МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Частина 2

Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при складних навантаженнях

Конспект лекцій
з дисциплін «Опір матеріалів», «Опір матеріалів та будівельна механіка», «Основи теорії споруд»
(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 - «Будівництво», 6.060102 - «Архітектура», 6.060103 - «Гідротехніка (Водні ресурси)»)

Харків – ХНУМГ – 2014

УДК 620.10

Опір матеріалів. Частина 2. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при складних навантаженнях : Конспект лекцій з дисциплін «Опір матеріалів», «Опір матеріалів та будівельна механіка», «Основи теорії споруд» для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.060102 «Архітектура», 6.060103 «Гідротехніка (Водні ресурси)») / В. П. Шпачук, Л. С. Андрієвська, Н. В. Середа, О. О. Чупринін; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х.: ХНУМГ, 2014.– 93 с.

Рецензенти:

В.Л. Хавін, проф., канд. техн. наук, завідувач кафедри опору матеріалів (Національний технічний університет «ХПІ»);

Е.Д. Чіхладзе, проф., д-р. техн. наук, завідувач кафедри будівельної механіки (Українська державна академія залізничного транспорту).

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних і екологічних спеціальностей університету при підготовці до занять, заліків та іспитів з курсу опору матеріалів.

Він містить основні питання опору матеріалів стержневих і балочних елементів конструкцій при складних навантаженнях.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 30.08.2011

© В.П. Шпачук, Л.С. Андрієвська, Н.В. Середа, О.О. Чупринін, ХНУМГ, 2014

ВСТУП

Опір матеріалів – це розділ механіки, якій вивчає інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій та споруд, їх взаємодію між собою та іншими конструкціями [1-3].

Основним елементом, що розглядає опір матеріалів, є брус (стержень, балка, вал) із прямолінійною віссю (прямолінійній брус). Розрахунки на міцність полягають у визначенні, чи буде конструкція протистояти зовнішнім впливам, чи зруйнується під дією цих навантажень. Метою розрахунків на жорсткість є визначення таких розмірів елементів конструкцій, при яких зміна розмірів і форми не перевищує заданих величин, що визначаються з умов експлуатації. Стійкість конструкції – це її здатність зберігати свою форму рівноваги. У процесі експлуатації часто виявляється, що деформації багатьох конструкцій при дії деякого виду навантажень незначні, поки їхні величини менше деяких значень, що називаються критичними. При навантаженнях, що перевищують критичні значення, деформації конструкції різко зростають і вона приймає іншу від первісної форму рівноваги.

Для того, щоб конструкція цілком відповідала вимогам міцності, жорсткості та стійкості, а отже була надійна в експлуатації, треба надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вона виготовляється, визначити відповідні розміри залежно від навантаження та його характеру. Опір матеріалів – теоретично-експериментальна наука. Вона розробляє аналітичні методи розрахунку елементів конструкцій, а також експериментально вивчає механічні властивості матеріалів [4-5].

У першому розділі приділена увага методам визначення переміщень при згині. Тут розглянуті: метод безпосереднього інтегрування; метод початкових параметрів; метод Мора.

Другий розділ містить розрахунок нерозрізних балок на абсолютно жорстких опорах і балки на пружній основі.

У третьому розділі наведені методи розрахунку: на косий згин, згин і кручення; позацентровий розтяг (стиск).

Четвертий розділ містить методи розрахунків на стійкість стиснутих стержнів.

1. ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ЗГИНІ

1.1 Прогін та кут повороту перерізу

При прямому згині під дією зовнішніх сил, розташованих в одній з головних площин спочатку прямої балки, її вісь викривляється в тій же площині, при цьому точки осі переміщуються. Скривлена вісь балки називається *пружною лінією*. Переміщення точок осі балки по нормалі до її первісної форми називається прогинами балки і позначаються V. При деформуванні вісь балки не змінює своєї довжини, тому що вона знаходиться в нейтральному шарі, у якому нормальні напруження дорівнюють нулю.

Скривлення осі балки викликає не тільки прогини, але і переміщення точок по горизонталі. Однак ці переміщення, як правило, набагато менше прогинів і ними зневажають. При цьому прогини вважаються набагато менше довжини балки.

При деформації балки її поперечні перерізи не тільки переміщаються, але і повертаються. Зневажаючи деформаціями зрушення, будемо вважати, що кут повороту поперечного перерізу балки θ дорівнює куту між дотичної, проведеної до вигнутої осі балки в цьому перерізі і недеформованою віссю балки, чи його тангенсу, тому що цей кут досить малий.

Необхідність визначення пружної лінії балки виникає в розрахунках елементів конструкції на жорсткість. Виникнення прогинів, що виникають у балці, обумовлюється тим, що при розрахунках часто ставиться вимога, щоб не тільки виникаючі в балці напруження не перевершували напружень, що допускаються, але і максимальні прогини були не більше наперед заданого значення, обумовленого умовами експлуатації конструкції.

Раніше, в першій частині, отримано зв'язок між радіусом кривизни осі балки, згинальним моментом і жорсткістю поперечного перерізу при згині. Це співвідношення можна представить у наступному вигляді:

$$M = \frac{EI}{\rho}, \qquad (1.1)$$

де ρ - радіус кривизни пружної лінії балки;

EI - жорсткість балки на згин;

M - згинальний момент.

Ця формула виражає найважливіше співвідношення теорії прямого згину балок. З неї випливає, що в будь-якій точці пружної лінії балки радіус кривизни прямо пропорційний жорсткості балки на згин і зворотно пропорційний згинальному моменту, що виникає в перерізі. Якщо балка постійного поперечного перерізу згинається таким чином, що на деякій ділянці згинальний момент не змінюється, то і радіус кривизни в цьому

випадку також буде постійною величиною. В даному випадку пружна лінія балки буде дугою кола. На інших ділянках пружна лінія балки матиме різний вигляд.

Для одержання рівняння пружної лінії у декартової системі координат направимо вісь x, що збігається з віссю недеформованої балки, вправо, а вісь y, що збігається з головною центральною віссю перетину вертикально догори. Прогини балки V будуть рівнобіжні осі y. При цьому рівнянням пружної лінії буде залежність між прогином і координатою x точки осі балки, у якій цей прогин визначається, тобто: V=f(x).

Розглянемо положення пружної лінії у координатах (x, y). У курсі вищої математики відомо наступне співвідношення для радіуса кривизни плоскої кривої в деякій точці з координатами (x, y) кривої V=f(x) (рис. 1.1):

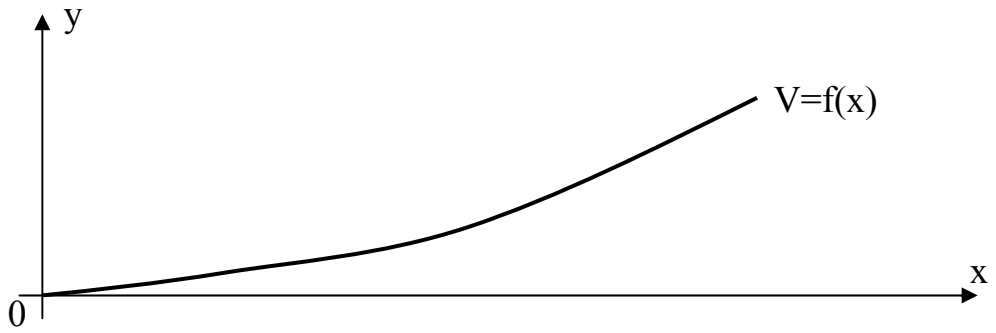


Рис. 1.1

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dV}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2V}{dx^2}}.$$

Це точній вираз радіусу кривизни можна перетворити, і одержати більш просте наближене вираження. Візьмемо до уваги те, що прогини, що допускаються, при згині балок досить маленькі в порівнянні з її довжиною (вони рідко перевищують однієї тисячної від довжини балки). Отже, пружна лінія балки мало відрізняється від прямої. Величина $\frac{dV}{dx}$, рівна куту повороту перерізу θ, являє собою тангенс кута між дотичною, проведеною до вигнутої осі балки в цьому перерізі, і віссю x і настільки мала, що її величина, зведена в квадрат, стає пренебрежімо малою у

порівнянні з одиницею, з якою вона складається. Через цій вираз $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ у розглянутому співвідношенні можна зневажити як нескінченно малою величиною другого порядку. А тому радіус кривизни пружної лінії балки можна представити більш простим співвідношенням:

$$\rho = \pm \frac{1}{\frac{d^2V}{dx^2}}.$$

Підставимо в це співвідношення радіус кривизни, виражений через згинальний момент у перерізі (1.1) одержимо рівняння пружної лінії у диференціальній формі:

$$\pm EI \frac{d^2V}{dx^2} = M.$$

Якщо ми будемо вважати, що позитивні прогини V будуть спрямовані нагору (рис. 1.1), то знак кривизни, чи другої похідної $\frac{d^2V}{dx^2}$, буде збігатися зі знаком моменту. Звідси випливає, що при такій системі координат рівняння пружної лінії у диференціальному вигляді:

$$EI \frac{d^2V}{dx^2} = M(x). \qquad (1.2)$$

Для одержання рівняння пружної лінії таким чином, щоб у нас була функціональна залежність між прогином і координатою точки осі балки, у якій цей прогин вважається, необхідно проінтегрувати рівняння (1.2) два рази. Таке інтегрування можна провести на ділянках досліджуваної балки на який можна одержати залежність згинаючого моменту від координати перерізу.

Перше інтегрування дає рівняння $\theta(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\int M(x)dx + C\right]$, що зв'язує кути повороту перерізів θ з абсцисами осі x, при цьому позитивні кути відповідають повороту перерізу проти годинної стрілки. Друге інтегрування приводить до шуканого рівняння пружної лінії $V(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\iint M(x)dxdx + Cx + D\right]$, що дає безпосередній зв'язок між прогином і віссю абсцис. Позитивним напрямком, у прийнятій системі координат (рис. 1.1) буде переміщення точок осі балки нагору.

Після кожного інтегрування виходить невідома постійна. Отже, на кожній ділянці балки після дворазового інтегрування рівняння пружної лінії буде дві постійні інтегрування (C, D).

Цей метод (метод безпосереднього інтегрування) при великому числі ділянок балки приводить до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з великим числом невідомих постійних. Ці постійні визначаються з умов рівності прогинів і кутів повороту перерізів на границях сусідніх ділянок і з умов закріплення балки на кінцях. Однак, дотримуючи деяких умов і прийоми складання й інтегрування рівнянь згинальних моментів завжди можна скоротити число невідомих до двох – переміщенню V_0 і куту повороту θ_0 на початку координат. Цей прийом одержав назву «*метод початкових параметрів*» і його застосування істотне спрощує задачу побудові пружної лінії балки, що має кілька ділянок.

1.2 Метод початкових параметрів

Розглянемо балку, що знаходиться в рівновазі під дією, прикладених до неї зовнішніх навантажень, включно з опорними реакціями, як показано на рис. 1.2. Тут прикладені навантаження, що викликають позитивні згинальні моменти в перерізі з координатою x (крім розподіленого навантаження, спрямованого вниз). Початок координат візьмемо в точці O, вісь x направимо по осі балки вправо, вісь V – нагору.

Визначимо прогин $V(x)$ і кут повороту $\theta(x)$ перерізу на відстані x від початку координат. Для цього запишемо величину згинаючого моменту, що виникає в розглянутому перетині від прикладених до балки навантажень по окремості. Потім, скориставшись формулою (1.2), визначимо прогин і кут повороту перетину для кожного навантаження окремо. А дійсний прогин і кут повороту, відповідно до принципу незалежності дії сил, будуть рівні їхній сумі.

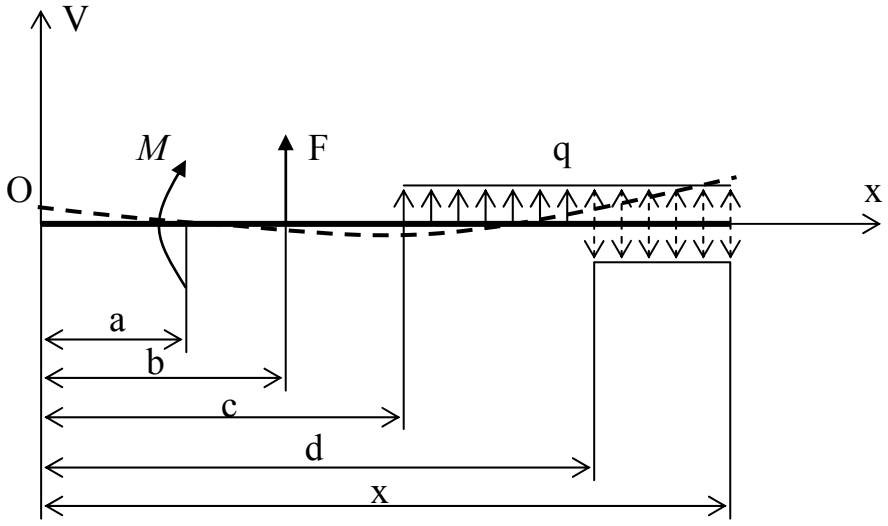


Рис. 1.2

Дія моменту M.

Згинальний момент у перерізі x дорівнює прикладеному на відстані a від початку координат моменту:

$M(x)=M$ або $M(x)=M(x-a)^0$.

Це вираження справедливе, тому що будь-яке число в нульової ступені дорівнює одиниці.

Зі співвідношення (1.2):

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\frac{1}{EI}[M(x-a)^0].$$

Інтегруємо це співвідношення два рази й одержуємо вираз для перебування кутів повороту і прогинів:

$$\frac{dV(x)}{dx}=\theta(x)=\frac{1}{EI}[M(x-a)^1+C_1];$$

$$V(x)=\frac{1}{EI}[M\frac{(x-a)^2}{2}+C_1x+D_1].$$

Тут C_1 і D_1 – невідомі константи інтегрування.

Дія зосередженої сили F.

Згинальний момент у перерізі x дорівнює силі, помноженої на відстань від цієї сили до розглянутого перерізу:

$M(x)=F(x-b)^1$.

Зі співвідношення (1.2):

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\frac{1}{EI}[F(x-b)^1].$$

Після інтегрування одержуємо вираження для визначення кутів повороту $\theta(x)$ і прогинів $V(x)$:

$$\frac{dV(x)}{dx}=\theta(x)=\frac{1}{EI}[F\frac{(x-b)^2}{2}+C_2];$$

$$V(x)=\frac{1}{EI}[F\frac{(x-b)^3}{6}+C_2x+D_2],$$

де C_2 і D_2 – невідомі константи інтегрування.

Дія розподіленого навантаження q.

Розглянемо по окремості дію розподіленого навантаження, спрямованого нагору і вниз. Згинальний момент у перетині x дорівнює:

напрямок – нагору

$$M(x)=q\frac{(x-c)^2}{2}.$$

напрямок – униз

$$M(x)=-q\frac{(x-d)^2}{2}.$$

З урахуванням співвідношення (1.2) після інтегрування одержуємо вираз для визначення кутів повороту $\theta(x)$ і прогинів $V(x)$:

$$\frac{dV(x)}{dx}=\theta(x)=\frac{1}{EI}[q\frac{(x-c)^3}{6}+C_3]; \qquad \frac{dV(x)}{dx}=\theta(x)=\frac{1}{EI}[-q\frac{(x-d)^3}{6}+C_4];$$

$$V(x)=\frac{1}{EI}[q\frac{(x-c)^4}{24}+C_3x+D_3]; \qquad V(x)=\frac{1}{EI}[-q\frac{(x-d)^4}{24}+C_4x+D_4],$$

де C_3, D_3, C_4, D_4 – невідомі константи інтегрування.

Остаточно, з урахуванням незалежності дії сил кут повороту $\theta(x)$ і прогин $V(x)$ в перерізі x від усіх діючих на балку навантажень буде:

$$EI\theta(x)=C+M\frac{(x-a)^1}{1}+F\frac{(x-b)^2}{2}+q\frac{(x-c)^3}{6}-q\frac{(x-d)^3}{6}.$$

$$EIV(x)=D+Cx+M\frac{(x-a)^2}{2}+F\frac{(x-b)^3}{6}+q\frac{(x-c)^4}{24}-q\frac{(x-d)^4}{24}.$$

де $C=C_1+C_2+C_3+C_4$;

$D=D_1+D_2+D_3+D_4$.

Фізичний зміст постійних C і D можна визначити, якщо розглянути деформування пружної лінії при балки x=0:

$C=EI\theta_0$; $D=EIV_0$.

де θ_0, V_0 – кут повороту і прогин перерізу на початку координат.

З урахуванням цього рівняння кутів повороту і прогинів в загальному вигляді можна записати в наступним виді:

$$EI\theta(x)=EI\theta_0\pm\sum M\frac{(x-a)^1}{1!}\pm\sum F\frac{(x-b)^2}{2!}\pm$$
$$\pm\sum q\frac{(x-c)^3}{3!}\mp\sum q\frac{(x-d)^3}{3!}. \qquad (1.3)$$

$$EIV(x)=EIV_0+EI\theta_0x\pm\sum M\frac{(x-a)^2}{2!}\pm\sum F\frac{(x-b)^3}{3!}\pm$$
$$\pm\sum q\frac{(x-c)^4}{4!}\mp\sum q\frac{(x-d)^4}{4!}.$$

Унаслідок того, що невідомі константи інтегрування являють собою прогин і кут повороту на початку координат, цей метод одержав назву *„метод початкових параметрів”*.

Рівняння (1.3) називаються *узагальненими* чи *універсальними рівняннями пружної лінії балки*. У них варто підставляти тільки ті навантаження, включаючи і реакції опор, що розташовані між початком координат і розглянутим перерізом.

При використанні цих рівнянь варто пам'ятати, що показані на рис. 1.2 навантаження, діють у позитивному напрямку. Якщо навантаження спрямоване в іншу сторону, то воно вноситься в рівняння з протилежним знаком. Рівняння (1.3) отримані в припущенні, що на балку діють розподілені навантаження, що у деякому перетині з'явились і продовжуються до кінця балки. Якщо розподілене навантаження в якомусь перетині закінчилася, тоді її фіктивно продовжують до кінця і на цій ділянці прикладають протилежну за напрямком і рівну їй за величиною навантаження, що компенсує, як показано на рис. 1.2 пунктирними стрільцями.

Нагадаємо, що при визначенні переміщення конкретного перерізу необхідно враховуватись лише складові, що відповідають силам, розташованим ліворуч від нього. У зв'язку з цим у наведених рівняннях необхідно відкидати доданки, у яких при підстановці x в дужках одержують число, яке менше або дорівнює нулю.

Напрямок прогину і кута повороту перерізу визначається їхнім знаком. При позитивному знаку переміщення точок осі балки відбувається нагору, при негативному – униз (рис. 1.1). При позитивному знаку, поворот перетину відбувається проти годинної стрілки, при негативному – по годинній стрілці.

Початкові параметри в рівняннях (1.3) для статично визначних балок визначаються з умов закріплення. Якщо балка жорстко затиснена, і місце защемлення збігається з початком координат, то і прогин і кут повороту перерізу на початку координат дорівнюють нулю. Якщо балка вільно обперта на двох опорах (рис. 1.3), при цьому одна опора розташована на початку координат, необхідно визначити тільки один початковий параметр – кут повороту перерізу. Тому що прогин на опорі, що збігається з початком координат, дорівнює нулю. Інший початковий параметр - кут повороту перерізу на початку координат, визначається з рівності нулю прогину на другій опорі.

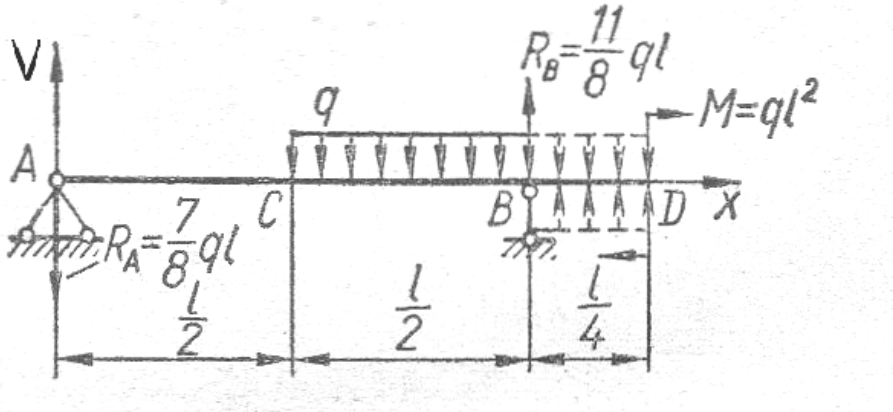


Рис. 1.3

Наприклад, в балки, наведеної на рис. 1.3 визначимо прогини і кути повороту в C і D. Для чого продовжимо розподілене навантаження до кінця балки та запишемо рівняння пружної лінії дільниці CD, з урахуванням визначених реакцій опір (рис. 1.3):

$$EI\,V(x) = EIV_0 + EI\theta_0 x - R_A\frac{x^3}{3!} + R_B\frac{(x-\ell)^3}{3!} - q\frac{(x-\frac{\ell}{2})^4}{4!} + q\frac{(x-\ell)^4}{4!}.$$

Для визначення початкових параметрів маємо дві умови, що відображає рівність нулю прогинів на опорах:

$V(0) = 0$ і $V(\ell) = 0$.

З першої умови визначимо:

$EIV_0=0$.

Друге дає:

$$EI\,V(\ell) = EI\theta_0\,\ell - \frac{7}{8}q\ell\frac{\ell^3}{6} - q\frac{(\ell-\frac{\ell}{2})^3}{24} = 0,$$

звідси:

$$EI\theta_0 = \frac{57}{384}q\ell^3.$$

Отже рівняння пружної лінії дільниці CD:

$$EI\,V(x) = \frac{57}{384}q\ell^3 x - \frac{7}{8}q\ell\frac{x^3}{3!} + \frac{11}{8}\frac{(x-\ell)^3}{3!} - q\frac{(x-\frac{\ell}{2})^4}{4!} + q\frac{(x-\ell)^4}{4!}.$$

Для знаходження переміщення в точці D, підставимо в це рівняння $x = \frac{5}{4}\ell$:

$$V_D = -0.11\frac{q\ell^4}{EI}.$$

Далі розглянемо рівняння на ділянці AC, з урахуванням навантажень що діють в інтервалі між початком координат (т. A) та т. C:

$$EI\,V(x) = \frac{57}{384}q\ell^3 x - \frac{7}{8}q\ell\frac{x^3}{3!}.$$

Для знаходження переміщення в точці C, підставимо в це рівняння $x = \frac{1}{2}\ell$:

$$V_C = -0.056\frac{q\ell^4}{EI}.$$

Аналогічно визначимо кути повороту.

На дільниці CD:

$$EI\theta(x) = \frac{57}{384}q\ell^3 - \frac{7}{8}q\ell\frac{x^2}{2!} + \frac{11}{8}\frac{(x-\ell)^2}{2!} - q\frac{(x-\frac{\ell}{2})^3}{3!} + q\frac{(x-\ell)^3}{3!}.$$

Для знаходження кута повороту в точці D, підставимо $x = \frac{5}{4}\ell$:

$$\theta_D = -0.56\frac{q\ell^3}{EI}.$$

Далі розглянемо рівняння на ділянці AC, з урахуванням навантажень що діють в інтервалі між початком координат (т. A) та т. C:

$$EI\theta(x) = \frac{57}{384}q\ell^3 - \frac{7}{8}q\ell\frac{x^2}{2!}.$$

Для знаходження кута повороту в точці C, підставимо $x = \frac{1}{2}\ell$:

$$\theta_C = -0.039\frac{q\ell^3}{EI}.$$

У випадку, коли не одна із шарнірних опор не збігається з початком координат, необхідно визначення обох початкових параметрів. Вони визначаються з умов рівності нулю прогинів на двох шарнірних опорах.

1.3 Узагальнені теореми пружних систем

Під дією зовнішнього навантаження, температури або зміщення опор споруди деформуються. При цьому координати даної точки перерізу споруди змінюються в результаті відносного подовження (скорочення) або скривлення її стержнів, тобто перерізи *переміщуються*. Визначенню переміщень звичайно передує визначення зусиль й побудова відповідних епюр.

Розрахунок механічної системи методом переміщень базується на наявних припущеннях опору матеріалів і теорії пружності, що відносяться до всієї споруди в цілому і пристосовується до лінійно-деформованих систем. Систем, що виконано з ідеально-пружного матеріалу, мають ідеальні шарнірні з’єднання, підпорядковуються принципу суперпозиції в умовах статичної дії сил. В стержні цій не враховується також зближення кінців стержня при його згині, тобто вплив поздовжніх і поперечних сил при визначенні деформації споруди.

В основі методу переміщень лежить принцип Лагранжа-Остроградського для пружних систем: в будь-який пружній зрівноваженій механічний системі сума робот всіх зовнішніх (W) і внутрішніх (U) сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю:

$$W = U = 0.$$

Можливими вважаються нескінченно малі переміщення, які не суперечать накладених на систему в'язям і відбуваються у фіксований момент часу.

В загальному випадку метод переміщень базується на роботі зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до системи.

1.3.1 Дійсна і можлива робота зовнішніх сил

В механіці розрізняються дійсні і можливі переміщення. Дійсне переміщення відбувається під дією певних зовнішніх сил за проміжок часу Δt і завжди спрямоване в бік швидкості точки прикладання сили. Якщо до споруди прикладена певна сила, яка зростає від нуля до кінцевої величини F з порівняно невеликою швидкістю, то таке навантаження називається *статичним*, а сила - *статичною*. При повільному зростанні навантаження прискорення точок системи малі, а тому їх силами інерції можна знехтувати.

Розглянемо статичне навантаження пружної балки (рис. 1.4) зовнішньою силою F. Для лінійно-деформованих систем між деформацією Δ_y балки в напрямку дії сили і силою F існує рівність:

$$\Delta_y = kF, \qquad (1.4)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Елементарна робота статичної сили і дорівнює:

$$dA^F = (F + dF)d\Delta y, \qquad (1.5)$$

де k – нескінченно малий приріст сили, якому відповідає нескінчено малий приріст переміщення $d\Delta_y = kdF$ (рис. 1.4). Робота статично прикладеної сили F враховуючі рівність (1.4) і нехтуючи в виразі (1.5) нескінченно малими другого порядку, дорівнює

$$A^F = \int_0^{\Delta y} F d\Delta y = k\int_0^F F dF = \frac{kF^2}{2} = \frac{F\Delta y}{2}, \qquad (1.6)$$

і відповідає площі заштрихованого на рис. 1.5 трикутника. Таку роботу називають *дійсною*.

Дійсна робота статично прикладеної сили F дорівнює половині добутку сили на дійсне переміщення Δ_y точки її прикладення в напрямку дії сили (теорема *Клайперона*).

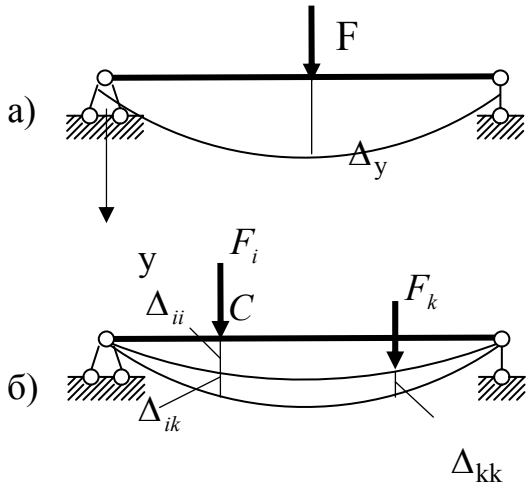


Рис. 1.4

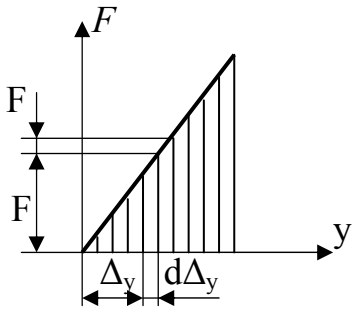


Рис. 1.5

Розглянемо далі таку саму пружну балку і прикладемо до неї спочатку статичну силу F_i, яка на дійснім переміщені Δ_{ii} виконає дійсну роботу $A_{ii}^{F_i} = \frac{F_i \Delta_{ii}}{2}$. Потім до вже здеформованої балки прикладається статична сила F_k, яка визиває переміщення Δ_{kk} і виконує дійсну роботу $A_{kk}^{F_k} = \frac{F_k \Delta_{kk}}{2}$. Сила F_i при цьому залишається сталою, її точка прикладення переміщується на Δ_{ik}, а сила виконує роботу

$$A_{ik}^{F_i} = F_i \Delta_{ik},$$

яка називається *можливою*. *Можливе роботу* здійснює незмінна за величиною сила на переміщеннях, зумовлених іншими діями. На рис. 1.4 переміщення Δ_{ik} може розглядатися як можливе переміщення точки прикладення сили F_i.

1.3.2 Узагальнені сили і узагальнені переміщення

В опорі матеріалів та будівельній механіки при визначені деформацій споруд або їх елементів звичайно використовують узагальнені координати, узагальнені переміщення й узагальнені сили.

Узагальнені координати – незалежні муж собою параметри, що однозначно визначають переміщення механічної системи. Узагальнені координати мають різні геометричні і механічні змісти. Це можуть бути деякі незалежні декартові координаті, лінійні переміщення, кути повороту тощо. В опорі матеріалів та будівельній механіці – це звичайно переміщення (прогини) точок пружного тіла (наприклад, перерізів балок, вузлів ферми), кути повороту елементів споруд (наприклад стержні ферми або рами).

Узагальнені переміщення – нескінченно мали переміщення механічної системи в напрямку узагальнених координат. Для плоскої пружної механічної системи це звичайно лінійні переміщення Δx, Δy центру ваги перерізу стержня й кут повороту перерізу φ.

Якщо в результаті деформації споруди точка C перемістилась в положення C_1 (рис. 1.6,а), то для визначення її переміщення використаємо узагальнені координати x, y, а узагальнені переміщення позначимо як Δx, Δy. Як відомо з теоретичної механіки робота постійної сили F, яка прикладена в цій точці, буде

$$A^F = F\Delta x\cos 0^\circ + F\Delta y\cos 90^\circ = F\Delta x\,.$$

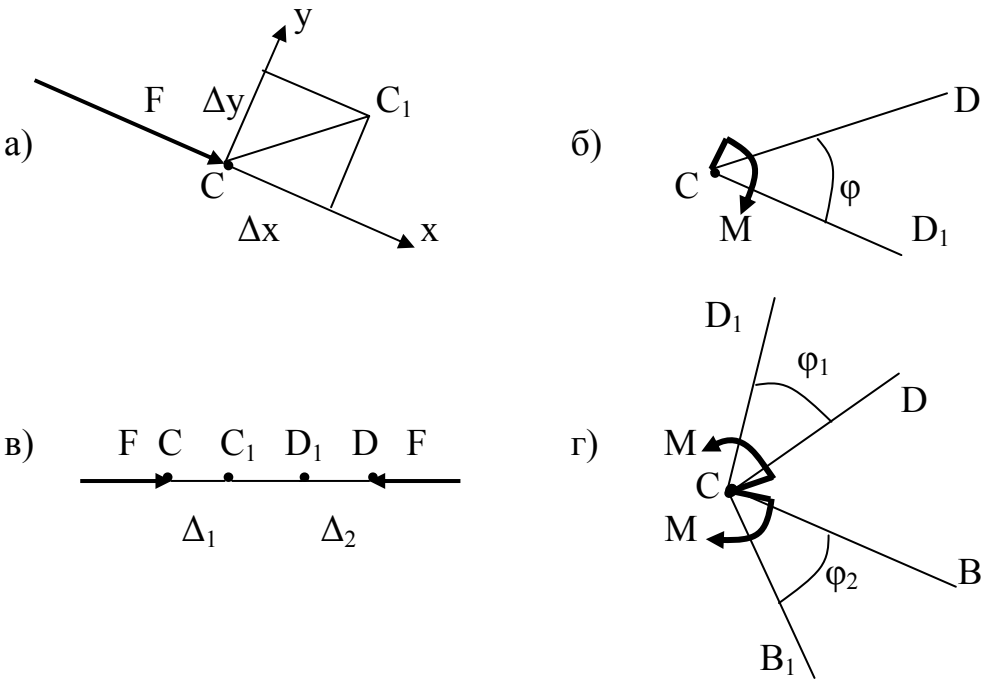


Рис. 1.6

Отже при дії на споруду постійної сили F узагальненою силою буде сама сила F, а узагальненим переміщенням – поступальне переміщення Δx точки прикладення сили в напряму сили. Яке дорівнює проекції повного переміщення CC_1 точки прикладення сили на напрямок дії сили.

При дії зосередженого моменту M в перерізі C споруди (рис. 1.6,б) він (переріз) повернеться на кут φ, а момент здійснить роботу $A^M = M\varphi$. Таким чином, зосередженому моменту M, як узагальнений сили, відповідає узагальнене переміщення у вигляді кута повороту φ перерізу стержня в точці прикладення моменту.

Легко також показати, що:

- при дії на споруду двох постійних сил F, які спрямовані вздовж однієї прямої назустріч одна одної (рис. 1.6,в), узагальненою силою буде сила F, а узагальненим переміщенням – зміна відстані $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$ між точками прикладення сил;

- при дії на споруду двох однакових за величиною і протилежних за напрямом зосереджених моментів M (рис. 1.6,г) узагальненою силою буде момент M, а узагальненим переміщенням – зміна кута між переміщеннями: $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$.

В подальшому узагальнене переміщення (як лінійне, так і кутове) позначатиме літерою Δ з двома індексами. Перший індекс позначає місцезнаходження переміщення, вказує на узагальнену силу, яка відповідає характеру та напряму переміщення. Другий індекс вказує на дію. Яка викликала це переміщення. Наприклад, на рис. 1.4,б узагальнене переміщення Δ_{ii} являє собою приміщення в напрямку сили F_i від дії цієї ж сили F_i, Δ_{ik} – переміщення в напрямку узагальненої сили стану і від дії узагальненої сили стану k.

Узагальнене переміщення, яке обумовлене узагальненою силою, величина якої дорівнює одиниці. Позначатиме літерою δ і називатиме питомим узагальненим переміщенням або податливістю. Наприклад, коефіцієнт податливості δ_{ik} характеризує величину переміщення в напрямку і від дії в напрямку k одиничній узагальненої сили.

Отже на підставі принципу незалежності дії сил (принципу суперпозиції) будь який повний прогин механічної системи можна подати як суму прогинів від кожної узагальненої сили окремо:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + ... + \Delta_{in}. \qquad (1.7)$$

В виразі (1.7) для позначення повного переміщення і-тої точки зберігається лише перший індекс, який відповідає лише перший індекс, який відповідає характеру та напряму переміщення.

Наприклад, на рис. 1.7 зображено три деформовані стани балки, що перебуває під дією узагальнених сил F_1, F_2 і M. Повний прогин балки Δ_1 в напрямку узагальненої сили F_1 буде

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13}\,. \qquad (1.8)$$

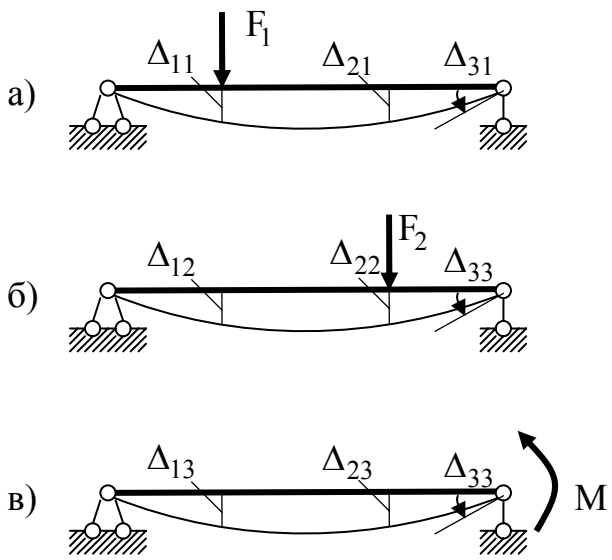


Рис. 1.7

На практиці звичайно узагальнені сили позначають однотипними літерами F_i, де і – номер узагальненої сили. Наприклад, для балки на рис. 1.7,в узагальненою силою F_3 буде: F_3=M.

Дійсний прогин (1.7) механічної системи зручніше виразити через прогини, зумовлені дією одиничної сил, тобто через податливості:

$$\Delta_i = \delta_{i1}F_1 + \delta_{i2}F_2 + ... + \delta_{in}F_n\,, \qquad (1.9)$$

де δ_{ik} - переміщення від дії узагальненої сили F_k=1 в напрямку k, а індекс k змінюється від 1 до n.

В матричній формі рівняння, для переміщень і від 1 до n (1.9) має вигляд

$$\Delta = BF\,, \qquad (1.10)$$

де $\Delta = [\Delta_1,...,\Delta_n]'$, $F = [F_1,...,F_n]'$ - вектори-стовпці узагальнених переміщень та узагальнених сил, $B = [\delta_{ik}]'$ - квадратна (nxn) матриця податливостей.

З рівності (1.10) методом оберненої матриці B^{-1} можна визначити величини узагальнених сил:

$$F = B^{-1}\Delta = k\Delta\,,$$

де $k = [k_{ik}]$ - квадратна (nxn) матриця, яку називають матрицею коефіцієнтів жорсткості механічної системи. Довільний коефіцієнт k_{ik}

жорсткості дорівнює сили F_i від примусового переміщення $\Delta_k = 1$ за умови, що всі інші переміщення дорівнюють нулю.

1.3.3 Робота внутрішніх сил

Для визначення робот внутрішніх сил розглянемо балку на рис. 1.8. У зв'язку з тим що система передбачається лінійно деформованою, для визначення в ній зусиль і переміщень можна скористатися принципом незалежності дії сил. Для цього розглянемо два стани балки: у першому діє сила F_i, а в другому – сила F_k. Виділимо в балці на відстані x від лівої опори елемент довжиною dx. У першому стані на гранях елемента діють внутрішні зусилля M_i та Q_i (рис. 1.9, *а*), у другому - M_k та Q_k (рис. 1.9, *б*). Ці зусилля в межах елемента можна вважати постійними.

Дія зусиль M_k у другому стані викликає викривлення осі елемента так, що кривина осі дорівнює $\chi_k = \rho_л^{-1}$, а кут між його гранями становить $\chi_k dx$ (рис. 1.9, *в*). Поперечні сили Q_k викликають зсув (рис. 1.9, *г*) так, що величина взаємного зміщення граней становить $\gamma_k dx$.

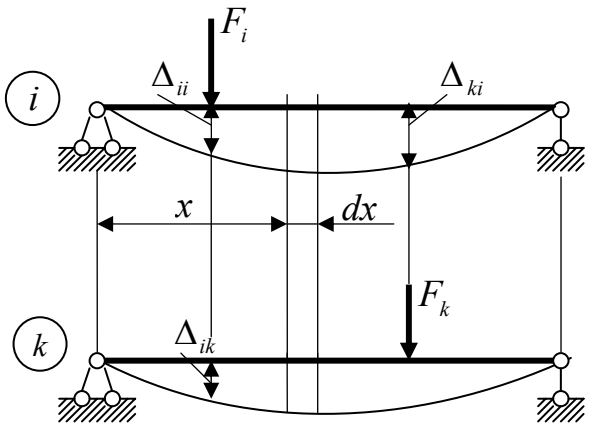


Рис. 1.8

Тепер неважко записати можливу роботу внутрішніх сил елемента в першому стані на переміщеннях другого стану:

$$dU_{ik} = -M_i \cdot \chi_k dx - Q_i \cdot \gamma_k dx. \qquad (1.11)$$

Знак "мінус" пояснюється тим, що зусилля M_i та Q_i є зовнішніми по відношенню до елемента, а внутрішні зусилля спрямовані назустріч їм. Деформації χ_k й γ_k визначаються відомими з опору матеріалів формулами

$$\chi_k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_k}{E\,I},\ \ \gamma_k = \mu \frac{Q_k}{G\,A},$$

де $\mu = A \int\limits_{(A)} \left(\frac{S_z}{I_z\, b} \right)^2 dA$ - коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі й залежить від форми поперечного перерізу.

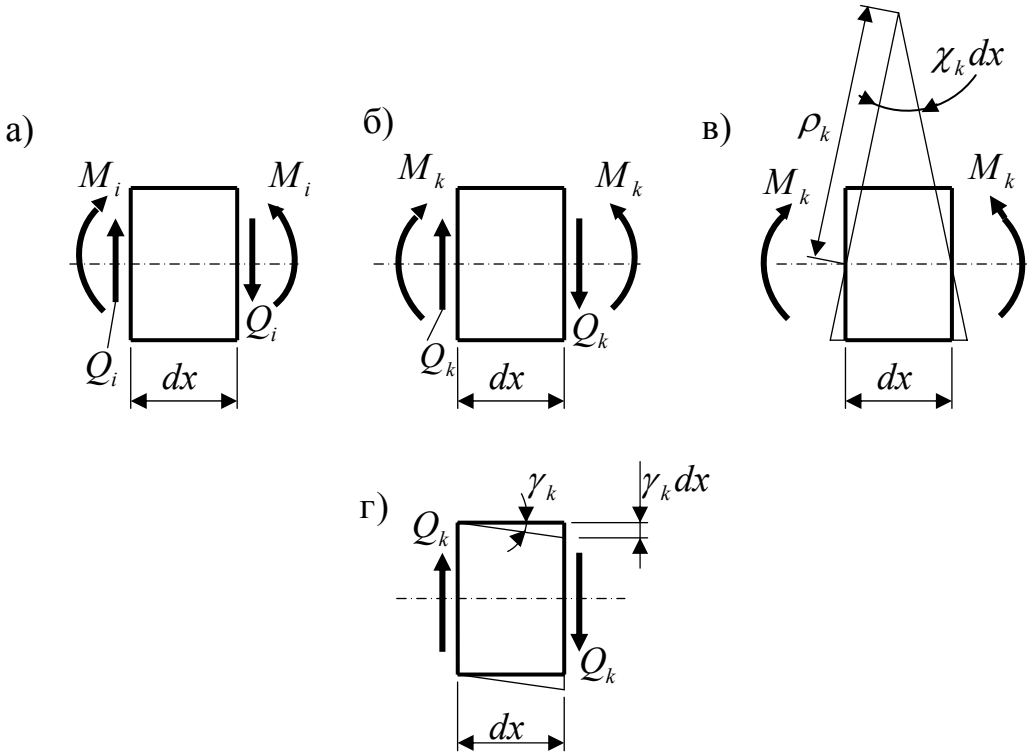


Рис. 1.9

Підставляючи вирази для χ_k та γ_k в (1.11), проінтегруємо обидві частини рівняння по всій довжині балки. Внаслідок одержимо можливу роботу U_{ik}:

$$U_{ik} = -\int\limits_{(l)} \frac{M_i M_k}{E\,I} dx - \int\limits_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{G\,A} dx. \qquad (1.12)$$

У загальному випадку деформації плоскої системи в рівняння (1.12) додається робота поздовжніх сил N_i. При цьому слід урахувати, що осі системи можуть мати переломи й розгалуження, а функції внутрішніх зусиль – розриви. Тому, замінивши змінну x змінною s, що перебігає обрис осей системи, розіб'ємо інтеграл на суму інтегралів. Тоді остаточно можливу роботу внутрішніх сил в загальному вигляді запишемо так:

$$U_{ik} = -\sum \int_{(l)} \frac{M_i M_k}{E\,I} ds - \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{G\,A} ds - \sum \int_{(l)} \frac{N_i N_k}{E\,A} ds. \qquad (1.13)$$

За аналогією з (1.13) можна записати дійсну роботу внутрішніх сил першого стану U_{ii}, враховуючи, що деформації в цьому випадку визначаються зусиллями M_i, Q_i і N_i і лінійно зростають зі збільшенням навантаження:

$$U_{ii} = -\frac{1}{2}\sum \int_{(l)} \frac{M_i^2 ds}{E\,I} - \frac{1}{2}\sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i^2 ds}{G\,A} - \frac{1}{2}\sum \int_{(l)} \frac{N_i^2 ds}{E\,A}.$$

У подальшому знак (l) в інтегралів, що означає інтегрування вздовж кожного відрізку системи, іноді відкидатимемо.

1.3.4 Теореми взаємності

Теореми про взаємність робот і переміщень мають велике значення в загальний теорії дослідження напруженого й деформованого стану стержнів, пластин, оболонок та ін. Їх використання суттєво спрощує розв'язок багатьох задач опору матеріалів та будівельної механіки.

Теореми про взаємність робот (теорема Бетті).

Розглянемо лінійно-деформовану систему, наприклад балку (рис. 1.10) у двох станах.

1. В першому стані (рис. 1.10,а) спочатку до балки статично прикладається узагальнена сила F_1, яка викликає прогин Пр 1 і виконує дійсну роботу $A_{11}^{F_1} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}$. Потім до вже здеформованої балки статично прикладається узагальнена сила F_2. В результаті балка отримує додаткову деформацію (прогин Пр 2), сила F_2 виконує дійсну роботу $A_{22}^{F_2} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}$. Повна робота обох сил буде

$$A^{F_1;F_2} = A_{11}^{F_1} + A_{12}^{F_1} + A_{22}^{F_2} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + F_1 \Delta_{12} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}. \qquad (1.14)$$

2. В другому стані (рис. 1.10,б) навантаження балки подається в оберненій послідовності: спочатку статично прикладеною силою F_2 (прогин Пр 2, робота $A_{22}^{F_2} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}$), а потім силою F_1 (прогин Пр 1, роботи $A_{11}^{F_1} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}$, $A_{21}^{F_2} = F_2 \Delta_{21}$). Повна робота сил в цьому стані дорівнює

$$A^{F_2;F_1} = A_{22}^{F_2} + A_{21}^{F_2} + A_{11}^{F_1} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_2 \Delta_{21} + \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}. \qquad (1.15)$$

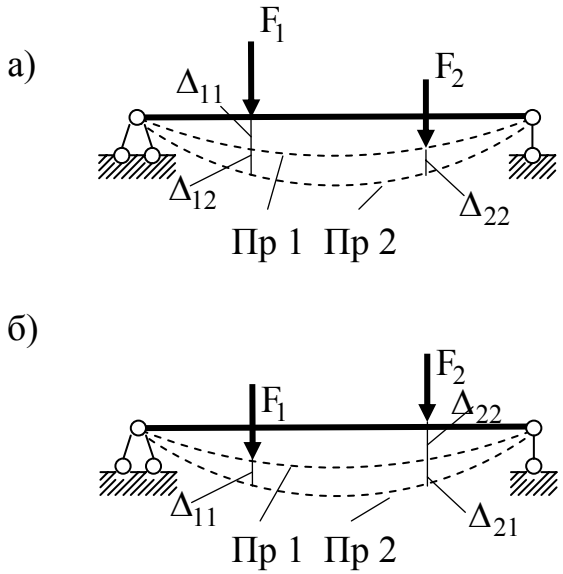


Рис. 1.10

Для лінійно-деформівних систем за величиною переміщення Δ_{11} і Δ_{22} на рис. 1.10,а,б. Не залежить від черговості прикладення навантажень F_1 F_2. Крим того, враховуючи принцип суперпозиції для переміщень, за величиною також і їх повні роботи (1.14) і (1.15) не залежать від послідовності навантаження балки:

$$A^{F_1;F_2} = A^{F_2;F_1}. \tag{1.16}$$

З виразу (1.16) приходимо до рівності:

$$A_{12}^{F_1} = A_{21}^{F_2}, \text{ або } F_1\Delta_{12} = F_2\Delta_{21}. \tag{1.17}$$

З рівняння (1.17) слід, що робота сили F_1 на переміщенні Δ_{12}, що викликане силою F_2, дорівнює роботі сили F_2 на переміщенні, що викликане силою F_1. Цей висновок відомий під назвою теореми про взаємність робіт (теореми Бетті): якщо є два зрівноважених стани пружної системи, то робота сил першого стану на переміщеннях другого дорівнює роботі сил другого стану н переміщеннях першого.

Теореми про взаємність переміщень (теорема Максвелла).

З теореми при взаємність робіт випливає ряд окремих теорем. Розглянемо випадок, коли пружна система навантажена узагальненими силами $F_1 = F_2 = F$ то з (1.17) одержимо

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \tag{1.18}$$

Якщо, до того ж, узагальнені сили дорівнюють одиниці ($F_1 = F_2 = 1$), то

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \qquad (1.19)$$

Рівність (1.19) виражає теорему про взаємність переміщень (терему Максвела): для двох одиничних станів пружної системи переміщення в напряму першої узагальнений сили, що викликане другою узагальненою силою чисельно дорівнює переміщенню в напряму другої узагальнений сили, що викликане дією першої узагальненою сили.

Приклад використання теореми про взаємність переміщень.

Визначити прогини пружної балки $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ в точках 2, 3, 4, яку статично навантажено в точці 1 силою F (рис. 1.11)

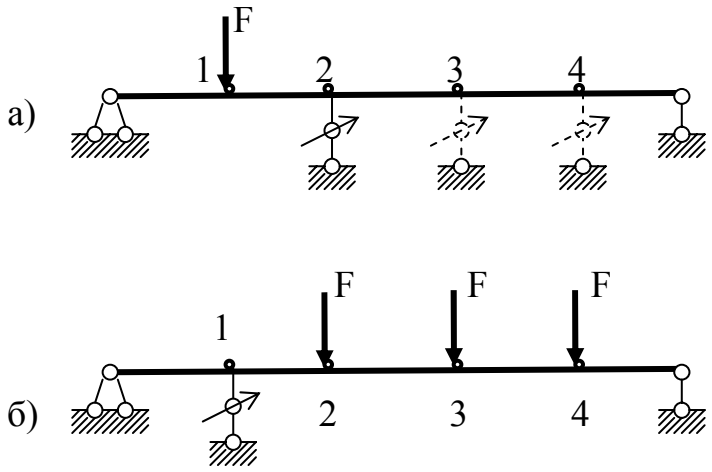


Рис. 1.11

Звичайний шлях вирішення цієї задачі полягає у статичному навантаженні балки в точки 1 силою F і використані прогиновимірювача, що встановлюється послідовно в точках 2, 3, 4 балки (рис. 1.11,а). Однак інколи конструктивно в зазначених місцях балки встановлення вимірювача э неможливим або викликає неприпустими вимірювальні похибки.

Використання теореми про взаємність переміщень дозволяє вирішити цю задачу іншим методом: прогиновимірювач встановлюється в точці 1, а навантаження F прикладають до балки послідовно в точках 2, 3, 4. Відповідно до рівності (1.18) теореми при взаємність переміщень прогини в точці 1 балки будуть дорівнювати шуканим прогинам $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

1.4 Метод Мора

Розрахунок статично невизначних систем, а також усіх систем на жорсткість пов'язаний із необхідністю обчислення переміщень. Найбільш загальними методами визначення переміщень у пружних системах є

енергетичні, засновані на дослідженні потенціальної енергії системи. Одним із методів, що застосовується для визначення переміщень у лінійно деформованих системах, є *метод Мора*.

Нехай треба визначити переміщення Δ_i деякої точки балки від дії заданого навантаження (рис. 1.12, *а*). Розглянемо два стани цієї споруди: перший – дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 1.12, *а*), другий - допоміжний або одиничний стан, у якому за напрямком шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 1.12, *б*).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{if} = 1 \cdot \Delta_i$ за теоремою Бетті дорівнює роботі W_{fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану. Беручи до уваги, що $W_{fi} = -U_{fi}$, одержуємо на підставі (1.13):

$$\Delta_i = \Sigma \int_{(l)} \frac{M\overline{M}_i ds}{EI} + \Sigma \int_{(l)} \mu \frac{Q\overline{Q}_i ds}{GA} + \Sigma \int_{(l)} \frac{N\overline{N}_i ds}{EA}, \qquad (1.20)$$

де M, Q, N - зусилля від заданого навантаження; $\overline{M}_i$, $\overline{Q}_i$, $\overline{N}_i$ - зусилля від одиничної сили у допоміжному стані.

Формулу (1.20) називають формулою Мора. За її допомогою можна визначити переміщення від навантаження при довільному навантаженні. Для цього:

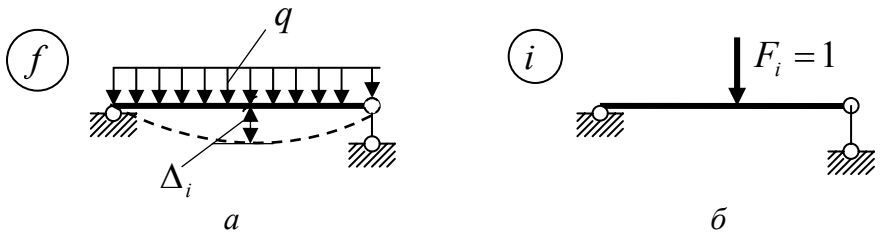
1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;

2) за напрямком шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;

3) знаходять зусилля $\overline{M}_i$, $\overline{Q}_i$, $\overline{N}_i$ від одиничної сили;

4) вирази зусиль підставляють у праву частину (1.20) та інтегруванням уздовж осей усіх елементів споруди визначають шукане переміщення.

Обчислення переміщень за допомогою формули (1.20) називають *методом Мора.*



а *б*

Рис. 1.12

В окремих випадках формула Мора набуває простішого вигляду. При *розрахунку систем із переважним згином – балок і рам* – вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем ураховують лише перший інтеграл виразу (1.20), тобто:

$$\Delta_i = \sum \int_{(l)} \frac{M\overline{M}_i ds}{EI}.$$

Якщо розбити систему на відрізки постійної жорсткості, маємо:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{EI} \int_l M\overline{M}_i ds \right)_j . \qquad (1.21)$$

Інтеграл $\int_l M\overline{M}_i ds$ у (1.21) називають інтегралом Мора. У деяких випадках обчислення цього інтегралу можна спростити.

У загальному випадку на ділянці прямого стержня постійної жорсткості раціонально скористатися *формулою Сімпсона* для чисельного інтегрування. Відповідно до цієї формули визначений інтеграл від функції $\varphi(s)$ на відрізку $0 \le s \le l$ можна наближено знайти так:

$$\int_0^l \varphi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

Ця формула ґрунтується на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому у випадку, якщо функція $\varphi(s)$ дійсно квадратна парабола, вираз дає точний результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох епюр на відрізку прямого стержня постійної жорсткості (рис. 1.13), одержуємо

$$\int_0^l M\overline{M}_i ds = \frac{l}{6} \left(M_{лів}\overline{M}_{лів} + 4M_{сер}\overline{M}_{сер} + M_{пр}\overline{M}_{пр} \right). \qquad (1.22)$$

Тут індекси *лів, сер* і *пр* означають лівий, правий кінці та середину відрізка довжиною l.

Як свідчить аналіз, формула (1.22) є точною й у випадку, коли підінтегральна функція $M\overline{M}_i$ на відрізку від *0* до *l* є кубічною параболою, тобто містить вантажні моменти, окреслені за квадратною параболою (при $q = const$) та лінійно змінні одиничні моменти. Отже, формула Сімпсона дає точний результат для переважної більшості епюр, що зустрічається в практичних розрахунках.

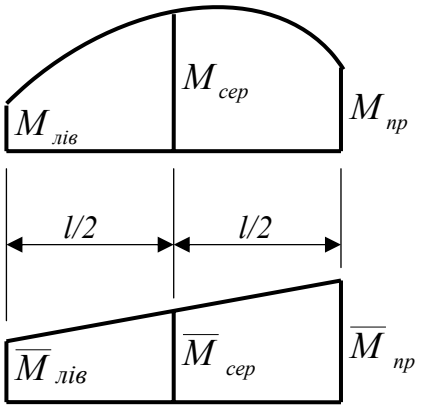


Рис. 1.13

В інших випадках застосування формули Сімпсона потребує розбивання епюр на відрізки досить малої довжини.

Якщо вантажні моменти окреслені за лінійною залежністю (при $q = 0$), тоді обидва моменти у середині дільниці можливо виразити через крайні значення (рис. 1.14):

$$M_{сер} = \frac{M_{лів} + M_{пр}}{2};$$

$$\overline{M}_{сер} = \frac{\overline{M}_{лів} + \overline{M}_{пр}}{2}.$$

Це дозволяє вираз (1.22) получить у вигляді:

$$\int_0^l M\overline{M}_i ds = \frac{l}{6}\left(2M_{лів}\overline{M}_{лів} + 2M_{пр}\overline{M}_{пр} + M_{пр}\overline{M}_{лів} + M_{лів}\overline{M}_{пр}\right). \quad (1.23)$$

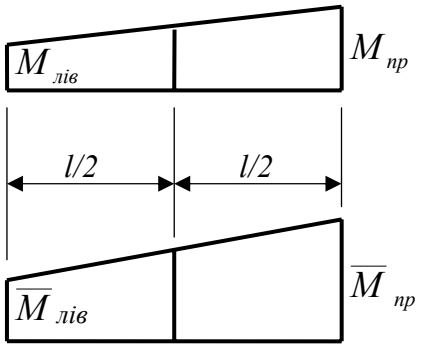


Рис. 1.14

1.5 Правило Верещагіна

У випадку, коли підінтегральній вираз у формулі (1.21) представляє з себе добуток двох функцій ($M\overline{M}_i$), одна з яких довільна, друга – лінійна ($\overline{M}_i$ завжди лінійна, так як являє собою згинальний момент від одиничного навантаження – сили або моменту) інтеграл (1.21) можливо обчислити наступним чином:

$$\int_l M\overline{M}_i ds = \omega \cdot M_i^c ,$$

де ω - площа вантажної епюри;

M_i^c - значення одиничного моменту під центром ваги вантажного моменту (рис. 1.15).

З урахуванням цього вираз (1.16) набуває вигляду:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\omega \cdot M_i^c}{EI} \right)_j . \qquad (1.24)$$

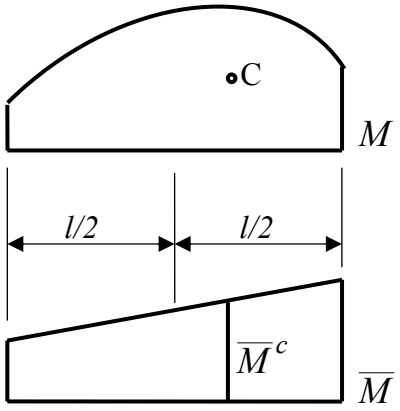


Рис. 1.15

1.6 Приклад розрахунку

Збудувати пружну лінію балки, приведеної на рис. 1.16,а, вважаючи, що вона має двотавровий переріз, якій підібрано з умов міцності. Допустимі напруження вважати рівними $[\sigma] = 16$ кН/см^2, зовнішні сили F_1=15 кН, F_2=25 кН, q=20 кН/м.

Розв'язання.

Для побудови епюр поперечної сили Q і згинального моменту M визначимо реакції опор в точках B і C балки, яка є однопрогінною з двома консолями.

При визначенні опорних реакцій використовуємо рівняння моментів сил відносно точок B і C:

$$\sum M_B = F_1 \cdot 0.8 - q \cdot 4.6 \cdot 5.3 + R_C \cdot 6 - F_2 \cdot 7.6 = 0;$$

$$R_C = \frac{-F_1 \cdot 0.8 + q \cdot 24.38 + F_2 \cdot 7.6}{6} = \frac{-15 \cdot 0.8 + 20 \cdot 24.38 + 25 \cdot 7.6}{6} = 110.93 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = F_1 \cdot 6.8 - R_B \cdot 6 + q \cdot 4.6 \cdot 0.7 - F_2 \cdot 1.6 = 0;$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot 6.8 + q \cdot 3.22 - F_2 \cdot 1.6}{6} = \frac{15 \cdot 6.8 + 20 \cdot 3.22 - 25 \cdot 1.6}{6} = 21.07 \text{ кН}.$$

Для перевірки складемо рівняння проекцій на вісь y:

$$\sum F_y = -F_2 + R_B - q \cdot 4.6 + R_C - F_1 = 0; -15 + 21.07 - 20 \cdot 4.6 + 110.93 - 25 = 0; 0 = 0.$$

З останньої тотожності випливає, що опорні реакції визначено правильно. Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль балку поділяємо на ділянки. У нашому прикладі на балці таких ділянок чотири. Спочатку побудуємо епюру поперечних сил. Для побудови епюри виконаємо чотири перерізи балки з координатами x_1, x_2, x_3, x_4:

для $0 \le x_1 \le 0.8$м $Q(x_1) = -F_1 = -15$ кН;

для $0 \le x_2 \le 3$м $Q(x_2) = -F_1 + R_B = -15 + 21.07 = 6.07$ кН;

для $0 \le x_3 \le 3$м $Q(x_3) = -F_1 + R_B - qx_3 = -15 + 21.07 - 20x_3 = 6.07 - 20x_3$,
$Q(x_3=0) = 6.07$ кН, $Q(x_3=3) = 6.07 - 20 \cdot 3 = 53.93$ кН;

для $0 \le x_4 \le 1.6$м $Q(x_4) = F_2 + qx_4 = 25 + 20x_4 = 25 + 20x_4$,
$Q(x_4=0) = 25$ кН, $Q(x_4=1.6) = 25 + 20 * 1.6 = 57$ кН.

За одержаними даними будуємо епюру Q (рис. 1.16, б).

Далі будуємо епюру згинальних моментів.

Для наведених перерізів буде:

для $0 \le x_1 \le 0.8$м $M(x_1) = -F_1 \cdot x_1 = -15x_1$ (залежність лінійна),
$M(x_1=0) = 0$, $M(x_1=0.8) = -15 \cdot 0.8 = -12$ кН·м;

для $0 \le x_2 \le 3$м $M(x_2) = -F_1(x_2 + 0.8) + R_B x_2 = -15(x_2 + 0.8) + 21.07x_2 =$
$= 6.07x_2 - 12$ (залежність лінійна),
$M(x_2=0) = -12$кНм, $M(x_2=3) = 6.07 \cdot 3 - 12 = 6.21$ кН·м;

для $0 \le x_3 \le 3$м $M(x_3) = -F_1(x_3 + 3.8) + R_B(3 + x_3) - q\frac{x_3^2}{2} =$

$= -15(x_3 + 3.8) + 21.07(3 + x_3) - 20\frac{x_3^2}{2} =$

$= 6.21 + 6.07x_3 - 10x_3^2$ (залежність квадратична),

$M(x_3=0) = 6.21$ кНм,

$M(x_3=3) = 6.21 + 6.07 \cdot 3 - 10 \cdot 9 = -65.58$ кН·м;

для $0 \le x_4 \le 1.6$м $M(x_4) = -F_2 \cdot x_4 - q\frac{x_4^2}{2} = -25x_4 - 20\frac{x_4^2}{2} =$

$-25x_4 - 10x_4^2$ (залежність квадратична),

$M(x_4=0)=0$, $M(x_4=1.6) = -25 \cdot 1.6 - 10 \cdot 1.62 = -65{,}6$ кН·м.

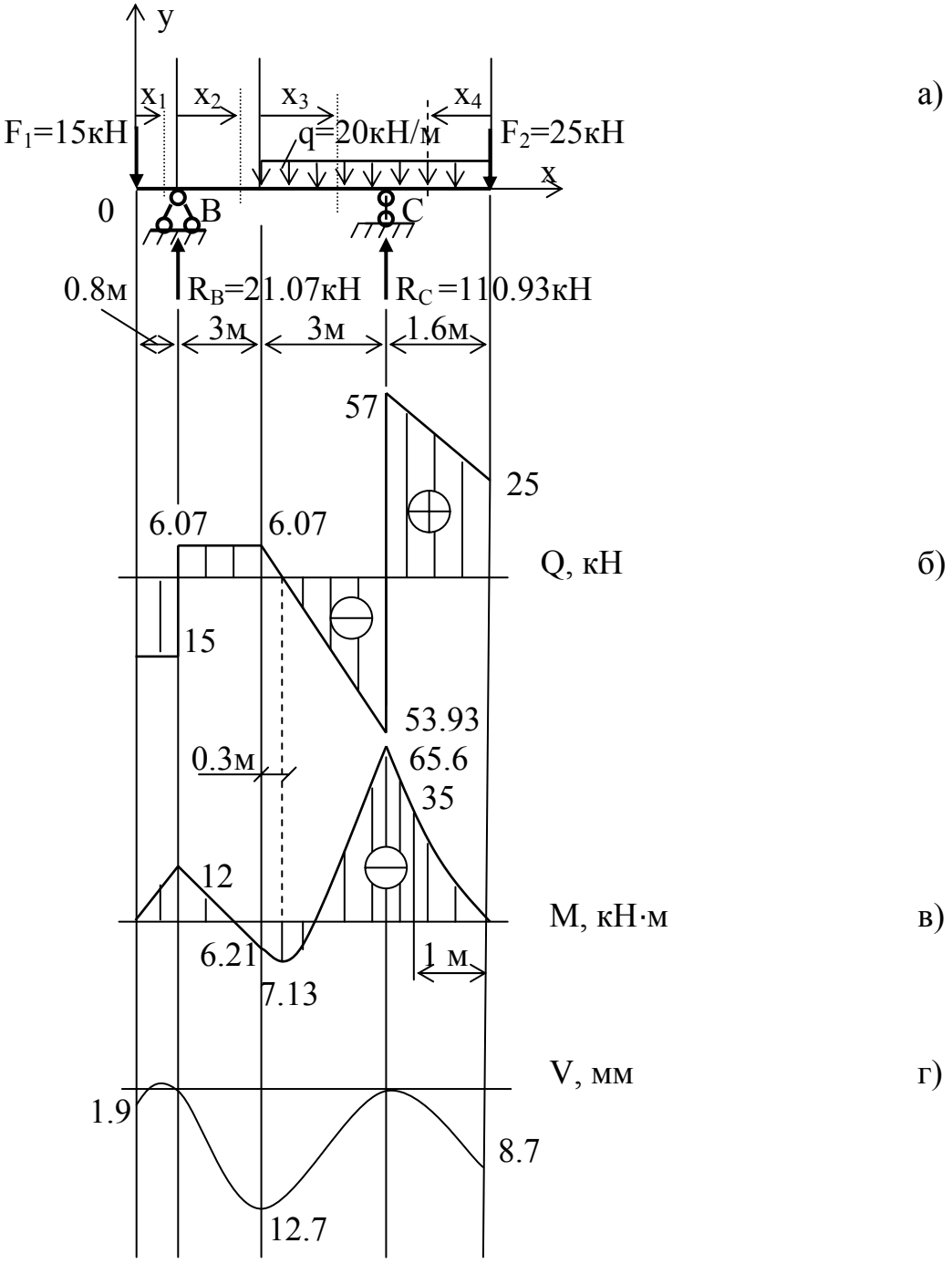


Рис. 1.16

Щоб побудувати епюру $M(x_3)$ на ділянці з розподіленим навантаженням, потрібно побудувати криву – другого порядку параболу. Для цього необхідно не менше трьох точок для $M(x_3)$. Дві з їх вже визначено: $M(x_3=0)=6.21$ кН·м і $M(x_3=3)= -65.58$ кН·м. Третє значення М визначимо для перерізу з координатою x_3^*, в якому поперечна сила дорівнює нулю:

$$Q(x_3^*)=6.07-20\,x_3^*=0.$$

Звідси: $x_3^*=6.07/20=0.3$ м.

Тоді:

$$M(x_3^*=0.3)=6.21+6.07\cdot 0.3-10\cdot 0.32=7.13 \text{ кН·м}.$$

На ділянці $0\le x_3\le 3$м друга похідна $d^2M/dx_3^2=-20$, тобто від'ємна, тому в перерізі x_3 маємо найменше значення згинального моменту на ділянці.

Для четвертої ділянки епюра $M(x_4)$ також криволінійна. Тому на цій ділянці знову визначимо значення моменту $M(x_4)$ у трьох точках. Поперечна сила на ділянці не має значення Q=0, тому третю точку визначимо довільно, наприклад $x_4=1$:

$$M(x_4=1) = -25\cdot 1-10\cdot 1^2= -35 \text{ кН·м}.$$

Епюра М наведена на рис. 1.16, в.

Підберемо тепер переріз балки.

Найбільший згинальний момент (за модулем), що виникає в балці, дорівнює $M_{max}=65.6$ кН·м=6560 кН·см. З умови міцності при згині:

$$W \ge \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{6560}{16} = 410 \text{ см}^3.$$

За сортаментом ДСТУ 8239-89 приймаємо двотавр №30, для якого момент опору згину $W=472$ см^3.

Знайдемо прогини та кути повороту перерізів наведеної балки на межах ділянок методом початкових параметрів (1.3).

На початок визначимо жорсткість балки на згин.

Для неї момент інерції (за сортаментом):

$I=7080$ см$^4=7080\cdot 10^{-8}$ м^4.

Модуль пружності сталі:

$E=2.1\cdot 10^8$ кН/м^2.

Оберемо систему координат, як наведено на рис. 1.16, а, тобто початок координат на лівому кінці. У даному випадку початкові параметри не відомі. Знайдемо їх з умов закріплення:

$$\begin{cases} EIV(0.8) = 0; \\ EIV(6.8) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIV_0 + EI\theta_0 \cdot 0.8 - F_1 \dfrac{(0.8-0)^3}{6} = 0; \\ EIV_0 + EI\theta_0 \cdot 6.8 - F_1 \dfrac{(6.8-0)^3}{6} + R_B \dfrac{(6.8-0.8)^3}{6} - q\dfrac{(6.8-3.8)^4}{24} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIV_0 + EI\theta_0 \cdot 0.8 = 1.28; \\ EIV_0 + EI\theta_0 \cdot 6.8 = 230.06; \end{cases}$$

$EIV_0 = -29.22;$

$EI\theta_0 = 38.13.$

Визначивши початкові параметри можливо отримати прогини та кути повороту у будь-якої точки, у тому числи і на межах ділянок.

При x=0 деформації вже визначені – це початкові параметри.

При x=0.8 прогин дорівнює нулю, а кут повороту:

$$EI\theta(0.8) = EI\theta_0 - F_1 \frac{(0.8-0)^2}{2} = 38.13 - 15\frac{(0.8-0)^2}{2} = -32.87.$$

При x=3.8 визначимо прогин і кут повороту:

$$EI\theta(3.8) = EI\theta_0 - F_1 \frac{(3.8-0)^2}{2} + R_B \frac{(3.8-0.8)^2}{2} =$$

$$= 38.13 - 15\frac{(3.8-0)^2}{2} + 21.07\frac{(3.8-0.8)^2}{2} = 4.65;$$

$$EIV(3.8) = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot 3.8 - F_1 \frac{(3.8-0)^3}{6} + R_B \frac{(3.8-0.8)^3}{6} = -29.22 +$$

$$+ 38.13 \cdot 3.8 - 15\frac{(3.8-0)^3}{6} + 21.07\frac{(3.8-0.8)^3}{6} = 188.98.$$

При x=6.8 прогин дорівнює нулю, а кут повороту:

$$EI\theta(6.8) = EI\theta_0 - F_1 \frac{(6.8-0)^2}{2} + R_B \frac{(6.8-0.8)^2}{2} - q\frac{(6.8-3.8)^3}{6} =$$

$$= 38.13 - 15\frac{(6.8-0)^2}{2} + 21.07\frac{(6.8-0.8)^2}{2} - 20\frac{(6.8-3.8)^3}{6} = 19.41.$$

При x=8.4 визначимо прогин і кут повороту:

$$EI\theta(8.4) = EI\theta_0 - F_1\frac{(8.4-0)^2}{2} + R_B\frac{(8.4-0.8)^2}{2} + R_C\frac{(8.4-6.8)^2}{2} - q\frac{(8.4-3.8)^3}{6} =$$

$$= 38.13 - 15\frac{(8.4-0)^2}{2} + 21.07\frac{(8.4-0.8)^2}{2} + 110.93\frac{(8.4-6.8)^2}{2} - 20\frac{(8.4-3.8)^3}{6} = -65.03;$$

$$EIV(8.4) = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot 8.4 - F_1\frac{(8.4-0)^3}{6} + R_B\frac{(8.4-0.8)^3}{6} + R_C\frac{(8.4-6.8)^3}{6} -$$

$$- q\frac{(8.4-3.8)^4}{24} = -29.22 + 38.13 \cdot 8.4 - 15\frac{(8.4-0)^3}{6} + 21.07\frac{(8.4-0.8)^3}{6} +$$

$$+ 110.93\frac{(8.4-6.8)^3}{6} - 20\frac{(8.4-3.8)^4}{24} = -129.18.$$

Отримані вище переміщення розраховані з точністю до жорсткості, отже:

$$\theta(0) = \frac{38.13}{EI} = \frac{38.13}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = 0.0026 \text{ рад};$$

$$V(0) = \frac{-29.22}{EI} = \frac{-29.22}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = -0.0019 \text{ м} = -1.9 \text{ мм};$$

$$\theta(0.8) = \frac{32.87}{EI} = \frac{32.87}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = 0.0022 \text{ рад};$$

$$V(0.8) = 0;$$

$$\theta(3.8) = \frac{24.65}{EI} = \frac{4.65}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = 0.0002 \text{ рад};$$

$$V(3.8) = \frac{-188.98}{EI} = \frac{-188.98}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = -0.0127 \text{ м} = -12.7 \text{ мм};$$

$$\theta(6.8) = \frac{19.41}{EI} = \frac{19.41}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = 0.0013 \text{ рад};$$

$$V(6.8) = 0;$$

$$\theta(8.4) = \frac{-65.03}{EI} = \frac{-65.03}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = -0.0044 \text{ рад};$$

$$V(8.4) = \frac{-129.18}{EI} = \frac{-129.18}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2.1 \cdot 10^8} = -0.0087 \text{ м} = -8.7 \text{ мм};$$

Відповідь: Пружна лінія балки наведена на рис. 1.16, г.

1.7 Запитання для самоконтролю

Що називається пружною лінією балки?
Що називається переміщенням перерізу балки?
Що таке метод початкових параметрів?
Що називається універсальними рівняннями пружної лінії балки?

Що таке можливі переміщення?
Яку роботу називають дійсною?
Що таке узагальнені координати?
Що таке узагальнені переміщення?
Наведіть теорему про взаємність робот (теорема Бетті).
Наведіть теорему про взаємність переміщень (теорема Максвелла).
Що називається метод Мора?
Що таке формула Сімпсона?
Що таке правило Верещагіна?

2. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ БАЛКИ

2.1 Загальна схема розв’язання

Статично невизначеною балкою називається така балка, у якої число невідомих реакцій опор більше, ніж число рівнянь рівноваги.

Різниця між числом рівнянь рівноваги і числом невідомих реакцій *називається ступенем статичної невизначеності балки*.

Усі статично невизначені системи мають додаткові, чи «зайві» зв'язки у виді закріплень, що не є необхідними для рівноваги чи геометричної незмінюваності системи. Наявність таких зв'язків обумовлюється експлуатаційними чи факторами умовами міцності конструкцій.

Ці «зайві» невідомі реакції накладають на балку додаткові умови деформації. Ці умови, виражені математичними співвідношеннями, дають відсутнє число рівнянь для визначення реакцій і називаються *умовами спільності деформацій*. Вони враховують характер деформування системи під дією зовнішніх навантажень. Різниця між числом невідомих і числом рівнянь рівноваги визначає ступінь статичної невизначеності і відповідно число додаткових рівнянь, який необхідно скласти.

Складання рівнянь спільності деформацій є найбільше важливим етапом у розв’язанні статично невизначених задач. Для їхнього складання використовують ту обставину, що зайві в'язі накладають визначені обмеження на деформування тих перетинів, у яких вони прикладені.

Розглянемо загальну схему розрахунку статично невизначених балок, що містить у собі наступні етапи.

1. Установлюється ступінь статичної невизначеності.
2. Видаляються «зайві» в'язі – вихідна система заміняється статично визначною, котра називається основною. Необхідно враховувати умови геометричної незмінюваності основної системи. Вибір основної системи залежить від розраховувача, однак раціональний вибір основної системи може істотно спростити розрахунки.
3. Завантажують основну систему заданим навантаженням і невідомими зусиллями, що заміняють реакції вилучених в'язей. Така система називається статично еквівалентною системою.
4. Для еквівалентності основної системи з вихідною, невідомі зусилля повинні бути такої величини, щоб деформування статично визначної основної системи не відрізнялося від деформування статично невизначеної вихідної системи. Для цього варто дорівняти нулю переміщення і кути повороту перерізу в точках прикладення невідомих зусиль по напрямку їхньої дії. Ці вираження і будуть рівняннями спільності деформацій для статично невизначених балок. При цьому переміщення і кути повороту можна визначати, розглянутими вище методами: початкових параметрів, Мора або

Верещагіна. З отриманих у такий спосіб рівнянь спільності деформацій визначають значення «зайвих» невідомих зусиль.

5. Після визначення невідомих зусиль визначаються реакції, внутрішні силові фактори, напруження, переміщення чи кути повороту перетину звичайними способами, як для будь-яких статично визначних балок.

2.2 Рівняння трьох моментів

Рівняння трьох моментів зручно використовувати при розрахунку *нерозрізних балок*. Нерозрізними називають балки, що лежать на декількох опорах і не мають проміжних шарнірів. Такі балки, широко застосовані в різних конструкціях, є статично невизначними, якщо кількість опор складає більше двох. На рис. 2.1 наведена довільно навантажена балка, що спирається на N шарнірних опор. Одна з опор робиться шарнірно-нерухомою для сприйняття осьового навантаження, інші – шарнірно-рухомими, що дає змогу балці вільно змінювати довжину, при цьому при її навантажені поперечними силами, не виникають внутрішні подовжні зусилля.

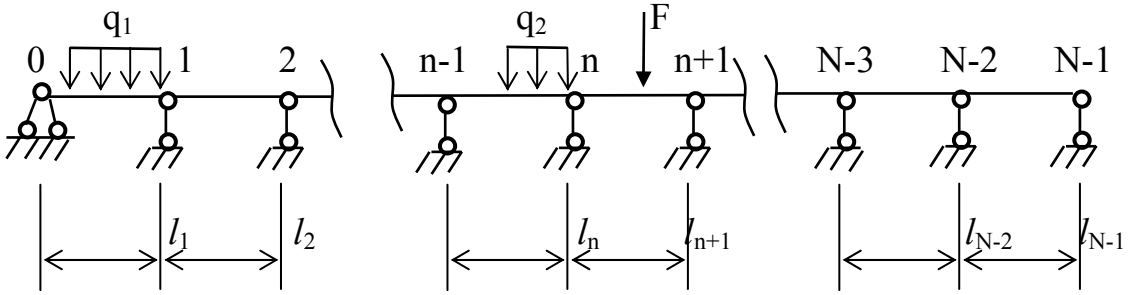


Рис. 2.1

При обпиранні на N шарнірних опор маємо стільки ж вертикальних реакцій. Дана система буде (N-2) рази статично невизначеною, тому що рівнянь рівноваги можна скласти тільки два.

Таким чином, число «зайвих» зв'язків, а отже, і число «зайвих» реакцій буде дорівнювати кількості проміжних опор. Якщо крайня опора виконана у вигляді жорсткого защемлення, то ступінь статичної невизначеності збільшується на одиницю в порівнянні із шарнірним обпиранням.

Найбільш зручним вибором основної системи для нерозрізної балки є введення шарнірів у перерізах над усіма проміжними опорами. «Зайвими» невідомими в цьому випадку будуть згинальні моменти в опорних перерізах балки, як показано на рис. 2.2, де F, q_1, q_2 – задане навантаження.

Таким чином, еквівалентна система являє собою ряд простих шарнірно обпертих однопрогонних балок, навантажених заданим навантаженням і невідомими опорними згинальними моментами M_i, де i=1, 2, … , N-2, як показано на рисунку. Тут для визначеності показані позитивні опорні моменти. При такому виборі основної системи дія заданого навантаження поширюється тільки на проліт, на якому вона прикладена, вплив її на інші прольоти виражається через опорні згинальні моменти.

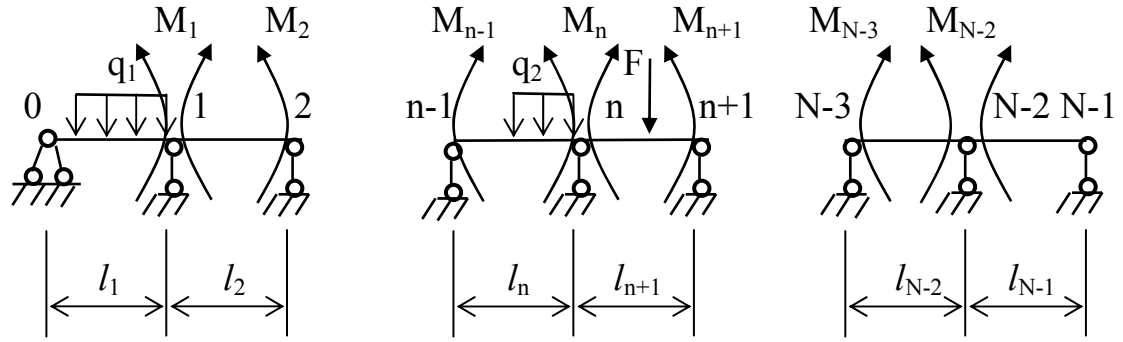


Рис. 2.2

Для розв’язання статично невизначених задач потрібно складати додаткові рівняння – рівняння спільності деформацій. У даному разі вони будуть являти собою рівність кутів повороту опорних перерізів для суміжних балок.

Кожна двохопорна балка основної системи під дією заданого навантаження й опорних моментів деформується незалежно одна від другої. Однак у вихідній статично невизначеній системі кожна пара перерізів на опорних шарнірах являє собою один переріз, отже кут повороту в них повинен бути рівний, що можна записати в такий спосіб:

$$\Delta_n^{л} + \Delta_n^{пр} = 0, \qquad (2.1)$$

де $\Delta_n^{л}, \Delta_n^{пр}$ - кути повороту торцевих перерізів суміжних балок, що примикають до n-ної опори ліворуч і праворуч від неї відповідно. При цьому позитивні напрямки цих кутів повороту перерізів збігаються з позитивним напрямком опорних згинальних моментів.

Тому що основна система складається з окремих, не зв'язаних між собою двохопорних балок, то для розкриття отриманого рівняння

спільності деформацій досить розглянути тільки два сусідніх прольоти, розташованих ліворуч і праворуч від опори.

Відповідно до теореми про взаємність робіт співвідношення (2.1) можна подати у вигляді (див. рис. 2.3):

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{n,P} = 0, \qquad (2.2)$$

де $\delta_{n,n-1}M_{n-1}$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від опорного моменту, що виникає на опорі n-1;

$\delta_{n,n}M_n$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від опорного моменту, що виникає на цій же опорі;

$\delta_{n,n+1}M_{n+1}$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від опорного моменту, що виникає на опорі n+1;

$\Delta_{n,P}$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від заданого навантаження F, q_2, прикладеного на двох сусідніх з розглянутою опорою прольотах.

Для визначення наведених вище кутів повороту перерізу застосуємо правило Верещагіна.

На рис. 2.3 наведена вантажна епюра M_p – епюра згинальних моментів від заданого навантаження, й одиничні епюри M_{n-1}, M_n, M_{n+1} - епюри згинальних моментів від одиничних моментів, що діють у напрямку опорних моментів M_{n-1}, M_n, M_{n+1} відповідно.

Вважаючи, що жорсткість балки на згин по всієї довжині постійна, представимо доданки, що входять у рівняння (2.2), у наступному вигляді:

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} = \frac{M_{n-1}}{EI}\left(\frac{\ell_n}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{\ell_n}{6EI}M_{n-1};$$

$$\delta_{n,n}M_n = \frac{M_n}{EI}\left(\frac{\ell_n}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3} + \frac{\ell_{n+1}}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{\ell_n}{3EI} + \frac{\ell_{n+1}}{3EI}\right)M_{n-1};$$

$$\delta_{n,n+1}M_{n+1} = \frac{M_{n+1}}{EI}\left(\frac{\ell_{n+1}}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{\ell_{n+1}}{6EI}M_{n+1};$$

$$\Delta_{n,P} = \frac{1}{EI}\left(\omega_n\frac{a_n}{\ell_n} + \omega_{n+1}\frac{b_{n+1}}{\ell_{n+1}}\right),$$

де ω_n - площа епюри згинаючого моменту, що виникає від заданого навантаження на n-ному прольоті;

ω_{n+1} - площа епюри згинаючого моменту, що виникає від заданого навантаження на прольоті n+1;

a_n - відстань від опори n-1 до центру ваги епюри моменту від заданого навантаження на n-ному прольоті;

b_{n+1} - відстань від опори n+1 до центру ваги епюри моменту від заданого навантаження на прольоті n+1.

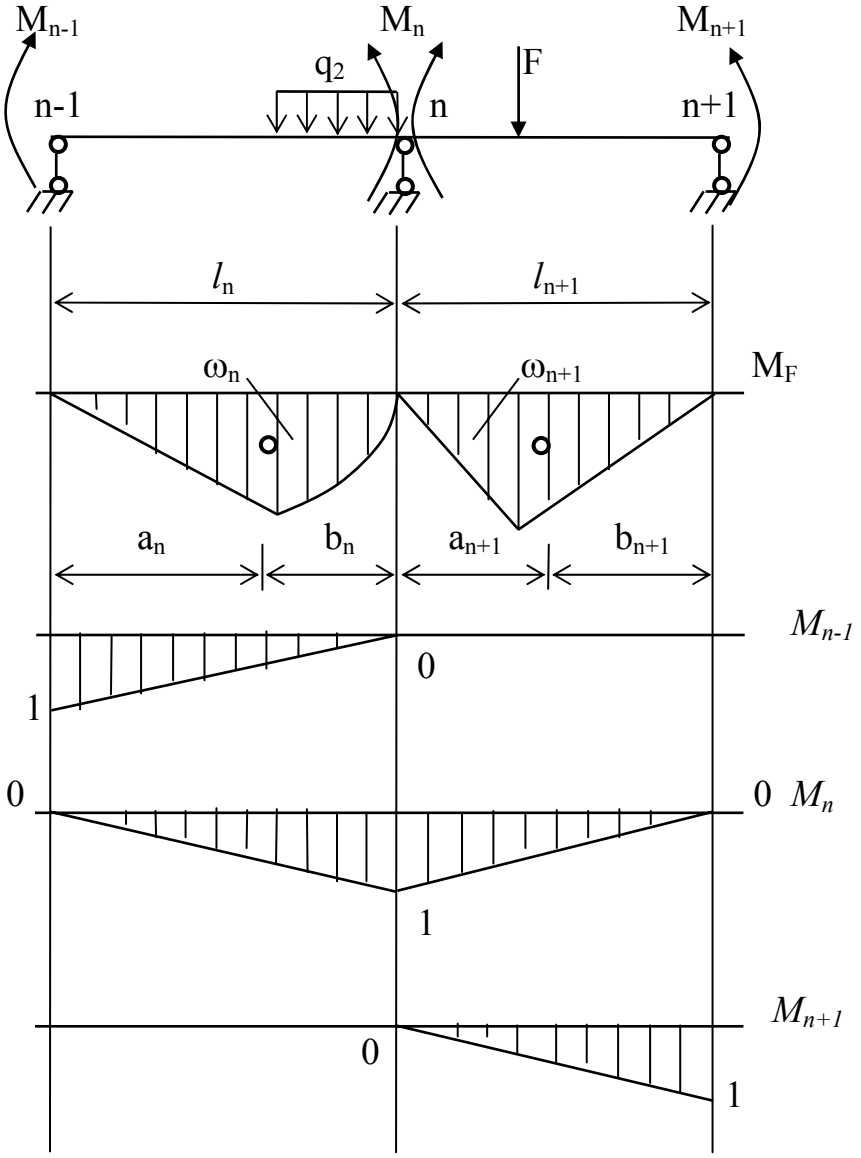


Рис. 2.3

Підставляючи отримані вирази в рівняння спільності деформацій (2.2) і скорочуючи жорсткість на згин, одержуємо рівняння, що зв'язують між собою опорні моменти, які виникають на трьох сусідніх опорах:

$$M_{n-1}\ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1}\ell_{n+1} = -6\left(\frac{\omega_n a_n}{\ell_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{\ell_{n+1}}\right). \qquad (2.3)$$

Це рівняння називається “рівняння трьох моментів”, тому що в нього входять опорні моменти на трьох сусідніх опорах. Цих рівнянь виходить стільки, скільки вводиться шарнірів для утворення основної системи. Як було показано вище, їхнє число дорівнює кількості проміжних шарнірних опор. Для того щоб одержати систему рівнянь послідовно записують рівняння (2.3) для кожної проміжної опори. Оскільки це рівняння отримане для n-ної опори, то для складання системи треба додати цьому індексу значення n=1, 2, … , N-2, відповідні номерам проміжних опор. В отриманій системі лінійних алгебраїчних рівнянь кожне рівняння буде містити три невідомих опорних моменти, а перше й останнє тільки два.

У перше й останні рівняння системи будуть входити моменти на крайніх опорах. Якщо на крайній шарнірній опорі не прикладений зосереджений момент, то в рівнянні (2.3) його слід дорівняти нулю. Якщо на цій опорі прикладений зосереджений момент, то в рівняння підставляється його значення. Аналогічно треба діяти, коли балка має консоль. У цьому випадку момент на крайній опорі буде дорівнювати моменту від навантаження, прикладеного до консолі.

Якщо який-небудь край балки жорстко затиснутий, то закладення слід замінити додатковим прольотом нескінченно великої твердості чи нескінченно малої довжини. У розрахунках ця заміна полягає в тому, що замість жорсткого затиснення на краю вводять два шарніри на нульовій відстані між собою.

Епюру згинальних моментів будують після знаходження невідомих опорних моментів з рівнянь (2.3). Остаточно ця епюра згинальних моментів M_n буде дорівнювати сумі епюр від заданого навантаження і від опорних моментів, що має вигляд ламаної лінії, яка з'єднує відрізки, відкладені над опорами і рівні знайденим опорним моментам.

Епюру поперечної сили одержують з побудованої раніше епюри згинальних моментів. Для цього використовують диференціальні залежності при згині, що отримані для того випадку, якщо вісь абсцис спрямована в правий бік:

$$\frac{dQ}{dx} = q; \quad \frac{dM}{dx} = Q. \tag{2.4}$$

З наведених залежностей випливає, що поперечну силу на будь-якій ділянці, знаючи величину згинальних моментів на його границях, можна знайти в таким чином:

$$Q_{уч} = \frac{M^{пр}_{діл} - M^{л}_{діл}}{\ell_{діл}} + Q_0, \tag{2.5}$$

де $Q_{діл}$ - поперечна сила на розглянутій ділянці;

$M^{пр}_{діл}$ - значення згинаючого моменту на правій границі розглянутої ділянки;

$M^{л}_{діл}$ - значення моменту на лівій границі ділянці;

$\ell_{діл}$ - довжина ділянки;

Q_0 - доданок, присутній у тому випадку, якщо на ділянці прикладене розподілене навантаження інтенсивністю q, у цьому виразі даний доданок змінюється за довжиною ділянки, і на його границях (правій і лівій відповідно) буде дорівнювати:

$$Q_0^{л} = \frac{q\ell_{уч}}{2}; \quad Q_0^{пр} = -\frac{q\ell_{уч}}{2}. \tag{2.6}$$

2.3 Балки на пружної основі

Пружною основою називається така основа балки, що деформується під дією власної ваги балки і розташованого на ній навантаження і при цьому чинить пружну протидію прогину.

Балка, що лежить на пружній основі, відчуває з боку основи реактивний опір. Але характер розподілу реакції по її довжині невідомий і не може бути визначений із рівнянь статики. Тому ця задача розрахунку балки вважається статично невизначною.

Ступінь статичної невизначності такої балки можна вважати рівним нескінченності, оскільки епюра опору має нескінченно велику кількість невідомих ординат по довжині балки. Точний характер розподілу реактивного опору по довжині балки важко визначити, однак, згідно гіпотези Е. Вінклера реакція основи q_0 в кожній точці пропорційна прогину "V" у цій точці, тобто

$$q_0 = -kbV, \tag{2.7}$$

де k - коефіцієнт, що характеризує жорсткість основи (коефіцієнт постелі); b - ширина підошви балки;

Знак „-” у цьому вирази означає, що реактивний опір має протилежний напрямок ніж прогин.

Жорсткості основи є характеристикою матеріалу та визначається експериментально. Коефіцієнт постелі k - це сила, необхідна для вдавлювання в грунт штампа з площею, яка дорівнює одиниці на прогин V=1 (розмірність коефіцієнта k – Н/м, кН/м).

Моделлю основи Вінклера може служити ряд пружин однакової жорсткості, розміщених на абсолютно жорсткій основі, що діють незалежно одна від іншої. До недоліків цієї моделі варто віднести наступні: основа осідає лише в тих точках, що знаходяться безпосередньо

під балкою і залишається цілком недеформованою поза балкою, тобто поверхня основи зазнає розриву на кінцях балки; гіпотеза Вінклера припускає, що реакція основи виникає і на тих ділянках, де балка піднімається під основою ("відлипає"), тобто вважається, що підошва балки склеєна з поверхнею основи. Проте, для багатьох практичних задач, коли відлипання не виникає і немає необхідності досліджувати прогини основи за балкою, гіпотеза, що розглядається, дає прийнятні результати.

Виведемо диференціальне рівняння вигнутої осі балки на пружній основі. Для цього використовуємо диференціальне рівняння (1.2) та диференціальні залежності при згині (2.4):

$$EI\frac{d^4V}{dx^4} = q. \tag{2.8}$$

Навантаження q, що входить у це рівняння, для балки на пружній основі складається з заданого навантаження q(x) і реакції основи $q_0(x)$. Тоді з урахуванням (2.7):

$$EI\frac{d^4V}{dx^4} = q(x) - -kbV$$

або:

$$\frac{d^4V}{dx^4} + 4s^4V = \frac{q(x)}{EI}, \tag{2.9}$$

де $s = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}}$.

Отримане диференційне рівняння (2.9) є неоднорідне, лінійне, четвертого порядку з постійними коефіцієнтами. Загальний розв'язок його складається з загального розв'язку однорідного

$$\frac{d^4V}{dx^4} + 4s^4V = 0,$$

і часного розв'язку неоднорідного рівняння (2.9), наприклад:

$$V_ч = \frac{q(x)}{4s^4EI}.$$

Тоді, остаточно, розв'язок рівняння (2.9) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} V(x) = {} & C_1 ch(sx)\cos(sx) + C_2 sh(sx)\cos(sx) + \\ & + C_3 ch(sx)\sin(sx) + C_4 sh(sx)\sin(sx) + \frac{q(x)}{4S^4EI}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 - довільні константи;

$\mathrm{ch}(sx)=\dfrac{e^{sx}+e^{-sx}}{2}$ - гіперболічний косинус;

$\mathrm{sh}(sx)=\dfrac{e^{sx}-e^{-sx}}{2}$ - гіперболічний синус.

Гіперболічні функції володіють наступними властивостями:

$$\frac{d(\mathrm{ch}(sx))}{dx}=\mathrm{sh}(sx);\ \frac{d(\mathrm{sh}(sx))}{dx}=\mathrm{ch}(sx).$$

З урахуванням цих залежностей, вважаючи що на деякій ділянці діє рівномірно розподілене навантаження q(x)=const:

$$\frac{dV}{dx}=sC_1[\mathrm{sh}(sx)\cos(sx)-\mathrm{ch}(sx)\sin(sx)]+sC_2[\mathrm{ch}(sx)\cos(sx)-\mathrm{sh}(sx)\sin(sx)]+$$
$$+sC_3[\mathrm{sh}(sx)\sin(sx)-\mathrm{ch}(sx)\cos(sx)]+sC_4[\mathrm{ch}(sx)\sin(sx)-\mathrm{sh}(sx)\cos(sx)];$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-2s^2C_1\mathrm{ch}(sx)\cos(sx)-2s^2C_2\mathrm{sh}(sx)\cos(sx)-$$
$$-2s^2C_3\mathrm{ch}(sx)\sin(sx)-2s^2C_4\mathrm{sh}(sx)\sin(sx); \qquad (2.11)$$

$$\frac{d^3V}{dx^3}=-2s^3C_1[\mathrm{ch}(sx)\sin(sx)+\mathrm{sh}(sx)\cos(sx)]-2s^3C_2[\mathrm{sh}(sx)\sin(sx)+\mathrm{ch}(sx)\cos(sx)]-$$
$$-2s^3C_3[\mathrm{ch}(sx)\cos(sx)-\mathrm{sh}(sx)\sin(sx)]-2s^3C_4[\mathrm{sh}(sx)\cos(sx)-\mathrm{ch}(sx)\sin(sx)].$$

З урахуванням наведених залежностей отримаємо довільні константи C_1, C_2, C_3, C_4, через початкові параметри:

V_0 - прогін; $V_0^{\mathrm{I}}=\theta_0$ - кут повороту перерізу; $V_0^{\mathrm{II}}=\dfrac{M_0}{EI}$ - згинальний момент; $V_0^{\mathrm{III}}=\dfrac{Q_0}{EI}$ - поперечна сила,

на початку координат (x=0):

$$V_0=C_1+\frac{q_0}{4s^4EI};\qquad \theta_0=s(C_2+C_3);\qquad V_0^{\mathrm{II}}=\frac{M_0}{EI}=2C_4s^2;$$
$$V_0^{\mathrm{III}}=\frac{Q_0}{EI}=2s^3(C_3-C_2).$$

Звідси:

$$C_1=V_0-\frac{q_0}{4s^4EI};\ C_2=\frac{\theta_0}{2s}+\frac{Q_0}{4s^3EI};\ C_2=\frac{\theta_0}{2s}-\frac{Q_0}{4s^3EI};\ C_4=-\frac{M_0}{2s^2EI}.$$

З урахуванням отриманих констант і залежностей (2.10) та (2.11) маємо:

$$V(x) = V_0 S(sx) + \frac{\theta_0}{s} P(sx) - \frac{M_0}{s^2 EI} U(sx) - \frac{Q_0}{s^3 EI} V(sx) - \frac{q(x)}{4s^4 EI}(S(sx) - 1);$$

$$\theta(x) = -4sV_0 V(sx) + \theta_0 S(sx) - \frac{M_0}{sEI} P(sx) - \frac{Q_0}{s^2 EI} U(sx) - \frac{q(x)}{4s^3 EI} V(sx);$$

$$M(x) = 4s^2 EIV_0 U(sx) + 4sEI\theta_0 V(sx) - M_0 S(sx) - \frac{Q_0}{s} P(sx) - \frac{q(x)}{s^2} U(sx);$$

$$Q(x) = 4s^3 EIV_0 P(sx) + 4s^2 EI\theta_0 U(sx) - 4sM_0 V(sx) - Q_0 S(sx) - \frac{q(x)}{s} P(sx), \quad (2.12)$$

де $S(sx), P(sx), U(sx), V(sx)$ - функції Крилова:

$$S(sx) = ch(sx)\cos(sx); \qquad P(sx) = \frac{1}{2}\left(sh(sx)\cos(sx) + ch(sx)\sin(sx)\right);$$

$$U(sx) = \frac{1}{2}\left(sh(sx)\sin(sx)\right); \quad V(sx) = \frac{1}{2}\left(ch(sx)\sin(sx) - sh(sx)\cos(sx)\right).$$

2.4 Приклади розрахунків

Приклад 1.

Схема навантаження балки та її геометричні параметри наведено рис. 2.4, а. Знайти методом початкових параметрів рівняння прогинів, а також максимальний прогин балки. Жорсткість балки на згин дорівнює EI.

Розв'язання.

На затисненому кінці A балки виникає реакція R_A і момент защемлення M_A, на правому, вільно опертому, виникає тільки реакція R_B.

Таким чином, дана балка має три невідомі реактивні зусилля. Рівнянь рівноваги для визначення реакцій опор у випадку, коли всі сили діють в одній площині ще й перпендикулярні осі балки, можна скласти тільки два. Отже, приведена балка є один раз статично невизначеною.

За «зайву» невідому в даній балці приймемо реакцію R_B, що виникає на правому кінці балки.

Для того щоб її визначити, відкинемо опору B и одержимо статично визначену основну систему. Реакцію R_B визначимо з умови спільності деформацій. У даному випадку такою умовою буде рівність нулю прогинів на правому краї балки, тому що в дійсності точка B в напрямку осі y не переміщується.

Переміщення точки B визначимо методом початкових параметрів по окремості від прикладеної до балки навантаження і від дії шуканої реакції R_B. Тому що балка жорстко затиснена, а початок координат вибрано таким чином, щоб він збігалося з місцем защемлення, то і прогин $V(0)$ і кут повороту $\theta(0)$ перерізу на початку координат дорівнюють нулю.

Переміщення точки В визначимо по окремості від прикладеної до балки навантаження і від дії шуканої реакції R_B.

Розглянемо спочатку прогин у точки В від прикладеної до балки розподіленого навантаження (схема на рис. 2.4, б).

Визначимо реакції M_A і R_A в точці А защемлення балки:

$$\sum M_A = -q\ell\frac{\ell}{2} + M_A = 0;$$

$$M_A = q\frac{\ell^2}{2};$$

$$\sum F_y = R_A - q\ell = 0;$$

$$R_A = q\ell.$$

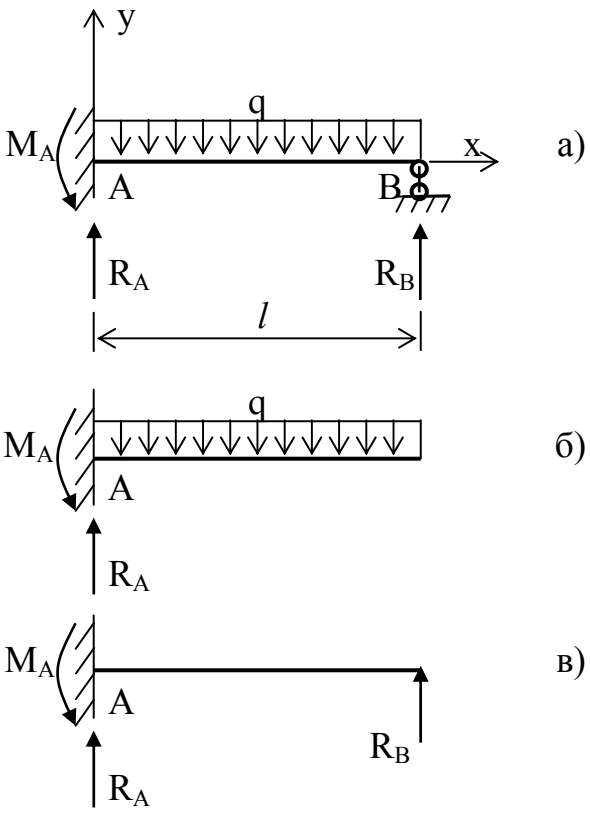


Рис. 2.4

Підставимо отримані опорні реакції в співвідношення (1.3) і знайдемо прогин у точці В при x=*l*:

$$EIV_F(\ell) = -M_A\frac{(\ell-0)^2}{2} + R_A\frac{(\ell-0)^3}{6} - q\frac{(\ell-0)^4}{24} = -\frac{q\ell^2}{2}\frac{\ell^2}{2} + q\ell\frac{\ell^3}{6} - q\frac{\ell^4}{24} = -\frac{q\ell^4}{8}.$$

Аналогічно визначимо прогин у точці В від прикладеної до неї опорної реакції R_B (рис. 2.4, в).

Реакції M_A і R_A в точці А для розглянутої схеми будуть:

$$\sum M_A = R_B\ell + M_A = 0; \quad M_A = -R_B\ell;$$

$$\sum F_y = R_A + R_B = 0; \quad R_A = -R_B.$$

Підставимо отримані опорні реакції в співвідношення (1.3) і знайдемо прогин у точці В при x=*l*:

$$EIV_{R_B}(\ell) = -M_A\frac{(\ell-0)^2}{2} + R_A\frac{(\ell-0)^3}{6} - q\frac{(\ell-0)^4}{24} = R_B\ell\frac{\ell^2}{2} - R_B\frac{\ell^3}{6} = \frac{R_B\ell^3}{3}.$$

Точка В закріплена, тому її переміщення $V(\ell)$ в напрямку осі y повинне дорівнювати нулю ($V(\ell) = V_F(\ell) + V_{R_B}(\ell) = 0$), звідси знаходимо шукану реакцію:

$$-\frac{q\ell^4}{8EI}+\frac{R_B\ell^3}{3EI}=0;\quad R_B=\frac{3}{8}q\ell.$$

Далі, знаходимо інші реакції M_A і R_A в точці А защемлення в балки, наведеної на рис. 2.4, а, як для статично визначної, враховуючі, що реакція R_B вже відома:

$$\sum M_A=-q\ell\frac{\ell}{2}+M_A+R_B\ell=0;\qquad M_A=q\ell\frac{\ell}{2}-\frac{3}{8}q\ell\ell=\frac{q\ell^2}{8};$$

$$\sum F_y=R_A-q\ell+R_A=0;\qquad R_A=q\ell-\frac{3}{8}q\ell=\frac{5}{8}q\ell.$$

Підставимо отримані опорні реакції у співвідношенні (1.3) і одержимо рівняння прогинів

$$EIV(x)=-M_A\frac{(x-0)^2}{2}+R_A\frac{(x-0)^3}{6}-q\frac{(x-0)^4}{24}=-\frac{q\ell^2}{8}\frac{x^2}{2}+\frac{5}{8}q\ell\frac{x^3}{6}-q\frac{x^4}{24}.$$

Максимальний прогин буде в точці, у якій значення похідної прогину буде дорівнює нулю:

$$EI\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{q\ell^2}{8}x+\frac{5}{16}q\ell x^2-q\frac{x^3}{6}=0,$$

$$x\left(\frac{x^2}{3}-\frac{5}{8}\ell x+\frac{\ell^2}{4}\right)=0.$$

Максимальний прогин не може бути в защемленні, тому $x\neq 0$. Отже, необхідно шукати корені останнього рівняння з другого множника:

$$\frac{x^2}{3}-\frac{5}{8}\ell x+\frac{\ell^2}{4}=0,\qquad x^2-\frac{15}{8}\ell x+\frac{3\ell^2}{4}=0.$$

Відкіля:

$$x_{1,2}=\frac{15}{16}\ell\pm\sqrt{\frac{225}{256}\ell^2-\frac{3}{4}\ell^2}=\frac{15}{16}\ell\pm\frac{\sqrt{33}}{16}\ell=\frac{15\pm 5.74}{16}\ell.$$

Значення x не може бути більше довжини балки, тому вибираємо менший корінь:

$$x=\frac{15+5.74}{16}\ell=0.579\ell.$$

Підставимо знайдену координату x в рівняння прогинів і визначимо максимальне значення прогину:

$$EIV(0.579\ell)=-\frac{q\ell^2}{8}\frac{(0.579\ell)^2}{2}+\frac{5}{8}q\ell\frac{(0.579\ell)^3}{6}-q\frac{(0.579\ell)^4}{24}=-\frac{q\ell^4}{185}.$$

Отже:

$$V_{max} = -\frac{q\ell^4}{185EI},$$

де знак мінус означає, що переміщення буде спрямовано.

Відповідь: Максимальний прогін балки має місце при координаті $x = 0.579\ell$ і складає $V_{max} = -\frac{q\ell^4}{185EI}$.

Приклад 2.

Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил статично невизначеної багатопрогонової балки, наведеної на рис. 2.5, а, використовуючи рівняння трьох моментів.

Одержуємо основну систему.

Для цього введемо шарніри у перерізах над усіма проміжними опорами. «Зайвими» невідомими в цьому випадку будуть згинальні моменти в опорних перерізах балки.

Оскільки лівий кінець балки жорстко затиснений, то шерстке затиснення слід замінити додатковим прольотом нескінченно малої довжини. Для цього на лівому краї введемо два шарніри на нульовій відстані $\ell_1 = 0$ між собою. На правому кінці балка має консоль. У цьому випадку момент, прикладений до консолі, перенесемо на праву опору.

Опори і прольоти пронумеруємо, як показано на рис. 2.5, б, зліва праворуч.

У рівняння трьох моментів будуть входити моменти на крайніх опорах. На крайній лівій шарнірній опорі не прикладений зосереджений момент, отже, у рівнянні його слід дорівняти нулю. На правій опорі прикладений зосереджений момент, отже у рівняння підставляється його значення.

Основна система, навантажена заданим навантаженням і невідомими опорними моментами M_1 і M_2, наведена на рис. 2.5, б.

Будуємо для основної системи епюру згинальних моментів від заданого навантаження для кожної двохопорної балки.

Епюра моментів від заданого навантаження наведена на рис. 2.5, в.

Складаємо рівняння трьох моментів (2.3) для двох проміжних шарнірних опор (першої і другої).

Для першої опори n=1:

$$M_0\ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2\ell_2 = -6\left(\frac{\omega_1 a_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2}\right).$$

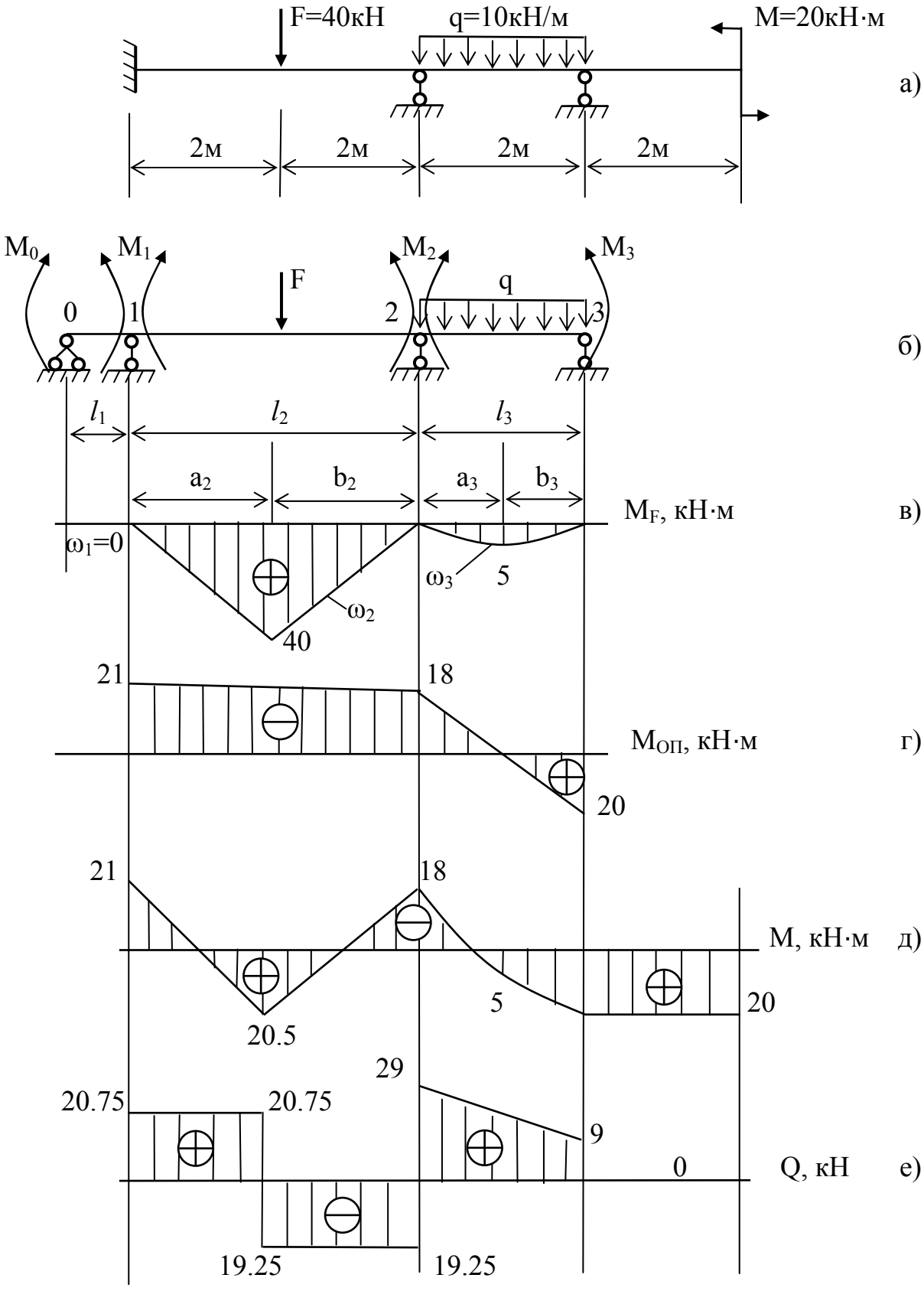

F=40кН
q=10кН/м
M=20кН·м
а)
2м
2м
2м
2м
M0
M1
M2
M3
F
q
0
1
2
3
б)
l1
l2
l3
a2
b2
a3
b3
MF, кН·м
в)
ω1=0
ω2
ω3
5
40
21
18
МОП, кН·м
г)
20
21
18
M, кН·м
д)
5
20
20.5
29
20.75
20.75
9
0
Q, кН
е)
19.25
19.25

Рис. 2.5

Для другої опори n=2:

$$M_1\ell_2 + 2M_2(\ell_2 + \ell_3) + M_3\ell_3 = -6\left(\frac{\omega_2 a_2}{\ell_2} + \frac{\omega_3 b_3}{\ell_3}\right).$$

У цих рівняннях відомі крайні опорні моменти:

$$M_0 = 0; \qquad M_3 = M = 20\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Площі епюр згинальних моментів від заданого навантаження:

$$\omega_1 = 0;\ \omega_2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 40 = 80\ \text{кН}\cdot\text{м}^2; \qquad \omega_3 = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot 5 = 6.67\ \text{кН}\cdot\text{м}^2.$$

Відстань від відповідних опор до центра ваги епюри моменту від заданого навантаження на прольоті:

$$a_1 = 0;\ a_2 = 2\ \text{м};\ b_2 = 2\ \text{м}; \qquad b_3 = 1\ \text{м}.$$

З урахуванням цього одержуємо систему рівнянь для визначення невідомих опорних моментів:

$$\begin{cases} 0 + 2M_1(0+4) + M_2 4 = -6\left(0 + \dfrac{80\cdot 2}{4}\right); \\ M_1 4 + 2M_2(4+2) + 20\cdot 2 = -6\left(\dfrac{80\cdot 2}{4} + \dfrac{6.67\cdot 1}{2}\right), \end{cases}$$

або:

$$\begin{cases} 8M_1 + 4M_2 = -240; \\ 4M_1 + 12M_2 = -300. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M_1 + M_2 = -60; \\ M_1 + 3M_2 = -80. \end{cases}$$

Звідси знаходимо невідомі опорні моменти:

$$M_1 = -21\ \text{кН}\cdot\text{м}; \ M_2 = -18\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

За цими значеннями будуємо епюру опорних моментів, наведену на рис. 2.5, г, що має вигляд ламаної лінії, яка з'єднує відрізки, відкладені над опорами і рівні підрахованим опорним моментам.

Будуємо для заданої балки епюру згинальних моментів. Ця епюра, що дорівнює сумі епюр від заданого навантаження і від опорних моментів, наведена на рис. 2.5, д.

Епюру поперечної сили одержуємо з побудованої раніше епюри згинальних моментів. Для цього використовуємо залежності (2.5) і (2.6), наведені вище. Ця епюра показана на рис. 2.5, е.

$$Q_1 = \frac{20.5 - (-21)}{2} = 20.75 \text{ кН}; \; Q_2 = \frac{-18 - 20.5}{2} = -19.25 \text{ кН};$$

$$Q_3 = \frac{20 - (-18)}{2} \pm \frac{10 \cdot 2}{2} = 19 \pm 10 \text{ (кН)}; \; Q_4 = \frac{20 - 20}{2} = 0.$$

Підберемо двотавровий переріз балки. Найбільший згинальний момент (за модулем), що виникає в балці, дорівнює M_{max}=21 кН·м=2100 кН·см.

З умови міцності при згині, з урахуванням того, що припустимі напруження для сталі дорівнюють $[\sigma] = 16$ кН/см^2:

$$W_{н.о} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{2100}{16} = 131{,}25 \text{ см}^3 .$$

За сортаментом (ДСТУ 8239-89, див. додаток) приймаємо двотавр №18, для якого момент опору згину W_x=143 см^3.

Висновок: Розглянута багатопрогінна балка задовольняє умовам міцності (максимальне напруження буде менше ніж припустиме) у тому разі, якщо вона буде виконана з двотавру №18.

2.5 Запитання для самоконтролю

Що називається ступенем статичної невизначеності балки?
Що таке умови спільності деформацій?
Яка загальна схема розв’язання статичної невизначеної балки?
Як розв’язуються балки на пружної основі?
Що називається пружною основою?

3. СКЛАДНИЙ ОПІР

3.1 Напружений стан у точці

Задачі опору матеріалів зважуються в залежності від форми деформованого тіла й особливостей його навантаження, розглядатися можуть у різних системах координат. У декартовій системі координат положення точки і її радіус-вектора описуються трьома координатами – проекціями на три взаємно перпендикулярні осі x, y, z.

Прикладені до тіла зовнішні сили викликають появу в тілі внутрішніх сил. Визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів виконують методом перерізів. Для цього розглядається елемент тіла, на котрий діє одночасно система зовнішніх сил і внутрішні сили.

Нормальні напруження на площадці визначають інтенсивність сил відриву чи стиску елементів тіла між собою, дотичні – інтенсивність сил, що зрушують сусідні елементи відносно один одного в площині перетину. Значення напружень у кожній точці тіла залежить від орієнтації перетину, проведеного через цю точку. Сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють на різних площадках, характеризує *напружений стан* у точці.

В околиці точці виділимо нескінченно малий паралелепіпед (рис. 3.1). Через малість виділеного елемента можна вважати, що напруження на кожній його грані розподілені рівномірно.

Напружений стан на гранях елементу характеризується трьома нормальними $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ і шістьма дотичними напруженнями $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, (рис. 3.1). Вони індексуються двома індексами: перший показує напрямок дії напруження (три напрямки по осях), другий – на якій площадці діє напруження (три площадки, перпендикулярні осям). Напруження вважаються позитивними, якщо їх напрямок і напрямок зовнішньої нормалі до площадки збігаються.

По цих дев'ятьох компонентах можна знайти напруження на довільно орієнтованій площадці. Для того щоб знайти ці напруження, розглянемо рівновагу елементарного тетраедра, наведеного на рис. 3.2. Крім показаних на малюнку напружень будемо вважати, що на нього ще діють об'ємні сили $f(f_x, f_y, f_z)$ – сила ваги.

Розкладемо вектор σ на площадці з нормаллю n на проекції по осях ($\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \sigma_{zn}$) і розглянемо рівновагу цього елементарного тетраедра на вісь x:

$$p_{xn}s - \sigma_{xx}s_x - \tau_{xy}s_y - \tau_{xz}s_z + f_x sh = 0,$$

де s – площа похилої площадки;

s_x, s_y, s_z – площі площадок, перпендикулярних відповідним осям;

h – висота тетраедра.

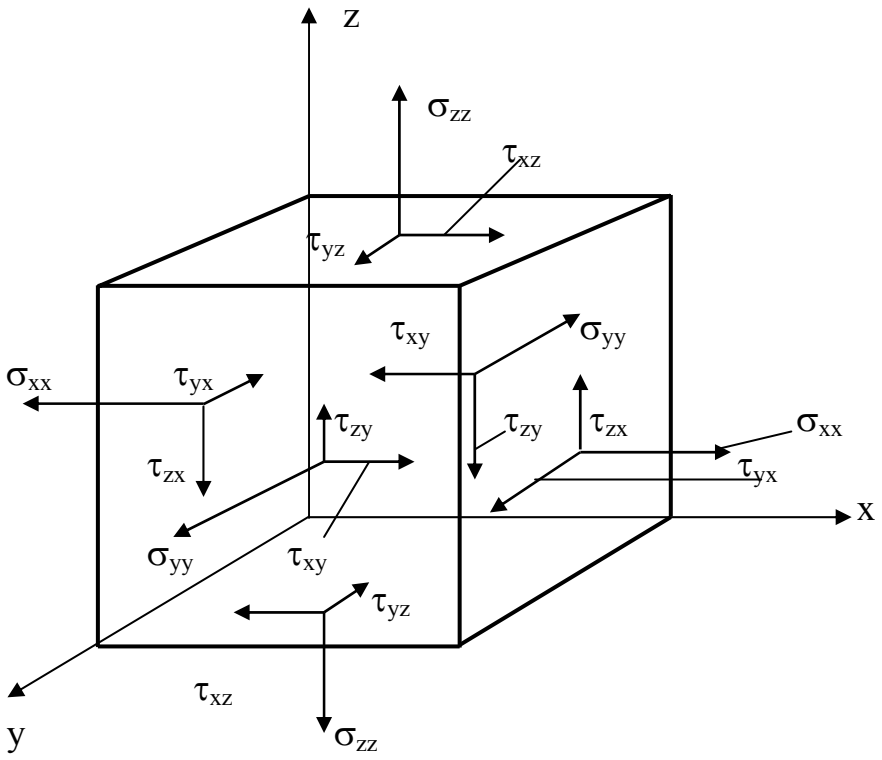


Рис. 3.1

Поділивши це співвідношення на площу похилої площадки, і зневажаючи складовими більш високого порядку малості, одержимо наступні вираження для проекції повного напруження на відповідну вісь (та аналогічно на дві інші осі):

$$\begin{aligned} p_{xn} &= \sigma_{xx} n_1 + \tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3; \\ p_{yn} &= \tau_{yx} n_1 + \sigma_{yy} n_2 + \tau_{yz} n_3; \\ p_{zn} &= \tau_{zx} n_1 + \tau_{zy} n_2 + \sigma_{zz} n_3, \end{aligned} \qquad (3.1)$$

де n_i - направляючі косинуси нормалі.

Повне напруження на похилій площадці буде:

$$p = \sqrt{p_{xn}^2 + p_{yn}^2 + p_{zn}^2} \ . \qquad (3.2)$$

Нормальне напруження (проекція повного напруження на нормаль) дорівнює скалярному добутку вектора напруження і нормалі:

$$\sigma \equiv \sigma_{nn} = (p \cdot n) = p_{xn} n_1 + p_{yn} n_2 + p_{zn} n_3 \ . \qquad (3.3)$$

Нормальне та дотичне напруження взаємно перпендикулярні. Тоді дотичне напруження на площадці:

$$\tau \equiv \tau_{tn} = \sqrt{p^2 - \sigma_{nn}^2} \ . \qquad (3.4)$$

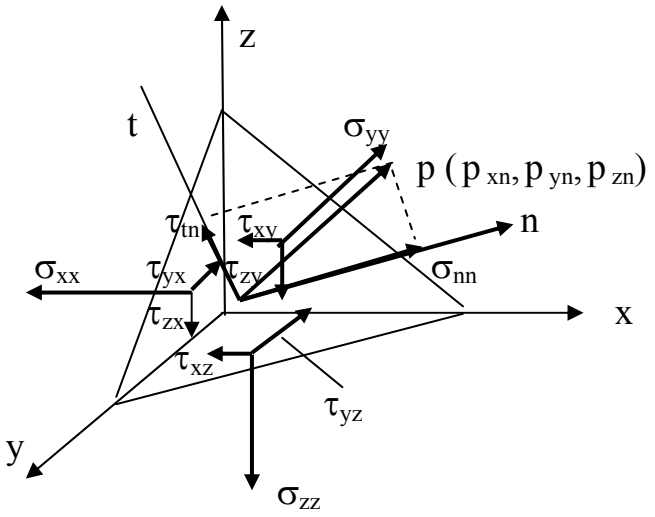


Рис. 3.2

У кожній точці тіла існує, принаймні, три взаємно перпендикулярних площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Ці площадки називаються головними, а напрямки нормалей до цих площадок називають головними напрямками (чи головними осями) напруженого стану. На головних площадках діють напруження, що називаються головними нормальними напруженнями σ_1, σ_2, σ_3, звичайно приймають, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Якщо всі головні напруження різні, то мається тільки три головних напрямки. Якщо два напруження, що відповідають двом головним площадкам рівні (осьова симетрія напруженого стану) тоді будь-яка площадка, що містить третю вісь, буде головною. Якщо всі головні напруження рівні між собою (центрально-симетричний чи гідростатичний напружений стан), тоді будь-яка площадка в цій точці буде головною.

Для перебування головних площадок і напружень розглянемо деяку площадку з нормаллю $n^*(n_1^*, n_2^*, n_3^*)$, припустимо, що це головна площадка з діючим на ній напруженням σ^*, спрямованим по нормалі до поверхні. З урахуванням співвідношень (3.1), запишемо проекції вектора напружень по осях x, y, z, і цієї ж проекції вектора, через направляючі косинуси n_1^*, n_2^*, n_3^* :

$$p_{xn^*} = \sigma_{xx} n_1^* + \tau_{xy} n_2^* + \tau_{xz} n_3^*; \quad p_{xn^*} = \sigma^* n_1^*;$$
$$p_{yn^*} = \tau_{yx} n_1^* + \sigma_{yy} n_2^* + \tau_{yz} n_3^*; \quad p_{yn^*} = \sigma^* n_2^*;$$
$$p_{zn^*} = \tau_{zx} n_1^* + \tau_{zy} n_2^* + \sigma_{zz} n_3^*; \quad p_{zn^*} = \sigma^* n_3^*.$$

Віднявши в кожному з рядків з першого виразу другий, одержимо три рівняння для визначення головного напруження і напрямних косинусів на головних площадках. Крім того, додатково, запишемо четверте рівняння, що зв'язує направляючі косинуси:

$$\begin{cases} (\sigma_{xx} - \sigma^*) n_1^* + \tau_{xy} n_2^* + \tau_{xz} n_3^* = 0; \\ \tau_{yx} n_1^* + (\sigma_{yy} - \sigma^*) n_2^* + \tau_{yz} n_3^* = 0; \\ \tau_{zx} n_1^* + \tau_{zy} n_2^* + (\sigma_{zz} - \sigma^*) n_3^* = 0; \\ (n_1^*)^2 + (n_2^*)^2 + (n_3^*)^2 = 1. \end{cases}$$

Тому що, відповідно до четвертого рівняння цієї системи координати нормалі не можуть одночасно дорівнювати нулю, тоді має дорівнювати нулю визначник з перших трьох рівнянь:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma^*) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma^*) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma^*) \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.5)$$

Розкриваючи цей визначник, одержимо кубічне рівняння:

$$(\sigma^*)^3 - I_1 (\sigma^*)^2 + I_2 \sigma^* - I_3 = 0,$$

де коефіцієнти цього рівняння:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz};$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix};$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Позначимо через σ_i три дійсних кореня цього рівняння й упорядкуємо їх у такий спосіб: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Ці корені не залежать від системи координат. Точно так само інваріантними до системи координат є і величини I_i, тому що вони однозначно виражаються через корені рівняння. По черзі підставляючи значення головних напружень у систему рівнянь (3.5) можна знайти три системи направляючих косинусів, які відповідають

головним осям. Вони виявляються взаємно ортогональні, і на цих площадках діють тільки нормальні напруження, тобто головні нормальні напруження.

Визначимо максимальні дотичні напруження. Запишемо, отриманій вище вираз для визначення дотичних напружень (3.4), у випадку, коли осі збігаються з головними напрямками:

$$\tau_{tn} = \sqrt{p^2 - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{(\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - (\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3)^2}\ .$$

Далі розглянемо задачу на перебування умовного екстремуму, у даному випадку умова буде для співвідношення направляючих косинусів $((n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$): $F = \tau_{tn} - \lambda\left((n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 - 1\right)$, де λ - множник Лагранжа. У цьому випадку для перебування екстремальних значень дотичних напружень використовуються наступні умови: $\frac{\partial F}{\partial n_i} = 0$, де i=1, 2, 3. У результаті виходить система трьох рівнянь, розв'язання якої показує, що максимальні дотичні напруження діють на площадках, що лежать під кутом 45° до головних осей і рівні:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2};\quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};\quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

З урахуванням прийнятих вище позначень одержимо значення максимального дотичного напруження:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\ . \qquad (3.6)$$

Іноді необхідно винаходити напруження на площадці, однаково нахиленої до всіх трьох головних осей, така площадка називається октаєдричною. Направляючі косинуси нормалі до цієї площадки будуть рівні $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Знайдемо проекції напружень на цій похилій площадці, з урахуванням того, що координатні площадки є головними: $\sigma_{xn} = \sigma_1 n_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}$, $\sigma_{yn} = \sigma_2 n_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}$, $\sigma_{zn} = \sigma_3 n_3 = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$, величина повного напруження буде дорівнювати:

$$p = \sqrt{\sigma_{xn}^2 + \sigma_{yn}^2 + \sigma_{zn}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}\ .$$

Нормальна складова дорівнює:

$$\sigma = \sigma_{xn} n_1 + \sigma_{yn} n_2 + \sigma_{zn} n_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\ .$$

Дотична складова напруження:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{1}{9}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2}.$$

Це – октаєдричне напруження, або інтенсивність дотичних напружень τ_i. Інтенсивність дотичних напружень можна виразити через компоненти напружень, що діють на довільно орієнтованих площадках:

$$\tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)}. \quad (3.7)$$

Величина інтенсивності дотичних напружень мало відрізняється від максимального дотичного напруження.

Крім інтенсивності дотичних напружень, вводять ще *інтенсивність напружень* σ_i, що відрізняється від τ_i чисельним множником:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2}$$

або

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)}. \quad (3.8)$$

Інтенсивність напружень не може бути представлена у виді напруження, що діє на якій-небудь площадці. При цьому, для *одноосьового* напруженого стану $(\sigma = \sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$, вона збігається з відмінним від нуля компонентом напруження: $\sigma_i = \sigma_1$.

У загальному випадку напружений стан є тривимірними. Однак для деяких тіл, що мають визначені особливості геометрії і навантаження, виявляється, що невідомими є функції тільки двох координат, при цьому напруження діють тільки в одній площині. Такі задачі називаються *плоскими*, а відповідний їм *напружений стан називається плоским*.

Плоский напружений стан має місце в тілах, які можна вважати тонкими (один з розмірів, наприклад по осі z істотно менше двох інших розмірів, по осях x і y) при цьому навантаження, прикладені до тіла, діють тільки в площині цього тіла і рівномірно розподілені по його товщині.

Так як на лицьових поверхнях відсутні напруження, то через малість розміру по осі z і того, що напруження повільно змінюються, вони на площадках, рівнобіжних площині xy, мало відрізняються від нуля. Таким чином, цими напруженнями можна зневажити у порівнянні з іншими компонентами: $(\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0 (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$. Отже, при плоскому напруженому стані ненульових компонентів напружень буде лише три.

3.2 Теорії міцності

Міцність конструкції залежить від міцності матеріалу, із якого вона виконана. Механічні властивості матеріалу вивчаються головним чином на найпростіші види дії сил, наприклад розтяг або стиск. Але в практиці досить часто зустрічаються більш складні випадки навантаження. Отже потрібні деякі загальні положення, теоретично обґрунтовані й апробовані. Такі положення називаються гіпотезами або теоріями міцності.

Задачею вказаних гіпотез є встановлення умов граничного стану матеріалу, тобто моменту руйнування або появи залишкових деформацій у випадках складного напруженого стану за даними, наявними для простого розтягу-стиску.

Будь-який складний напружений стан будемо характеризувати головними напруженнями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при цьому будемо вважати, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Небезпечні напруження при розтягу позначимо σ_0 (межа текучості або тимчасовий опір при розрахунку за методом допустимих напружень; $\sigma_0 = \mathrm{R}$, де R – нормоване значення розрахункового опору, при розрахунку методом граничних станів).

Теорія найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності).

Відповідно до цієї теорії небезпечний стан наступає тоді, коли найбільші нормальні напруження досягають граничного стану. Відповідно небезпечний стан або граничний стан визначається умовою

$$|\sigma_1| = \sigma_0, \quad |\sigma_3| = \sigma_0 \ . \tag{3.9}$$

Таким чином, за гіпотезою найбільших нормальних напружень граничній стан не може бути визначеній однією рівністю. Умову міцності одержують після заміни σ_0 допустимими напруженнями $|\sigma|$:

$$\sigma_0 \leq |\sigma| \ .$$

У цій теорії складний напружений стан прирівнюється до простого одномірного. Вона найчастіше використається для матеріалів, у яких дуже валика різниця між міцністю на розтяг і стиск, таких як цегляна або кам’яна кладка.

Теорія найбільших подовжень (друга теорія міцності).

Небезпечний напруженій стан настає тоді, коли найбільше відносне подовження досягає деякого граничного значення, яке позначимо ε_0, тоді маємо:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_0 \ .$$

Рахуючи закон Гука справедливим до моменту руйнування, можна виразити ε_0 і ε_{max} через напруження.

Нехай у складному напруженому стані

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right].$$

За змістом правої частини граничних рівностей за ε_0 потрібно прийняти відносне подовження у випадку розтягу, тобто:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}.$$

Умова граничного стану за цією теорією набуває вигляду:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0. \qquad (3.10)$$

У випадку плоского напруженого стану (при $\sigma_3 = 0$) це співвідношення буде

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2 = \sigma_0. \qquad (3.11)$$

Виражаючи головні напруження через $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ одержимо для плоского напруженого стану умову:

$$\frac{1-\mu}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_0. \qquad (3.12)$$

Умову міцності одержують після заміні σ_0 допустимими напруженнями:

$$\sigma_0 \le |\sigma|.$$

Ця теорія міцності нав'язує матеріалу визначені властивості: граничні напруження при розтягу повинні бути менше граничних напружень при стиску у стільки разів, у скільки разів коефіцієнт Пуассона менше одиниці. Ця теорія використається для матеріалів, яки відповідають цієї умови: бетон і залізобетон, деякі композиційні матеріалі.

Теорія максимальних дотичних напружень (третя теорія міцності).

Руйнування пластичних матеріалів істотно відрізняється від руйнування крихких. Воно супроводжується розвитком залишкових деформацій, тобто зсувів у матеріалі, і тому повинно бути пов'язане не з нормальними, а з дотичними напруженнями. Пластичний стан матеріалу починається тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають деякої граничної величини – межі текучості для дотичних напружень $\tau_т$:

$$\tau_{max} = \sigma_0,$$

де $\sigma_0 = \tau_т$.

Або с урахуванням (3.6) маємо

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0.$$

У випадку плоского напруженого стану (при $\sigma_3 = 0$) це співвідношення буде:

$$\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_0 . \qquad (3.13)$$

При σ_{yy}=0 ця умова набуває вигляду

$$\sqrt{\sigma_{xx}{}^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_0 . \qquad (3.14)$$

Умову міцності одержують після заміні σ_0 допустимими напруженнями: $\sigma_0 \le |\sigma|$.

Ця теорія широко використовується в технічних розрахунках для перевірки міцності пластичних матеріалів. ЇЇ недоліки – відсутність у розрахунковій формулі середніх за величиною головних нормальних напружень σ_2, що приводить до неточності в оцінці напруженості матеріалу.

Енергетична теорія міцності (четверта теорія міцності).

За кількісну характеристику початку пластичних деформацій за цією теорією прийнята потенційна енергія зміни форми, пов'язана із розвитком зсувів у матеріалі.

Пластичний стан матеріалу починається тоді, коли питома потенційна енергія зміни форми $U_ф$ досягає деякої граничної величини $U_{оп}$:

$$U_ф = U_{оп} .$$

Звідси отримаємо

$$\sigma_i = \sigma_0 = \tau_т$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2} = \sigma_0 . \qquad (3.15)$$

У випадку плоского напруженого стану це співвідношення буде:

$$\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_0 . \qquad (3.16)$$

При σ_{yy}=0 ця умова набуває вигляду:

$$\sqrt{\sigma_{xx}{}^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_0 . \qquad (3.17)$$

Умову міцності одержують після заміни σ_0 допустимими напруженнями: $\sigma_0 \le |\sigma|$. Ця умова найчастіше використається для більшості металів та сплавів.

3.3 Поняття про складні деформації

Розглянемо випадок, коли на консольний стержень у довільній точці крайнього перерізу діє довільно спрямована зосереджена сила (рис. 3.3).

Координати прикладання сили y_f та z_f, кут між лінією дії сили та осями y, z та x становить відповідно α, β та γ.

Розкладемо силу на складові $F_y = F\cos\alpha;\ F_z = F\cos\beta;\ \ F_x = F\cos\gamma$ вздовж осей y, z, x. У перерізі площиною A, що знаходиться на відстані x від кінця стержня проведемо осі y_A, z_A. Визначимо внутрішні зусилля у цьому перерізі:

- згинаючий момент відносно осі z_A $M_{z_A} = F_x \cdot y_f + F_y \cdot x$;
- згинаючий момент відносно осі y_A $M_{y_A} = F_x \cdot z_f + F_z \cdot x$;
- поперечні сили $Q_y = F_y$ та $Q_z = F_z$;
- поздовжня сила $N = F_x$.

Зауважимо, що знаки згинаючих моментів прийняті так, щоб вони розтягували частину перерізу у додатній чверті.

Застосовуючи принцип незалежності дії сил можна записати нормальні напруження у точці перерізу з координатами y, z:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}. \qquad (3.18)$$

Дотичні напруження у напрямку осей y та z можна визначити за формулою Журавського через поперечні сили відповідно Q_y та Q_z.

Вираз (3.18) може бути спрощений для деяких окремих випадків прикладання сили. Так, якщо сила паралельна осі x, маємо *позацентровий розтяг* або *стиск*. Якщо сила діє у площині, перпендикулярній площині нормального перерізу, маємо *косий згин.*

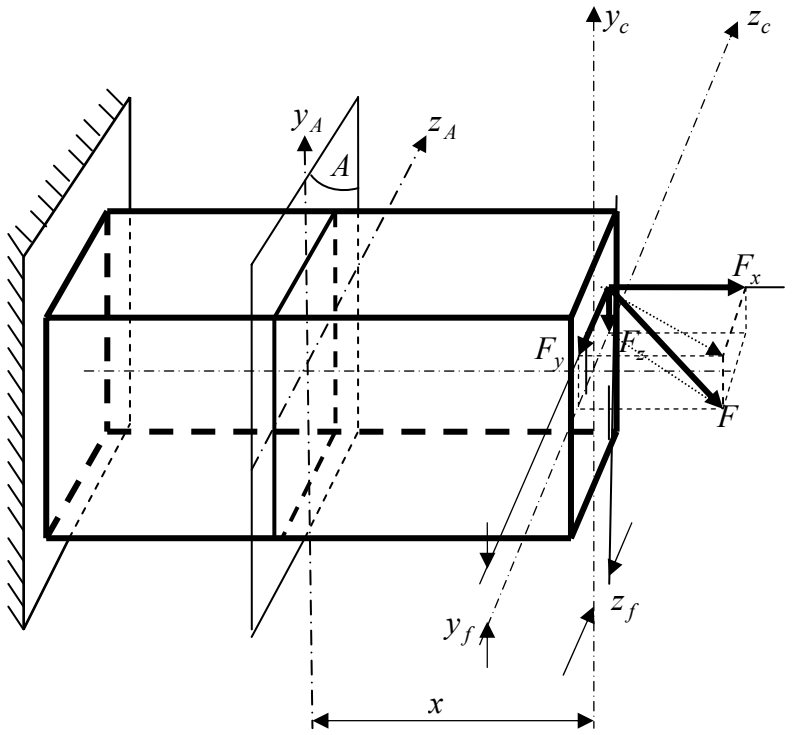


Рис. 3.3

3.4 Косий згин

Косим згином називається такий вид деформування, коли сили, що згинають балку, діють у площині, яка проходить через її вісь та не співпадає з жодної з головних.

Наприклад, розглянемо консольну балку (рис. 3.4). Силу F, прикладену в центрі ваги перерізу, розкладемо на дві складові: вертикальну - $F_y = F\cos\alpha$ і горизонтальну - $F_z = F\sin\alpha$.

У довільному перерізі x балки знайдемо згинальні моменти у вертикальній і горизонтальній (головних) площинах. При цьому, згідно з методом перерізів, будемо розглядати частину балки, розташовану зліва від перерізу. Тоді відповідно до правила знаків для згинальних моментів (рис. 3.4, а), маємо (рис. 3.4, б та рис. 3.4, в):

$$M_z = -F_y \cdot x = -Fx\cos\alpha = -M\cos\alpha;$$

$$M_y = -F_z \cdot x = -Fx\sin\alpha = -M\sin\alpha,$$

де M – згинальний момент у силовій площині.

Нормальні напруження від згинальних моментів M_z та M_y відповідно (рис. 3.5, а та рис. 3.5, б):

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{-M y \cos\alpha}{I_z};$$

$$\sigma_2 = \frac{M_y y}{I_y} = \frac{-M z \cos\alpha}{I_y}.$$

Тоді сумарні напруження (рис. 3.6):

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y y}{I_y} = -M\left(\frac{y\cos\alpha}{I_z} + \frac{z\cos\alpha}{I_y}\right). \qquad (3.19)$$

Знайдемо нейтральну лінію з умові рівності нулю нормальних напружень:

$$\frac{y\cos\alpha}{I_z} + \frac{z\cos\alpha}{I_y} = 0, \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y}\mathrm{tg}\alpha, \qquad (3.20)$$

де β – кут нахилу нейтральної лінії (рис. 3.6).

Аналізуючи (3.20) можливо здійснити висновок, що нейтральна лінія в даному випадку не перпендикулярна до силової.

Для розрахунку на міцність визначають небезпечний переріз (у даному випадку x=*l,* де обидва згинаючих моменті досягають максимуму), та для нього за формулою (3.19) визначають максимальні розтягуючи та стискуючі напруження.

При розрахунках на жорсткість при косому згині, переміщення у балці дорівнюють геометричній сумі її переміщень у напрямках головних осій:

$$u = \sqrt{v^2 + w^2}, \qquad (3.21)$$

де u – сумарне переміщення;

v, w – переміщення в напрямках y та z відповідно.

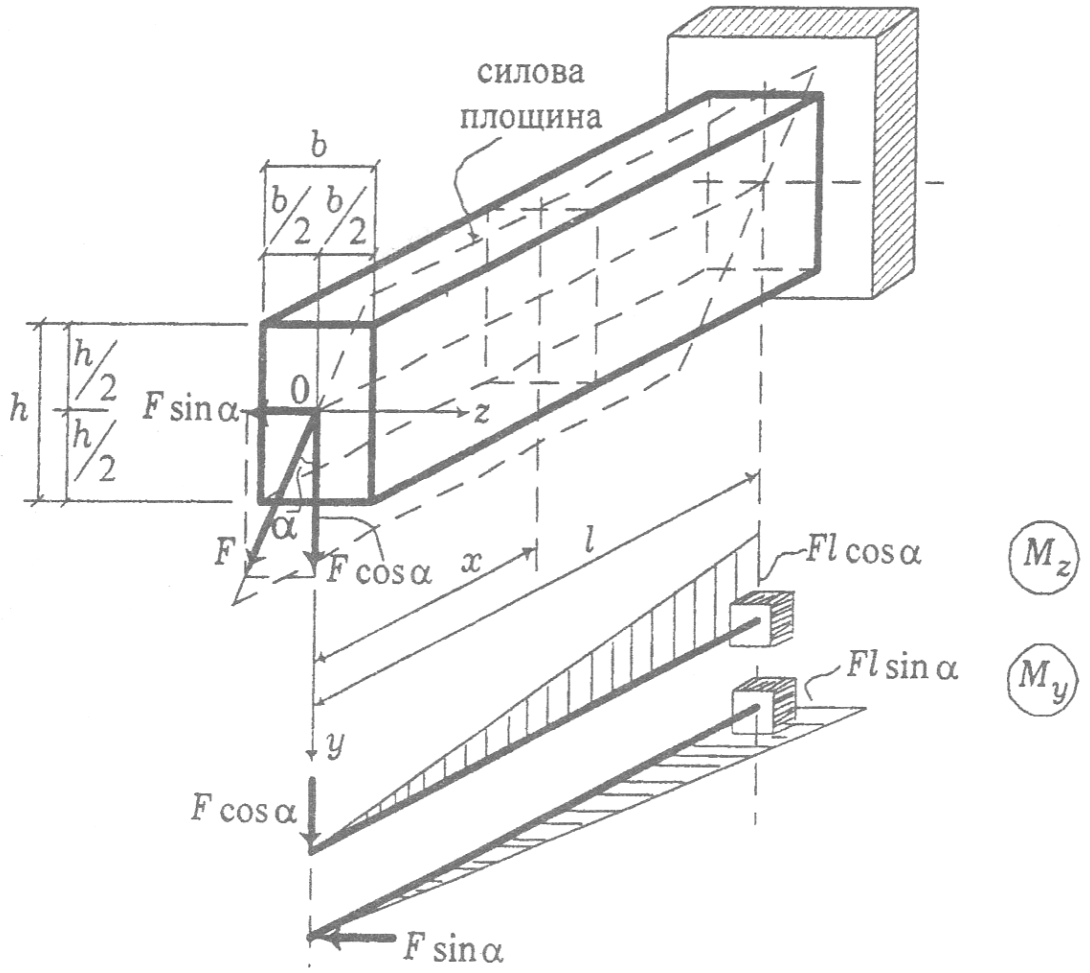
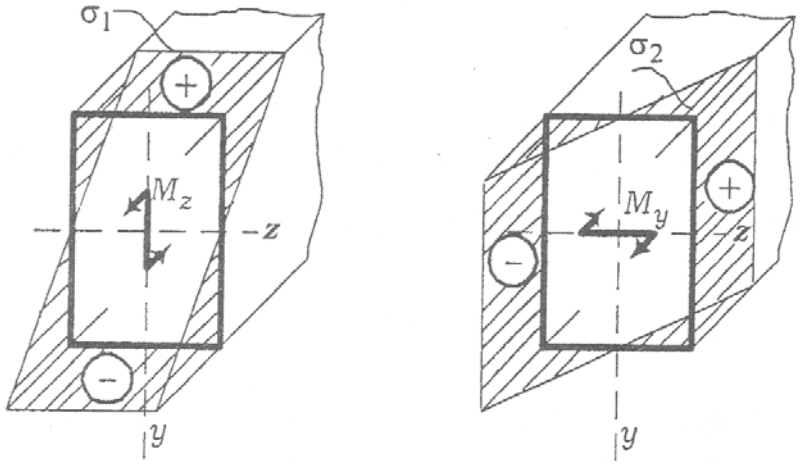


Рис. 3.4



а) б)

Рис. 3.5

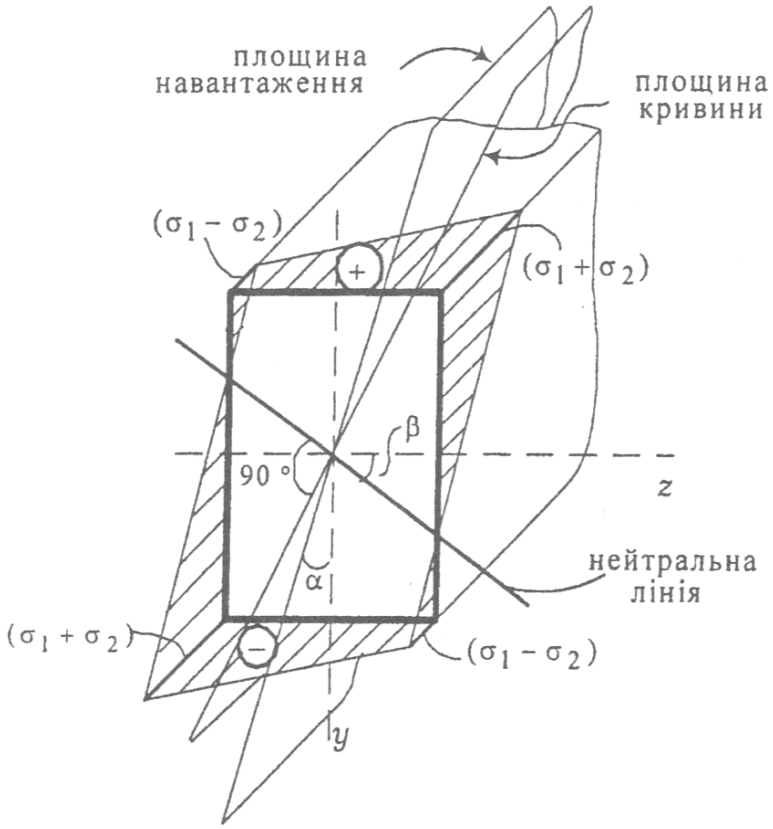


Рис. 3.6

3.5 Позацентровий стиск (розтяг)

Позацентровий стиском (розтягом) називається такий вид деформування, коли сила, що дієте на брус спрямована у напрямку осі бруса але не співподає з ній. Вистань між лінією дії сили та віссю називається *ексцентриситет* (е на рис. 3.7).

Нехай на брус діє сила F, що рівнобіжна поздовжній осі бруса, але точка її прикладання в загальному випадку не знаходиться на жодній із головних осей перерізу *z* і *y* (рис. 3.7).

Приведемо цю силу до центру ваги перерізу О (рис. 3.7). Нормальні напруження в довільному перерізі х визначимо, користуючись принципом незалежності дії сил, окремо від кожного силового фактору: F, $M_y = Fz_F$, $M_z = Fy_F$.

Нормальні напруження від центрально прикладеної сили F таки як і простому розтягу–стиску:

$$\sigma^{p-c} = \frac{F}{A},$$

де A - площа поперечного перерізу бруса.

Напруження від згину в площині oxz визначаються в такий спосіб:

$$\sigma^{з-z} = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{F z_F z}{I_y},$$

де z - відстань по осі z від початку координат до тієї точки, у якій визначається нормальне напруження;

J_y - момент інерції поперечного перерізу відносно осі y.

Аналогічно знаходимо напруження від згину в площині oyx:

$$\sigma^{з-y} = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{F y_F y}{I_z},$$

де y - відстань по осі y від початку координат до тієї точки, у якій визначається нормальне напруження;

J_z - момент інерції поперечного перерізу відносно осі z.

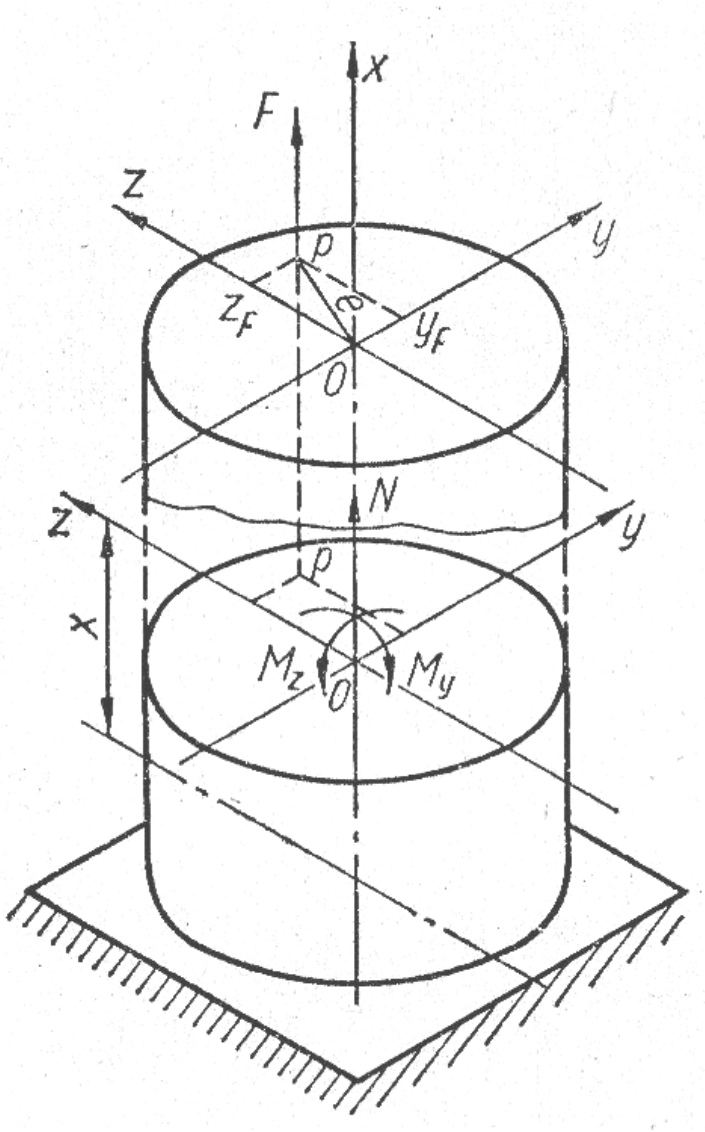


Рис. 3.7

Сумарне напруження (3.18) в перерізі бруса визначається як сума напружень, викликаних осьовим розтягом і згином у напрямку головних осей:

$$\sigma = \sigma^{p-c} + \sigma^{з-z} + \sigma^{з-y} = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{z_F z}{I_y}A + \frac{y_F y}{I_z}A\right). \qquad (3.22)$$

Або:

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{z_F}{i_y^2}z + \frac{y_F}{i_z^2}y\right), \qquad (3.23)$$

де i_y, i_z - радіуси інерції відносно осій y та z відповідно.

Щоб знайти положення нейтральної лінії, тобто геометричне місце точок із нульовими напруженням, необхідно праву частину рівняння (3.23) прирівняти нулю:

$$\frac{z_F}{i_y^2}z_0 + \frac{y_F}{i_z^2}y_0 = -1,$$

де y_0, z_0 - координати на нейтральної лінії.

Прирівнюємо $y_0 = 0, z_0 = 0$ та знайдемо відрізки y_H, z_H , які відсікає нейтральна лінія на осях y і z (рис. 3.8):

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_F};$$

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_F}.$$

Небезпечні напруження в перерізі виникають у точках, найбільш віддалених від нульової лінії (точки B і A на рис. 3.8). Якщо допустимі напруження для матеріалу бруса різні при розтяги і стиски, то необхідно перевірити дві умови міцності – на розтяг та стиск.

Положення нульової лінії залежить від розмірів, форми перерізу і від координати точки прикладення сили, але зовсім не залежить від її величини. Якщо нульова лінія перетинає контур поперечного перерізу (рис. 3.8), то вона поділяє його на дві частини з різними знаками напружень. Якщо не перетинає, напруження у всіх точках поперечного перерізу будуть одного знака. Це має значення при розрахунку стиснутих цегельних і бетонних колон. Цегельна кладка і бетон погано опираються розтягу. Тому бажано, щоб напруження при позацентровому стисканні були для всього перерізу стиснутими - нульова лінія проходила за межами перерізу або торкалася його.

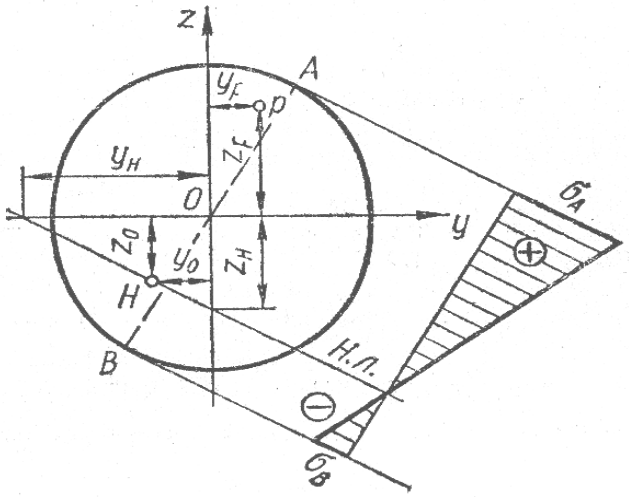


Рис. 3.8

Знайдемо обриси такого контуру, усередині якого повинна знаходитися стискуюча сила, рівнобіжна поздовжній осі. Область, розташована усередині такого контуру, називається *ядром перерізу*. Щоб визначити ядро перерізу, треба уявити собі, що нейтральна лінія «обкатується» навколо перерізу, не перетинаючи його.

Якщо при «обкатуванні» нейтральної лінії навколо перерізу вона повертається навколо деякої точки, то межа ядра перерізу при цьому окреслюється прямою лінією.

Наприклад, розглянемо коловий поперечний переріз (рис. 3.9). У кола усі осі – головні. Тому, при торканні нейтральної лінії 1-1 в деякій точки А, точка 1' буде на діаметрі, який також проходе через точку А, і її координати (рис. 3.9):

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{i_z^2}{-R} = \frac{R^2}{R} = \frac{R}{4};$$

$$z_H = 0.$$

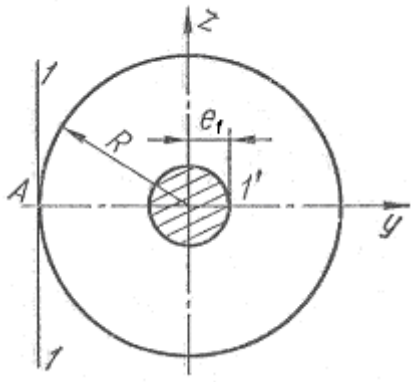


Рис. 3.9

Вочевидь, завдяки симетрії перерізу, ядро перерізу також буде колом радіусом $e_1 = \frac{R}{4}$ (рис. 3.9).

Аналогічно можливо збудувати ядро прямокутного перерізу, яке буде ромбом (рис. 3.10).

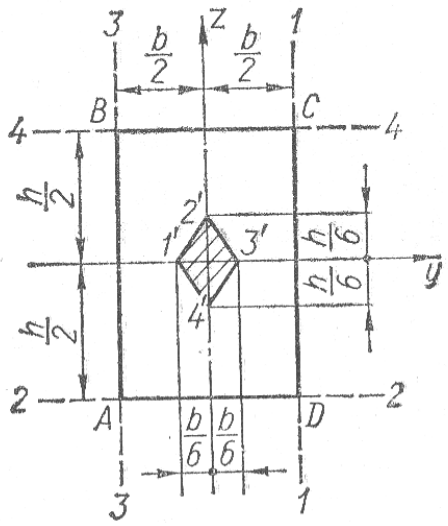


Рис. 3.10

Ядра трикутного перерізу, швелеру та двотавру наведені відповідно на рис. 3.11, а, б, в.

а) б) в)

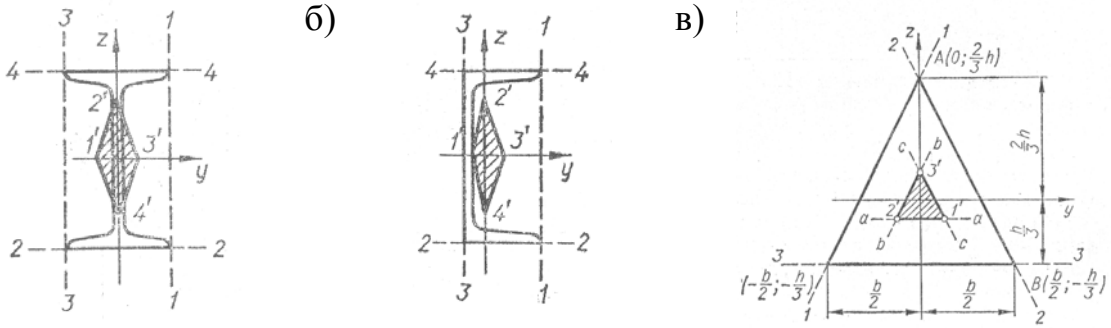


Рис. 3.11

3.6 Згин та кручення брусу осесиметричного поперечного перерізу

Одночасна дія кручення та згину частіше усього зустрічається в різноманітних деталях машин - валах. Наприклад, колінчатий вал сприймає значні крутні моменти і, крім того, працює на згин. На згин із крученням працюють вали моторних вагонів електропоїзда, трамвайного вагона.

Наприклад, розглянемо стержень, закріплений на правому кінці (рис. 3.12). На вільному кінці стержня прикладені сила F і крутний момент

$M_к$. Епюри згинальних моментів і крутних моментів наведено на рис. 3.12, б і рис. 3.12, в.

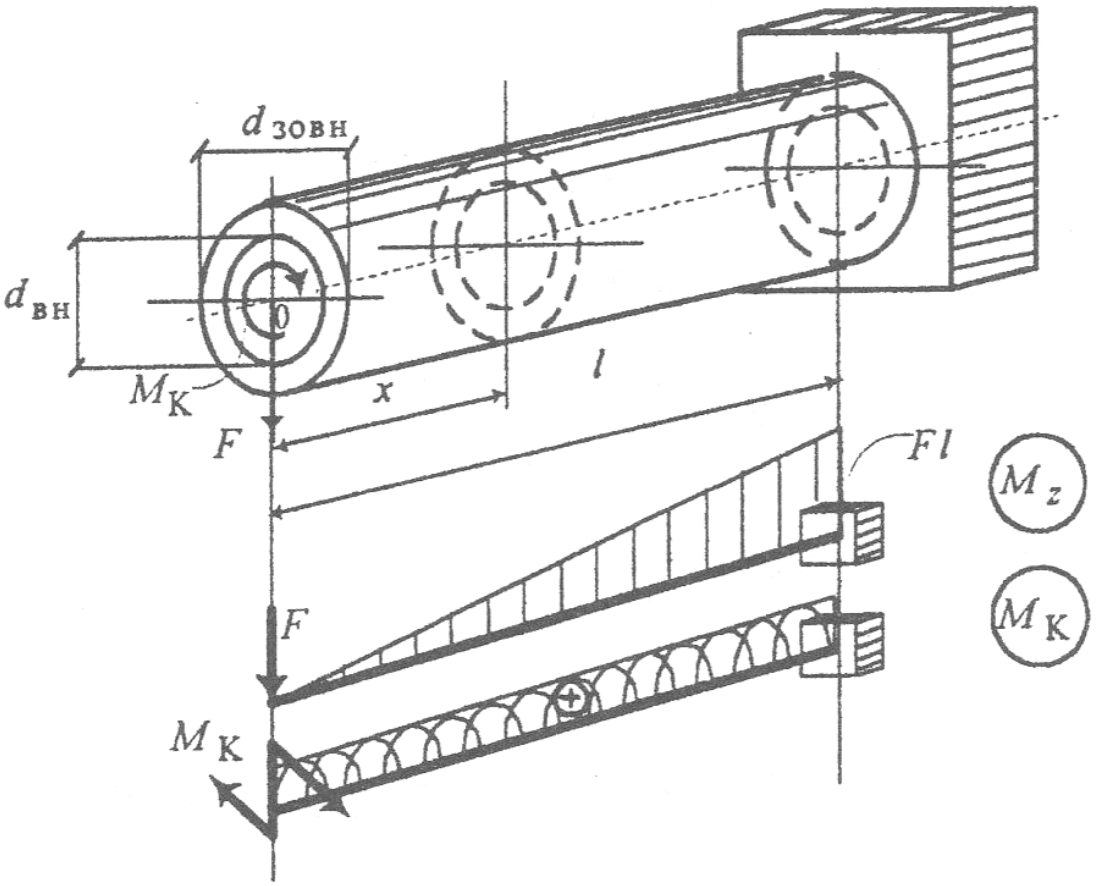


Рис. 3.12

У будь-якому поперечному перерізі стержня виникають нормальні напруження від згину $\sigma^з$ і дотичні напруження від кручення $\tau^к$ (рис. 3.13):

$$\sigma^з = \pm\frac{M_z y}{I_y};$$

$$\tau^к = \frac{M_K \rho}{I_\rho},$$

де $I_y = \frac{\pi d^4_{зовн}}{64}\beta$ - осьовий момент інерції;

ρ - відстань від полюса (точка "0" на рис. 3.13), до тієї точки перерізу, у якому знаходяться дотичні напруження;

$I_\rho = \frac{\pi d^4_{зовн}}{32}\beta$ - полярний момент інерції;

$$\beta = \left(1 - \frac{d_{вн}^4}{d_{зовн}^4}\right).$$

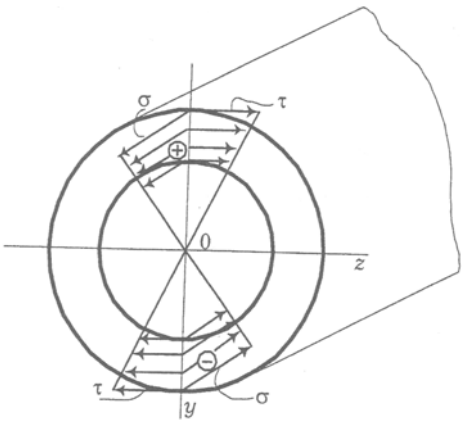


Рис. 3.13

У кожній точці поперечного перерізу нормальні напруження спрямовані по нормалі до перерізу. Дотичні напруження - по нормалі до радіуса, що з'єднує цю точку з центром перерізу. Таким чином, у даному випадку має місце окремий випадок плоского напруженого стану.

Найбільші за модулем нормальні та дотичні напруження виникають у точках, розташованих по зовнішньому контуру ($\rho=d_{зовн}/2$):

$$\left|\sigma_{max}^{з}\right| = \frac{32M_z}{\pi d_{зовн}^3 \beta};$$

$$\left|\tau_{max}^{к}\right| = \frac{16M_K}{\pi d_{зовн}^3 \beta},$$

Розрахунок брусів на міцність при згині з крученням провадиться з застосуванням різноманітних теорій міцності. Наприклад, згідно з енергетичної теорій міцності (3.16), враховуючи, що $\sigma_{xx} = \frac{32M_z}{\pi d_{зовн}^3 \beta}, \sigma_{yy} = 0, \tau_{xy} = \frac{16M_K}{\pi d_{зовн}^3 \beta}$:

$$d_{зовн} = \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\sigma]\beta}\sqrt{4M_z^2 + 3M_K^2}}.$$

3.7 Приклад розрахунку

Схема навантаження балки та її геометричні параметри наведені рис. 3.14. Тут F=100 кН, a=10 см. Визначити максимальні за модулем напруження.

Розв'язання.

Знайдемо центр ваги перерізу. Згідно наведеної схеми вин знаходиться на оси y (вона є віссю симетрії, отже вона також є и головною), тобто $z_c=0$. Друга координата центра ваги:

$$y_c = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2},$$

де $A_1=a\cdot a=10\cdot 10=100$ см^2 - площа першої (верхньої) фігури;

$A_2=a\cdot 2a=10\cdot 2\cdot 10=200$ см^2 - площа другої (ніжної) фігури;

$y_{c1}=5$ см - координата центру ваги першої фігури;

$y_{c2}=-5$ см - координата центру ваги другої фігури;

Отже:

$$y_c = \frac{100\cdot 5 - 200\cdot 5}{100+200} = -1.67 \text{ см}.$$

Будемо розглядати задачу у системі головних центральних осій z_c y. Відстань між силою F та центром ваги (ексцентриситет e) буде дорівнюватиме:

$$e = 10 + 1{,}67 = 11{,}67 \text{ см}.$$

Визначимо внутрішні силові фактори.

Поздовжня сіла:

$$N = -F = -100 \text{ кН}.$$

Згинальний момент:

$$M = F\cdot e = 100\cdot 11{,}67 = 1167 \text{ кН}\cdot\text{см}.$$

Нормальні напруження від поздовжньої сіли:

$$\sigma^{p-c} = \frac{N}{A},$$

де $A=A_1+A_2=100+200=300$ см^2 - площа поперечного перерізу.

Напруження від згину (з урахуванням правилу знаків):

$$\sigma^{з-y} = -\frac{M\cdot y}{I_{z_c}},$$

де $I_{z_c} = I^1_{z_c} + I^2_{z_c}$ - осьовий момент інерції перерізу відносно головної центральної осі z_c;

$I^1_{z_c} = I^1_{z_0} + A_1\cdot a_1 = \frac{10\cdot 10^3}{12} + 100\cdot(5+1{,}67) = 1500$ см^4 - осьовий момент інерції першої фігури відносно головної центральної осі z_c;

$I_{z_0}^1$ - осьовий момент інерції першої фігури відносно її центральної осі z_c;

a_1 - відстань між головної центральної віссю z_c та центральною віссю першої фігури;

$I_{z_c}^2 = I_{z_0}^2 + A_2 \cdot a_2 = \frac{20 \cdot 10^3}{12} + 200 \cdot (5 - 1{,}67) = 23333 \text{ см}^4$ - осьовий момент інерції другої фігури відносно головної центральної осі z_c;

$I_{z_0}^2$ - осьовий момент інерції другої фігури відносно її центральної осі z_c;

a_2 - відстань між головної центральної віссю z_c та центральною віссю другої фігури.

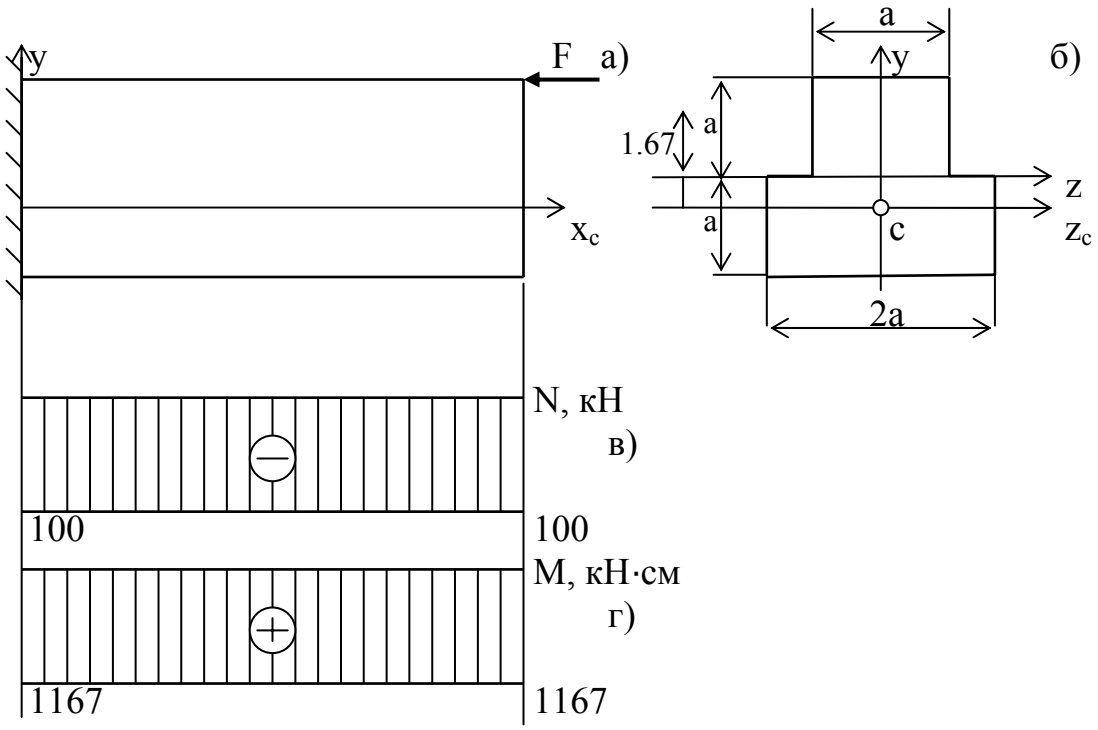


Рис. 3.14

З урахуванням цього:

$$I_{z_c} = 1500 + 2333 = 3833 \text{ см}^4.$$

Отже, сумарне напруження (3.22) в перерізі бруса визначається як сума напружень, викликаних стиском і згином:

$$\sigma = \sigma^{р-с} + \sigma^{з-у} = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y}{I_z}.$$

Це лінійна по висоті перерізу залежність, знайдемо напруження у двох крайніх точках перерізу:

$$y= - 8.33 \text{ см};\ \sigma = -\frac{100}{300} + \frac{1167 \cdot 8{,}33}{3833} = -0{,}333 + 2{,}536 = 2{,}203 \text{ кН/см}^2;$$

$$y= 10.67 \text{ см};\ \sigma = -\frac{100}{300} - \frac{1167 \cdot 10{,}33}{3833} = -0{,}333 - 3{,}145 = -3{,}478 \text{ кН/см}^2.$$

На рис. 3.15 наведені напруження викликані стиском, згином і сумарні (в кН/см^2).

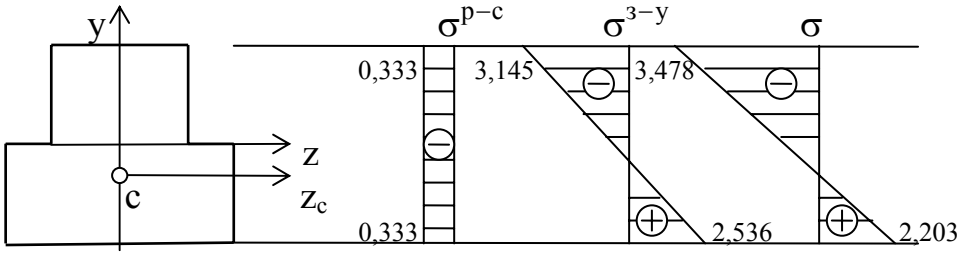


рис. 3.15

Відповідь: Максимальні за модулем напруження дорівнюють $|\sigma|_{max} = 3{,}478 \text{ кН/см}^2$.

3.8 Запитання для самоконтролю

Що називається напруженим станом?
Що називається головними осями?
Що таке інтенсивність напружень?
Що називається плоским напруженим станом?
Наведіть теорію найбільших нормальних напружень.
Наведіть теорію найбільших подовжень.
Наведіть теорію максимальних дотичних напружень.
Наведіть енергетичну теорія міцності.
Що таке позацентровий розтяг (стиск)?
Що називається ексцентриситетом?
Що таке косий згин?

4. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

4.1 Основні поняття

Розглянемо різні випадки положення кульки на криволінійної поверхні (рис. 4.1). Якщо з положення 1 на ввігнутій поверхні кульку відхилити, то, зробивши декілька коливань, віна повернеться на колишнє місце. Таке положення називається положенням стійкої рівноваги. Якщо аналогічно відхилити кульку з положення 2, то віна скотиться з опуклої поверхні. Таке положення називається положенням хиткої рівноваги.

Рис. 4.1

Стійкістю називають здатність спорудження і його частин зберігати своє первісне положення й напружено-деформований стан при діючих навантаженнях.

Втрата стійкості - це перехід від стійкого стану в нестійкій.

У спрощеному вигляді визначення стійкої рівноваги можна сформулювати в такий спосіб: стан рівноваги є стійким, якщо при досить малих збудженнях відхилення системи протягом усього часу руху залишаються малими, причому, зменшуючи збурювання, можна зробити ці відхилення як завгодно малими.

Розрізняють стійкість положення й стійкість форми рівноваги в деформованому стані. Втрата стійкості положення є результатом порушення умов рівноваги зовнішніх сил (перекидання баштового крана, перекидання або зрушення підпірної стінки).

Втрата стійкості форми рівноваги в деформованому стані є наслідком порушення рівноваги між зовнішніми й внутрішніми силами. При цьому відбувається перерозподіл внутрішніх сил і рівновага відновлюється лише в новому деформованому стані. Далі ми будемо розглядати тільки стійкість форми рівноваги.

Розглянемо поводження прямого стержня, стислого силою F (рис. 4.2). При величині сили, менших деякого значення, стрижень буде зберігати прямолінійну форму. Якщо при цьому його злегка відхилити й відпустити, то він, зробивши ряд коливань щодо вертикального положення, повернетеся до первісної прямолінійної форми. Таким чином, вихідна прямолінійна форма стрижня є стійкою.

Рис. 4.2

При збільшенні сили стержень випрямлюється усе повільніше й, нарешті, при певній її величині прямолінійна форма стає нестійкою. Якщо тепер відхилити стрижень на деяку малу величину, то він не повернеться у первісний стан, а буде відхилятися усе далі або залишиться у відхиленому положенні.

Теоретично вихідна, прямолінійна, форма стрижня можлива, але поряд з нею з'являється нова - скривлена форма рівноваги.

Найбільша сила (навантаження), до якого вихідна форма рівноваги є стійкої, називається *критичною силою* (критичним навантаженням).

Крім цього визначення, що є визначенням знизу, можна дати визначення зверху. У цьому випадку критичної називається сила, до якої, крім вихідної, можлива ще хоча б одна, відмінна від вихідної форма рівноваги.

Перехід стержня в нове положення пов'язаний з появою нескінченно малих переміщень, тому нова форма рівноваги називається суміжної. Така втрата стійкості називається втратою стійкості «у малому». На відміну від її при втраті стійкості «у великому» перехід системи в нове положення супроводжується досить більшими переміщеннями. Наприклад, у системі на рис. 4.3 втрата стійкості відбувається при прощелківанні її в нижнє (штрихова лінія) положення. Далі будемо розглядати тільки втрату стійкості «у малому».

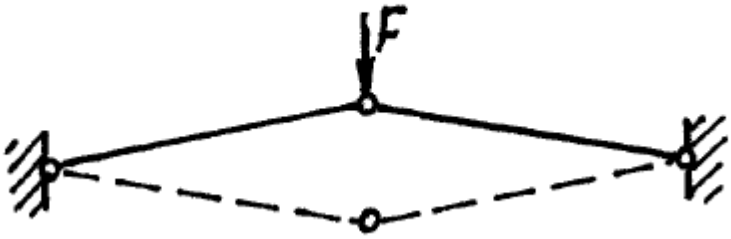


Рис. 4.3

Перехід у суміжний стан супроводжується появою нових, відмінних від вихідних видів деформацій. Наприклад, у тонкій смузі (рис. 4.4), що працює на згин у вертикальній площині, при втраті стійкості з'являються деформації кручення й згину не тільки у вертикальної, але й у горизонтальній площині.

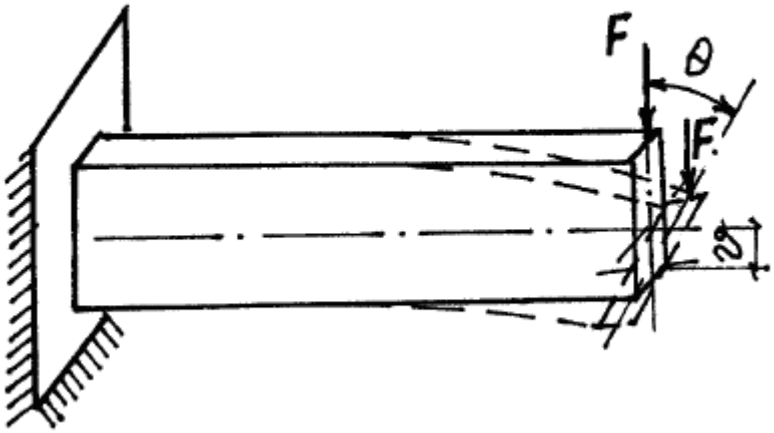


Рис. 4.4

Теоретично перехід у суміжне положення можливий лише в тому випадку, якщо примусово вивести систему з вихідного стану. Однак на практиці це відбувається мимовільно через наявність початкових недосконалостей (неточність розмірів і форми тіла, неоднорідність властивостей матеріалу, неточність додатка навантаження). При розрахунках ці недосконалості передбачаються малими, що не впливають на величину критичного навантаження.

Основною метою розрахунків на стійкість є визначення критичного навантаження.

Числом ступенів свободи w у розрахунках на стійкість називається кількість незалежних геометричних параметрів, що визначають положення системи при переході в суміжний стан.

Пружний стержень на рис. 4.5 ,а при втраті стійкості згинається так, що кожна його точка на відстані x одержує переміщення y. Кількість цих точок нескінченна, отже w=0. Наявність пружної опори (рис. 4.5, б) дає точці D стержня додаткові переміщення за рахунок її осадки, і як і раніше для нього w=0. Таким чином, якщо система має у своєму складі хоча б один пружний стержень, число її ступенів вільності дорівнює нескінченності.

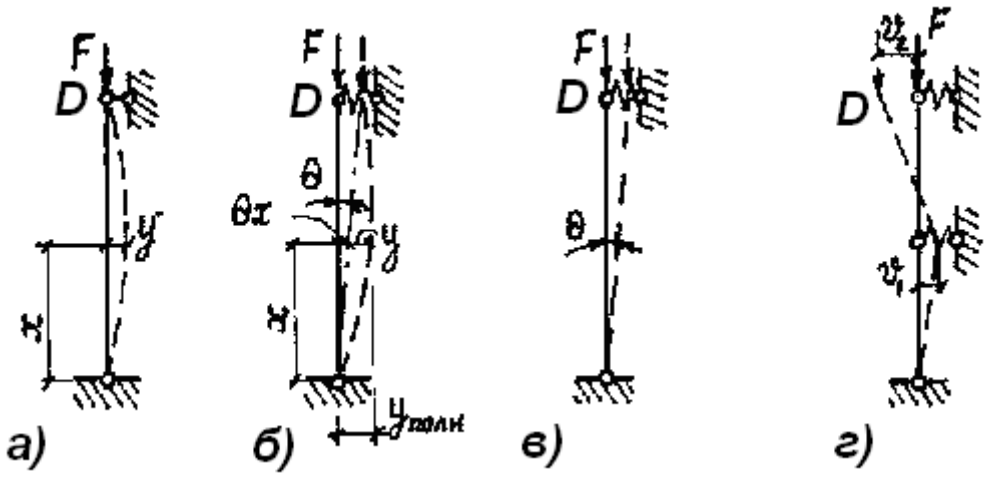


Рис. 4.5

4.2 Методи розрахунку на стійкість

Розрізняють три методи розрахунків на стійкість: динамічний, енергетичний і статичний.

Динамічний метод

Цей метод полягає в дослідженні коливань системи, виведеної зі стану рівноваги й наданої далі самої собі. При навантаженні менше критичного система робить загасаючі коливання навколо положення рівноваги. Якщо навантаження перевищує критичне, коливання відбуваються з наростаючою амплітудою.

Цей метод може бути застосований для розрахунку як консервативних, так і неконсервативних систем.

Енергетичний метод

Цей метод заснований на використанні енергетичного критерію стійкості, обумовленого теоремами Лагранжа-Діріхле й Ляпунова.

Теорема Лагранжа-Діріхле. Якщо в стані рівноваги консервативної системи її потенційна енергія мінімальна в порівнянні з енергією суміжних станів, той цей стан стійкій.

Теорема Ляпунова. Якщо потенційна енергія консервативної системи в положенні рівноваги не мінімальна в порівнянні з енергією суміжних станів, то це положення не стійке.

Статичний метод

При втраті стійкості відбувається розшарування (*біфуркація*) форм рівноваги. Таке розгалуження можливо не тільки при критичної, але й при інших значеннях навантаження, які будемо називати біфуркаційнимі.

Дослідження показали, що в консервативних системах критичним є мінімальне з біфуркаційних значень навантаження.

Статичний метод (*метод Ейлера*) складається у відшуканні біфуркаційних значень навантаження й наступному визначенні мінімального з них. Для цього застосовують умови рівноваги до суміжного стану системи.

4.3 Формула Ейлера

Розглянемо стійкість прямого стислого стержня постійної жорсткості із шарнірно закріпленими кінцями (рис. 4.6, а).

Застосовуючи статичний метод розглянемо рівновагу стрижня в суміжному стані (рис. 4.6, б). Умову рівноваги запишемо в диференціальної формі:

$$EIy^{II} = M.$$

Згинальний момент:

$$M = -y \cdot F.$$

З урахуванням цього:

$$EIy^{II} = -y \cdot F.$$

Або:

$$y^{II} + n^2 y = 0, \qquad (4.1)$$

де

$$n^2 = \frac{F}{EI}. \qquad (4.2)$$

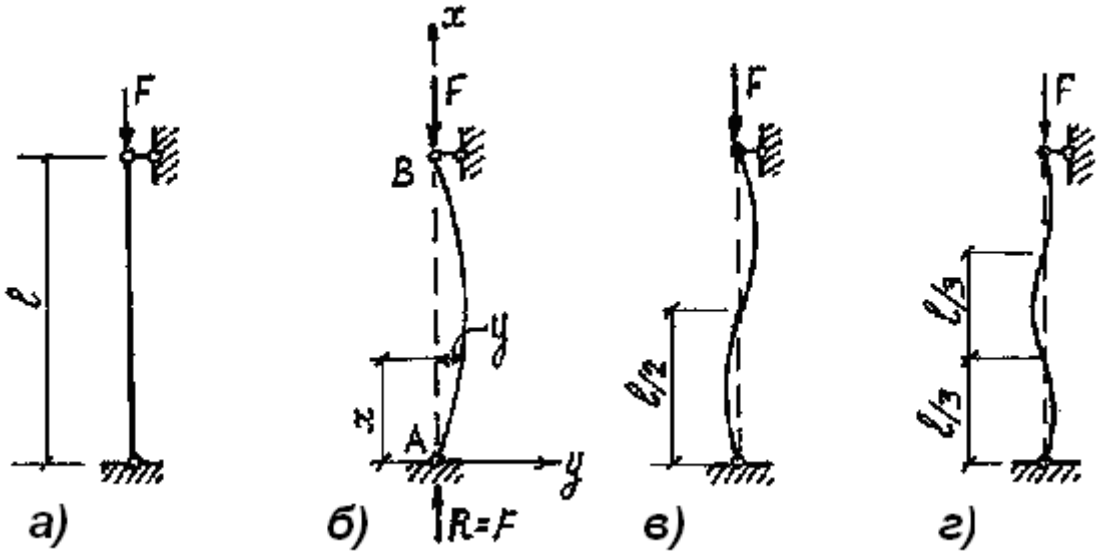


Рис. 4.6

Отримане рівняння (4.1) є однорідним диференційним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Розв’язання якого буде

$$y=C_1\cdot\sin(nx)+C_2\cdot\cos(nx). \qquad (4.3)$$

Вильни коефіцієнти C_1·і C_2 знайдемо з граничних умов: при x=0 та x=*l* маємо y=0.

З першої граничної умови визначимо $C_2=0$.

З другої (вважаючи, що $C_2\neq 0$, так як це відповідає недеформованому стержню, знайдемо – sin(n*l*)=0. Або:

$$nl=0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots=k\pi,\quad k=0,1,2,3,..., \qquad (4.4)$$

Розглянемо перший відмінний від нуля розв’язок n*l*=π. З урахуванням (4.2) отримаємо

$$\ell\sqrt{\frac{F_{б1}}{EI}}=\pi.$$

Відкіля можливо визначити першу біфуркаційну силу $F_{б11}$:

$$F_{б1}=\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \qquad (4.5)$$

Підставимо n*l*=π у рівняння (4.3) можна визначити, що першої біфуркаційної силі відповідає деформація стрижня по одній напівхвилі синусоїди (рис. 4.6, б). Другому розв’язку ряду (4.4) відповідає деформація стрижня по двох напівхвилях синусоїди (рис. 4.6, в). Для третього розв’язку (4.3) третя форма втрати стійкості показана на рис. 4.6, г.

Очевидно, що цей ряд форм втрати стійкості й біфуркаційих сил нескінченний і відповідає нескінченному числу ступенів вільності стрижня.

Як виходить з визначення, *критичною* силою є найменша з отриманих біфуркаційих сил:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \qquad (4.6)$$

Цій вираз називаються *формулою Ейлера*.

Помітимо, що реалізація другої й далі форм втрати стійкості можлива тільки при постановці додаткових в'язей, що перешкоджають переміщенням за першою формою втрати стійкості. Так, для реалізації другої форми втрати стійкості можлива лише при постановці опорного стрижня в середині прольоту стержня. Таким чином, постановка додаткових в'язей приводить до збільшення жорсткості системи в цілому й, відповідно, до збільшення критичної сили.

4.4 Приведена формула Ейлера

Формулу Ейлера (4.6) можна поширити на інші варіанти закріплення кінців стержня. Для цього варто звернути увагу на наступну обставину. Форми втрати стійкості шарнірно закріпленого стержня (рис. 4.6) відрізняються друг від друга кількістю напівхвиль синусоїди, що укладаються на довжині стрижня при його згині. Так, для другої форми це число становить два, для третьої - три й т.д.

Кожна частина стержня, на який укладається одна напівхвиля синусоїди l_c, поводиться так само, як окремий стержень довжиною l_c. Дійсно, при другій формі втрати стійкості $l_c=1/2\times l$, при третьої $l_c=1/3\times l$, і т.д.

Відповідно до цього одержують формулу для визначення критичної сили при різних закріпленнях кінців стрижня:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu\ell)^2}. \qquad (4.7)$$

де μ - коефіцієнт приведення довжини, що показує частку довжини стержня, на якій при його згині укладається одна напівхвиля синусоїди.

Вираз (4.7) називаються *приведеною формулою Ейлера*.

Значення коефіцієнта μ наведені на рис. 4.7.

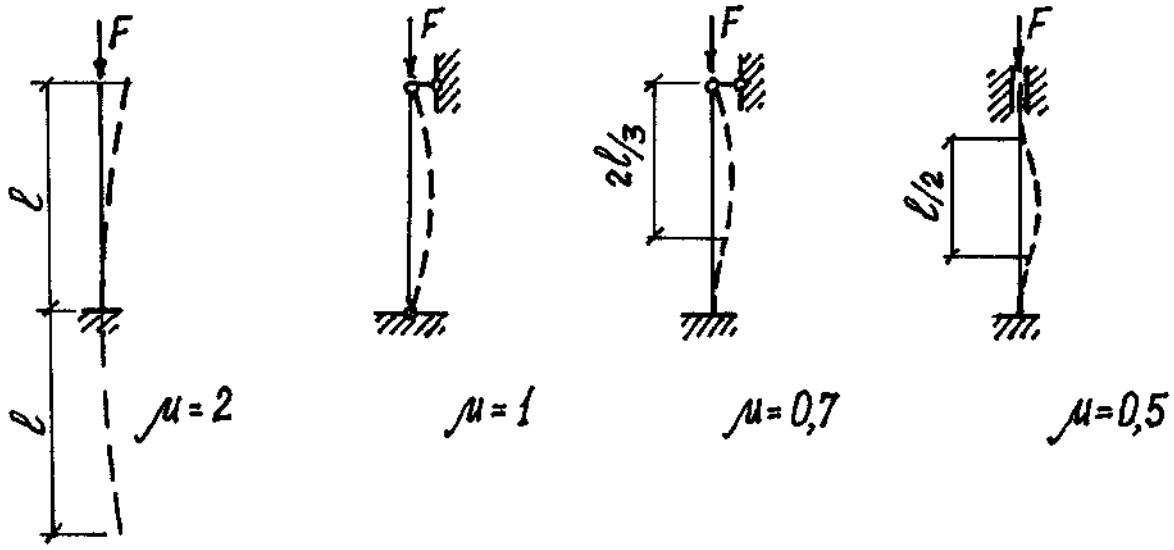


Рис. 4.7

4.5 Критичні напруження. Стійкість за межею пружності

Критичні напруження відповідають критичному навантаженню:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A(\mu\ell)^2}. \qquad (4.8)$$

Нагадаємо, що вираз (4.7) отримано в припущенні пружної стадії роботи матеріалу, тому напруження (4.8) не повинні перевищувати межу пропорційності: $\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}$.

Позначимо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \sqrt{\frac{A(\mu\ell)^2}{I}} = \frac{\mu\ell}{i}$$

де i - радіус інерції перерізу.

Тоді:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}. \qquad (4.9)$$

Звідки граничне значення гнучкості $\lambda_{гран}$, при якій матеріал при втраті стійкості працює в пружній стадії:

$$\lambda_{гран} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{пц}}{E}}.$$

При $\lambda < \lambda_{гран}$ з'являються пластичні деформації й формула Ейлера незастосовна.

У цьому випадку користуються емпіричною формулою Ясинського:

$$\sigma_{кр}=a-b\times\lambda. \qquad (4.10)$$

Або

$$F_{кр}=A(a-b\times\lambda). \qquad (4.11)$$

Коефіцієнти в (4.10) і (4.11), визначаються експериментальним шляхом. Наприклад, для сталі Ст.3 вони дорівнюють a=310, b =1,14.

Якщо $\sigma_{кр}$, знайдене по формулі (4.10), досягає значення σ_T, то стержень не може втратити стійкість, раніше наступає порушення його міцності. Для сталі залежність між гнучкістю стержня й критичною силою може бути представлена діаграмою, наведеної на рис. 4.8.

Формула (4.11) застосовна при гнучкості аналізованого стержня, що лежить у межах $\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_{гран}$, де λ_0 - те значення гнучкості, при якому критичне напруження дорівнює граничному (небезпечному) напруженню при чистому стиску (без поздовжнього згину). Для стержнів із пластичних і крихко-пластичних матеріалів показане напруження дорівнює границі текучості. Для крихких матеріалів граничне напруження дорівнює границі міцності при стиску. Значення λ_0 и $\lambda_{гран}$ дані в табл. 4.1.

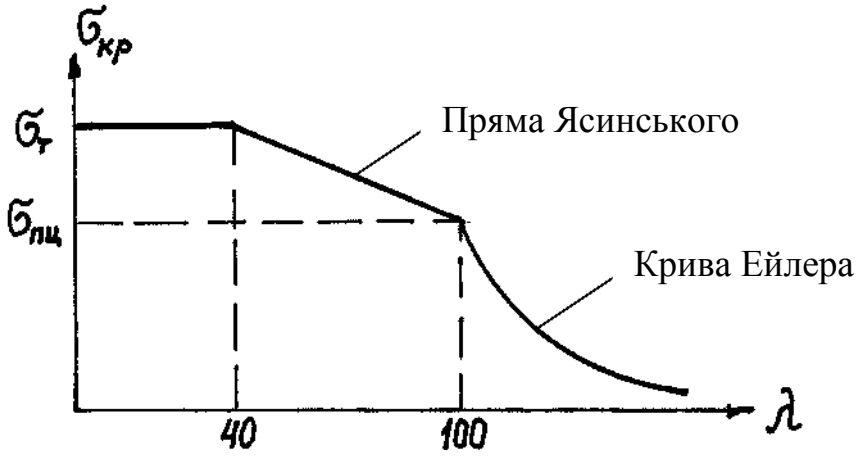


Рис. 4.8

Таблиця 4.1

Матеріал	$\sigma_т$	$\sigma_{пц}$	a	b	$\lambda_{гран}$	λ_0
	МПа					
Сталь Ст2	220	190	264	0,7	105	62
Сталь Ст3	240	200	310	1,14	100	61
Сталь 20, Ст4	260	220	328	1,11	96	60
Сталь 25, Ст5, 36Л	280	240	350	1,15	92	57
Сталь 35, 45Л	320	270	398	1,43	90	55
Сталь 45	360	305	449	1,67	85	52
Сталь 50, 55Л	380	320	473	1,87	82	50
Сталь 10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	350	300	429	1,52	83	50
Сталь 30ХНА, 35ХМФА, 30ГСА	850	700	1000	5,57	55	28
Дюралюміній Д16Т	320	255	406	2,83	53	30
Дюралюміній Д6Т	280	220	300	1,43	57	15
Сосна, ялина	-	-	29,3	0,194	70	-
Чавун СЧ 12-28, СЧ 15-32, і ін.	-	-	-	-	80	10

4.6 Практичний розрахунок стиснутих стержнів

Як було показано раніше, стиснуті стержні за методикою їхнього розрахунку поділяють на три групи:

1) стержні великої гнучкості ($\lambda \geq \lambda_{гран}$), для яких критичне напруження визначають за формулою (4.9);

2) стержні середньої гнучкості ($\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{гран}$), для них критичне напруження визначають за формулою Ясиньського (4.10);

3) стержні малої гнучкості ($\lambda < \lambda_0$), для яких критичні напруження приймають постійними, тобто стержні розраховують не на стійкість, а на міцність.

Аналізуючи табл. 4.1, можливо вимітити, що для стиснутих стержнів великої гнучкості застосування сталі з високими механічними характеристиками не виправдано, тому що величина модуля пружності Е майже однакова для сталей різних марок і отже, застосування сталі більш високої якості не призводить до підвищення $\sigma_{кр}$.

Не можна припустити, щоб у стиснутих стояках виникали нормальні напруження, рівні критичним. Тому необхідно від критичних напружень перейти до допустимих напружень при поздовжньому згині. Для цього

потрібно критичні напруження розділити на коефіцієнт запасу стійкості $к_{ст}$, який приймають рівним: для металів в межах 2.. .3, для дерева в межах 3...4. Цим коефіцієнтом запасу враховується, крім чистого поздовжнього згину, ще цілий ряд побічних чинників: можливий ексцентриситет прикладення навантаження, початкове скривлення стержня та неоднорідність матеріалів стержнів. Порівнюючи допустимимє напруження при поздовжньому згині з допустимим напруженням при стиску, відзначимо, що допустиме напруження при поздовжньому згині складає лише деяку частку від допустимого напруження при простому стисканні.

Розрахунок стержнів на поздовжнє згинання провадять аналогічно простому стиску:

$$\sigma = \frac{F}{A\varphi} \le [\sigma], \qquad (4.12)$$

де σ - нормальне напруження, що виникає в поперечному перерізі стержня;

F - сила, що стискує стержень;

A - площа поперечного перерізу стержня;

$[\sigma]$ - допустиме напруження на стискання (табл. 4.2);

φ - коефіцієнт поздовжнього згину, величина якого залежить від матеріалу і гнучкості стержня (табл. 4.3). Він визначає ступінь зниження допустимого напруження при поздовжньому згині.

До формули (4.12) входять дві невідомі величини φ і A. Вони пов'язані між собою, проте залежність між ними не виражається простою формулою, отже виключити одну з цих величин і виразити її через другу неможливо. Тому, якщо задана стискальна сила, а також усі геометричні характеристики стержня, то перевірка міцності на стиск з урахуванням поздовжнього згину якихось ускладнень не викликає. А якщо необхідно підібрати переріз, то доводиться застосовувати послідовні наближення.

Таблиця 4.2

Матеріал	$[\sigma]_c$, МПа
Сталь Ст3, Ст4	160
Сталь Ст5	175
Сталь 14Г2, 15ГС, 10Г2СД, 15ХСНД	210
Дюралюміній Д16Т	170
Чавун СЧ 12-28, СЧ 15-32	130
Чавун СЧ 18-36, СЧ 21-40	150
Чавун СЧ 24-44, СЧ 28-48	170
Сосна, ялина	100
Дуб	130

Таблиця 4.3

Гнучкість $\lambda = l_{гран}/i$	Сталь марок			Чавун марок		Дюралюміній Д16Т	Дерево (сосна, ялина)	Сталь із розрахунковим опором R=240МПа
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99	0,987
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97	0,962
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93	0,931
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87	0,894
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80	0,852
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71	0,805
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61	0,754
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49	0,686
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38	0,612
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31	0,542
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25	0,478
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22	0,419
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18	0,364
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16	0,315
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14	0,276
160	0,29	0,23	0,21				0,12	0,244
170	0,26	0,21	0,19				0,11	0,218
180	0,23	0,19	0,17				0,10	0,196
190	0,21	0,17	0,15				0,09	0,177
200	0,19	0,15	0,13				0,08	0,161
210	0,17	0,14	0,12					0,147
220	0,16	0,13	0,11					0,135

4.7 Приклад розрахунку

Для заданої на рис. 4.9 колони:

1. Підібрати поперечний переріз з умови рівності моментів інерції *(J_z=J_y),* користуючись табл. 4.3 коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження, [σ]=160 МПа.

2. Визначити відстань між з'єднувальними планками на підставі умови рівності *($\lambda_x = \lambda$)* гнучкості окремих віток між планками *(λ_x)* та колони в цілому *(λ)*.

3. Перевірити переріз колони на міцність.

4. Визначити критичну силу ($F_{кр}$), критичне напруження ($\sigma_{кр}$) та коефіцієнт запасу стійкості ($к_{ст}$).

Розв'язання.

F=850 кН, L=9 м.

Закріплення: шарнірне обпирання і жорстке затискання (рис. 4.7) при μ=0,7.

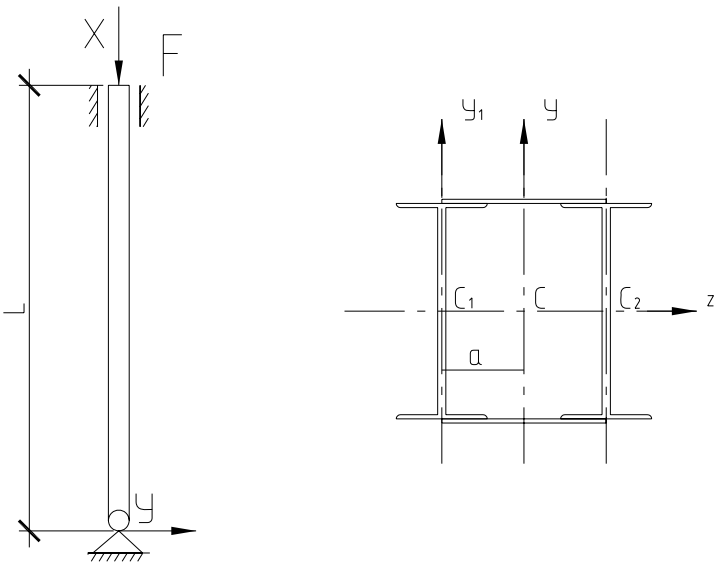


Рис. 4.9

Підберемо поперечний переріз колони $A_{пер.}$ з умови рівності моментів інерції $(J_z=J_y)$.

Умова стійкості:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \le \varphi \cdot [\sigma_{ст}], \qquad A \ge \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_{ст}]}.$$

Оскільки до нерівності входять дві невідомі величини: площа поперечного перерізу А та коефіцієнт поздовжнього згину φ, розрахунок ведемо методом послідовних наближень.

І наближення. Беремо довільне значення коефіцієнта φ=0,5, тоді

$$A_{пер} = \frac{850}{0,5 \cdot 16} = 106,25 \text{ см}^2.$$

Оскільки переріз колони складається з двох двотаврів, то

$$A_{дв} = \frac{A_{пер}}{2} = \frac{106,25}{2} = 53,125 \text{ см}^2.$$

За таблицею сортаменту добираємо двотавр (див. додаток) №33, $A_{дв.}^{табл.}=53,8$ см^2.

Визначаємо гнучкість колони

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 900}{13,5} = 46,67$$

Знаходимо коефіцієнт поздовжнього згину:

$\lambda_1 = 40,\ \varphi_1 = 0,92$;

$\lambda_2 = 50,\ \varphi_2 = 0{,}89$;

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0{,}92 + (0{,}89 - 0{,}92)\frac{46{,}67 - 40}{50 - 40} = 0{,}899.$$

Заповнюємо перший рядок таблиці результатів розрахунку.

II наближення. Беремо середнє значення коефіцієнта φ:

$$\varphi = \frac{0{,}5 + 0{,}899}{2} = 0.699.$$

Повторюємо розрахунки і заповнюємо другий рядок таблиці:

$$\varphi = 0.699,\ A_{пер} = \frac{850}{0{,}669 \cdot 16} = 79.41,\ A_{дв} = \frac{A_{пер}}{2} = \frac{79.41}{2} = 39{,}70$$

№27, $A_{дв.}^{табл.}$=40,2 см^2 , J_z=5010 см^4, i_z=11.2 см.

Визначаємо гнучкість колони

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_z} = \frac{0{,}7 \cdot 900}{11{,}2} = 56{,}25$$

Знаходимо коефіцієнт поздовжнього згину:

$\lambda_1 = 50,\ \varphi_1 = 0{,}89$;

$\lambda_2 = 60,\ \varphi_2 = 0{,}86$;

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0{,}89 + (0{,}86 - 0{,}89)\frac{56{,}25 - 50}{60 - 50} = 0.871.$$

III наближення. Беремо середнє значення коефіцієнта φ:

$$\varphi = \frac{0.699 + 0{,}871}{2} = 0.785.$$

Повторюємо розрахунки і заповнюємо третій рядок таблиці:

$$\varphi = 0.785,\ A_{пер} = \frac{850}{0.785 \cdot 16} = 67.68,\ A_{дв} = \frac{A_{пер}}{2} = \frac{67.68}{2} = 33{,}84$$

№24, $A_{дв.}^{табл.}$=34,8 см^2 , J_z=3460 см^4, i_z=9.97 см.

Визначаємо гнучкість колони

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_z} = \frac{0{,}7 \cdot 900}{9{,}97} = 63{,}19$$

Знаходимо коефіцієнт поздовжнього згину:

$\lambda_1 = 60,\ \varphi_1 = 0{,}86$;

$\lambda_2 = 70,\ \varphi_2 = 0{,}81$;

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0{,}86 + (0{,}81 - 0{,}86)\frac{63{,}19 - 60}{70 - 60} = 0.847.$$

IV наближення. Беремо середнє значення коефіцієнта φ:

$$\varphi = \frac{0.785 + 0{,}847}{2} = 0.816.$$

Повторюємо розрахунки і заповнюємо четвертий рядок таблиці:

$$\varphi = 0.816,\ A_{пер} = \frac{850}{0.816 \cdot 16} = 65.10,\ A_{дв} = \frac{A_{пер}}{2} = \frac{65.10}{2} = 32{,}55$$

Другий раз поспіль обираємо №24.

Визначаємо гнучкість колони коефіцієнта φ:

$\lambda = 63{,}19,\ \varphi(\lambda) = 0.847$.

Остаточно приймаємо:

№22в, $A_{дв.}^{табл.}$=39,5 см^2, J_z=2500 см^4, i_z=7,96 см, J_y=169 см^4, i_y=i_{min}=2.06.

Зводимо ці розрахунки до табл. 4.4.

Таблиця 4.4

φ	$A_{пер}$, см^2	$A_{дв}$, см^2	За таблицею сортаменту				λ	φ
			№ двотавра	$A_{дв.}^{табл}$, см^2	J_z, см^4	i_z, см		
0,500	106,25	53,125	33	53,8	9840	13,5	46,7	0.834
0,699	79,41	39,70	27	40,2	5010	11,2	56,3	0.871
0,785	67,68	33,84	24	34,8	3460	9,97	63,2	0.847
0,816	65,10	32,55	24	34,8	3460	9,97	63,2	0.847

Оскільки колона повинна бути однаково стійка в обох головних площинах перерізу, тобто J_z=J_y, визначаємо відстань ***a*** між осями двотаврів:

$$2J_x^{дв} = 2 \cdot \left(J_x^{дв} + a^2 \cdot A_{дв}\right),$$

$$2 \cdot 3460 = 2 \cdot (169 + a^2 \cdot 34{,}8),$$

$$a^2 = \frac{3460 + 169}{34{,}8} = 104{,}28,\ a = \sqrt{104{,}28} = 10{,}21\ см$$

Відстань між осями двотаврів дорівнює: 2***a***=20,42 см.

Визначимо відстань між з'єднувальними планками на підставі умови рівності (λ_x=λ) гнучкості окремих віток між планками (λ_x) та колони в цілому (λ). По усій довжині колони зв'яжемо двотаври планками за умови λ_x=λ, де

$\lambda = \frac{\mu l_x}{i_{min}^{дв}}$ – гнучкість окремої вітки двотавра між двома з'єднувальними планками:

$$\lambda = \frac{\mu \ell_x}{i_{min}^{да}},\ \ell_x = \frac{\lambda \cdot i_{min}^{да}}{\mu},\ \ell_x = \frac{63{,}2 \cdot 2{,}06}{0{,}7} = 231{,}78\ см$$

Оскільки відстань між планками дорівнює 232 см, а довжина колони 9 м, приймаємо кількість з'єднувальних планок:

$$n = \frac{l}{l_x} = \frac{900}{232} = 3.87 \approx 4$$

.

Перевіряємо колону на міцність:

$$\sigma = \frac{F}{A_{пер}} \leq \varphi \cdot [\sigma], \quad \sigma = \frac{F}{\varphi A_{пер}} \leq [\sigma],$$

$$\sigma = \frac{850}{0,7 \cdot (39,5 \cdot 2)} = 153,7 \text{ МПа}.$$

Визначити коефіцієнт запасу стійкості ($к_{ст}$). Оскільки гнучкість колони $\lambda=79,1<\lambda_{гр}=100$, то критичну силу визначимо за формулою Ясиньського:

$$F_{кр} = A_{кр} \cdot (a - \lambda b) = 39,5 \cdot 2 \cdot (31 - 1.14 \cdot 79.1) = 1736 \text{ кН}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості колони:

$$к_{ст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1736}{850} = 2,04 \approx 2.$$

4.8 Запитання для самоконтролю

Що називається стійкістю?
Що називається критичною силою (критичним навантаженням)?
Що таке динамічний метод?
Що таке енергетичний метод?
Що таке статичний метод?
Наведіть формулу Ейлера.
Наведіть приведену формулу Ейлера.
Наведіть формулу Ясиньського.
Опишіть порядок практичного розрахунку стиснутих стержнів.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. А. В. Дарков. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. - М.: «Высшая школа», 1975. - 654 с.

2. Н. М. Беляев. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. - М., Л.: ГИТТЛ, 1951. - 856 с.

3. Піскунов В.Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / Піскунов В. Г., Феодоренко Ю. М., Шевченко В. Ю. та ін. - К.: Вища школа. 1994. - 423 с.

4. Сопротивление материалов. / Под общ. ред. Г.С. Писаренко. – К: Вища школа. 1979. - 696 с.

5. Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів: Навч. Посібник / Чихладзе Е.Д. – Х: УкрДАЗТ. 2002. – 362 с.

6. Шутенко Л. Н. Основы теории упругости и пластичности: Уч. пособие для студентов строительных специальностей / Л. Н. Шутенко, Н. А. Засядько, А. А. Чупрынин. – Х: ХНАГХ, 2007. – 135 с.

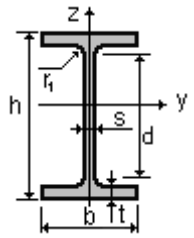
7. Опір матеріалів. Ч. 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях. Конспект лекцій / За заг. ред. В.П. Шпачука; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; – Х.: ХНАМГ, 2010.– 139 с.

8. Шутенко Л. Н. Строительная механика: Краткий курс. Раздел 3 / Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько. - Харьков: ХГАГХ, 2005. - 116 с.

9. Баженов В. А. Будівельна механіка: Електронний підручник / В. А Баженов, О. В. Шишов. – К., 2008. - 436 с.

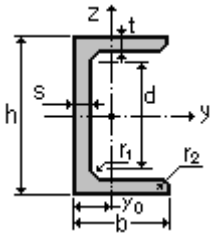
ДОДАТОК

Двотавр з нахилом полок за ДСТУ 8239-89



	h	b	s	t	r_1	r_2	A	P	I_y	W_y	i_y	S_y
	см	см	см	см	см	см	$см^2$	Т/м	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$
10	10.0	5.5	0.450	0.720	0.700	0.250	12.0	0.009	198.0	39.700	4.060	23.000
12	12.0	6.4	0.480	0.730	0.750	0.300	14.7	0.012	350.0	58.400	4.880	33.700
14	14.0	7.3	0.490	0.750	0.800	0.300	17.4	0.014	572.0	81.700	5.730	46.800
16	16.0	8.1	0.500	0.780	0.850	0.350	20.2	0.016	873.0	109.000	6.570	62.300
18	18.0	9.0	0.510	0.810	0.900	0.350	23.4	0.018	1290.0	143.000	7.420	81.400
20	20.0	10.0	0.520	0.840	0.950	0.400	26.8	0.021	1840.0	184.000	8.280	104.000
22	22.0	11.0	0.540	0.870	1.000	0.400	30.6	0.024	2550.0	232.000	9.130	131.000
24	24.0	11.5	0.560	0.950	1.050	0.400	34.8	0.027	3460.0	289.000	9.970	163.000
27	27.0	12.5	0.600	0.980	1.100	0.450	40.2	0.032	5010.0	371.000	11.200	210.000
30	30.0	13.5	0.650	1.020	1.200	0.500	46.5	0.037	7080.0	472.000	12.300	268.000
33	33.0	14.0	0.700	1.120	1.300	0.500	53.8	0.042	9840.0	597.000	13.500	339.000
36	36.0	14.5	0.750	1.230	1.400	0.600	61.9	0.049	13380	743.000	14.700	423.000
40	40.0	15.5	0.830	1.300	1.500	0.600	72.600	0.057	19062	953.000	16.200	545.000
45	45.0	16.0	0.900	1.420	1.600	0.700	84.700	0.067	27696	1231.00	18.100	708.000
50	50.0	17.0	1.000	1.520	1.700	0.700	100.00	0.078	39727	1589.00	19.900	919.000
55	55.0	18.0	1.100	1.650	1.800	0.700	118.00	0.093	55962	2035.00	21.800	1181.00
60	60.0	19.0	1.200	1.780	2.000	0.800	138.00	0.108	76806	2560.00	23.600	1491.00

Швелер з нахилом полок за ДСТУ 8240-89



	h	b	s	t	r_1	r_2	A	P	I_y	W_y	i_y	S_y	y_o
	см	см	см	см	см	см	$см^2$	Т/м	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$	см
8	8.00	4.0	0.45	0.74	0.65	0.25	8.98	0.007	89.4	22.4	3.160	23.300	1.310
10	10.0	4.6	0.45	0.76	0.70	0.30	10.9	0.009	174	34.8	3.990	20.400	1.440
12	12.0	5.2	0.48	0.78	0.75	0.30	13.3	0.010	304	50.6	4.780	29.600	1.540
14	14.0	5.8	0.49	0.81	0.80	0.30	15.6	0.012	491	70.2	5.600	40.800	1.670
16	16.0	6.4	0.50	0.84	0.85	0.35	18.1	0.014	747	93.4	6.420	54.100	1.800
18	18.0	7.0	0.51	0.87	0.90	0.35	20.7	0.016	1090	121.0	7.240	69.800	1.940
20	20.0	7.6	0.52	0.90	0.95	0.40	23.4	0.018	1520	152.0	8.070	87.800	2.070
22	22.0	8.2	0.54	0.95	1.00	0.40	26.7	0.021	2110	192.0	8.890	110.000	2.210
24	24.0	9.0	0.56	1.00	1.05	0.40	30.6	0.024	2900	242.0	9.730	139.000	2.420
27	27.0	9.5	0.60	1.05	1.10	0.45	35.2	0.028	4160	308.0	10.900	178.000	2.470
30	30.0	10.0	0.65	1.10	1.20	0.50	40.5	0.032	5810	387.0	12.000	224.000	2.520
40	40.0	11.5	0.80	1.35	1.50	0.60	61.5	0.048	15220	761.0	15.700	444.000	2.750

ЗМІСТ

стор.

ВСТУП 3

1. ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ЗГИНІ 4

1.1. Прогін та кут повороту перерізу 4

1.2. Метод початкових параметрів ……..... 7

1.3. Узагальнені теореми пружних систем 12

1.3.1. Дійсна і можлива робота зовнішніх сил 13

1.3.2. Узагальнені сили і узагальнені переміщення 15

1.3.3. Робота внутрішніх сил 18

1.3.4. Теореми взаємності 20

1.4. Метод Мора 22

1.5. Правило Верещагіна ……...…… 26

1.6. Приклад розрахунку ….....…….....……..…… 26

1.7. Запитання для самоконтролю ……..…..…… 31

2. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ БАЛКИ 33

2.1. Загальна схема розв’язання ……..……..……..... 33

2.2. Рівняння трьох моментів …….. 34

2.3. Балки на пружної основі 39

2.4. Приклади розрахунків ……..... 42

2.5. Запитання для самоконтролю. ……..... 48

3. СКЛАДНИЙ ОПІР …..... 49

3.1. Напруженій стан у точки ……..…… 49

3.2. Теорії міцності …….....…… 55

3.3. Поняття про складні деформації ….....……..…. 58

3.4. Косий згин …….....…..……..…. 59

3.5. Позацентровий стиск (розтяг) ……..……..…. 62

3.6. Згин та кручення брусу осесиметричного
поперечного перерізу 66

3.7. Приклад розрахунку 68
3.8. Запитання для самоконтролю 71
4. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ 72
4.1. Основні поняття ……..……..…….. 72
4.2. Методи розрахунку на стійкість ……...……..… 75
4.3. Формула Ейлера ……....……..…….. 76
4.4. Приведена формула Ейлера ….……. 78
4.5. Критичні напруження. Стійкість за межею пружності .. 79
4.6. Практичний розрахунок стиснутих стержнів ……..… 81
4.7. Приклад розрахунку ……..……....……. 83
4.8. Запитання для самоконтролю ….……. 87
СПИСОК ДЖЕРЕЛ 88
ДОДАТОК 89

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович,
АНДРІЄВСЬКА Людмила Станіславівна,
СЕРЕДА Наталія Василівна,
ЧУПРИНІН Олександр Олексійович

Опір матеріалів
Частина 2
Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при складних навантаженнях

Конспект лекцій
з дисциплін «Опір матеріалів», «Опір матеріалів та будівельна механіка», «Основи теорії споруд»
(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.060102 «Архітектура», 6.060103 «Гідротехніка (Водні ресурси)»).

Відповідальний за випуск *О. О. Чупринін*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *О. О. Чупринін*

План 2012, поз. 70 Л

Підп. до друку 07.05.2012 Формат 60*84 1/16
Друк на ризографі Ум.-друк. арк. 2,8
Тираж 50 пр. Зам. №
Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК № 4705 від 28.03.2014 р.