

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

„Метод скінченних різниць у плоскій задачі теорії пружності”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для практичних занять, самостійної роботи і виконання контрольних і
розрахунково-графічних завдань із “Опору матеріалів (спецкурс) і основи теорії
пружності та пластичності”

(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання
напряму підготовки 6.060101 - «Будівництво»
та слухачів другої вищої освіти
спеціальності 7.092101 (7.06010101) «Промислове та цивільне будівництво»)

„Метод скінченних різниць у плоскій задачі теорії пружності” : Методичні вказівки і завдання до практичних робіт, самостійної роботи і виконання розрахунково-графічного завдання із “Опору матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності та пластичності” (для студентів 3 курсу денної та заочної форм навчання напряму підготовки 6.060101 - «Будівництво» та слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.092101 (7.06010101) «Промислове та цивільне будівництво») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: М. А. Засядько, О. О. Чупринін – Х. : ХНУМГ, 2014. – 24 с.

Укладачі: М. А. Засядько, О. О. Чупринін

Рецензент: завідувач кафедри будівельних конструкцій
д.т.н., проф. Г. А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 7 від 22.02.12.

1. ВСТУП

Ці методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів при підготовці до практичних занять і виконання розрахунково-графічного завдання. Вони містять теоретичні положення та завдання і приклад його виконання. Призначені для студентів денної та заочної форми навчання.

Дисципліна «Основи теорії пружності та пластичності» вивчається студентами після засвоєння курсу з опору матеріалів, де розглядають дію сил на пружні тіла і визначають виникаючі при цьому напруження, деформації та переміщення.

На відміну від опору матеріалів, теорія пружності підходить до розв'язання задач більш точними і загальними методами. Користуючись більш складним математичним апаратом, теорія пружності вирішує важливі в практичному відношенні задачі, що не можуть бути розв'язані методами опору матеріалів.

В будівельній практиці часто зустрічаються призматичні, або циліндричні тіла, рівномірно навантажені лише вздовж бічних поверхонь. До них відносяться масивні підпірні стінки, стінові панелі будівель та ін.

Напруженій стан таких конструкцій описується ідентичними рівняннями, що дозволяє віднести ці задачі до однієї – плоскої задачі теорії пружності.

Вивчення плоскої задачі є важливим для інженерів-будівельників. За цією темою передбачається розв'язання розрахунково-графічного завдання.

Перш ніж приступити до виконання роботи, необхідно ознайомитись з теоретичним матеріалом, викладеним у посібнику [1], глава VI, а також наведеним у п. 2 цих методичних вказівок.

2. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Плоска задача теорії пружності об'єднує дві задачі: *плоску деформацію*, коли деформації в тілі розподіляються за законом площини, та *узагальнений плоский напружений стан*, коли такому закону задовольняють напруження. Це об'єднання пояснюється тим, що розрахункові рівняння обох задач ідентичні. При розв'язанні плоскої задачі в напруженнях з введенням *функції напружень Ері* вона зводиться до пошуку бігармонічної функції напружень $\varphi(x, y)$ при виконанні граничних умов (умов на контурі).

Бігармонічною називається функція, що задовольняє рівнянню

$$\nabla^4 \varphi = 0.$$

Ліва частина цього рівняння читається як «набла чотири φ » і називається подвійним оператором Лапласа над функцією φ . У розгорнутому вигляді рівняння має такий вигляд:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

Граничні умови задачі також виражаються через функцію напружень:

$$\begin{aligned} X_\nu &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) m; \\ Y_\nu &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m, \end{aligned} \quad (2)$$

де X_ν, Y_ν – складові навантаження відповідно вздовж осей x, y на поверхні пластинки з нормаллю ν ;

X, Y – складові об'ємного навантаження;

l, m – направляючі косинуси нормалі до поверхні ν :

$$l = \cos(\nu, x); \quad m = \cos(\nu, y).$$

Після визначення функції φ з (1) при виконанні граничних умов (2) напруження можна знайти із співвідношень:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X \cdot y - Y \cdot x. \end{aligned} \quad (3)$$

У цій роботі розглядається прямокутна пластинка, завантажена тільки на контурі рівномірно за товщиною пластинки t . Навантаження діє паралельно її основам. Це обумовлює роботу пластинки, що відповідає узагальненому плоскому напруженому стану (рис. 1).

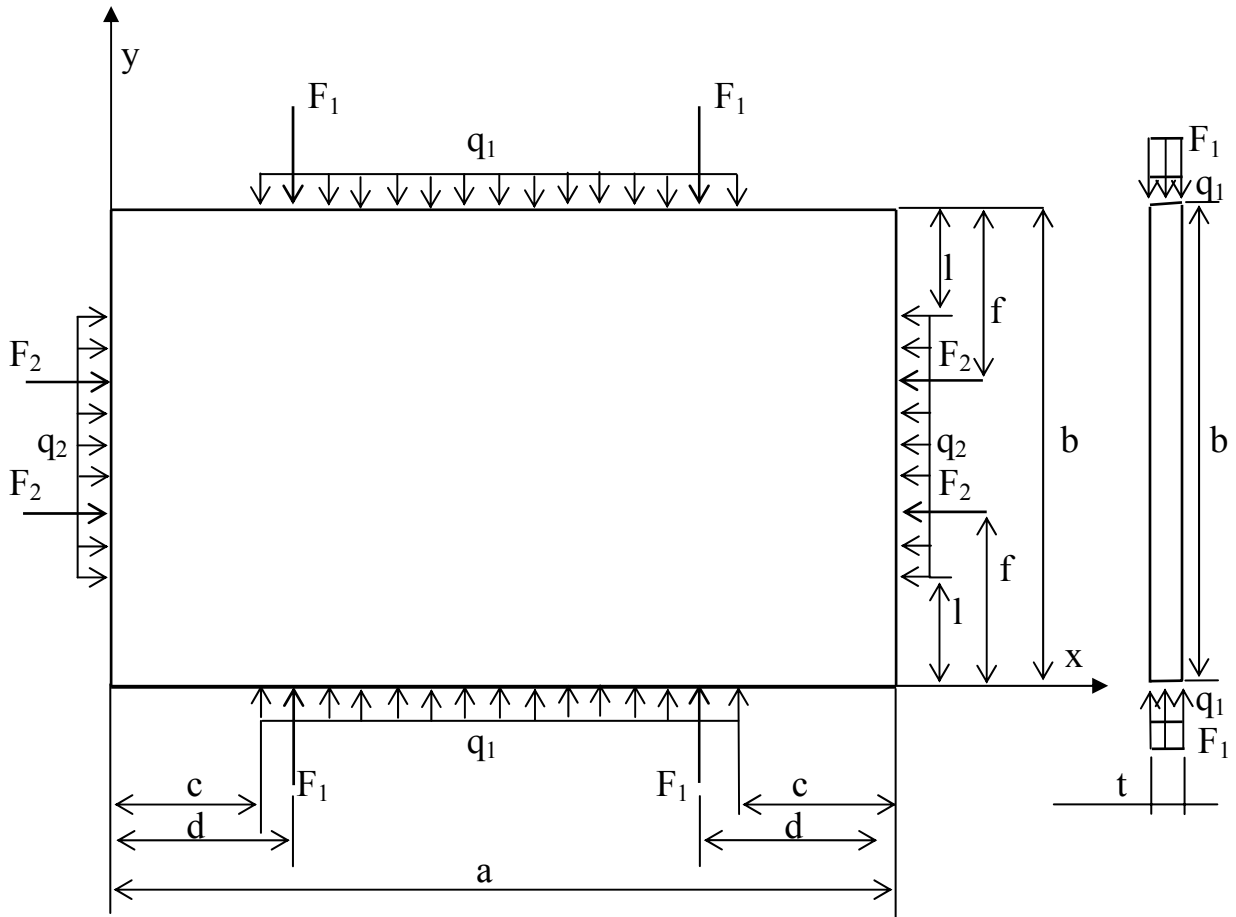


Рис. 1.

Будемо вважати, що в заданій пластинці об'ємне навантаження відсутнє, тобто $X = 0, Y = 0$. Края пластинки паралельні осям координат, отже на краях, паралельних осі x , маємо $l = 0, m = \pm 1$, а на краях, паралельних осі y , $l = \pm 1, m = 0$.

Для розв'язання задачі в цій роботі застосовується **метод скінченних різниць (метод сіток)**. Цей метод базується на заміні безперервної функції рядом її значень у фіксованих точках.

При достатньо малій відстані між точками похідні функції напружень φ можна наближено виразити через значення її у цих точках. Завдяки цьому диференціальне рівняння (1), (3) задачі замінюється системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функції у заданих точках. Відповідно перетворюються і граничні умови.

Розбиваючи контур пластинки сіткою з однаковими розмірами h вічок уздовж осей x та y (рис. 2) запишемо похідні функції φ в скінченних різницях для точки з номером 0:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 &= (\varphi_1 - \varphi_3)/(2h); & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 &= (\varphi_2 - \varphi_4)/(2h); \\
\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 &= (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3)/h^2; & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 &= (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4)/h^2; \\
\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 &= (\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12})/(4h^2); & & (4) \\
\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 &= (\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9)/h^4; \\
\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 &= (\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11})/h^4; \\
\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12})]/h^4.
\end{aligned}$$

З урахуванням цих виразів можна записати диференціальне рівняння (1) для точки з номером 0 у скінченних різницях. Після перетворень це рівняння набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \\
+ (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0.
\end{aligned} \quad (5)$$

Такі рівняння складають для усіх внутрішніх точок сітки. При цьому в них увійдуть також значення функцій напружень в точках на контурі та поза контуром на відстані одного кроку h сітки.

Для визначення значення функції напружень на контурі та поза контуром використовують балочну аналогію. За цією аналогією значення функції на контурі приймають як згинаючий момент у точці балки, утвореної з відповідної межі контуру пластинки.

Навантаження балки беруть тим самим, що й на контурі. Для повного визначення значень φ на контурі та поза контуром розглядають контур пластинки як статично визначну раму. За умови симетрії навантаження в такій рамі можна ставити шарніри в усіх чотирьох кутах (рис. 3). У такому випадку кожен стержень рами працює на згин як окрема балка на двох шарнірних опорах, отже отримуємо:

$$\varphi_e = M_e; \quad \varphi_l = M_l. \quad (6)$$

Для визначення функцій напружень поза контуром використовують співвідношення, які зокрема для точок a та k (рис. 2) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\varphi_a &= \varphi_c + 2hN_e, \\
\varphi_k &= \varphi_m + 2hN_l.
\end{aligned} \quad (7)$$

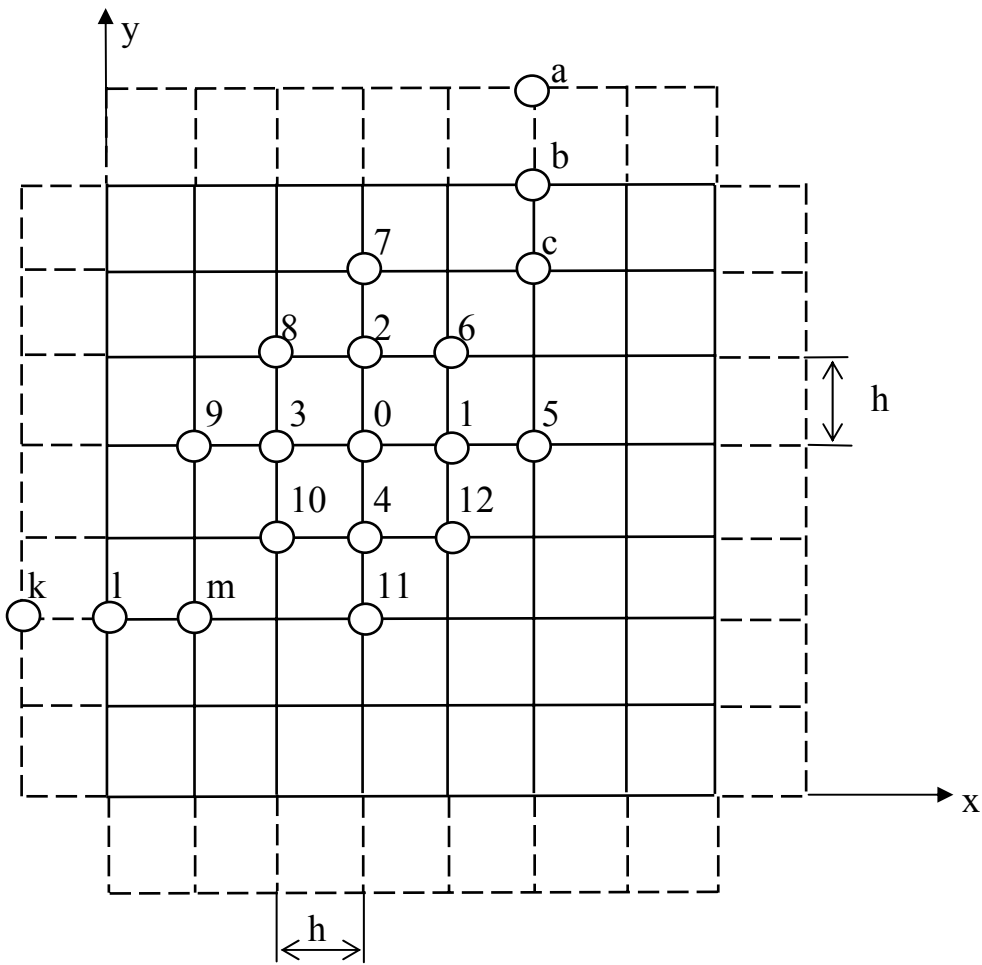


Рис. 2.

У формулах (6), (7) M_v , M_l та N_v , N_l є значеннями відповідно згинаючих моментів та поздовжніх сил у перерізах v , l рами (рис. 3).

Після підстановки співвідношень (6), (7) у рівняння (5) одержимо повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функції напружень у внутрішніх точках контуру пластинки.

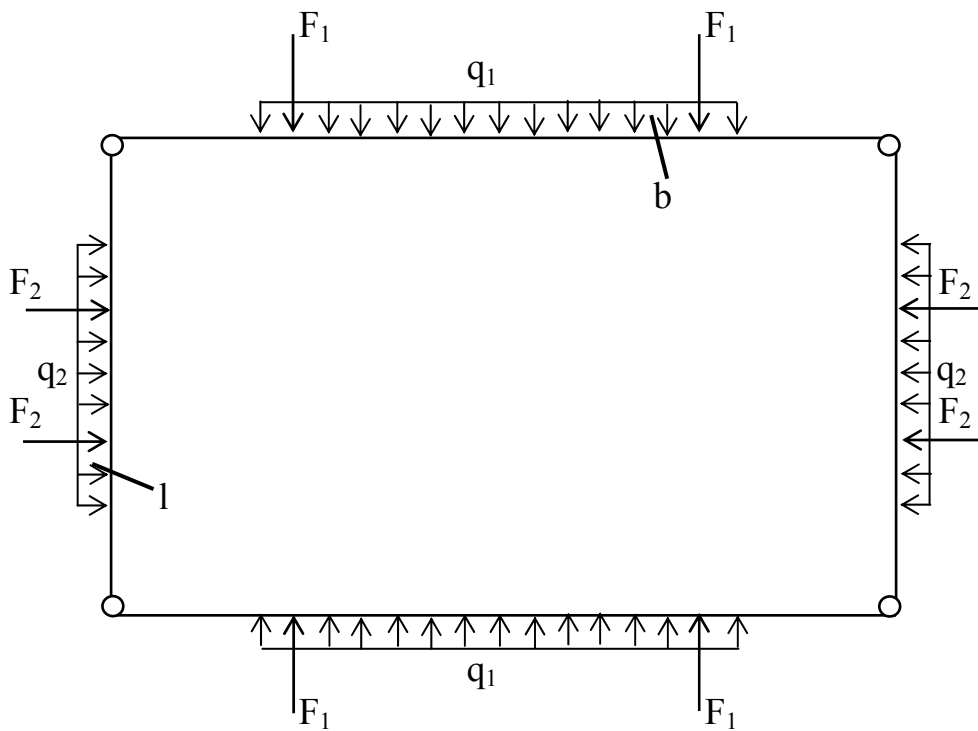


Рис. 3

Після розв'язання цієї системи рівнянь напруження обчислюють за формулами (3), записаними у скінченних різницях. Зокрема, в нашому випадку для точки з номером 0 маємо:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0 = (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4) / h^2; \\
 (\sigma_y)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 = (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3) / h^2; \\
 (\tau_{xy})_0 &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 = -(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}) / (4h^2).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

3. ЗАВДАННЯ ДО РОБОТИ

Вихідні дані до виконання роботи беруть з таблиці 1. і рис. 1 за вказівками викладача.

Таблиця 1

I група даних							II група даних				
№ п/п	a, м	a:b	c/a	l/b	q ₁ кН/м ²	q ₂ кН/м ²	№ п/п	d/a	f/b	F ₁ кН/м	F ₂ кН/м
1	2	4:4	0	0,5	0	2	1	0	0,5	3	3
2	3	4:5	0,12	0,48	2	0	2	0,2	0,4	3	2
3	4	5:4	0,14	0,46	0	3	3	0,3	0,3	2	3
4	5	5:5	0,16	0,44	3	0	4	0,4	0,2	4	4
5	6	4:4	0,18	0,42	0	4	5	0,5	0,1	4	3
6	7	4:5	0,20	0,40	4	0	6	0,2	0	3	4
7	8	5:4	0,22	0,38	0	5	7	0,3	0,5	4	2
8	9	5:5	0,24	0,36	5	0	8	0,4	0,4	2	4
9	10	4:4	0,26	0,34	0	6	9	0,5	0,3	5	5
0	11	4:5	0,28	0,32	6	0	0	0	0,2	5	6

Для пластинки (рис. 1) необхідно:

- відповідно до заданих у таблиці 1 співвідношень обчислити всі розміри;
- накреслити пластинку в масштабі;
- розбити пластинку сіткою відповідно до заданого співвідношення $a : b$ і пронумерувати вузли з урахуванням симетрії, починаючи з внутрішніх і закінчуючи позаконтурними;
- скласти диференціальні рівняння у скінченних різницях для внутрішніх вузлів чверті сітки й звести подібні в них з урахуванням симетрії;
- визначити функції напружень у контурних та позаконтурних вузлах сітки і підставити їх значення у рівняння;
- розв'язати рівняння з використанням ПЕОМ відносно значень функції напружень у внутрішніх вузлах сітки;
- обчислити напруження у вузлах сітки й побудувати їх епюри для пластинки;

Студент отримує максимальну за даний елемент контролю (Виконання РГЗ) оцінку, якщо завдання виконане у відведений строк (2 тижні з моменту видачі завдання), з використанням комп'ютерної техніки, акуратно оформлене, містить аналіз отриманих результатів. У випадку виконання РГЗ без використання комп'ютерної техніки або затримки виконання на 2 тижня (з використанням комп'ютерної техніки) студент отримує 80% від максимальної оцінки. У випадку виконання РГЗ з затримкою більш ніж 2 тижня студент отримує 60 % від максимальної оцінки.

4. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень у пластині, наведеній на рис. 1 при вихідних даних таблиці 2.

Таблиця 2

a, м	a:b	c/a	l/b	q ₁ кН/м ²	q ₂ кН/м ²	d/a	f/b	F ₁ кН/м	F ₂ кН/м
2,5	5:4	0,22	0	8	4	0,3	0,5	10	3

Розв'язання.

Схема пластинки і навантаження відповідно даних таблиці 2 наведена на рис. 4. Відповідно до завдання ($a : b = 5 : 4$) розбиваємо пластинку сіткою з однаковим кроком уздовж осей x та y (рис. 5). Для цього необхідно довжину a пластинки поділити на задану у співвідношенні $a:b$ кількості кроків: $h = \frac{2,5}{5} = 0,5$ м. Пунктиром доповнюємо сітку на один крок від контуру. Вузли сітки нумеруємо, враховуючи наявність двох осей симетрії.

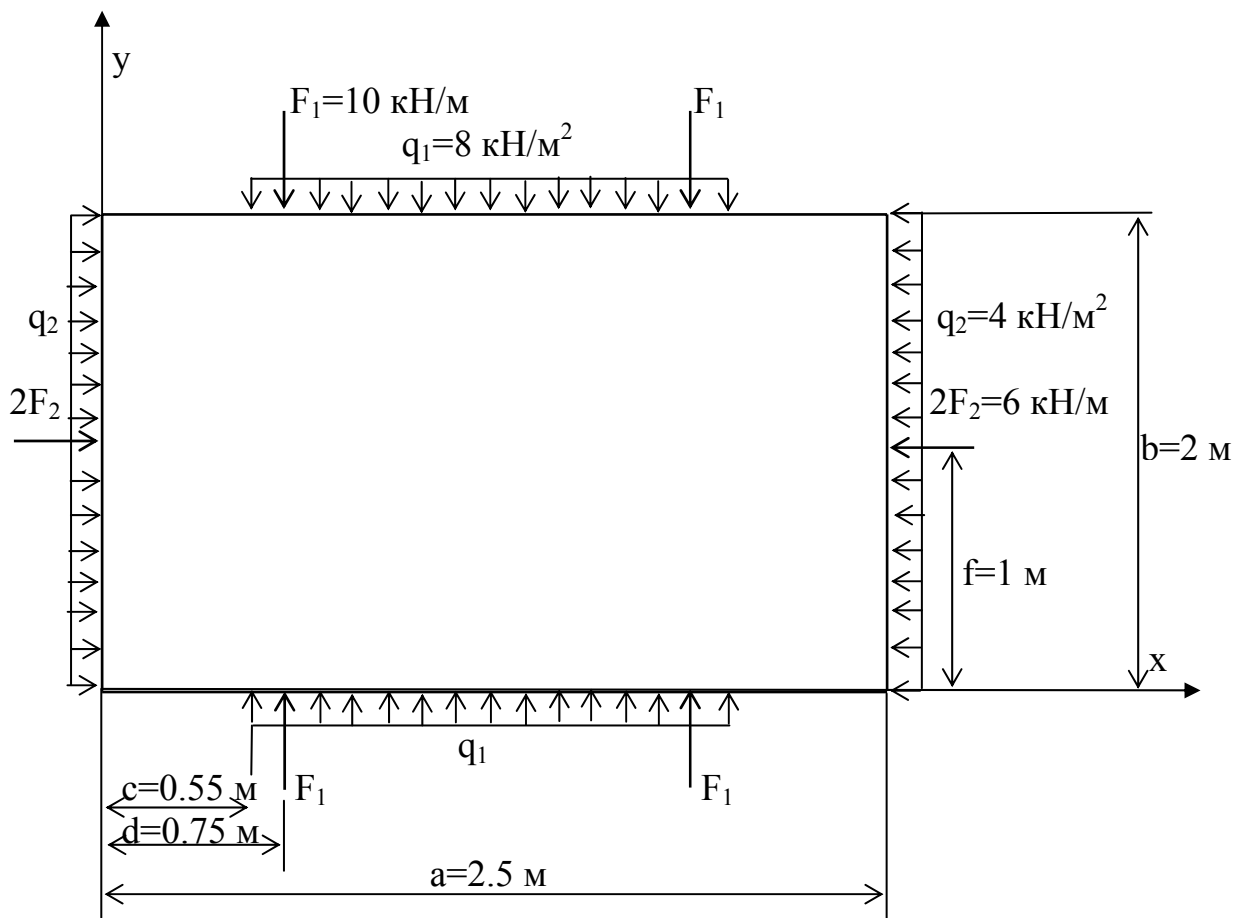


Рис. 4

Враховуючи симетрію, складаємо рівняння (5) для кожної внутрішньої точки у чверті контуру за схемою, наведеною на рис. 6.

Ця схема показує, з яким множником необхідно брати значення функції φ для точки, відповідно розташованої відносно точки, в якій записується рівняння (5).

Отже маємо:

для т. 1: $20\varphi_1 - 8(\varphi_2 + \varphi_3' + \varphi_5 + \varphi_3) + 2(\varphi_4' + \varphi_6' + \varphi_6 + \varphi_4) + (\varphi_2'' + \varphi_8' + \varphi_{10} + \varphi_8) = 0;$

для т. 2: $20\varphi_2 - 8(\varphi_2'' + \varphi_4' + \varphi_1 + \varphi_4) + 2(\varphi_4''' + \varphi_3' + \varphi_3 + \varphi_4'') + (\varphi_1'' + \varphi_9' + \varphi_5 + \varphi_9) = 0;$

для т. 3: $20\varphi_3 - 8(\varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_8) + 2(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9) + (\varphi_4'' + \varphi_3' + \varphi_{11} + \varphi_{14}) = 0;$

для т. 4: $20\varphi_4 - 8(\varphi_4'' + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_9) + 2(\varphi_2'' + \varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_9'') + (\varphi_3'' + \varphi_4' + \varphi_6 + \varphi_{15}) = 0.$

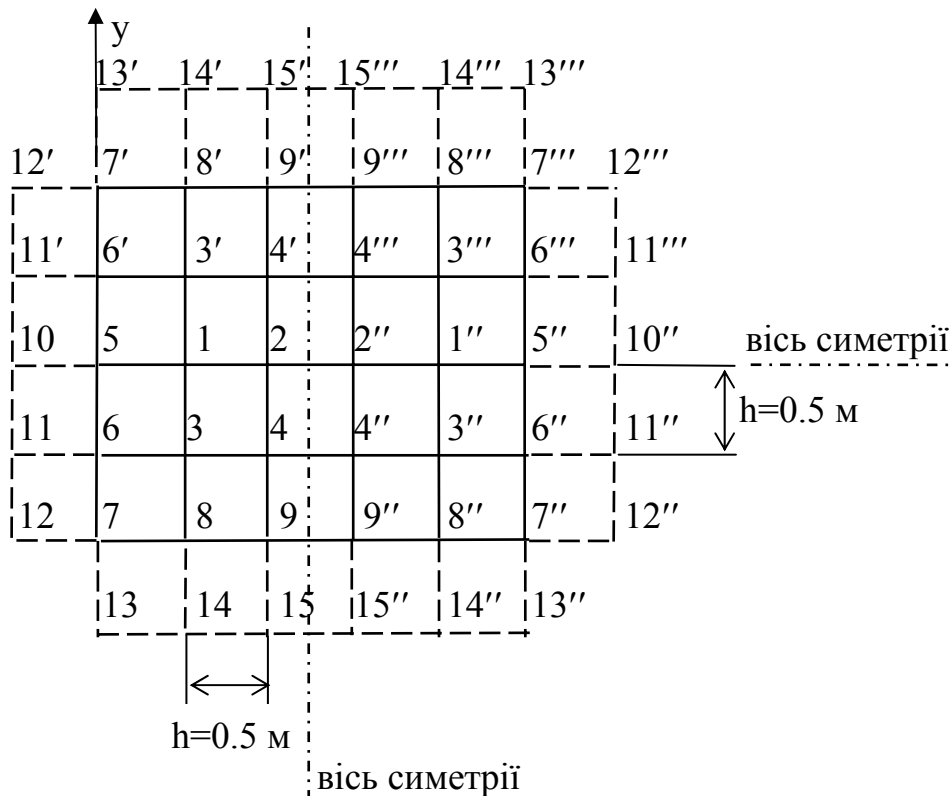


Рис. 5

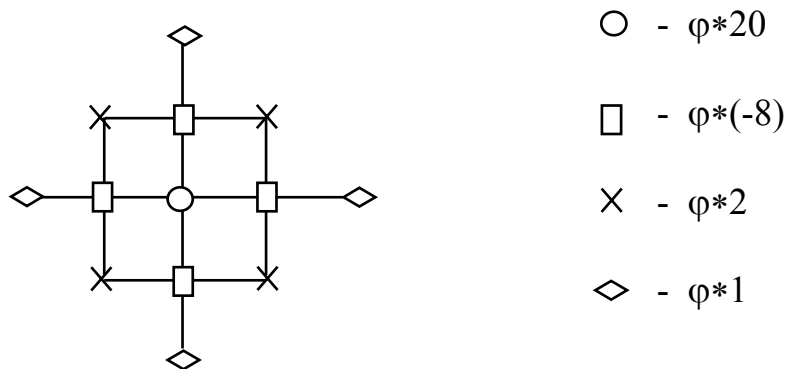


Рис. 6

Враховуючи, що в симетричних точках значення функції напружень однакові ($\varphi_i = \varphi_{i'} = \varphi_{i''} = \varphi_{i'''}$), одержуємо:

$$\begin{aligned}
 20\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 + \varphi_{10} &= 0; \\
 -7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 &= 0; \\
 -8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 21\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_{14} &= 0; \\
 2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 13\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 + \varphi_{15} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Утворюємо раму (рис. 7) з осями, що відповідають контуру рами і будуємо для неї епюри згинаючих моментів M і поздовжніх сил N від заданого на контурі навантаження (рис. 8).

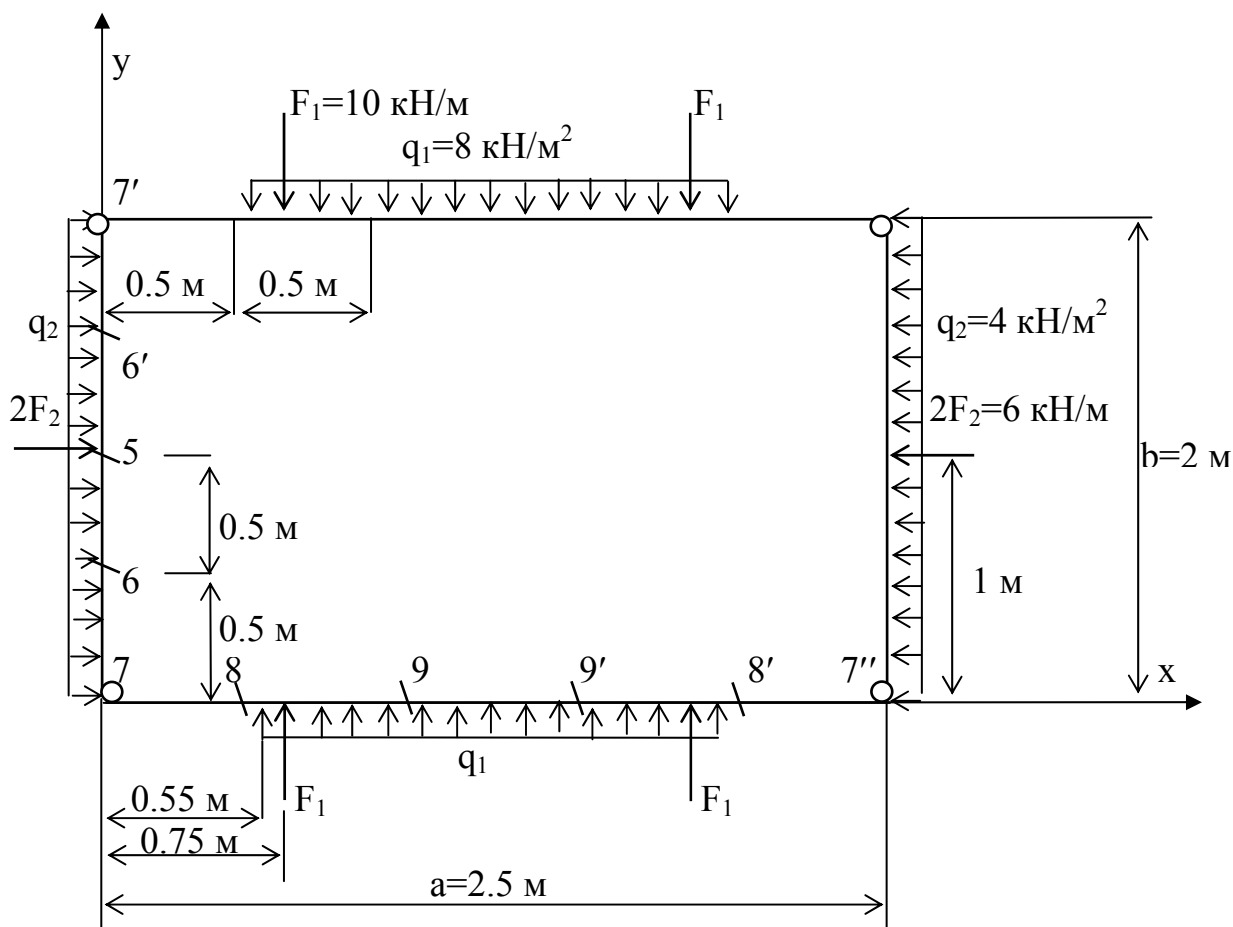


Рис. 7

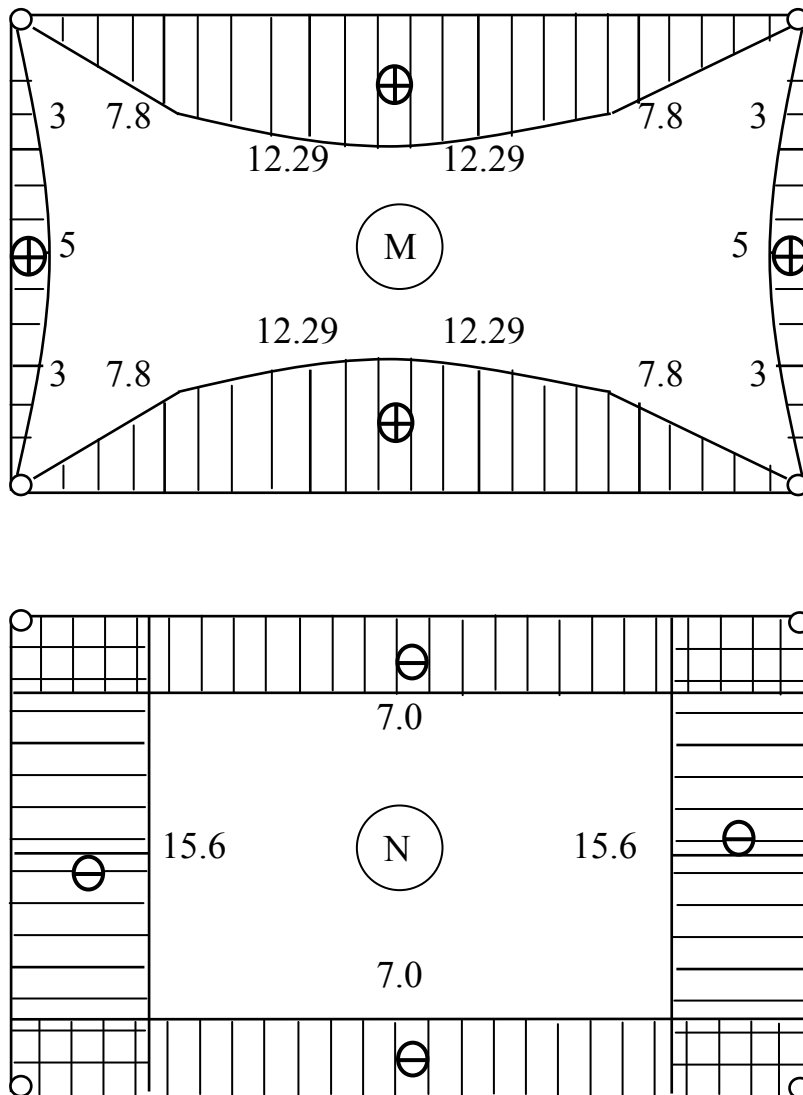


Рис. 8

Для визначення згинаючих моментів кожний стержень рами розглянемо окремо як балку на двох шарнірних опорах (рис. 9). Поздовжні сили в стержнях рами дорівнюють відповідним реакціям балок.

Визначаємо функції напружень у точках поза контуром. Для цього використовуємо співвідношення (7):

$$\begin{aligned}
\varphi_{10} &= \varphi_1 + 2h \cdot N_5 = \varphi_1 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-15,6) = \varphi_1 - 15,6; \\
\varphi_{11} &= \varphi_3 + 2h \cdot N_6 = \varphi_3 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-15,6) = \varphi_3 - 15,6; \\
\varphi_{14} &= \varphi_3 + 2h \cdot N_8 = \varphi_3 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-7) = \varphi_3 - 7; \\
\varphi_{15} &= \varphi_4 + 2h \cdot N_9 = \varphi_4 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-7) = \varphi_4 - 7.
\end{aligned}
\tag{10}$$

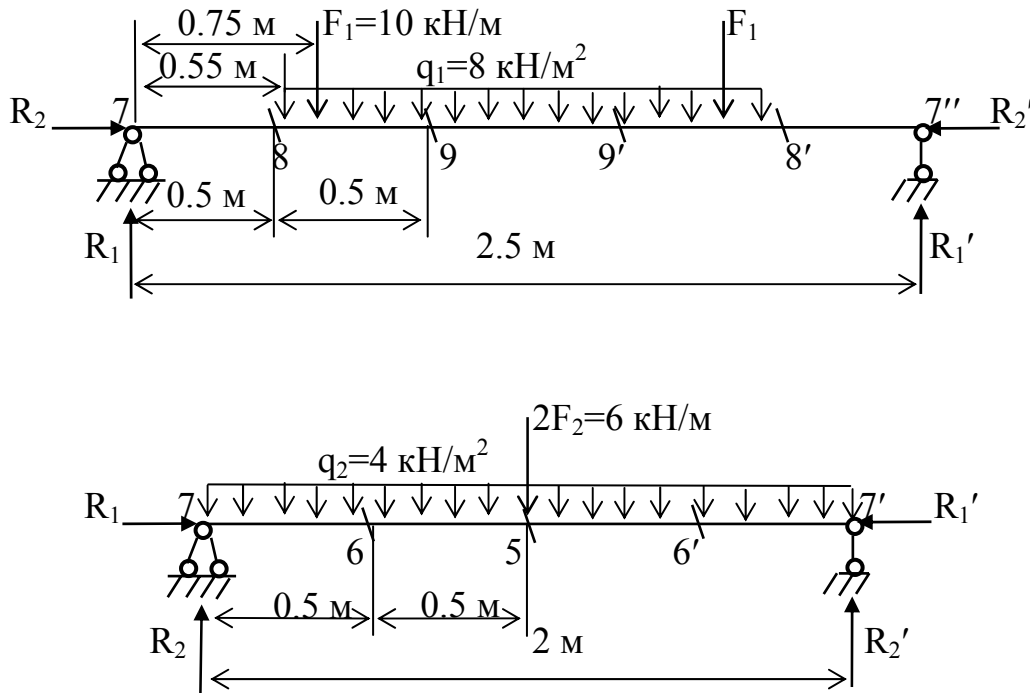


Рис. 9

Підставляючи ці співвідношення у рівняння (9), після зведення подібних одержуємо:

$$\begin{aligned}
21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 - 15,6 &= 0; \\
-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 &= 0; \\
-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 - 22,6 &= 0; \\
2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 - 7 &= 0.
\end{aligned}
\tag{11}$$

Значення функції напружень у точках на контурі визначаємо за рівностями (6):

$$\begin{aligned}
\varphi_5 &= M_5 = 5,0; \\
\varphi_6 &= M_6 = 3,0; \\
\varphi_7 &= M_7 = 0; \\
\varphi_8 &= M_8 = 7,8; \\
\varphi_9 &= M_9 = 12,29.
\end{aligned}
\tag{12}$$

З урахуванням цих значень рівняння скінченних різниць набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 28 &= 0; \\
 -7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + 29,58 &= 0; \\
 -8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 - 74,42 &= 0; \\
 2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 - 62,14 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь (13) з використанням ПЕОМ. Розрахунки виконуються у програмі MS Excel пакету MS Office, або OpenOffice.org Calc пакету OpenOffice.org.

Для розв'язання системи алгебраїчних рівнянь використовується метод, згідно з яким рівняння записуються у матричній формі:

$$[A]*[X] = [B], \tag{14}$$

де $[A]$ – квадратна матриця коефіцієнтів при невідомих значеннях функції напружень в точках 1-4,

$[X]$ – матриця-стовпець невідомих,

$[B]$ - матриця-стовпець правих частин алгебраїчної системи рівнянь,

Матрична форма запису системи рівнянь (13) набуде вигляду:

$$\begin{bmatrix} 21 & -7 & -16 & 4 \\ -7 & 12 & 4 & -12 \\ -8 & 2 & 23 & -7 \\ 2 & -6 & -7 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -29.58 \\ 74.42 \\ 62.14 \end{bmatrix}$$

Якщо обидві частини рівняння (14) помножити зліва на обернену матрицю $[A]^{-1}$, отримаємо розв'язок:

$$[X] = [A]^{-1} * [B]. \tag{15}$$

Таким чином, для отримання розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (15) необхідно:

1) сформувати матрицю коефіцієнтів $[A]$ і матрицю-стовпець правих частин $[B]$;

2) обчислити обернену матрицю $[A]^{-1}$;

3) отримати матрицю-стовпець шуканих значень функцій напружень в точках $[X]$ як результат добутку оберненої матриці $[A]^{-1}$ на матрицю-стовпець правих частин $[B]$.

Це можна здійснити наступним чином:

- у комірки A1-D4 ввести значення матриці коефіцієнтів $[A]$;
- у комірки F1-F4 ввести значення матриці-стовпця правих частин $[B]$;
- встановити курсор на комірку A6, з якої буде починатись обернена матриця і клацнути лівою кнопкою миші;
- клацнути на іконці "fx" у стрічці формул, по якій викликається Майстер функцій;
- у вікні Майстра функцій вибрати у полі "Категорія" значення "Массив", у полі "Функции" відмітити функцію "INVERSE", яка обчислює обернену матрицю, і клацнути по кнопці "Далее";

- у центральній частині вікна Майстра функцій з'явиться поле, у яке треба ввести діапазон комірок початкової матриці [A]. Для цього можна клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч даного поля (вона мінімізує розміри вікна Майстра функцій), помітити мишею або клавішами зі стрілками при натиснутій клавіші "Shift" комірки A1-D4 матриці коефіцієнтів, знов клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч поля (вона максимізує розміри вікна Майстра функцій);
- клацнути по кнопці "ОК" Майстра функцій. У комірках A6-D9 з'являться коефіцієнти оберненої матриці $[A]^{-1}$;
- встановити курсор на комірку F6, з якої буде починатись матриця-стовпець шуканих значень функцій напружень;
- клацнути на іконці "f_x" у стрічці формул, по якій викликається Майстер функцій;
- у вікні Майстра функцій вибрати у полі "Категория" значення "Массив", у полі "Функции" відмітити функцію "MMULT", яка обчислює добуток двох матриць, і клацнути по кнопці "Далее";
- у центральній частині вікна Майстра функцій з'являться два полі, у перше з яких треба ввести діапазон комірок оберненої матриці $[A]^{-1}$: A6–D9, а у друге - діапазон комірок матриці-стовпця правих частин [B]: F1–F4. Для цього потрібно послідовно у кожному з двох полів: клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч даного поля (вона мінімізує розміри вікна Майстра функцій), помітити мишею або клавішами зі стрілками при натиснутій клавіші "Shift" потрібні комірки, знов клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч поля (вона максимізує розміри вікна Майстра функцій);
- клацнути по кнопці "ОК" Майстра функцій. У комірках F6-F9 з'являться результати розрахунків шуканих значень функцій напружень.

В результаті одержимо наступні значення функції напружень в точках 1-4:

$$\varphi_1 = 11,60; \quad \varphi_2 = 15,42; \quad \varphi_3 = 10,37; \quad \varphi_4 = 14,58.$$

Далі обчислюємо значення φ у точках поза контуром, використовуючи формули (10):

$$\varphi_{10} = 11,60 - 15,6 = -4,0;$$

$$\varphi_{11} = 10,37 - 15,6 = -5,23;$$

$$\varphi_{14} = 10,37 - 7 = 3,37$$

$$\varphi_{15} = 14,58 - 7 = 7,58;$$

$$\varphi_{13} = \varphi_6 + 2hN_7 = 3 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-7) = -4;$$

$$\varphi_{12} = \varphi_8 + 2hN_7 = 7,8 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-15,6) = -7,8.$$

Тепер можна перейти до визначення нормальних і дотичних напружень у кПа за формулами (8):

$$(\sigma_x)_1 = (\varphi_{3'} - 2\varphi_1 + \varphi_3) / h^2 = (10,37 - 2 \cdot 11,6 + 10,37) \cdot 4 = -9,84;$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_x)_2 &= (\varphi_{4'} - 2\varphi_2 + \varphi_4) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 15,42 + 14,58) \cdot 4 = -6,72; \\
(\sigma_x)_3 &= (\varphi_1 - 2\varphi_3 + \varphi_8) / h^2 = (11,6 - 2 \cdot 10,37 + 7,8) \cdot 4 = -5,36; \\
(\sigma_x)_4 &= (\varphi_2 - 2\varphi_4 + \varphi_9) / h^2 = (15,42 - 2 \cdot 14,58 + 12,29) \cdot 4 = -5,80; \\
(\sigma_x)_5 &= (\varphi_{6'} - 2\varphi_5 + \varphi_6) / h^2 = (3 - 2 \cdot 5 + 3) \cdot 4 = -16,0; \\
(\sigma_x)_6 &= (\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7) / h^2 = (5 - 2 \cdot 3 + 0) \cdot 4 = -4,0; \\
(\sigma_x)_7 &= (\varphi_6 - 2\varphi_7 + \varphi_{13}) / h^2 = (3 - 2 \cdot 0 - 4) \cdot 4 = -4,0; \\
(\sigma_x)_8 &= (\varphi_3 - 2\varphi_8 + \varphi_{14}) / h^2 = (10,37 - 2 \cdot 7,8 + 3,37) \cdot 4 = -7,44; \\
(\sigma_x)_9 &= (\varphi_4 - 2\varphi_9 + \varphi_{15}) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 12,29 + 7,58) \cdot 4 = -9,68.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_y)_1 &= (\varphi_5 - 2\varphi_1 + \varphi_2) / h^2 = (5 - 2 \cdot 11,6 + 15,42) \cdot 4 = -11,12; \\
(\sigma_y)_2 &= (\varphi_{2''} - 2\varphi_2 + \varphi_1) / h^2 = (15,42 - 2 \cdot 15,42 + 11,6) \cdot 4 = -15,28; \\
(\sigma_y)_3 &= (\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_6) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 10,37 + 3) \cdot 4 = -12,64; \\
(\sigma_y)_4 &= (\varphi_{4''} - 2\varphi_4 + \varphi_3) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 14,58 + 10,37) \cdot 4 = -16,84; \\
(\sigma_y)_5 &= (\varphi_1 - 2\varphi_5 + \varphi_{10}) / h^2 = (11,6 - 2 \cdot 5 - 4) \cdot 4 = -9,6; \\
(\sigma_y)_6 &= (\varphi_3 - 2\varphi_6 + \varphi_{11}) / h^2 = (10,37 - 2 \cdot 3 - 5,23) \cdot 4 = -3,44; \\
(\sigma_y)_7 &= (\varphi_8 - 2\varphi_7 + \varphi_{12}) / h^2 = (7,8 - 2 \cdot 0 - 7,8) \cdot 4 = 0; \\
(\sigma_y)_8 &= (\varphi_9 - 2\varphi_8 + \varphi_7) / h^2 = (12,29 - 2 \cdot 7,8 + 0) \cdot 4 = -13,24; \\
(\sigma_y)_9 &= (\varphi_{9''} - 2\varphi_9 + \varphi_8) / h^2 = (12,29 - 2 \cdot 12,29 + 7,58) \cdot 4 = -17,96.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tau_{xy})_1 &= (\varphi_{4'} - \varphi_{6'} + \varphi_6 - \varphi_4) / (4h^2) = 0; \\
(\tau_{xy})_2 &= (\varphi_{4'''} - \varphi_{3'} + \varphi_3 - \varphi_{4''}) / (4h^2) = 0; \\
(\tau_{xy})_3 &= (\varphi_2 - \varphi_5 + \varphi_7 - \varphi_9) / (4h^2) = (15,42 - 5 + 0 - 12,29) \cdot 1 = -1,87; \\
(\tau_{xy})_4 &= (\varphi_{2''} - \varphi_1 + \varphi_8 - \varphi_{9''}) / (4h^2) = (15,42 - 11,6 + 7,8 - 12,29) \cdot 1 = -0,67.
\end{aligned}$$

Дотичні напруження на контурі дорівнюють нулю:

$$(\tau_{xy})_5 = (\tau_{xy})_6 = (\tau_{xy})_7 = (\tau_{xy})_8 = (\tau_{xy})_9 = 0.$$

Виходячи з одержаних значень, на рис. 10 побудовані епюри напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Слід зауважити, що нормальні напруження повинні задовольняти умовам симетрії, а дотичні напруження є кососиметричними. Кососиметрична функція для симетричних точок має протилежні за знаком значення.

Аналізуючи розподіл нормальних напружень, відзначимо, що вони вирівнюються при віддаленні від країв пластинки. Особливо це помітно на епюрі σ_x . Так, на краї платини при $x = 0$ різниця між напруженнями становить $16 - 4 = 12$ кПа, а поблизу середини $9,68 - 5,8 = 3,88$ кПа.

Це явище відповідає відомому принципу Сен-Венана, за яким результат дії самоврівноваженої системи сил зменшується при віддаленні від місця їх прикладання.

Крім того, при розв'язанні задачі на комп'ютері наведений вище алгоритм можливо реалізувати у середовищі високого рівня, наприклад Delphi, або скористуватися відповідної програмою складеною авторами. Для цього необхідно дотримуючись вказівок викладача ввести інформацію про геометрію плоского тіла та значення згинаючих моментів та поздовжніх сил, на контурі, які отримані згідно з балочною аналогією. Ці силові фактори вводять у діалоговому режимі.

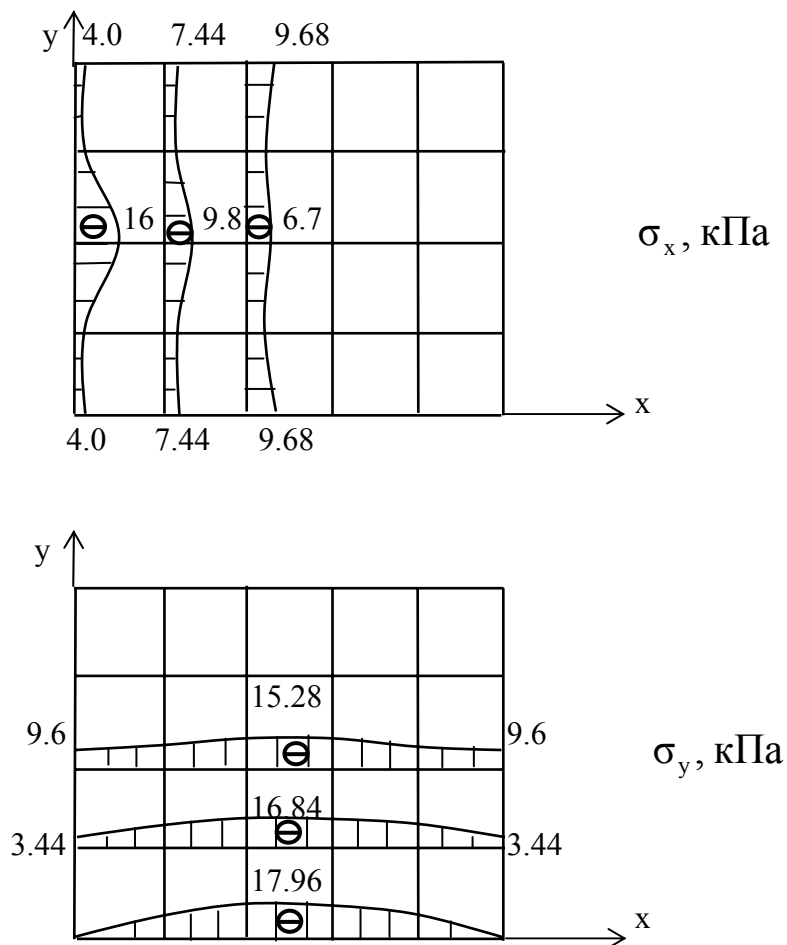


Рис. 10

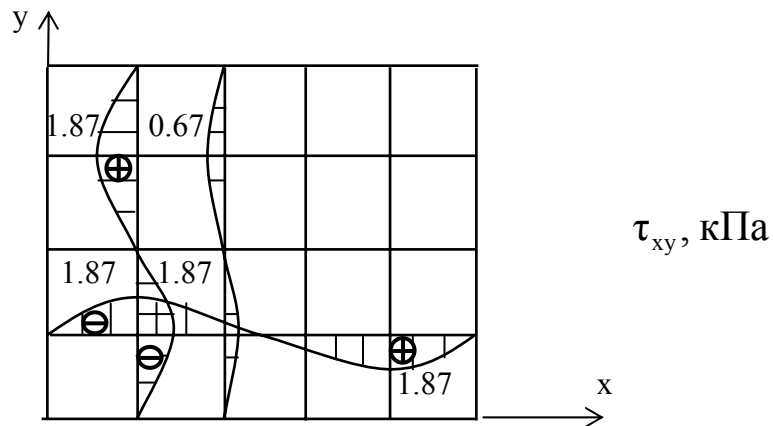


Рис. 10 (продовження)

Виконаємо розрахунок при заданій кількості вічок сітки. Отже $h=0.5$ м. Кількість точок (вузлів сітки) за довжиною та висотою буде 6 та 5 відповідно. Ці значення вводимо у відповідні вікна. Далі, дотримуючись підказок вводимо числові фактори на контурі, які дорівнюють (рис. 8):

на горизонтальних гранях:

$M=0, 7.8, 12.29, 12.29, 7.8, 0$;

$N=-7, -7, -7, -7, -7, -7$;

на вертикальних гранях:

$M=0, 3, 5, 3, 0$;

$N=-15.6, -15.6, -15.6, -15.6, -15.6$;

Після введення усіх даних у віні виведення результатів з'являються напруження у вузлах сітки (табл. 3-5). Порівнюючи одержані результати з попереднім розрахунком, відзначаємо їх практичну тотожність.

Далі зменшуємо кількість вічок сітки у обох напрямках удвічі.

Аналогічно з наведеними раніше розрахунками обчислюємо згинаючі моменти у нових точках балок-граней контуру пластинки (рис. 11).

Таблиця 3

		Напруження σ_x					
		Координата x					
		0	0.5	1	1.5	2	2.5
Корди- ната y	0	-4	-7.524	-9.791	-9.791	-7.524	-4
	0.5	-4	-5.326	-5.739	-5.739	-5.326	-4
	1	-16	-9.825	-6.73	-6.73	-9.825	-16
	1.5	-4	-5.326	-5.739	-5.739	-5.326	-4
	2	-4	-7.524	-9.791	-9.791	-7.524	-4

Таблиця 4

		Напруження σ_y					
		Координата x					
		0	0.5	1	1.5	2	2.5
Корди- ната y	0	0	-13.24	-17.96	-17.96	-13.24	0
	0.5	-3.524	-12.612	-16.826	-16.826	-12.612	-3.524
	1	-9.699	-11.071	-15.279	-15.279	-11.071	-9.699
	1.5	-3.524	-12.612	-16.826	-16.826	-12.612	-3.524
	2	0	-13.24	-17.96	-17.96	-13.24	0

Таблиця 5

		Напруження τ_{xy}					
		Координата x					
		0	0.5	1	1.5	2	2.5
Корди- ната x	0	0	0	0	0	0	0
	0.5	0	1.883	0.67	-0.67	-1.883	0
	1	0	0	0	0	0	0
	1.5	0	-1.883	-0.67	0.67	1.883	0
	2	0	0	0	0	0	0

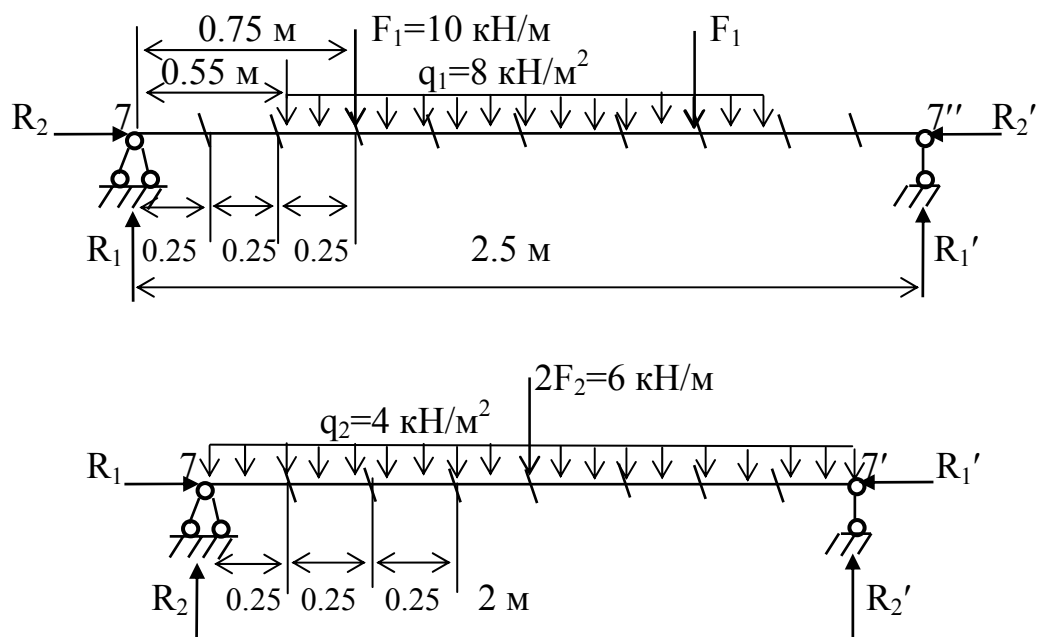


Рис. 11

Вводимо нові вихідні дані: крок сітки 0.25 м; кількість точок за довжиною та висотою складає 11 та 9 відповідно. Згідно с рис. 11 силові фактори вводимо такі:

на горизонтальних гранях:

$M=0, 3.9, 7.8, 11.54, 12.29, 12.69, 12.29, 11.54, 7.8, 3.9, 0;$

$N=-7, -7, -7, -7, -7, -7, -7, -7, -7, -7, -7;$

на вертикальних гранях:

$M=0, 1.625, 3, 4.125, 5, 4.125, 3, 1.625, 0;$

$N=-15.6, -15.6, -15.6, -15.6, -15.6, -15.6, -15.6, -15.6, -15.6;$

Після введення даних у вікні результатів з'являються напруження у вузлах сітки (табл. 6-8).

Таблиця 6

		Напруження σ_x										
		Координата x										
		0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
Кордината y	0	-4	-2.3	-6.1	-25	-7.9	-4.5	-7.9	-25	-6.1	-2.3	-4
	0.25	-4	-5.5	-7.3	-4.0	-8.8	-8.9	-8.8	-4.0	-7.3	-5.5	-4
	0.5	-4	-5.4	-5.7	-3.4	-6.5	-7.5	-6.5	-3.4	-5.7	-5.4	-4
	0.75	-4	-7.4	-6.9	-5.1	-5.8	-6.3	-5.8	-5.1	-6.9	-7.4	-4
	1	-28	-17	-10	-6.5	-5.9	-6.1	-5.9	-6.5	-10	-17	-28
	1.25	-4	-7.4	-6.9	-5.1	-5.8	-6.3	-5.8	-5.1	-6.9	-7.4	-4
	1.5	-4	-5.4	-5.7	-3.4	-6.5	-7.5	-6.5	-3.4	-5.7	-5.4	-4
	1.75	-4	-5.5	-7.3	-4.0	-8.8	-8.9	-8.8	-4.0	-7.3	-5.5	-4
	2	-4	-2.3	-6.1	-25	-7.9	-4.5	-7.9	-25	-6.1	-2.3	-4

Таблиця 7

		Напруження σ_y										
		Координата x										
		0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
Кордината y	0	0	0	-2.5	-47	-8	-8	-8	-47	-2.5	0	0
	0.25	1.7	-2.7	-9.9	-30	-14	-11	-14	-30	-9.9	-2.7	1.7
	0.5	0.5	-5.8	-12	-20	-16	-14	-16	-20	-12	-5.8	0.5
	0.75	-3.4	-7.8	-11	-16	-16	-15	-16	-16	-11	-7.8	-3.4
	1	-14	-5.9	-10	-14	-16	-15	-16	-14	-10	-5.9	-14
	1.25	-3.4	-7.8	-11	-16	-16	-15	-16	-16	-11	-7.8	-3.4
	1.5	0.5	-5.8	-12	-20	-16	-14	-16	-20	-12	-5.8	0.5
	1.75	1.7	-2.7	-9.9	-30	-14	-11	-14	-30	-9.9	-2.7	1.7
	2	0	0	-2.5	-47	-8	-8	-8	-47	-2.5	0	0

Таблиця 8

Напруження τ_{xy}												
		Координата x										
		0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
Кордината y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.25	0	1.3	5.1	0.8	-3.7	0	-3.7	0.8	5.1	1.3	0
	0.5	0	2.5	4.3	1.4	-1.5	0	-1.5	1.4	4.3	2.5	0
	0.75	0	3.7	3.2	1.3	-0.2	0	-0.2	1.3	3.2	3.7	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1.25	0	-3.7	-3.2	-1.3	0.2	0	0.2	-1.3	-3.2	-3.7	0
	1.5	0	-2.5	-4.3	-1.4	1.5	0	1.5	-1.4	-4.3	-2.5	0
	1.75	0	-1.3	-5.1	-0.8	3.7	0	3.7	-0.8	-5.1	-1.3	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Найбільші за модулем напруження за результатами попереднього та останнього розрахунків становлять:

Мах σ_x : 16 кПа та 28 кПа;

Мах σ_y : 17.96 кПа та 47 кПа;

Мах τ_{xy} : 1.88 кПа та 5.1 кПа;

Як бачимо, зменшення кроку сітки суттєво змінює значення напружень, особливо нормальних σ_x та σ_y у зоні прикладання зосереджених навантажень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности / Самуль В. И. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
2. В. Г. Рекач. Руководство к решению задач теории упругости / В. Г. Рекач. – М.: Высш. шк., 1977. – 216 с.
3. Шутенко Л.М. Механіка споруд / Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А. - Харків, ХДАМГ, 2001.
4. Піскунов В. Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / Піскунов В. Г., Феодоренко Ю. М., Шевченко В. Ю. та ін. - К.: Вища школа, 1994.
5. Методичні вказівки і завдання до розрахунково-графічної роботи зі Спеціального курсу з опору матеріалів (основи теорії пружності) “Плоска задача теорії пружності” (для студентів 2 курсу спец. 6.092100 “Охорона праці в будівництві”). / Уклад.: О.О. Чупринін. – Х. : ХНАМГ, 2005. – 16 с.
6. Метод скінчених різниць у плоскій задачі теорії пружності // Методичні вказівки до самостійної роботи з виконання контрольного завдання. /Уклад.: М. А. Засядько, О. О. Чупринін. ХНАМГ. 2007 р. Харків. 24 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

„Метод скінченних різниць у плоскій задачі теорії пружності”

Методичні вказівки і завдання до практичних робіт, самостійної роботи і виконання розрахунково-графічного завдання із “Опору матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності та пластичності” (для студентів 3 курсу денної та заочної форм навчання напряму підготовки 6.060101 - «Будівництво» та слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.092101 (7.06010101) «Промислове та цивільне будівництво»).

Укладачі: ЗАСАДЬКО Микола Андрійович

ЧУПРИНІН Олександр Олексійович

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *О. О. Чупринін*

План 2012, поз. 181 М

Підп. до друку 07.05.2012
Друк на ризографі
Зам. №

Формат 60x84 /16
Ум. друк. арк. 1,1
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.