МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з курсу

ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

(для студентів 2 курсу заочної форми навчання ФПО та ЗН
напряму підготовки 6.060101 «Будівництво»
спеціальності «Міське будівництво і господарство»)

Харків
ХНУМГ
2014

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Теорія імовірностей» (для студентів 2 курсу заочної форми навчання ФПО та ЗН напряму підготовки 6.060101 «Будівництво» спеціальності «Міське будівництво і господарство») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: В. М. Охріменко, Т. Б. Воронкова, О. О. Воронков. - Х. : ХНУМГ, 2014. - 23 с.

Укладачі : доц. В. М. Охріменко,
ст. викл. Т. Б. Воронкова,
ст. викл. О. О. Воронков.

Рекомендовано кафедрою „Інформаційних систем і технологій в міському господарстві”, протокол № 88 від 11.05.12 р.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Курс «Теорія імовірностей» є нормативною дисципліною у навчальному плані напряму «Будівництво». Обсяг курсу становить 72 академічних годин або 2 кредити ECTS, обсяг практичних занять становить 4 аудиторних годин (2 практичних заняття). Відповідно до програми курс розділений на три змістових модуля: «Теорія імовірностей», «Математична статистика» та «Випадкові процеси».

Метою вивчення дисципліни «Теорія імовірностей» є формування базових знань в області застосування імовірнісно-статистичного апарата, вивчення закономірностей у масових випадкових явищах, визначення їх імовірнісних характеристик з метою прогнозування.

В результаті вивчення курсу студенти повинні оволодіти основними методами визначення імовірнісних характеристик випадкових величин, статистичного опису результатів спостереження та перевірки статистичних гіпотез для прийняття на їх основі обґрунтованих рішень. Методичні вказівки спрямовані на допомогу студентам оволодіти практичними навичками із застосування імовірнісно-статистичного апарата.

«Теорія імовірностей» вивчає закономірності у випадкових явищах та є основою для побудови кількісних моделей випадкових процесів та явищ. Прикладами таких моделей є моделі планування та керування запасами, теорії ігор, теорії масового обслуговування. Статистичні показники аналізують при оцінці ризику, а також у багатьох сферах управління та прийняття рішень.

Широка сфера застосування теорії імовірностей і математичної статистики зумовлює важливе місце, що займає даний курс у підготовці фахівців вищої кваліфікації.

Практичне заняття 1
ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Мета — сформувати вміння визначати імовірності випадкових подій з використанням теорем теорії імовірностей.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

У теорії імовірностей поняття випадкової події є одним з основних. *Випадкова подія* - це будь-який факт, що в наслідку досліду може відбутися або не відбутися.

Імовірністю випадкової події називають числову міру ступеню об'єктивної можливості появи цієї події в наслідку досліду.

Імовірність випадкової події можна визначити за класичним методом, якщо наслідки досліду *утворюють повну групу*, *є рівноможливими* та *несумісними*. Імовірність події А визначається як відношення числа можливих наслідків досліду, яки сприяють появі події А, до загального числа можливих наслідків досліду:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

де n - загальне число можливих наслідків досліду; m - число наслідків досліду, яки сприяють появі події А.

Сумою двох подій А і В називають подію С, яка полягає у появі події А або події В або обох подій разом: С = А + В.

Добутком двох подій А і В називають подію С, що полягає у спільній появі подій А і В: С = А * В.

Протилежними називають дві несумісних події А і $\overline{A}$, якщо вони складають повну групу.

Подію А називають *незалежною* від події В, якщо імовірність події А не зміниться від того, відбулася подія В чи ні. Якщо ж імовірність події А залежить від того, відбулася подія В чи ні, то такі події називають *залежними*.

Імовірність події А, обчислену за умови, що подія В відбулася, називають *умовною імовірністю* події А.

Теорема додавання. Імовірність суми двох несумісних подій А і В дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Слідства теореми додавання:

1. Якщо події A_1, A_2, … , A_i, …, A_n утворюють повну групу несумісних подій, сума їх імовірностей дорівнює 1:

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) = 1.$$

2. Сума імовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P((\overline{A}) = 1, \text{ або}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Якщо дві події є сумісними, імовірність їх суми дорівнює сумі імовірностей цих подій мінус імовірність їх спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A*B).$$

Імовірність суми n сумісних подій

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n),$$

де суми поширюються на всі можливі комбінації індексів i, j, k,..., узятих по одному, по два, по три і т.д.

Теорема множення. Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку імовірності одного з них на умовну імовірність іншого, обчислену за умови, що перша відбулася:

$$P(A * B) = P(A) * P(B|A).$$

Для імовірності добутку n подій формула має вигляд

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \ldots P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

Якщо події A і B незалежні, то умовна імовірність події B дорівнює безумовній імовірності цієї події,

$$P(B|A) = P(B).$$

Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$P(A * B) = P(A) * P(B).$$

Якщо маємо n незалежних подій:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Формула повної імовірності. Повна безумовна імовірність події A з урахуванням випадковості умов протікання досліду, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну імовірність події A при кожній з гіпотез.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i) P(A / H_i).$$

Формула Бейеса (теорема гіпотез). Ця формула дозволяє переоцінити імовірності гіпотез після того, як стає відомим наслідок досліду, в результаті якого відбулася подія A. За відомими до проведення досліду (апріорними) імовірностями гіпотез $P(H_i)$ та за результатом досліду (настання події A) обчислюють післядослідні (апостеріорні) імовірності гіпотез $P(H_i|A)$.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A / H_i)}{\sum P(H_i) * P(A / H_i)}.$$

Формула Бернуллі (повторні незалежні випробування). Імовірність того, що в результаті певного числа дослідів подія A з'явиться рівно m разів6

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

де $P_n(m)$ - імовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться рівно m разів; C_n^m - число сполучень з n елементів по m; p – імовірність появи події A в одному досліді; q = 1 – p – імовірність не появи події A в одному досліді.

Локальна теорема Лапласа: Якщо імовірність р появи події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, імовірність $P_n(m)$ того, що подія А з'явиться в n дослідах рівно m разів, приблизно дорівнює, і тім точніше, чим більше n, значенню функції

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, а значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ визначаються за довідковими таблицями. Функція ((x) парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна теорема Лапласа: Якщо імовірність р настання події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, приблизно імовірність $P_n(m_1,m_2)$, того, що подія А з'явиться у випробуваннях від m_1 до m_2 разів,

$$P_n(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx$$

де $x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Формула Пуассона. Якщо число незалежних випробувань n велике, але значення добутку np залишається невеликим, імовірність того, що в цих випробуваннях подія А відбудеться m разів, можна визначити за формулою:

$$P_n(m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}.$$

Вказівки до виконання завдання

Після уважного вивчення умови завдання треба сформулювати подію, імовірність якої треба визначити. Потім обґрунтувати, які теореми теорії імовірностей (теорему додавання або теорему множення) або формули (формулу повної імовірності, формулу Бейєса та ін.) треба застосувати для розв'язання задачі. У процесі розв'язання задачі треба чітко висловлювати міркування.

Задача 1.1

Партія виробів містить N виробів, з яких M є дефектними. Навмання з цієї партії вибирають k виробів для контролю. Визначити імовірність того, що серед них буде рівно *l* дефектних виробів.

Розв'язання

Запишемо подію, для якої необхідно визначити імовірність

A={у контрольній партії рівно *l* дефектних виробів}.

Загальна кількість можливих наслідків досліду дорівнює $n = C_N^k$. Кількість наслідків досліду, які сприяють появі події A={у контрольній партії рівно *l* дефектних виробів} визначимо в такий спосіб. Кількість випадків, які сприяють появі *l* дефектних виробів

$$m_д = C_m^l.$$

Кількість випадків, які сприяють появі k-l не дефектних виробів

$$m_г = C_{N-M}^{k-l} .$$

Імовірність події А

$$P(A) = \frac{m_д * m_г}{n} = \frac{C_m^l * C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k} .$$

Задача 1.2

Ви повинні знайти людину, в якої день народження збігається з Вашим. Скількох незнайомців Вам треба буде опитати, щоб імовірність події А={день народження людини збігається з Вашим} була не меншою за 0,5?

Розв'язання

Імовірність того, що перша людина, в якої Ви запитали, не народилася в один день із Вами, дорівнює

$$P(\overline{A}) = \frac{365-1}{365} .$$

Якщо Ви опитаєте n чоловік, то за теоремою множення імовірність, що вони не народилися в один день із Вами дорівнюватиме:

$$P(\overline{A}) = (\frac{365-1}{365})^n .$$

Тоді імовірність події А={день народження людини збігається з Вашим}:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (\frac{365-1}{365})^n .$$

Оскільки задана ймовірність P(A) = 0,5, маємо:

$$0,5 = 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right)^n .$$

Звідки n = 253 чоловік.

Задача 1.3

У двох урнах знаходяться кулі, що відрізняються тільки кольором. У першій - 5 білі; 11 чорних та 8 червоних. У другій - 10 білих; 8 чорних та 6 червоних. З кожної урни виймають одну кулю. Визначити імовірність події А={вийняті кулі однакового кольору}.

Розв'язання

Для визначення імовірності події А ={вийняті кулі однакового кольору} виразимо її через елементарні події:

A_1 ={обидві кулі білі}

A_2 ={обидві кулі чорні}

A_3 ={обидві кулі червоні}.

Імовірність події А за теоремою множення для незалежних подій:

$$P(A) = P(A_1) * P(A_2) * P(A_3).$$

Тоді:

$$P(A) = 5/24 * 10/24 + 11/24 * 8/24 + 8/24 * 6/24 = 0,32.$$

Задача 1.4

Два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Для першого з них імовірність влучення дорівнює 0,8, а для другого - 0,4. Мішень пробита один раз (одне влучення). Знайти імовірність того, що мішень уражена першим стрільцем.

Розв'язання

Є факт, тобто подія A={мішень уражена один раз}, тобто один із стрільців промахнувся. Висуваємо гіпотези: H_1={мішень уражена першим стрільцем}; H_2={мішень уражена другим стрільцем}. Визначимо імовірності гіпотез. Мішень уражена першим стрільцем, якщо він при пострілі потрапив у мішень, а другий стрілець промахнувся, тоді $P(H_1) = 0,8*(1-0,4) = 0,48$. Мішень уражена другим стрільцем, якщо він при пострілі потрапив у мішень, а перший стрілець промахнувся, тоді $P(H_2) = (1-0,8) *0,4= 0,08$. Умовна імовірність події А, за умови, що має місце гіпотеза H_1 дорівнює $P(A|H_1)=1$, і за умови, що має місце гіпотеза H_2 дорівнює $P(A|H_1)=1$, тому що в цих випадках мішень буде напевно уражена один раз. Скористуємося теоремою гіпотез і визначимо імовірність реалізації гіпотези H_1:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A/H_i)}{\sum P(H_i) * P(A/H_i)} = \frac{0,48*1}{0,48*1+0,08*1} = 0,884\,.$$

Задача 1.5

Є п'ять однотипних пристроїв. Імовірність безвідмовної роботи кожного дорівнює 0,8. Визначити імовірність того, що в робочому стані перебувають m пристроїв (m = 1, 2, 3, 4, 5).

Розв'язання

Визначимо імовірність, що всі п'ять пристроїв пошкоджені:

$$P_5(0) = C_5^0 * 0,8^0 * 0,2^{5-0} = 0,00032;$$

визначимо імовірність, що чотири пристрої пошкоджені:

$$P_5(1) = C_5^1 * 0,8^1 * 0,2^{5-1} = 0,00638;$$

визначимо імовірність, що три пристрої пошкоджені:

$$P_5(2) = C_5^2 * 0,8^2 * 0,2^{5-2} = 0,0512;$$

визначимо імовірність, що два пристрої пошкоджені:

$$P_5(3) = C_5^3 * 0,8^3 * 0,2^{5-3} = 0,2047;$$

визначимо імовірність, що один пристрій пошкоджений:

$$P_5(4) = C_5^4 * 0,8^4 * 0,2^{5-4} = 0,4095;$$

визначимо імовірність, що жодний пристрій не пошкоджений:

$$P_5(5) = C_5^5 * 0,8^5 * 0,2^{5-5} = 0,328.$$

$$\Sigma p_i = 0,00032 + 0,00638 + 0,0512 + 0,2047 + 0,4095 + 0,328 = 1.$$

Задача 1.6

Імовірність того, що виписаний продавцем чек буде оплаченим, дорівнює 0,9. Яке найімовірніше число чеків буде оплачене, якщо виписано 40 чеків?

Розв'язання

Отже, n = 40, p=0,9, q=1-0,9=0,1.

1. Скористаємося для розв'язання формулою $np - q \le m_0 \le np + p$:

$$40*0{,}9-0{,}1 \le m_0 \le 40*0{,}9 + 0{,}9$$

$$35{,}9 \le m_0 \le 36{,}9.$$

Цієї нерівності задовольняє ціле число $m_0 = 36$.

2. Обчислимо добуток np = 40 * 0,9 = 36. Оскільки він є цілим числом, $m_0 = 36$.

Задача 1.7

Оптова база постачає товари у 10 магазинів, від кожного з яких може надійти заявка на черговий день з імовірністю 0,4, незалежно від заявок інших магазинів. Знайти найімовірніше число заявок у день та імовірність одержання цього числа заявок.

Розв'язання

У цьому випадку n = 10, p=0,4. Добуток np дорівнює цілому числу np = 10*0,4 = 4. Імовірність того, що від магазинів буде отримано 4 заявки, можна визначити за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де m=4, q=1-0,4=0,6. Тоді імовірність того, що від магазинів буде отримано 4 заявки:

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 0{,}4^4 0{,}6^{10-4} = 0{,}251.$$

Задача 1.8

Визначимо імовірність того, що деяка подія А в 150 дослідах з'явиться рівно 12 разів. Імовірність появи події А в одному досліді дорівнює 0,1.

Розв'язання

У цьому випадку n = 150, p=0,1. Тоді q=1-0,1=0,9, m=12. Для визначення імовірності, скористаємося локальною теоремою Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

Обчислимо $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{12 - 150 * 0{,}1}{\sqrt{150 * 0{,}1 * 0{,}9}} = -0{,}82$, значення функції визначимо за довідковою таблицею φ(-0,82) =0,2939, тоді:

$$P_{150}(12) = \frac{1}{\sqrt{150 * 0{,}1 * 0{,}9}} * 0{,}2939 = 0{,}08.$$

Визначимо імовірність того, що подія А в 150 дослідах з'явиться не менше за 10 і не більше за 20 разів. Для цього скористаємося інтегральною теоремою Лапласа.

Знайдемо $x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 150 * 0{,}1}{\sqrt{150 * 0{,}1 * 0{,}9}} = -1{,}36$ та $x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{14 - 150 * 0{,}1}{\sqrt{150 * 0{,}1 * 0{,}9}} = -0{,}27$.

$$P_n(m_1,m_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = 0{,}4131 - 0{,}1064 = 0{,}307.$$

Задача 1.9

Імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей буде 5 нестандартних.

Розв'язання

Формалізуємо задачу: n = 1000, p = 0,004, a = np = 1000 * 0,004 = 4. Для знаходження ймовірності події $P_{1000}(5)$ уживемо формулу Пуассона:

$$P_{1000}(5) = \frac{(4)^5}{5!} e^{-4} = 0{,}1563.$$

Практичне заняття 2

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ. НАЙВАЖЛИВІШІ ДЛЯ ПРАКТИКИ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета — сформувати вміння на підставі універсального закону розподілу випадкової величини визначати імовірності її значень та числові характеристики, користуватися законами розподілу випадкових величин для визначення імовірностей того, що випадкова величина належатиме певному інтервалу її значень.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Випадковою називають величину, яка в результаті досліду може прийняти те або інше значення. *Дискретною* називають випадкову величину, число значень якої скінченне, або нескінченне, але рахункове (яка може приймати тільки окремі значення). *Безперервною* називають випадкову величину, число значень якої нескінченне навіть на невеликому інтервалі.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що дозволяє будь-якому значенню випадкової величини поставити у відповідність його імовірність.

Ряд розподілу - це таблиця, у верхньому рядку якої перелічені всі значення випадкової величини x_1, x_2, …, x_n в порядку зростання, а у нижньому - імовірності появи цих значень p_1, p_2, …, p_n:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

де $p_i = P\{X=x_i\}$.

Оскільки події $\{X=x_1\}$, $\{X=x_2\}$,…,$\{X=x_n\}$несумісні та утворюють повну групу, сума їх імовірностей дорівнює одиниці $\sum p_i = 1$.

Найбільш загальною формою закону розподілу для всіх випадкових величин (дискретних та безперервних) є функція розподілу.

Функція розподілу випадкової величини X - це імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x) = P\{X \le x\}.$$

Функція розподілу має наступні властивості.

1. Значення функції розподілу належать відрізкові [0; 1]: $0 \le F(x_2) \le 1$;

2. Функція розподілу - неубутна функція, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, укладене в інтервалі (x_1, x_2), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P\{ x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(-\infty, +\infty)$, то при мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, а при плюс нескінченності - одиниці, тобто $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Щільністю розподілу випадкової величини X у точці x називається похідна функції розподілу X у цій точці (передбачається, що F(x) безперервна і диференційована):

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Властивості щільності розподілу імовірностей: 1. Щільність розподілу є невід'ємною, тобто $f(x) \ge 0$ як похідна неубутної функції; 2. Функція розподілу визначається за співвідношенням:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

3. Інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

де f(x)dx - елемент імовірності, тобто імовірність влучення випадкової величини X на елементарну ділянку dx.

4. Імовірність влучення безперервної випадкової величини на інтервал (x_1, x_2) дорівнює інтегралу щільності розподілу в межах від x_1 до x_2.

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Математичним сподіванням випадкової величини X називають суму добутків всіх можливих її значень на імовірності цих значень

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Для безперервної випадкової величини математичне сподівання

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{xf(x)dx}.$$

Математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини.

Другий початковий момент α_2:

$$\alpha_2 = \mathrm{M}[X^2]$$

Під центрованою випадковою величиною розуміють її відхилення від математичного сподівання:

$$\overset{0}{X} = X - m_x.$$

Дисперсія випадкової величини для дискретної X:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \overset{0}{x}{}_i^2 \, p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i.$$

Для безперервної випадкової величини:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{0}{x}{}^2 \, f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx.$$

Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання.

Середнє квадратичне відхилення X:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Біноміальний закон розподілу. Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу (розподіл Бернуллі), якщо її можливі значення: 0, 1, ..., n, а відповідні імовірності визначаються за співвідношенням:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

де p - імовірність появи події A в одному досліді, $0<p<1$; q - імовірність не появи події A в одному досліді, $q=1-p$.

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом мають вигляд:

$$m_x = np; \; D_x = npq; \; \sigma_x = \sqrt{npq}.$$

Закон розподілу Пуассона визначає імовірність того, що за якийсь час τ відбудеться рівно k подій за законом Пуассона визначається формулою:

$$P(k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau},$$

де λ - число подій в одиницю часу; τ - інтервал часу.

Математичне сподівання (середнє число подій, що потрапляють на ділянку часу довжиною τ) та *дисперсія* випадкової величини визначаються формулою:

$$m_x = D_x = \lambda\tau.$$

Експонентний закон розподілу. Функцію розподілу T обчислюють за формулою: $F(t) = P\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$.

Щільність розподілу T як похідна функції розподілу F(t) має вигляд:

$$f(t) = d(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за експонентним законом, зворотно параметру розподілу λ: $m_x = 1/\lambda$.

Дисперсія: $D_t = \frac{1}{\lambda^2}$, середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = 1/\lambda$.

Імовірність влучення випадкової величини, що має експонентний розподіл, в інтервал значень (α, β): $P\{\alpha \le t \le \beta\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

Нормальний закон розподілу імовірностей визначається двома параметрами m_x і σ_x.

Імовірність влучення випадкової величини X на ділянку значень (α, β) виражається через функцію Лапласа формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right).$$

Функція розподілу для випадкової величини, розподіленої нормально визначається за формулою

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 \cdot$$

Імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини в ділянку значень, симетричну щодо її математичного сподівання обчислюють за формулою:

$$P\{|x - m_x| < l\} = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right) \cdot$$

Закон рівномірної щільності. Безперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл на ділянці від α до β, якщо її щільність розподілу на цій ділянці постійна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & при \quad x \in (a,b); \\ 0 & при \quad x \notin (a,b) \end{cases}.$$

Математичне сподівання: $m_x = \frac{b+a}{2}$; дисперсія: $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$; середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Імовірність влучення значень випадкової величини на інтервал (α, β):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Функція рівномірного розподілу:

$$F(x) = \frac{x - \alpha}{b - a}.$$

Вказівки до виконання завдання

Після уважного вивчення умови завдання треба сформулювати, імовірність якої події потребує визначити завдання. Потім обґрунтувати, якими співвідношеннями можна скористуватися для розв’язання задачі. У процесі розв’язання треба чітко висловлювати міркування та поняття теорії імовірностей.

Задача 2.1

Тричі кидають монету. Випадкова величина X - число появ герба. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Визначити функцію розподілу випадкової величини X та побудувати її графік.

Розв'язання

Побудуємо ряд розподілу X. Очевидно, що число появ герба при тришразовому киданні монети може приймати чотири значення 0, 1, 2, 3. Для визначення імовірностей цих значень скористаємося формулою Бернуллі. Число дослідів n=3, імовірність появи герба в одному досліді p=0,5, імовірність непояви герба в одному досліді q=1-p=1-0,5=0,5. Отже, ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Виконаємо перевірку: $\sum p_i$ = 1/8+3/8+3/8+1/8=1.

За визначенням функція розподілу випадкової величини X - це імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше x: F(x) = P{X ≤ x}.

Обчислимо значення функції розподілу:

F(0) = P{X (0} = 0;
F(1) = P{X (1} = 1/8;
F(2) = P{X (2} = 1/8 + 3/8 = 4/8;
F(3) = P{X (3} = 4/8 + 3/8 = 7/8;
при X(3 F(x) = 1.

Побудуємо графік F(x) (рис. 2.1)

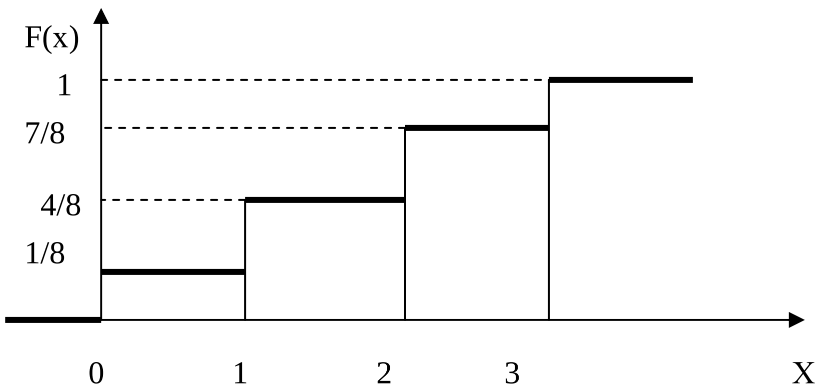

Рис. 2.1 – Графік функції розподілу

Задача 2.2

Визначимо числові характеристики дискретної випадкової величини для умов прикладу задачі 2.1. Маємо ряд розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Розв'язання

Визначимо математичне сподівання випадкової величини X:

$$m_x = \Sigma x_i * p_i = 0*1/8 + 1*3/8 + 2*3/8 + 3*1/8 = 1,5.$$

Дисперсію визначимо за двома способами:
за формулою другого центрального моменту:
$D_x = \Sigma(x_i-m_x)^2*p_i = (0-1,5)^2*1/8 + (1-1,5)^2*3/8 + (2-1,5)^2*3/8 + (3-1,5)^2*1/8 = 0,75.$
та за формулою, що містить другий початковий момент α_2:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2$$

$$\alpha_2 = \Sigma x_i^2*p_i = 0^2*1/8 + 1^2*3/8 + 2^2*3/8 + 3^2*1/8 = 3.$$

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 3-1,5^2 = 0,75.$$

Визначимо середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,75} = 0,855.$$

Задача 2.3.

У відділ верхнього одягу універмагу один за одним входять три відвідувачі. За оцінками менеджера імовірність того, що відвідувач, який ввійшов, зробить покупку, дорівнює 0,3. Визначити імовірність того, що: а) жоден з відвідувачів нічого не купить; б) тільки один відвідувач зробить покупку; в) два відвідувачі зроблять покупку; г) всі троє куплять що-небудь у відділі. Побудувати ряд розподілу та визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X (число відвідувачів, що зробили покупку).

Розв'язання

Появу трьох відвідувачів у відділі універмагу можна розглядати як проведення трьох дослідів. Досліди однакові, тому що імовірність появи події A={здійснення покупки одним відвідувачем} однакова для всіх трьох і дорівнює p=0,3. Відповідно імовірність непокупки для кожного відвідувача q=0,7. Наслідки дослідів незалежні, тому що рішення про покупку для кожного з відвідувачів не залежить від рішень інших відвідувачів відділу.
Для визначення імовірностей біноміального розподілу випадкової величини X скористаємося формулою $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, зведемо їх до таблиці:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

Обчислимо математичне сподівання та дисперсію за формулами моментів випадкової величини:

$$m_x = 0*0,343+1*0,441+2*0,189+3*0,027 = 0,9$$

$$D_x = 0*(0,343-0,9)^2+1*(0,441-0,9)^2+2*(0,189-0,9)^2+3*(0,027-0,9)^2 = $$
$$=0,63.$$

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію за формулами $m_x = np$; $D_x = npq$; $\sigma_x = \sqrt{npq}$.:

$$m_x = n*p = 3 * 0,3 = 0,9$$

$$D_x = n*p*q = 3 * 0,3 * 0,7 = 0,63.$$

Задача 2.4

На АТС надходять виклики з інтенсивністю λ=0,8 1/хв. Визначити імовірність того, що протягом 2 хвилин а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання

Визначимо математичне сподівання числа викликів, що надходять на АТС, яке відповідає інтервалу часу t=2 хвилини:

$$a = \lambda * t = 0{,}8*2 = 1{,}6.$$

За формулою Пуассона імовірність подій визначиться в такий спосіб:

а) імовірність того, що протягом 2 хвилин не надійде жодного виклику

$$P(A) = P(0) = \frac{1{,}6^0}{0!} e^{-1{,}6} = 0{,}202;$$

б) імовірність того, що протягом 2 хвилин надійде рівно один виклик

$$P(B) = P(1) = \frac{1{,}6^1}{1!} e^{-1{,}6} = 1{,}6 * 0{,}202 = 0{,}323;$$

в) імовірність того, що протягом 2 хвилин надійде хоча б один виклик простіше визначити, використовуючи імовірність протилежної події:

$$P(C) = 1 - P(0) = 1 - 0{,}202 = 0{,}798.$$

Задача 2.5

Є випадкова величина X з експонентним законом розподілу. Параметр розподілу λ=0,4. Визначити числові характеристики та функцію розподілу випадкової величини X, а також імовірність того, що вона прийме значення в інтервалі (6, 10).

Розв'язання

Числові характеристики випадкової величини X визначимо за формулами:

$m_x = 1/\lambda = 1/0{,}4 = 2{,}5$; $D_x = 1/\lambda^2 = 1/(0{,}4)^2 = 6{,}25$; $\sigma_x = m_x = 2{,}5$.

Щільність розподілу :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ 0{,}4e^{-0{,}4x}, & при \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}4x}, & при \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Визначимо імовірність того, що випадкова величина X прийме значення в інтервалі (6, 10):

$$P\{6 \le X \le 10\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta} = e^{-0{,}4*6} - e^{-0{,}4*10} = 0{,}0907 - 0{,}0183 = 0{,}0724.$$

Задача 2.6

Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X: m =17; σ=0,6. Знайти імовірність події $P(\alpha<X<\beta)$; імовірність того, що $P(|x-m| < \delta)$, якщо α =16,8; β = 17,2; δ=0,3.

Розв'язання

Обчислимо імовірність, що X належить інтервалу (16,8; 17,2).

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{17{,}2 - 17}{0{,}6}\right) - \Phi\left(\frac{16{,}8 - 17}{0{,}6}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 * \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}26.$$

Визначимо імовірність того, що X відхилиться від свого середнього значення m менше чим на δ:

$$P(|x-17|<0{,}3)=2*\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}6}\right)=0{,}38\,.$$

Задача 2.7

Деталь, що виготовлена автоматом, вважають придатною, якщо відхилення X контрольованого розміру від номіналу не перевищує 10 мм. Точність виготовлення деталей характеризується σ=0,5. Вважаючи, що X розподілена нормально, визначити, скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат.

Розв'язання

Іншими словами, необхідно визначити імовірність того, що помилка X потрапить у симетричний відносно m_x інтервал, який дорівнює 10 мм.

$$P\left\{\left|\overset{o}{X}\right|<10\right\}=2*\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2*\Phi\left(\frac{10}{5}\right)=0{,}95\,.$$

Автомат випускає 95% придатних деталей.

Задача 2.8

Коробки з шоколадом упаковує автомат. Їх середня маса 1,06 кг. Відомо, що 5% коробок мають масу меншу за 1 кг. Визначити відсоток коробок, маса яких перевищує 940 г.

Розв'язання

Визначимо відсоток коробок, маса яких менша за 940 г, тоді виявиться, що інші коробки мають масу, що перевищує 940 г:

$$\mathrm{P}\{X<0{,}940\}=\mathrm{F}(0{,}940)=\Phi\left(\frac{0{,}94-m_x}{\sigma_x}\right)+0{,}5\,.$$

Математичне сподівання відомо з умови задачі m_x = 1,06, а для визначення невідомого середнього квадратичного відхилення скористуємося тим, що за умови 5% коробок мають масу меншу за 1 кг.

$$\mathrm{P}\{X<1{,}0\}=\mathrm{F}(1{,}0)=\Phi\left(\frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x}\right)+0{,}5=0{,}05\,,$$

звідки дістанемо:

$$\Phi\left(\frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x}\right)=-0{,}45\,,\qquad \frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x}=-1{,}655\,,\qquad \sigma_x=0{,}03625.$$

Тоді

$$P\{X<0{,}940\}=\Phi\left(\frac{0{,}94-1{,}06}{0{,}03625}\right)+0{,}5=\Phi(-3{,}31)+0{,}5=-0{,}499+0{,}5=0{,}001\,.$$

Відсоток коробок, маса яких перевищує 940 г становить 99,9%.

Задача 2.9

Довжину кімнати вимірюють рулеткою із грубими діленнями (10 см). Округлення провадять до найближчого цілого. X - помилка вимірювання. Знайти її щільність розподілу, функцію розподілу та числові характеристики.

Розв'язання

Довжина кімнати L з урахуванням помилки визначиться як L±5 см, тобто випадкова величина X змінюється в межах -5<X<+5. Оскільки крива щільності розподілу обмежує площу, що дорівнює одиниці, значення f(x) дістанемо в такий спосіб:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5-(-5)} = 0{,}1.$$

Математичне сподівання:

$$m_x = \frac{a+b}{2} = \frac{-5+5}{2} = 0.$$

Дисперсія:

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5+5)^2}{12} = 8{,}33; \qquad \sigma_x = \sqrt{8{,}33} = 2{,}89.$$

Задача 2.10

Поїзда метро йдуть регулярно з інтервалом 2 хвилини. Пасажир виходить на платформу у випадковий момент часу, не пов'язаний з розкладом поїздів. Випадкова величина T - час очікування поїзда. Знайти: а) щільність розподілу і числові характеристики випадкової величини T; б) імовірність того, що чекати доведеться не більше 0,5 хвилини.

Розв'язання

Оскільки поїзди під'їжджають до станції рівномірно, закон розподілу випадкової величини T – рівномірний, тобто $f(x) = \frac{1}{b-a}$, де (b-a) – інтервал руху поїздів, причому a =0, b =2, тоді:

а) $f(x) = \frac{1}{2-0} = 0{,}5$; $m_x = \frac{b+a}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$ хв.; $D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$.

б) імовірність того, що чекати доведеться не більше 0,5 хвилини визначимо так:

$$P\{T < 0{,}5\} = F(x) = \frac{0{,}5-0}{2-0} = 0{,}25.$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Гмурман В. Э. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. школа, 1977. – 498 с.
2. Гмурман В.Э. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 1975. – 330 с.
3. Ачкасов А.Є., Плакіда В.Т., Воронков О.О., Воронкова Т.Б. Теорія імовірностей і математична статистика: Навчальний посібник. – Харків, ХНАМГ, 2008. – 249 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1999.
5. Теория статистики с основами теории вероятностей: Учебное пособие для вузов/ Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 446 с.
6. http://teorver.ru
7. http://www.artspb.com
8. http://www.matburo.ru
9. http://stud-project.ru
10. http://www.statsoft.ru
11. http://www.alife.narod.ru
12. http://neuro.net.ua

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2.

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)
0,00	0,0000	0,36	0,1406	0,72	0,2642	1,08	0,3599
0,01	0,0040	0,37	0,1443	0,73	0,2673	1,09	0,3621
0,02	0,0080	0,38	0,1480	0,74	0,2703	1,10	0,3643
0,03	0,0120	0,39	0,1517	0,75	0,2734	1,11	0,3665
0,04	0,0160	0,40	0,1554	0,76	0,2764	1,12	0,3686
0,05	0,0199	0,41	0,1591	0,77	0,2794	1,13	0,3708
0,06	0,0239	0,42	0,1628	0,78	0,2823	1,14	0,3729
0,07	0,0279	0,43	0,1664	0,79	0,2852	1,15	0,3749
0,08	0,0319	0,44	0,1700	0,80	0,2818	1,16	0,3770
0,09	0,0359	0,45	0,1736	0,81	0,2910	1,17	0,3790
0,10	0,0398	0.46	0,1772	0,82	0,2939	1,18	0,3810
0,11	0,0438	0,47	0,1808	0,83	0,2967	1,19	0,3830
0,12	0,0478	0,48	0,1844	0,84	0,2995	1,20	0,3849
0,13	0,0517	0,49	0,1879	0,85	0,3023	1.21	0,3869
0,14	0,0557	0,50	0,1915	0,86	0,3051	1,22	0,3883
0,15	0,0596	0,51	0,1950	0,87	0,3078	1,23	0,3907
0,16	0,0636	0,52	0,1985	0,88	0,3106	1,24	0,3925
0,17	0,0675	0,53	0,2019	0,89	0,3133	1,25	0,3944
0,18	0,0714	0,54	0,2054	0,90	0,3159	1,26	0,3926
0,19	0,0753	0,55	0,2088	0,91	0,3186	1,27	0,3980
0,20	0,0793	0,56	0,2123	0,92	0,3212	1,28	0,3997
0,21	0,0832	0,57	0,2157	0,93	0,3238	1,29	0,4015
0,22	0,0871	0,58	0,2190	0,94	0,3264	1,30	0,4032
0,23	0,0910	0,59	0,2224	0,95	0,3289	1,31	0,4049
0,24	0,0948	0,60	0,2257	0,96	0,3315	1,32	0,4066
0,25	0,0987	0,61	0,2291	0,97	0,3340	1,33	0,4082
0,26	0,1026	0,62	0,2324	0,98	0,3365	1,34	0,4099
0.27	0,1064	0,63	0,2357	0,99	0,3389	1,35	0,4115
0,28	0,1103	0,64	0,2389	1,00	0,3413	1,36	0,4131
0,29	0,1141	0,65	0,2422	1,01	0,3438	1,37	0,4147
0,30	0,1179	0,66	0,2454	1,02	0,3461	1,38	0,4162
0,31	0,1217	0,67	0,2486	1,03	0,3485	1,39	0,4177
0,32	0,1255	0,68	0,2517	1,04	0,3508	1,40	0,4192
0,33	0,1293	0,69	0,2549	1,05	0,3531	1,41	0,4207
0,34	0,1331	0,70	0,2580	1,06	0,3554	1,42	0,4222
0,35	0,1368	0,71	0,2611	1,07	0,3577	1,43	0,4236

Продовження додатка 2

x	*Φ(x)*	*X*	*Φ(x)*	*X*	*Φ(x)*	*X*	*Φ(x)*
1,44	0,4251	1,73	0,4582	2,04	0,4793	2,62	0,4956
1,45	0,4265	1,74	0,4591	2,06	0,4803	2,64	0,4959
1,46	0,4279	1,75	0,4599	2,08	0,4812	2,66	0,4961
1,47	0,4292	1,76	0,4608	2,10	0,4821	2,68	0,4963
1,48	0,4306	1,77	0,4616	2,12	0,4830	2,70	0,4965
1,49	0,4319	1,78	0,4625	2,14	0,4838	2,72	0,4967
1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,16	0,4846	2,74	0,4969
1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,18	0,4854	2,76	0,4971
1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,20	0,4861	2,78	0,4973
1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,22	0,4868	2,80	0,4974
1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,24	0,4875	2,82	0,4976
1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,26	0,4881	2,84	0,4977
1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,28	0,4887	2,86	0,4979
1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,30	0,4893	2,88	0,4980
1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,32	0,4898	2,90	0,4981
1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,34	0,4904	2,92	0,4982
1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,36	0,4909	2,94	0,4984
1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913	2,96	0,4985
1,62	0,4474	1,91	0,4719	2,40	0,4918	2,98	0,4986
1,63	0,4484	1,92	0,4726	2,42	0,4922	3,00	0,49865
1,64	0,4495	1,93	0,4732	2,44	0,4927	3,20	0,49931
1,65	0,4505	1,94	0,4738	2,46	0,4931	3,40	0,49966
1,66	0,4515	1,95	0,4744	2,48	0,4934	3,60	0,499841
1,67	0,4525	1,96	0,4750	2,50	0,4938	3,80	0,499928
1,68	0,4535	1,97	0,4756	2,52	0,4941	4,00	0,499968
1,69	0,4545	1,98	0,4761	2,54	0,4945	4,50	0,499997
1,70	0,4554	1,99	0,4767	2,56	0,4948	5,00	0,499997
1,71	0,4564	2,00	0,4772	2,58	0,4951		
1,72	0,4573	2,02	0,4783	2,60	0,4953		

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з курсу

ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

*(для студентів 2 курсу заочної форми навчання ФПО та ЗН
напряму підготовки 6.060101 «Будівництво»
спеціальності «Міське будівництво і господарство»)*

Укладачі : **ОХРІМЕНКО** Вячеслав Миколайович,
ВОРОНКОВА Тетяна Борисівна,
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович.

Відповідальний за випуск: *А. С. Гаєвський*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2012, поз. 614М

Підп. до друку 21.06.2012 р.	Формат 60x84/16
Друк на ризографі	Ум. друк. арк. 1,4
Тираж 50 пр.	Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014