

УДК 681.5.015:628.21

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ  
ВОДОСНАБЖЕНИЯ СОВМЕСТНО С АКТИВНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ  
И РЕГУЛИРУЮЩИМИ ЕМКОСТЯМИ**

**Дядюн С. В., Штельма О. Н.**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ  
ВОДОПОСТАЧАННЯ СПІЛЬНО З АКТИВНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТА  
РЕГУЛЮЮЧИМИ ЄМКОСТЯМИ**

**Дядюн С. В., Штельма О. М.**

**THE MATHEMATICAL MODELLING OF WATER SUPPLY SYSTEMS  
CONTAINING A PIPE NETWORK, PUMP STATIONS AND REGULATORY  
RESERVOIRS**

**Dyadun S., Shtelma O.**

*Представлена математическая модель установившегося потокораспределения в системах водоснабжения, включающих в себя водопроводную сеть совместно с работающими на нее насосными станциями и регулируемыми емкостями. Данная модель позволяет обеспечивать возможность параллельного включения произвольного количества агрегатов насосных станций без необходимости предварительного эквивалентирования их характеристик. Разработанная математическая модель используется при управлении системами водоснабжения для решения задач анализа потокораспределения в сети при реализации управляющих воздействий на насосных станциях.*

*Ключевые слова: управление, критерий, качество, эффективность, модель, функционирование, система водоснабжения, насосная станция.*

*Представлено математичну модель усталеного потокорозподілу в системах водопостачання, що включають в себе водопровідну мережу спільно з працюючими на неї насосними станціями і регулюючими ємкостями. Дана модель дозволяє забезпечувати можливість паралельного включення довільної кількості агрегатів насосних станцій без необхідності попереднього еквівалентування їх характеристик. Розроблена математична модель використовується при управлінні системами водопостачання для розв'язання задач аналізу потокорозподілу в мережі при реалізації управляючих дій на насосних станціях.*

*Ключові слова: управління, критерій, якість, ефективність, модель, функціонування, система водопостачання, насосна станція.*

## **1. Введение**

При эксплуатации реальных систем подачи и распределения воды (СПРВ) и имитационном моделировании систем оперативного управления режимами их функционирования возникает задача анализа установившегося потокораспределения в СПРВ. Для ее решения нужно иметь математическую модель водопроводной сети совместно с активными источниками и регулирующими емкостями, которая обеспечивает возможность параллельного включения произвольного количества агрегатов насосных станций (НС) без необходимости предварительного эквивалентирования их характеристик.

## **2. Анализ литературных данных и постановка проблемы**

Методам математического моделирования функционирования СПРВ посвящено много фундаментальных работ [1-7]. Математическая модель установившегося потокораспределения в водопроводной сети без активных элементов достаточно хорошо известна и разработана в [1; 5]. Целью данных исследований являлись разработка математической модели установившегося потокораспределения в системах водоснабжения, включающих в себя водопроводную сеть совместно с работающими на нее насосными станциями и регулирующими емкостями.

## **3. Результаты исследований**

Пусть  $G(V,E)$  — граф СПРВ, моделирующий ее структуру и отображающий взаимосвязи между отдельными элементами. Здесь  $V$  — множество всех узлов СПРВ;  $E$  — множество всех дуг СПРВ. Соединим все входы и выходы графа  $G(V,E)$ , через которые вода соответственно поступает в сеть и отбирается из нее, с нулевой фиктивной точкой.

Обозначим  $L$  — множество насосных станций и регулирующих емкостей, тогда элементами этого множества будут фиктивные дуги, соединяющие нулевую точку со входами всех НС и регулирующих емкостей;  $M$  — множество пассивных элементов, т.е. магистральных участков (трубопроводов) водопроводной сети, являющихся реальными дугами графа;  $N$  — множество узлов СПРВ с подсоединенными к ним потребителями, т.е. множество фиктивных дуг модели СПРВ. При этом множество узлов графа СПРВ состоит из двух непересекающихся подмножеств  $V = N \cup N'$ , где  $N'$  — подмножество промежуточных узлов модели СПРВ, т.е. таких узлов, в которых нет отбора воды, однако по тем или иным соображениям их нужно отразить в модели СПРВ. Кроме того, введем множество  $K = \bigcup_{j \in L} L_j$ , характеризующее общее

количество дуг с насосными агрегатами на всех насосных станциях СПРВ. Таким образом, элементами множества  $K$  служат звенья всех насосных станций, каждое из которых включает в себя непосредственно сам активный элемент (насос), а также примыкающие к нему участки с регулируемой и

нерегулируемой задвижками. При этом, как известно [3], каждому звену насосной станции соответствует уравнение, описывающее процесс движения воды через данный насосный агрегат:

$$H_{\text{ВХ}} - r_{11} q_i^2 + (\Psi_{0i} + \Psi_{1i} q_i + \Psi_{2i} q_i^2) (D_i / D'_i)^2 (n_i / n'_i)^2 - r_{13} (\lambda_i) q_i^2 - H_{\text{ВЫХ}} = 0, \quad i \in L_j. \quad (1)$$

Здесь  $H_{\text{ВХ}}, H_{\text{ВЫХ}}$  — давление соответственно на входе и выходе НС;  $q_i$  — расход воды через  $i$ -е звено;  $\Psi_{0i}, \Psi_{1i}, \Psi_{2i}$  — коэффициенты аппроксимации нагрузочной характеристики  $H(q)$   $i$ -го насосного агрегата;  $r_{11}, r_{13}$  — сопротивления участков с нерегулируемой и регулируемой задвижками, находящимися соответственно во всасывающей и напорной линии  $i$ -го насоса;  $\lambda_i$  — степень открытия  $i$ -й регулируемой задвижки;  $D_i, D'_i$  — соответственно нормальный и срезанный диаметр рабочего колеса  $i$ -го насоса;  $n_i, n'_i$  — соответственно фактическая и номинальная частота вращения рабочего колеса  $i$ -го насосного агрегата (при наличии на нем регулируемого привода).

Для однозначности направления потока воды, перекачиваемой  $i$ -м включенным агрегатом СПРВ, представим (1) в несколько ином виде:

$$H_{\text{ВХ}} - r_{11} q_i |q_i| + (\Psi_{0i} + \Psi_{1i} |q_i| + \Psi_{2i} q_i |q_i|) (D_i / D'_i)^2 (n_i / n'_i)^2 - r_{13} (\lambda_i) q_i |q_i| - H_{\text{ВЫХ}} = 0, \quad i \in L_j. \quad (2)$$

Потеря напора для активного элемента, будь то НС или отдельно работающий насосный агрегат, всегда есть величина отрицательная, так что в данном случае можно говорить о «приобретении» напора.

Выберем дерево графа СПРВ таким образом, чтобы в него вошли магистральные участки сети и участки с насосами (принадлежащими разным НС СПРВ), а также одна фиктивная ветвь, соединяющая нулевую точку со входом некоторой из НС. Присвоим ей номер 1. При этом все фиктивные участки, инцидентные узлам СПРВ, которые являются входами НС (кроме первого) и регулирующих емкостей, а также участки с потребителями будут отнесены к хордам, магистральные же участки и участки с насосами частично станут хордами, а частично — ветвями дерева. Полагаем, что индекс 1, присвоенный множествами соответственно  $L, M, N, K, E$  характеризует принадлежность их элементов к ветвям дерева, а индекс 2 — к хордам. В результате такого выбора множество всех дуг графа СПРВ представимо как  $E = E_1 \cup E_2$ , где  $E_1 = M_1 \cup K_1 \cup L_1$ ,  $E_2 = M_2 \cup K_2 \cup L_2 \cup N_2$ ,  $L_1 = \{1\}$ ,  $N_1 = \emptyset$ ,  $N_2 = N$ . Множество  $L_2$  разобьем на два непересекающихся подмножества  $L_2 = L_2^{(a)} \cup L_2^{(p)}$ , где  $L_2^{(a)}$  — множество хорд с активными элементами (НС);  $L_2^{(p)}$  — множество хорд с регулирующими емкостями (водонапорными башнями, колоннами, резервуарами, которые являются пассивно-активными регулирующими элементами сети).

Кроме того, обозначим  $q_i$  — расход воды в  $i$ -м участке сети,  $i \in M$ ;  $r_i$  — гидравлическое сопротивление  $i$ -го участка сети,  $i \in M$ ;  $h_i^{(r)}$  — перепад геодезических отметок начала и конца  $i$ -го участка;  $h_i$  — потеря давления на  $i$ -м участке сети,  $i \in M$ .

С учетом произведенного выбора дерева графа СПРВ, а также того факта, что сумма перепадов геодезических высот по любому замкнутому циклу, содержащему магистральные участки сети, равна нулю, т.е.

$$h_i^{(r)} + \sum_{r \in M_1} b_{1ri} h_r^{(r)} = 0, \quad i \in M_2, \quad (3)$$

математическая модель установившегося потокораспределения в водопроводной сети совместно с активными источниками и регулирующими емкостями примет вид

$$f_r = \text{sign} q_r r_r |q_r|^2 + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} \text{sign} q_i r_i |q_i|^2 = 0, \quad r \in M_2; \quad (4)$$

$$f_r = H_{\text{BX}1} + \Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \Psi'_{2k} q_k |q_k| - h_r - \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\text{sign} q_i r_i |q_i|^2 + h_i^{(r)}) = 0, \quad (5)$$

$$r \in N, \quad k \in K_1;$$

$$f_k = \Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \Psi'_{2k} q_k |q_k| + x_i (\Psi_{0i} + \Psi_{1i} |q_i| + \Psi'_{2i} q_i |q_i|) = 0, \quad (6)$$

$$k \in K_2, \quad i \in K_1;$$

$$f_r = \text{sign} q_r r_r |q_r|^2 + h_r^{(r)} + h_r^{(p)} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\text{sign} q_i r_i |q_i|^2 + h_i^{(r)}) + \Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \Psi'_{2k} q_k |q_k| = 0, \quad r \in L_2^{(p)}, \quad k \in K_1; \quad (7)$$

$$f_r = H_{\text{BX}1} - H_{\text{BX}r} + \sum_{k \in K_1} [\text{sign} q_k (\Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \Psi'_{2k} q_k |q_k|)] - \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\text{sign} q_i r_i |q_i|^2 + h_i^{(r)}) = 0, \quad r \in L_2^{(a)}; \quad (8)$$

$$q_i = \sum_{r \in M_2} b_{1ri} q_r + \sum_{k \in K_2} x_k q_k + Q_i^+, \quad i \in M_1 \cup L_1 \cup K_1, \quad (9)$$

$$\text{где } \Psi'_{2k} = \Psi_{2k} (D_k / D'_k)^2 (n_k / n'_k)^2 - r_{k1} - r_{k3} (\lambda_k), \quad k \in K_1 \cup K_2,$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й насос включен,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й насос выключен, } i \in K_1 \cup K_2; \end{cases}$$

$$Q_i^+ = \sum_{k \in N \cup L_2} b_{1ki} q_k = \text{const};$$

$H_{\text{BX}1}, H_{\text{BX}k}$  — давление на входе соответственно 1-й и  $k$ -й НС;  $b_{1ri}$  — элемент цикломатической матрицы  $B_1$  [2]. Величина, помеченная индексом «+» — задана. В приведенной математической модели СПРВ предполагается, что фиктивные участки с потребителями направлены от сети к нулевой фиктивной точке, а участки с насосами и соответствующие им фиктивные участки — наоборот.

Проанализируем условия разрешимости системы уравнений математической модели водопроводной сети совместно с активными источниками и регулирующими емкостями. Она может быть решена, если заданы граничные условия функционирования СПРВ в виде комбинации значений переменных расходов и давлений на ее входах и выходах.

#### 4. Выводы

Математическая модель установившегося потокораспределения в системах водоснабжения, содержащих насосные станции и регулирующие емкости, используется для анализа качества функционирования СПРВ при реализации управляющих воздействий на НС[1,2,7,10], оценки эффективности решения задачи оперативного планирования режимов функционирования СПРВ на всем рассматриваемом интервале времени[8-10], а также для контроля правильности принимаемых решений по управлению технологическими процессами подачи и распределения воды[3,7,9,10].

#### Литература

1. Евдокимов, А. Г. Оптимальные задачи на инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов. – Харьков: Вища школа, 1976. – 153 с.
2. Евдокимов, А. Г. Потокораспределение в инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов, В. В. Дубровский, А. Д. Тевяшев. – М.: Стройиздат, 1979. – 199 с.
3. Евдокимов, А. Г. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов, А. Д. Тевяшев. – Харьков, 1980. – 144 с.
4. Fallside, F., Perry, P. F., Burch, R. H., Marlow, K. C. (1975). The Development of Modelling and Simulation Techniques Applied to a Computer – Based – Telecontrol Water Supply System // Computer Simulation of Water Resources Systems. – № 12. – P. 617-639.
5. Абрамов, Н. Н. Теория и методика расчета систем подачи и распределения воды. [Текст] / Н. Н. Абрамов. – М.: Стройиздат, 1985. – 288 с.
6. Меренков, А. П. Теория гидравлических цепей [Текст] / А. П. Меренков, В. Я. Хасилев. – М.: Наука, 1985. – 279 с.
7. Евдокимов, А. Г. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов, А. Д. Тевяшев, В. В. Дубровский. – М.: Стройиздат, 1990. – 368 с.
8. Дядюн, С. В. Оптимизация потокораспределения в системах водоснабжения с большим числом активных источников. [Текст] / С. В. Дядюн // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – Харьков, ХНУРЭ, 2001. – Вып. 115, с.36-40.
9. Дядюн, С. В. Моделирование и рациональное управление системами водоснабжения при минимальном объеме оперативной информации. [Текст] / С. В. Дядюн // Радиоэлектроника и информатика. – Харьков, ХНУРЭ, 2002. – № 20, с. 111-115.
10. Дядюн, С. В. Оценка качества и эффективности управления системами водоснабжения в зависимости от степени неопределенности модели объекта. [Текст] / С. В. Дядюн // Радиоэлектроника и информатика. – Харьков, ХНУРЭ, – 2001, № 17, с. 78-81.

## References

1. Evdokimov, A. H. (1976). *Optimal'nye zadachi na inzhenernykh setiakh*. Khar'kov: Vishcha shkola, 153.
2. Evdokimov, A. H., Dubrovskii, V. V., Teviashev, A. D. (1979). *Potokoraspredelenie v inzhenernykh setiakh*. M.: Stroiizdat, 199.
3. Evdokimov, A. H., Teviashev, A. D. (1980). *Operativnoe upravlenie potokoraspredeleniem v inzhenernykh setiakh*. Khar'kov, 144.
4. Fallside, F., Perry, P. F., Burch, R. H., Marlow, K. C. (1975). The Development of Modelling and Simulation Techniques Applied to a Computer – Based – Telecontrol Water Supply System. *Computer Simulation of Water Resources Systems*, 12, 617-639.
5. Abramov, N. N. (1985). *Teoriia i metodika rascheta system podachi i raspredeleniia vody*. M.: Stroiizdat, 288.
6. Merenkov, A. P., Hasilev, V. Ya. (1985). *Teoriia hidravlicheskih tsepei*. M.: Nauka, 279.
7. Evdokimov, A. H., Teviashev, A. D., Dubrovskii, V. V. (1990). *Modelirovanie i optimizatsiia potokoraspredeleniia v inzhenernykh setiakh*. M: Stroiizdat, 368.
8. Dyadun, S. V. (2001). Optimizatsiia potokoraspredeleniia v sistemah vodosnabzheniia s bol'shim chislom aktivnykh istochnikov. *Avtomatizirovannyye sistemy upravleniia i pribory avtomatiki*, 115, 36-40.
9. Dyadun, S. V. (2002). Modelirovanie i ratsional'noe upravlenie sistemami vodosnabzheniia pri minimal'nom obime operativnoi informatsii. *Radioelektronika i informatika*, 20, 111-115.
10. Dyadun, S. V. (2001). Otsenka kachestva i effektivnosti upravleniia sistemami vodosnabzheniia v zavisimosti ot stepeni neopredelennosti modeli ob'ekta. *Radioelektronika i informatika*, 17, 78-81.

The mathematical model of the steady flow distribution in the water supply system containing a pipe network together with pump stations and regulatory reservoirs has been presented. This mathematical model allows to guarantee the possibility of the parallel engagement of any number of pumping stations aggregates without the need for prior equivalenting their characteristics.

The mathematical model of steady flow distribution in the water supply system, containing pumping stations and regulatory reservoirs has been used to analyze the quality of its operation under the implementation of the control actions at the pumping stations, solving the problem of evaluating the effectiveness of operational planning modes of water supply systems operation throughout the examined time interval, as well as to control the correctness of taken decisions on the management of the technological processes of water supply and water distribution. The method of imitational modeling of real functioning water supply systems has been used to carry out the research.

*Keywords: mathematical modeling, model, water supply systems, steady flow distribution, pump station, regulatory reservoirs*

**Дядюн Сергей Васильевич**

Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры  
Кафедра прикладной математики и информационных технологий  
Харьковский национальный университет городского хозяйства  
им. А. Н. Бекетова  
просп. Победы, 66Д, г. Харьков, Украина, 61 002  
Контактный тел. +38-095-20-317-50  
E-mail: [daulding@mail.ru](mailto:daulding@mail.ru)

**Дядюн Сергій Васильович**

Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри  
Кафедра прикладної математики і інформаційних технологій  
Харківський національний університет міського господарства  
ім. О. М. Бекетова  
просп. Перемоги, 66Д, м. Харків, Україна, 61 002  
Контактний тел. +38-095-20-317-50  
E-mail: [daulding@mail.ru](mailto:daulding@mail.ru)

**Dyadun Sergey**

PhD in Engineering, associate professor  
Department of Applied Mathematics and Information Technologies  
O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv  
12, Revolution St., Kharkov, Ukraine, 61 002  
Contact tel. +38-095-20-317-50  
E-mail: [daulding@mail.ru](mailto:daulding@mail.ru)

**Штельма Ольга Николаевна**

Senior teacher  
Кафедра прикладной математики и информационных технологий  
Харьковский национальный университет городского хозяйства  
им. А. Н. Бекетова  
ул. Ильинская 63, г. Харьков, Украина, 61 093  
Контактный тел. +38-050-30-399-36  
E-mail: [Olga Shtelma <olga.shtelma@gmail.com>](mailto:Olga.Shtelma<olga.shtelma@gmail.com>)

**Штельма Ольга Миколаївна**

Старший викладач  
Кафедра прикладної математики і інформаційних технологій  
Харківський національний університет міського господарства  
ім. О. М. Бекетова  
вул. Ільїнська 63, м. Харків, Україна, 61 093  
Контактний тел. +38-050-30-399-36

E-mail: [Olga Shtelma <olga.shtelma@gmail.com>](mailto:Olga.Shtelma@gmail.com)

**Shtelma Olga**

Senior teacher

Department of Applied Mathematics and Information Technologies

O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

12, Revolution St., Kharkov, Ukraine, 61 002

Contact tel. +38-050-30-399-36

E-mail: [Olga Shtelma <olga.shtelma@gmail.com>](mailto:Olga.Shtelma@gmail.com)