рівнянням лінійним типу $y = a_0 + bx$. Для знаходження коефіцієнтів регресії a_0 і b скористаємося методом найменших квадратів.

Коефіцієнти рівняння регресії можна визначити за формулами (2.45) та (2.46). Розрахунки, пов'язані з визначенням коефіцієнтів регресії, проведемо в табличній формі.

$$b = \frac{6 \cdot 137{,}23 - 98{,}2 \cdot 7{,}55}{6 \cdot 10{,}63 - 7{,}55^2} = 12{,}09\,;$$

$$a_0 = \frac{98{,}2 - 12{,}09 \cdot 7{,}55}{6} = 1{,}15\,.$$

Тоді рівняння регресії прийме вигляд: $y_p = 1{,}15 + 12{,}09x$.

Розрахунки, необхідні для визначення адекватності одержаного рівняння регресії, проведемо в табличній формі.

Таблиця 2.12 - Розрахунок адекватності рівняння регресії

№ п/п	x	Результати досліджень			S^2	y_p	$\left(y_p - \bar{y}\right)^2$
		y_1	y_2	$\bar{y}$			
1	0,7	8,5	9,7	9,1	0,72	9,6	0,25
2	0,9	11,1	12,9	12,0	1,62	12,0	0,00
3	1,1	14,1	16,1	15,1	2,00	14,4	0,49
4	1,25	15,0	15,8	15,4	0,32	16,3	0,81
5	1,6	22,0	23,0	22,5	0,50	20,5	4,00
6	2,0	24,0	24,2	24,1	0,02	25,3	1,44
					$\Sigma = 5{,}18$		$\Sigma = 6{,}99$

Спочатку перевіримо відтворюваність наших дослідів за критерієм Кохрена

$$G_p = 2{,}00 / 5{,}18 = 0{,}386.$$

Табличне значення критерію G, визначене за Додатком Н при рівні значущості $q = 0{,}05$ і числі мір свободи $k = m - 1 = 2 - 1 = 1$, складає $G_m = 0{,}7808$. Оскільки $G_p < G_m$, досліди відтворні.

За формулою (2.50) дисперсія відтворюваності складе

$$S^2_{воспр.} = 5{,}18 / 6 = 0{,}86,$$

а дисперсія адекватності за формулою (1.2.51)

$$S^2_{ад.} = \frac{m}{N - B} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(y_p - \bar{y}\right)^2 = \frac{2}{6 - 2} \cdot 6{,}99 = 3{,}50 \,.$$

Тоді розрахункове значення критерію Фішера буде рівне

$$F_p = 3{,}50 / 0{,}86 = 4{,}07.$$

Табличне значення критерію Фішера (Додаток F), визначене при рівні значущості 0,05, числах мір свободи дисперсій адекватності $k_{ад}$ = 6 - 2 = 4 і відтворюваності $k_{воспр}$ = 6(2 - 1) = 6, складає F_m = 4,53. Оскільки $F_p < F_m$, то рівняння регресії $y_p = 1{,}15 + 12{,}09x$ адекватно описує процес електрохімічного видобування нікелю з промстоків.

<u>*Приклад 2.19.*</u> *Потрібно підібрати математичне вираження для опису результатів досліджень швидкостей осадження частинок піску фільтруючого матеріалу залежно від його крупності v=f(d). При проведенні досліджень одержані наступні результати.*

Таблиця 2.13 – Вихідні дані

№ з.п.	Математичне очикування швидкості осадження v, см/с	Крупність (розмір) частинок піскау d, мм
1	9,1	0,7
2	12,0	0,9
3	15,1	1,1
4	15,4	1,25
5	22,5	1,6
6	24,1	2,0

Для підбору математичного вираження рівняння залежності швидкості осадження від лінійних розмірів піску проведемо графічний аналіз вищезгаданої залежності. Нанесемо на координатну сітку точки з координатами d_i и v_i.

Графічний аналіз (рис.2.9) показує, що залежність *v=f(d)* лінійна. Отже, порівняння має вигляд

$$v = a_0 + b \cdot d \qquad\qquad (y = a_0 + b \cdot x).$$

Визначення коефіцієнтів рівняння регресії a_0 і b проведемо за формулами (2.45) і (2.46).

Розрахунок за визначенням коефіцієнтів регресії проведемо в табл. 2.14.

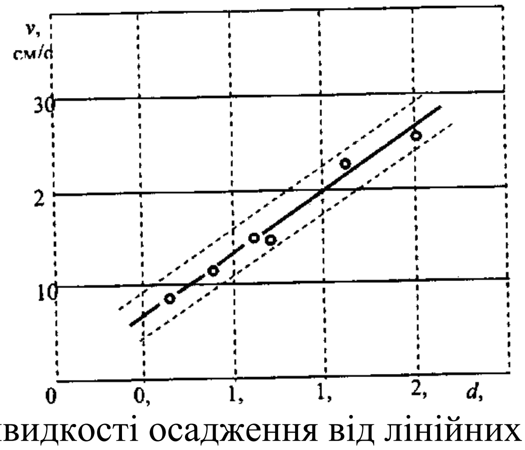


Рис. 2.9 – Залежність швидкості осадження від лінійних розмірів частинок піску

$$b = \frac{6{,}0 \cdot 137{,}23 - 7{,}55 \cdot 98{,}2}{6 \cdot 10{,}63 - 7{,}55^2} = \frac{823{,}38 - 741{,}41}{63{,}78 - 57{,}00} = \frac{81{,}97}{6{,}78} = 12{,}09\,;$$

$$a_0 = \frac{98{,}2 - 12{,}09 \cdot 7{,}55}{6} = \frac{6{,}92}{6{,}0} = 1{,}15\,.$$

$$y = 1{,}15 + 12{,}09 \cdot x \qquad \text{àáî} \qquad v = 1{,}15 + 12{,}09 \cdot d\,.$$

Таблиця 2.14 – Розрахунок коефіцієнтів регресії

№ п/п	y^2	x	x^2	xy	y_p	$(y_p - y_э)^2$
1	9,1	0,7	0,49	6,37	9,6	0,25
2	12,0	0,9	0,81	10,8	12,0	0,00
3	15,1	1,1	1,21	16,61	14,4	0,49
4	15,4	1,25	1,5625	19,25	16,3	0,81
5	22,5	1,6	2,56	36,00	20,5	4,00
6	24,1	2,0	4,00	48,20	25,3	1,44
	Σ = 98,0	Σ = 7,55	Σ = 10,6325	Σ = 137,23		Σ = 6,99

Підставимо в одержане рівняння значення діаметрів і визначимо розрахункові значення швидкостей осадження:

$$v_1 = 1{,}15 + 12{,}09 - 0{,}7 = 9{,}6;$$
$$v_2 = 1{,}15 + 12{,}09 - 0{,}9 = 12{,}0;$$
$$v_3 = 1{,}15 + 12{,}09 - 1{,}1 = 14{,}4;$$
$$v_4 = 1{,}15 + 12{,}09 - 1{,}25 = 16{,}3;$$
$$v_5 = 1{,}15 + 12{,}09 - 1{,}6 = 20{,}5;$$
$$v_6 = 1{,}15 + 12{,}09 - 2{,}0 = 25{,}3.$$

Средньоквадратичне відхилення результатів експерименту від значень рівняння регресії складає

$$S = \sqrt{\frac{\sum (y_p - y_{ý})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{6{,}99}{6-1}} = 1{,}18 \text{ см/с.}$$

Методи графічного зображення результатів експериментів

При обробці результатів вимірювань і спостережень широко використовують методи графічного зображення. Результати вимірювань, представлені в табличній формі, не дозволяють достатньо наочно характеризувати закономірності процесів, що вивчаються. Графічне зображення дає найбільш наглядне уявлення про результати експериментів, дозволяє краще зрозуміти фізичну суть досліджуваного процесу, виявити загальний характер функціональної залежності змінних величин, що вивчаються, встановити наявність максимуму і мінімуму, функції.

Після обробки результатів вимірювань і оцінки ступеня точності необхідно їх звести в таблиці для аналізу. Дані таких таблиць обробляють графічними методами.

Для графічного зображення результатів вимірювань (спостережень), як правило, застосовують систему прямокутних координат. Якщо аналізується графічним методом функція $y = f(x)$, то наносять в системі прямокутних координат значення x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n (рис. 2.10). Перш ніж будувати графік, необхідно знати хід (течія) досліджуваного явища. Як правило, якісні закономірності і форма графіка експериментатору орієнтовно відомі з теоретичних досліджень.

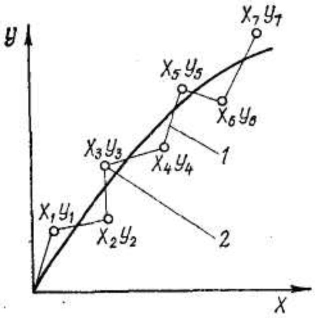


Рис. 2.10 – Графічне зображення функції $y = f(x)$.
1 - крива за результатами безпосередніх вимірювань;
2 - плавна крива

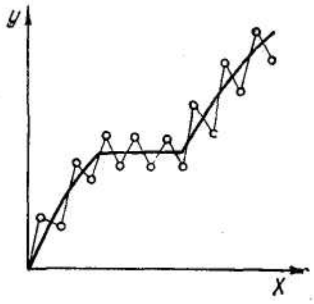


Рис. 2.11 – Графічне зображення функції $y = f(x)$ при наявності стрибка

Точки на графіку необхідно з’єднувати плавною лінією, так, щоб вона по можливості ближче проходила до всіх експериментальних точок. Якщо з'єднати точки прямими відрізками, то одержимо ламану криву. Вона характеризує зміну функції за даними експерименту. Звичайно функції мають плавний характер. Тому при графічному зображенні результатів вимірювань слід проводити між точками плавні криві. Різке викривлення графіка пояснюється погрішностями вимірювань. Якби експеримент повторили із застосуванням засобів вимірювань вищої точності, то одержали б менші погрішності, а ламана крива більше б відповідала плавній кривій.

Проте можуть бути винятки. Так, іноді досліджуються явища, для яких в певних інтервалах спостерігається швидка стрибкоподібна зміна однієї з координат (рис. 2.11). Це пояснюється суттю фізико-хімічних процесів, наприклад фазовими перетвореннями вологи при дослідженні промерзаючих систем, радіоактивним розпадом атомів в процесі дослідження радіоактивності і т.д. У таких випадках необхідно особливо ретельно з’єднувати точки кривої. Загальне «усереднювання» всіх точок плавної кривої може привести до того, що стрибок функції підміняється погрішностями вимірювань.

Іноді при побудові графіка одна-дві точки різко віддаляються від кривої. Спочатку потрібно проаналізувати фізичну суть явища, і якщо немає підстави вважати наявність стрибка функції, то таке різке відхилення можна пояснити грубою помилкою або промахом. Це може виникнути тоді, коли дані вимірювань заздалегідь не досліджувалися на наявність грубих помилок вимірювань. У таких випадках необхідно повторити вимірювання в діапазоні різкого відхилення точки. Якщо колишнє вимірювання виявилося помилковим, то на графік наносять нову точку. Якщо ж повторні вимірювання дадуть колишнє значення, необхідно до цього інтервалу кривої віднестися дуже уважно і особливо ретельно проаналізувати фізичну суть явища. Часто при графічному зображенні результатів експериментів доводиться мати справу з трьома змінними: $b = f(x, y, z)$.

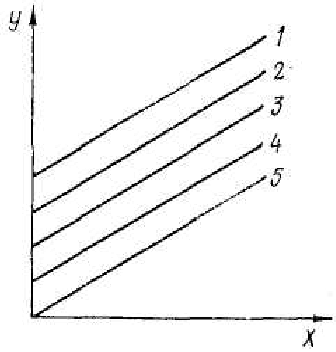


Рис. 2.12 – Графічне зображення функції $b = f(x, y, z)$: 1 - z_5; 2 - $z4_5$; 3 - z_3; 4 - z_2: 5 - z_1

В цьому випадку застосовують метод розділення змінних. Однієї з величин z в межах інтервалу вимірювань z_1 — z_n задають декілька послідовних значень. Для двох решти змінних x і y (при z_i = const) будують графіки $y = f_1$ (x). В результаті на одному графіку отримують сімейство кривих $y = f_1$ (x) для різних значень z (рис. 2.12).

Якщо необхідно графічно зобразити функцію з чотирма і більш змінним $a = f$ (b, x, y, z), то будують серію графіків типу попередніх (рис. 2.12), але кожний з них при b_1, ..., b_n = const, або приймають з N змінних N — 1 постійними і будують графіки: спочатку N — 1 $= f_1$ (x), далі N — 2 $= f_2$ (x), N — 3, $= f_3$ (X) і т.д. Таким чином, можна прослідкувати зміну будь-якої змінної величини у функції від інших при постійних значеннях інших. Цей метод графічного аналізу вимагає ретельності, великої уваги до результатів вимірювань. Проте він в більшості випадків є найбільш простим і наглядним.

При графічному зображенні результатів експериментів велику роль грає вибір системи координат або координатної сітки. Координатні сітки бувають рівномірними і нерівномірними. У рівномірних координатних сіток ординати і абсциси мають рівномірну шкалу. Наприклад, в системі прямокутних координат довжина одиничних обрізків, що відкладаються, на обох осях однакова. З нерівномірних координатних сіток найбільш поширені напівлогарифмічні, логарифмічні, імовірнісні. Напівлогарифмічна сітка має рівномірну ординату і логарифмічну абсцису (рис. 2.13). Логарифмічна координатна сітка має обидві осі логарифмічні (див. рис. 2.13, імовірнісна — ординату, звичайно рівномірну, і абсцису — імовірнісну шкалу (рис. 2.14)).

Призначення нерівномірних сіток різне. В більшості випадків їх застосовують для нагляднішого зображення функцій. Функція $y = f$ (x) має різну форму на різних сітках.

Так, багато криволінійних функцій випрямляють на логарифмічних сітках. Велике значення в практиці графічного зображення експериментальних даних має імовірнісна сітка, вживана в різних випадках: при обробці вимірювань для оцінки їх точності, при визначенні розрахункових характеристик (розрахункової вологості, розрахункових значень модуля пружності грунту і т.д.).

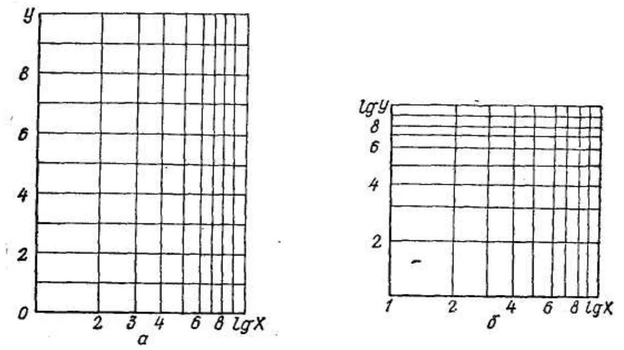


Рис. 2.13 – Координатна полулогарифмічна (*а*)
і логарифмічна (*б*) сітки

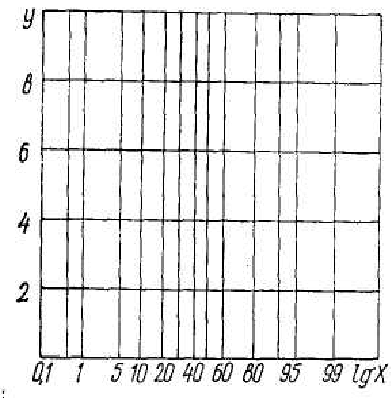


Рис. 2.14 – Координатна
імовірнісна сітка

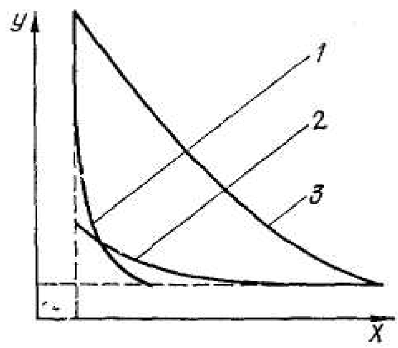


Рис. 2.15 – Форма графіку в
залежності від масштабу:
1 - плоска; *2* - розширена;
3 - нормальна

Іноді в процесі обробки експериментальних даних графічним способом необхідно скласти розрахункові графіки, прискорюючі знаходження по одній змінній інших. При цьому істотно підвищуються вимоги до точності викреслювання функції на графіку.

Викреслюючи розрахункові графіки, необхідно керуватися наступними практичними рекомендаціями. Залежно від числа змінних потрібно вибрати координатну сітку і визначити вид графіка - одна крива, сімейство кривих або серія сімейств. Великого значення набуває вибір масштабу графіка, що пов'язано з розмірами креслення і відповідно з точністю значень, що знімаються з нього. Відомо, що чим крупніший масштаб, тим вище точність значень, що знімаються. Проте, як правило, графіки не перевищують розмірів 20 х 15 см, що є зручним при складанні звітів. Лише в окремих випадках використовують графіки великих розмірів.

Досвід показує, що вживана для викреслювання графіків міліметрівка в межах розмірів 15-20 см дає погрішність +0,1-0,2 мм. Це слід мати на увазі при викреслюванні розрахункових графіків. Таким чином, абсолютна помилка значень, що знімаються з графіків, може досягати $\varepsilon = \pm 0{,}2\ M$, де M - прийнятий масштаб графіка. Очевидно, що точність вимірювань може бути вище за точність значень, що знімаються з графіка. Масштаб по координатних осях звичайно застосовують різний. Від вибору його залежить форма графіка - він може бути плоским (вузьким) або витягнутим (широким) уздовж осі (рис. 2.15). Вузькі графіки дають велику погрішність по осі *y,* широкі — по осі *x.* З рисунка видно, що правильно підібраний масштаб (нормальний графік) дозволяє суттєво підвищити точність відліків.

Розрахункові графіки, що мають максимум (мінімум) функції або який-небудь складний вигляд, особливо ретельно необхідно викреслювати в зонах вигину. На таких ділянках кількість точок для викреслювання графіка повинна бути значно більше, чим на плавних ділянках.

В деяких випадках будують номограми, що суттєво полегшують застосування для систематичних розрахунків складних теоретичних або емпіричних формул в певних межах вимірювання величин. Номограммірования можуть бути будь-які вирази алгебри. В результаті складні математичні вирази можна вирішувати порівняно просто графічними методами. Побудова номограм - трудомістка операція. Проте, будучи раз побудованою, номограма може бути використана для знаходження будь-якої із змінних, що входять в номограмоване рівняння. Застосування ЕОМ істотно знижує трудомісткість номограмування.

Існує декілька методів побудови номограм. Для цього застосовують рівномірні або нерівномірні координатні сітки. У системі прямокутних координат функції в більшості випадків на номограмах мають криволінійну форму. Це збільшує трудомісткість, оскільки потрібна велика кількість точок для нанесення однієї кривої.

У полу- або логарифмічних координатних сітках функції мають прямокутну форму і складання номограм спрощується.

Методика побудови номограм функцій однієї $y = f(x)$ або багатьох $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ змінних описана раніше і зводиться до побудови кривої, сімейства або серії сімейств шляхом прийняття постійних і знаходження однієї змінної. Складні вирази алгебри доцільно зводити до простого добутку двох-трьох значень, наприклад: $d = abc$ де *a, b, c* - функції двох, трьох змінних. В цьому випадку необхідно спочатку, задавшись змінними, обчислити *a, b, c.* Далі, додаючи *a, b, c* постійні значення, знайти *d: a, b, c* необхідно варіювати в певних значеннях, наприклад від 0 до 100 через 5 або 10. Найбільш ефективним є такий спосіб побудови номограм, при якій *a, b, c* представляються як безрозмірні критерії.

Контрольні запитання:

1. Що таке середні значення?
2. Методи обчислення середніх.
3. Теоретичні середні (моменти розподілення).
4. Оцінки довірчих границь для істинного значення вимірюваної величини.
5. Порівняння дисперсій.
6. Порівняння середніх.
7. Перевірка гіпотези про рівність середніх.
8. Перевірка гіпотези нормальності закону розподілення випадкової величини.

9. Визначення теоретичного закону розподілення.
10. Що таке *кореляція*?
11. Що таке *регресія*?
12. Типи кореляції.
13. Суть кореляційного та регресійного аналізу.
14. Лінійна кореляція.
15. Оцінювання коефіцієнту кореляції.
16. Лінійний регресійний аналіз.
17. Оцінювання прямої регресії.
18. Що таке критерій Ст'юдента?
19. Що таке критерій Фішера?
20. Метод найменших квадратів.
21. Для чого потрібно графічне зображення результатів експерименту?
22. Вибір системи координат.

Практична робота №4.
Програмні системи обробки даних. Аналіз теоретико-експериментальних досліджень та формулювання висновків і пропозицій. Складання звітів з науково-дослідної роботи

Ціль роботи

Розглянути які існують програмні системи обробки даних. Освоїти аналіз теоретико-експериментальних досліджень та правила складання звітів з науково-дослідної роботи.

Теоретичні пояснення

Програмні системи обробки даних

Серед математичного програмного забезпечення обробки інформації слід виділити широко поширені програмні продукти MS Excel, Statistica, Mathematica, MatLab і ін. Дамо коротку характеристику цих пакетів, що мають важливе значення при проведенні математичного моделювання і обробці вимірювальної інформації, одержаної під час фізичних експериментів.

Програма Microsoft Excel є програмним засобом для роботи з таблицями даних, що дозволяє упорядковувати, аналізувати і графічно представляти різні види даних. Клас програм, використовуваних для цієї мети, називається електронними таблицями або табличними процесорами.

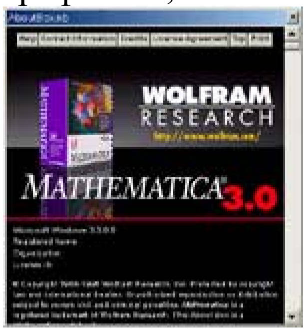
Застосування електронних таблиць спрощує роботу з даними і дозволяє одержати результати без проведення розрахунків вручну або спеціального програмування. У науково-технічних завданнях електронні таблиці можна використовувати ефективно, наприклад, для:

- проведення однотипних розрахунків над великими наборами даних;
- автоматизації підсумкових обчислень;
- рішення задач шляхом підбору значень параметрів, табуляції формул;

•обробки результатів експериментів;
•проведення пошуку оптимальних значень параметрів;
•підготовки табличних документів;
•побудови діаграм і графіків за наявними даними.

Програма статистичної обробки даних Statistica розрахована на середовище Windows, хоча є версії для середовища DOS. Основними завданнями пакету є первинний аналіз даних, регресійний аналіз, дискримінантний і кластерний аналіз. Особливості програм полягають в розвитку графічних засобів представлення інформації, а також засобів роботи з графіками – масштабування, вибір кольору зображення, об'єднання різних графіків, додавання тексту, рисунків. Звичайною практикою стало застосування в цьому пакеті вбудованих мов програмування. Вбудована мова програмування BASIC має обчислювальні процедури, що настроюються, з подальшою їх оптимізацією для підвищення продуктивності програми. За допомогою цих мов можна розширювати можливості системи, задаючи різні напрями обробки даних. В результаті досягається гнучкість системи, що дозволяє настроювати її на рішення складних задач.

Пакет Statistica розроблений фірмою StatSoft Inc.(США). Перша версія системи реалізована для DOS в 1991 р. У 1992 р. вийшла версія Statistica для Macintosh, в 1994 р. для Windows. Останні версії системи реалізовані на основі сучасних технологій об'єктно-орієнтованого програмування і підтримують багатодокументальний інтерфейс MDI, динамічна зовнішність даних DDE, підтримку зв'язування і впровадження об'єктів OLE і ін. В даний час фірма StatSoft готує до випуску ряд нових програмних продуктів. Серед них слід виділити кошти розробки, орієнтовані на користувачів, які розробляють власні процедури і методи обробки даних. Такі програми передбачається супроводжувати об'єктно-орієнтованими засобами для макропрограмування графічних, математичних і статистичних процедур.



Інший відомий пакет Mathematica реалізований для різних комп'ютерів – сумісних з IBM PC, Macintosh, робочих станцій Next і Sun, а також супер-ЕОМ Gray. Пакет Mathematica відноситься до комп'ютерних систем символьної математики. Ця особливість дозволяє одержувати рішення не тільки для конкретних даних, але і в загальному вигляді. Пакет орієнтований на науковців і математиків-аналітиків. Він включає великий набір обчислювальних методів і алгоритмів, має сучасний інтерфейс. Пакет розроблений фірмою Wolfram Research Ltd.(США). Перша версія пакету вийшла в 1998 р. Програмний пакет відноситься до інтерпретуючих систем, що реалізовують аналіз і інтерпретацію даних. Обчислювальне середовище дозволяє користувачу самому додавати нові функціональні можливості, що забезпечує адаптацію системи під різні специфічні завдання. Вдосконалення цього програмного продукту ведеться у напрямі розробки універсального ядра системи, що забезпечує роботу на різних обчислювальних платформах.

Ще одним могутнім математичним інструментарієм є пакет MatLab (Matrix Laboratory). Пакет призначений для математичного моделювання і забезпечує проведення досліджень в багатьох областях науково-технічних додатків. Структура пакету дозволяє ефективно поєднувати різні підходи до створення математичних моделей, включаючи аналітичний і імітаційний. У основі імітаційного моделювання покладений статистичний експеримент (метод Монте-Карло). У пакет вбудована мова об'єктно-орієнтованого програмування. Близько 30 інструментальних додатків пакету дозволяють забезпечувати рішення диференціальних і алгебри рівнянь, інтегральне обчислення, символьні обчислення і ін. Окрім стандартного набору математичних функцій пакет містить також і нетрадиційні алгоритми – засоби цифрової обробки зображень, пошуку рішень на основі нечіткої логіки, апарат побудови і аналізу нейронних мереж. MatLab може працювати з операційними системами Windows, UNIX, MacOS.

Черговим лідером на ринку математичних пакетів є MathCad. Цей програмний продукт також як і Mathematica є інтерпретуючою системою. Пакет орієнтований на рішення різноманітних задач аналізу і інтерпретації інформації. Серед цих завдань слід виділити рішення окремих рівнянь алгебри (лінійних і нелінійних) і їх систем, звичайних диференціальних рівнянь і їх систем, диференціальних рівнянь в приватних похідних, статистичну обробку даних (інтерполяцію, екстраполяцію, апроксимацію і ін.), роботу з векторами і матрицями, пошук екстремуму функціональних залежностей. У систему інтегровані засоби символьної математики, що забезпечує чисельне і аналітичне рішення різних задач. Програма доповнена об'ємним довідковим матеріалом. Керівництво включає не тільки рекомендації про порядок роботи з програмною системою, але і інформацію по основах математики, фізико-математичних формулах і константах.

В даний час ринок програмних систем у області фізико-математичних додатків продовжує рости. Нові програмні пакети розробляються на основі комп'ютерних технологій, що інтенсивно розвиваються, з використанням досягнень сучасних методів досліджень. В результаті створюються програмні засоби, здатні вирішувати складні задачі науково-технічних додатків.

При вивченні даного курсу для обробки статистичних даних ми використовуватимемо програму MS Excel.

Аналіз теоретико-експериментальних досліджень та формулювання висновків і пропозицій. Складання звітів з науково-дослідної роботи

Основою спільного аналізу теоретичних і експериментальних досліджень є зіставлення висунутої робочої гіпотези з дослідними даними спостережень.

Теоретичні і експериментальні дані порівнюють методом зіставлення відповідних графіків. Критеріями зіставлення можуть бути мінімальні, середні і максимальні відхилення експериментальних результатів від даних, встановлених розрахунком на основі теоретичних залежностей. Можливо також обчислення средньоквадратичного відхилення і дисперсії. Проте найбільш достовірними слід вважати критерії адекватності відповідності теоретичних залежностей експериментальним.

В результаті теоретико-експериментального аналізу можуть виникнути три випадки.

1. Встановлено повний або достатньо добрий збіг робочої гіпотези, теоретичних передумов з результатами досліду.
   При цьому додатково групують одержаний матеріал досліджень так, щоб з нього витікали основні положення розробленої раніше робочої гіпотези, внаслідок чого остання перетворюється на доведене теоретичне положення, в теорію.
2. Експериментальні дані лише частково підтверджують положення робочої гіпотези і в тій або іншій її частині суперечать їй. В цьому випадку робочу гіпотезу змінюють і переробляють так, щоб вона якнайповніші відповідала результатам експерименту. Найчастіше проводять додаткові експерименти коректувань з метою підтвердити зміни робочої гіпотези, після чого вона також перетворюється на теорію.
3. Робоча гіпотеза не підтверджується експериментом. Тоді її критично аналізують і повністю переглядають. Потім проводять нові експериментальні дослідження з урахуванням нової робочої гіпотези. Негативні результати наукової роботи, як правило, не є негодящими, вони у багатьох випадках допомагають виробити правильні уявлення про об'єкти, явища і процеси.

Після виконаного аналізу ухвалюють остаточне рішення, яке формулюють як висновок, виводи або пропозиції. Ця частина роботи вимагає високої кваліфікації, оскільки необхідно стисло, чітко, науково виділити те нове та істотне, що є результатом дослідження, дати йому вичерпну оцінку і визначити шляхи подальших досліджень. Звичайно по одній темі не рекомендується складати багато висновків (не більше 5-10). Якщо ж крім основних висновків, що відповідають поставленій меті дослідження, можна зробити ще і інші, то їх формулюють окремо, щоб не затемнити конкретної відповіді на основне завдання теми.

Всі висновкидоцільно розділити на дві групи: наукові і виробничі. У наукових висновках необхідно показати, який внесок внесений в науку в результаті виконаних досліджень (нові пропозиції, принципова відмінність тих, що існують, спростування деяких відомих положень і ін.). В ув'язненні потрібно розробити план впровадження закінчених НДР у виробництво і розрахувати очікуваний економічний ефект. При виконанні науково-дослідної роботи піклуються про захист державного пріоритету (першість в рішенні певної наукової або технічної задачі) на винахід або відкриття.

Вимоги до оформлення наукового звіту

Науковий звіт про проведені дослідження є не менш важливим, чим лабораторний журнал – по ньому інші дослідники зможуть ознайомитися у вашими результатами. Ціль звіту – викласти мету, хід і результати експерименту у вигляді, в якому їх найзручніше зрозуміти і перевірити іншим людям.

Важливою властивістю наукового (і будь-якого) звіту є довіра до нього з боку читачів. Це значить, що в звіті обов'язково слід привести ті експериментальні або статистичні дані, на яких грунтуються ваші висновки - при бажанні дослідник може повторити розрахунки і перевірити їх достовірність і адекватність одержаних вами результатам. Природно, що вони повинні бути повністю перевірені ще раз перед представленням звіту на суд наукової громадськості (або викладача).

У звіті немає необхідності розповідати всю історію отримання результатів, а також наводити дані експериментів, які відповідають тупиковим гілкам досліджень, або не важливі для результатів, що анонсуються. Проте всі актуальні дані повинні бути приведені, незалежно від того, свідчать вони за або проти представленої теорії. Давайте бути чесними.

При оформленні звіту варто виділяти ті експериментальні дані, результати і ідеї, які одержані іншими дослідниками і лабораторіями. Займатися плагіатом, тобто привласнювати собі авторство, небезпечно – у разі викриття дослідник може вважати свою наукову кар'єру завершеною, а студент – не чекати гарної оцінки (і, можливо, йому доведеться переробляти звіт).

У звіті повинні бути чітко виділені розділи:

- **Назва звіту** – як правило, приводиться на титульній сторінці.
- **Дані про групу дослідників,** що виконали експеримент, і лабораторія (підприємство), в якому він проводився.
- **Мета досліджень** – стисло формулюються основні завдання або необхідність досягнення певних результатів.
- **Експериментальні дані** – по аналогії з лабораторним журналом, необхідно вказувати використовувані матеріали, умови проведення (температура, тиск, напруженість магнітного поля, частота обертання і т.д.), тривалість і інші параметри експерименту, важливі для його відтворення.
- **Теоретичні викладення,** що дозволяють читачам зрозуміти ті модельні функціональні залежності, в рамках яких відбувається інтерпретація експериментальних даних.
- **Обробка експериментальних даних** – представлення даних в графічному (нагляднішому для розуміння вигляді), оцінка параметрів функціональних залежностей, їх погрішностей, статистична перевірка гіпотез про адекватність використовуваних моделей. При використанні програмних пакетів вказуйте їх назву, версію і значення чисельних параметрів, використовуваних при обробці даних.
- **Результати дослідження** – приводяться висновки про підтвердження або спростування даних гіпотез. Слід використовувати дієслова «досліджені», «перевірені», «виміряні» і т.п.
- **Список літератури** – бібліографічні посилання на ті книги і статті, з яких були використані експериментальні дані, результати або ідеї.

Для запису результатів великої кількості однотипних вимірювань зручно використовувати таблиці. З їх допомогою вдається уникнути непотрібного багаторазового запису позначення вимірюваної величини, одиниць вимірювання, використовуваних масштабних коефіцієнтів і т.п. У таблиці, крім експериментальних даних, можуть бути зведені проміжні результати обробки цих даних. У заголовок таблиці заносяться розмірності величин, характерні міри. Таблиці кресляться за допомогою лінійки і олівця (якщо звіт рукописний). У таблиці вказується порядковий номер кожного вимірювання.

Нагляднішими, ніж таблиці, є графіки залежностей досліджуваних фізичних величин. Графіки дають візуальне уявлення про зв'язок між величинами, що украй важливо при інтерпретації одержаних даних, оскільки графічна інформація легко сприймається, викликає більше довіри, володіє значною місткістю. На основі графіка легше зробити висновок про відповідність теоретичних представлень даним експерименту.

При побудові графіка слід враховувати наступні характеристики:

- **Осі** – графіки, за рідким винятком, будують в прямокутній системі координат, де по горизонтальній осі (осі абсцис) відкладають аргумент, незалежну величину, а по вертикальній осі (осі ординат) – функцію, залежну величину.
- **Масштаб по осях** – чисельне значення фізичної величини, відповідне одиничному відрізку. Осі необов'язково повинні містити початок координат – звичайно враховують мінімальне і максимальне значення. При необхідності вибирають логарифмічний або подвійний логарифмічний масштаб.
- **Підписи осей** – назва величини, що відкладається, масштабний коефіцієнт.
- **Шкала** – підписи до осей у вигляді числового масштабу, з урахуванням масштабного коефіцієнта. Звичайно вибираються якісь «круглі» числа, з мінімумом знаків після коми.
- **Масштабна сітка** – для зручності визначення величин конкретних точок роблять тонкі вертикальні і горизонтальні лінії, які є продовженнями відміток шкали.
- **Експериментальні точки** – повинні бути чітко видно. Якщо на одному графіку показані декілька залежностей, їх треба виділити точками різного вигляду (кружечки, ромби, квадратики і т.д.).
- **Проведення кривих** – експериментальні точки з'єднують плавною кривою, щоб вони в середньому були однаково розташовані по обидві сторони від проведеної кривої. Якщо відомий математичний опис спостережуваної залежності, то теоретична крива проводиться так само. Правильно побудована крива повинна заповнювати все поле графіка, що буде свідченням правильного вибору масштабів по кожній з осей. Якщо ж значна частина поля виявляється незаповненою, то необхідно заново вибрати масштаби і перебудувати залежність.
- **Погрішності вимірювань** – навколо проставленої експериментальної точки будують два відрізки, паралельні осям абсцис і ординат. У

вибраному масштабі довжина кожного відрізка повинна дорівнювати подвоєній погрішності величини, що відкладається по паралельній осі. Центр відрізка повинен приходитися на експериментальну точку.

- **Назва** – під графіком повинно бути приведено його назву, що пояснює, до чого відноситься зображена залежність.

Всі сторінки, таблиці, формули, схеми і графіки повинні бути **пронумеровані** (у порядку використання). На початку звіту звичайно приводять зміст звіту. Якщо таблиці або графіки мають значний розмір і заважають зв'язаному сприйняттю тексту, їх варто винести в **Додатки** і дати на них посилання в тексті.

Контрольні запитання:

1. Які програмні продукти для обробки даних експериментів Ви знаєте?
2. Використання програмного пакету Microsoft Office для обробки даних.
3. Що є основою для аналізу теоретико-експериментальних досліджень?
4. Принципи формулювання висновків і пропозицій.
5. Вимоги до складання наукових звітів.
6. Вимоги до оформлення звітів з науково-дослідної роботи.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Білущак Г. І., Чабанюк Я. М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум. – Львів, 2001. – 418 с.

2. В. П. Боровиков, И. П. Боровиков. Статистический анализ и обработка данных в среде Windows. – М.: «Филинъ», 1997. – 608 с.

3. Арбузова Т. Б., Кичигин В. И., Чумаченко Н. Г. Как сделать и оформить научную работу или диссертацию (Справочное руководство): Учебное пособие для вузов по дисциплинам: «Основы научных исследований», «Методология научных исследований» / Под общ. ред. чл.-корр. РААСН, д.т.н., проф. Т. Б. Арбузовой; Рекомендовано МОиПО РФ и АСВ в качестве учебн. пособия для вузов. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 271 с.

4. И. М. Грушко, В. М. Сиденко. Основы научных исследований. – Харьков: «Вища школа», 1983. – 224 с.

5. Кичигин В. И. Моделирование процессов очистки воды: Учебное пособие. - М.: Изд-во АСВ, 2003. - 230 с.

6. Shumway, R. H. Applied statistical time series analysis. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988. – 179 p.

7. Ryan, T. P. Modern Regression Methods. - New York: Wiley, 1997. – 327 p .

8. Гліненко Л. К., Сухоносов О. Г. Основи моделювання технічних систем: Навчальний посібник. – Львів: Вид-во «Бескид Біт», 2003. – 176 с.

9. Копейкин С. В., Курочкин Е. П. Планирование и методы обработки результатов эксперимента: Утв. в кач-ве учебн. пособия. – Куйбышев: Куйбышевский гос. ун-т, 1984. – 88 с.

10. Основы моделирования сложных систем: Учебн. пособие для втузов / Под общ. ред. Н. В. Кузьмина. – К.: Вища школа, 1981. – 360 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Інтеграл ймовірностей $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \left[\exp(-t^2/2)\right] \cdot dt$,

$$\Phi(-t) = -\Phi(t)$$

t	Значення $\Phi(t)$ при сотих долях t									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	1675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936

Таблиця допускає лінійну інтерполяцію з помилкою до 10.

Приклад. Розрахувати $\Phi(1{,}614)$.

Рішення. Беремо з таблиці значення $\Phi(1{,}61) = 0{,}1163$ та $\Phi(1{,}62) = 0{,}4474$ з різницею 0,0011 та вводимо поправку на відносне прирощення з аргументу (1,614-1,61)/0,01 = 0,4;

$$\Phi(1{,}614) = \Phi(1{,}61) + 0{,}0011 \cdot 0{,}4 = 0{,}4467.$$

Продовження таблиці для значень $t > 2{,}5$ см в Додатку В.

Додаток В

Величини, пов'язані з інтегралом ймовірностей $\Phi(t)$;

функція $t = t(P)$ є зворотньою для $P = 2\Phi(t)$

t	$\Phi(t)$	$1-2\Phi(t)$	$1-P$	$t=t(P)$	P
2,5	0,49379	0,01242	0,05	1,960	0,95
2,6	0,49534	0,00932	0,04	2,054	0,96
2,7	0,49653	0,00693	0,03	2,170	0,97
2,8	0,49744	0,00511	0,02	2,326	0,98
2,9	0,49813	0,00373	0,01	2,576	0,99
3,0	0,49865	0,00270	0,009	2,612	0,991
3,1	0,49903	0,00194	0,008	2,625	0,992
3,2	0,49931	0,00137	0,007	2,697	0,993
3,3	0,49952	0,00097	0,006	2,748	0,994
3,4	0,49966	0,00067	0,005	2,807	0,995
3,5	0,499767	0,000465	0,004	2,878	0,996
3,6	0,499841	0,000318	0,003	2,968	0,997
3,7	0,499892	0,000216	0,002	3,090	0,998
3,8	0,499927	0,000145	0,001	3,291	0,999
3,9	0,499952	0,000096	0,0009	3,320	0,9991
4,0	0,499968	0,000063	0,0008	3,353	0,9992
4,1	0,499979	0,000041	0,0007	3,390	0,9993
4,2	0,499987	0,000027	0,0006	3,432	0,9994
4,3	0,499991	0,000017	0,0005	3,481	0,9995
4,4	0,499995	0,000011	0,0004	3,540	0,9996
4,5	0,4999966	0,0000068	0,0003	3,615	0,9997
4,6	0,4999979	0,0000041	0,0002	3,720	0,9998
4,7	0,4999987	0,0000025	0,0001	3,891	0,9999
4,8	0,4999992	0,0000016	10^{-5}	4,417	$1 - 10^{-5}$
4,9	0,4999995	0,0000009	10^{-6}	4,892	$1 - 10^{-6}$
5,0	0,4999997	0,0000006	10^{-7}	5,327	$1 - 10^{-7}$

В таблиці значень $\Phi(t)$ помилка лінійної інтерполяції убуває зі збільшенням значень t; вона не перебільшує:

10^{-4} – в інтервалі (2,5; 3,2); 10^{-5} - в інтервалі (3,2; 3,9);

10^{-6} - в інтервалі (3,9; 4,5); 10^{-7} - в інтервалі (4,5; 5,0).

В таблиці значень $t(P)$ інтерполяцію не роблять.

Додаток С

Критичні значення $t(P)$ відношення (1.3) для вибраковування «вискакуючих» значень *x* (*n* – число прийнятних результатів, Р – надійність виводу)

n	Значення $t(P)$ при надійності				*n*	Значення $t(P)$ при надійності			
	0,95	0,98	0,99	0,999		0,95	0,98	0,99	0,999
5	3,04	4,11	5,04	9,43	20	2,145	2,602	2,932	3,979
6	2,78	3,64	4,36	7,41	25	2,105	2,541	2,952	3,819
7	2,62	3,36	3,96	6,37	30	2,079	2,503	2,802	3,719
8	2,51	3,18	3,71	5,73	35	2,061	2,476	2,768	3,652
9	2,43	3,05	3,54	5,31	40	2,048	2,456	2,742	3,602
10	2,37	2,96	3,41	5,01	45	2,038	2,441	2,722	3,565
11	2,33	2,89	3,31	4,79	50	2,030	2,429	2,707	3,532
12	2,29	2,83	3,23	4,62	60	2,018	2,411	2,683	3,492
13	2,26	2,78	3,17	4,48	70	2,009	2,399	2,667	3,462
14	2,24	2,74	3,12	4,37	80	2,003	2,389	2,655	3,439
15	2,22	2,71	3,08	4,28	90	1,998	2,382	2,646	3,423
16	2,20	2,68	3,04	4,20	100	1,994	2,377	2,639	3,409
17	2,18	2,66	3,01	4,13	∞	1,960	2,326	2,576	3,291
18	2,17	2,64	2,98	4,07					

Лінійна інтерполяція за аргументом *n* може дати помилку до 10^{-2} при $20 < n < 60$ та помилку до 10^{-3} при $60 < n < 100$.

При $n > 100$ критичні значення $t_n(P)$ з точністю до 10^{-3} можна розрахувати за формулою

$$t_n(P) = t_\infty(P) + \frac{t_{100}(P) - t_\infty(P)}{n} \cdot 100\,;$$

наприклад, при $P = 0,99$ та $n = 200$ маємо:

$$t_{200}(0,99) = 2,576 + \frac{2,639 - 2,576}{200} \cdot 100 = 2,576 + 0,031 = 2,607\,.$$

Додаток D

Критичні значення T_N Ф. Граббса

Кількість спостережень n	Значення T_N при рівні значущості q			Кількість спостережень n	Значення T_N при рівні значущості q		
	0,1	0,05	0,025		0,1	0,05	0,025
3	1,406	1,412	1,414	14	2,297	2,461	2,602
4	1,645	1,689	1,710	15	2,326	2,493	2,638
5	1,791	1,869	1,917	16	2,354	2,523	2,670
6	1,894	1,996	2,067	17	2,380	2,551	2,701
7	1,974	2,093	2,182	18	2,404	2,577	2,728
8	2,041	2,172	2,273	19	2,426	2,600	2,754
9	2,097	2,237	2,349	20	2,447	2,623	2,778
10	2,146	2,294	2,414	21	2,467	2,644	2,801
11	2,190	2,343	2,470	22	2,486	2,664	2,823
12	2,229	2,387	2,519	23	2,504	2,683	2,843
13	2,264	2,426	2,562	24	2,520	2,701	2,862
				25	2,537	2,717	2,880

Додаток D, a

Відсоткові точки критерію Смірнова-Граббса $\left[i_{\max|x_{(i)}-x|} \right] / S$

n	Довірча ймовірність p				n	Довірча ймовірність p			
	0,8	0,9	0,95	0,99		0,8	0,9	0,95	0,99
3	1,406	1,412	1,414	1,414	27	2,568	2,749	2,913	3,239
4	1,645	1,689	1,710	1,728	28	2,582	2,764	2,929	3,258
5	1,791	1,869	1,917	1,972	29	2,596	2,778	2,944	3,275
6	1,894	1,996	2,067	2,161	30	2,609	2,792	2,958	3,291
7	1,974	2,093	2,182	2,310	31	2,622	2,805	2,972	3,307
8	2,041	2,172	2,273	2,431	32	2,634	2,818	2,985	3,322
9	2,097	2,237	2,349	2,532	33	2,646	2,830	2,998	3,337
10	2,146	2,294	2,414	2,616	34	2,657	2,842	3,010	3,351
11	2,190	2,343	2,470	2,689	35	2,668	2,853	3,022	3,364
12	2,229	2,387	2,519	2,753	36	2,678	2,864	3,033	3,377
13	2,264	2,426	2,563	2,809	37	2,689	2,874	3,044	3,389
14	2,297	2,461	2,602	2,859	38	2,699	2,885	3,055	3,401
15	2,327	2,494	2,638	2,905	39	2,709	2,894	3,065	3,413
16	2,354	2,523	2,670	2,946	40	2,718	2,904	3,075	3,424
17	2,386	2,551	2,701	2,983	41	2,727	2,913	3,084	3,435
18	2,404	2,577	2,728	3,017	42	2,736	2,922	3,094	3,445
19	2,426	2,601	2,754	3,049	43	2,745	2,931	3,103	3,455
20	2,447	2,623	2,779	3,079	44	2,753	2,940	3,112	3,465
21	2,467	2,644	2,801	3,106	45	2,762	2,948	3,120	3,474
22	2,486	2,664	2,823	3,132	46	2,770	2,956	3,129	3,483
23	2,504	2,683	2,843	3,156	47	2,778	2,964	3,137	3,492
24	2,521	2,701	2,862	3,179	48	2,785	2,972	3,145	3,501
25	2,537	2,718	2,880	3,200	49	2,793	2,980	3,152	3,510
26	2,553	2,734	2,897	3,220	50	2,800	2,987	3,160	3,518

Додаток Е

Критичні точки розподілу Ст'юдента

Число ступінів свободи k	Рівень значущості q (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,36
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості q (одностороння критична область)					

Додаток F

Критичні точки *F*-розподілення Фішера-Снедекора при q = 0,05

(k_1 – число ступінів свободи більшої дисперсії,
k_2 – число ступінів свободи меншої дисперсії)

k_2	Значення $F_{табл.}$ при числі ступіней свободи k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	238,90	243,90	249,00	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,60	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,64	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Додаток G

Критичні точки розподілення χ^2

Число ступінів свободи k	Значення χ^2 при рівні значущості q					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,0	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток Н

Критичні точки $G_т$-розподілення Кохрена

(k – число ступінів свободи, l – кількість виборок)

l	Значення $G_т$ при q = 0,01 та числі ступінів свободи k						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9993	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l	Значення $G_т$ при q = 0,01 та числі ступінів свободи k						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2913	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l	Значення $G_т$ при q = 0,05 та числі ступінів свободи k						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4534
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l	Значення $G_т$ при q = 0,05 та числі ступінів свободи k						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт
з дисципліни

«ПЛАНУВАННЯ І ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ»

(для студентів 5 курсу денної форми навчання за спеціальностями 8.06010302 «Раціональне використання і охорона водних ресурсів», 8.06010108 «Водопостачання та водовідведення»)

Укладач: **КОВАЛЬОВА** Олена Олександрівна

Відповідальний за випуск проф. кафедри ВВ і ОВ, д.т.н. *С. С. Душкін*

За авторською редакцією

Комп'ютерний набір *О. О. Ковальова*

План 2014, поз. 85М

Підп. до друку 06.10.14 р. Формат 60x84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,3
Тираж 15 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.