УДК 519.86 + 338.5.018.7

Н.Ю. Карпенко, В.Б. Уфимцева, Ю.В. Левиков

Харьковская национальная академия городского хозяйства, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РЕГУЛИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В статье рассмотрена модель системы с регулируемыми параметрами, приведен ее математический анализ с точки зрения достижение равновесия. Предложена динамическая модель, которая отражает взаимосвязь между уровнем отложенного спроса и потребления в зависимости от ценовой политики регулирующего органа. Модель работает с учетом потребительских предпочтений, учитывает возможность введения коэффициента цен для имитации процессов девальвации денежной единицы. Она реализована в составе комплекса тренажеров и деловых (ролевых) игр, направленных на моделирование различных экономических ситуаций.

Ключевые слова: *экономическая система, регулирование цен, математическая модель.*

Для современного специалиста в области экономики и менеджмента особый интерес представляет вопрос разработки математической базы для формирования моделей систем с регулируемыми параметрами.

В статье рассмотрены вопросы применения имитационных моделей для исследования поведения системы в условиях регулируемых цен. Чтобы понять общие принципы, недостатки и преимущества регулируемых цен, их возможные микро- и макроэкономические последствия, удобно использовать метод математического моделирования. Программный комплекс с успехом применяется на кафедре ПМ и ИТ Харьковской национальной академии городского хозяйства при подготовке менеджеров и экономистов.

Рассмотрим экономическую систему (рис. 1), состоящую из трех взаимосвязанных и взаимодействующих компонентов: производителя, совокупного потребителя и регулятора цен [1, 2].

Пусть W — множество производственных возможностей производителя. То есть если X – вектор возможного выпуска n видов товаров, то возможности производителя опишем в виде:

$$X = \{X_1, X_2, ...X_n\},\ X \geq 0\ и\ X \in W\ , \qquad (1)$$

где W – область производственных возможностей (рис. 1, граница Г).

Будем считать, что W — замкнутое выпуклое множество, а Г – его граница. Планирующий орган формирует вектор цен на продукцию: $P = \{P_1, P_1, ..., P_n\}$. В этих условиях задача производителя заключается в определении выпуска, максимизирующего доход [3]:

$$P\,X \rightarrow \max,\ X \geq 0, X \in W \qquad (2)$$

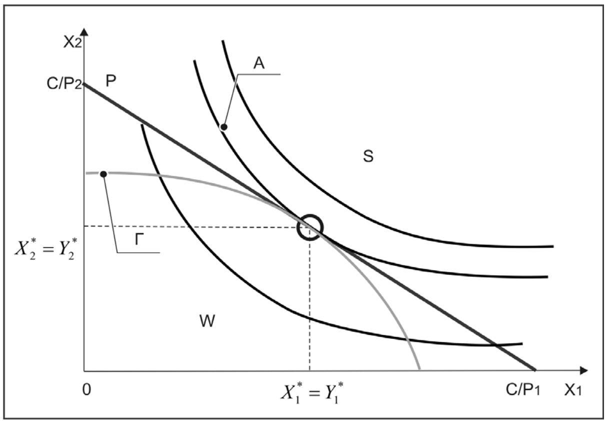

Рис. 1. Кривые потребительских предпочтений и возможностей производителя

Обозначим оптимальное решение задачи как X*. Тогда сумма средств, полученных производителем равна C = PX*.

Будем считать систему замкнутой, поэтому сумма С попадает совокупному потребителю. Обладая объемом денежных средств С, потребитель формирует спрос, который математически представлен вектором:

$$Y^* = \{Y_1^*, Y_2^*, ..., Y_n^*\}\ , \qquad (3)$$

при условии $P\,Y \leq C$ (бюджетное ограничение).

Спрос определяется с учетом предпочтения (1) одного товара над другим. Вектор спроса Y определяется как оптимальное решение задачи потребителя, максимизирующего свою функцию полезности при бюджетном ограничении:

$$U(Y) \rightarrow \max,\ PY \leq C, y \geq 0. \qquad (4)$$

На рис. 1 спрос описывается множеством S с границей А.

Условием экономического равновесия в такой системе является равенство векторов:

$$Y^* = X^* \qquad (5)$$

Вектор цен, который обеспечивает это условие, существует и единственен при уже сделанных предположениях относительно W и строгой выпуклости функции U. Геометрически точка равновесия соответствует точке касания границы производственных возможностей Г с кривой безразличия A (рис. 1).

Иными словами, это точка касания двух множеств W и S. При этом линия цен (бюджетная линия) является разделяющей для двух выпуклых множеств W и S:

$$S = \{X \mid \mathrm{U(X)} \ge \mathrm{U(X^*)}\}. \qquad (6)$$

Вероятность случайного выбора цен P, обеспечивающих равновесие, практически равна нулю, поэтому обычно в рамках экономической системы имеют место такие факты [4, 5]:

– спрос не соответствует предложению, то есть $X^* \ne Y^*$;

– произведенный ассортимент X^* в глазах потребителя обладает меньшей ценностью по сравнению с набором Y^* одинаковой суммарной стоимости, то есть $U(X^*) < U(Y^*)$;

– если желаемый потребителем набор $Y \notin W$, он не может быть произведен в силу ограничений производственно-технологического характера (рис. 2).

Перечисленные факты являются результатом неправильного формирования структуры цен. Пусть, потребителю неизвестен выпуск X^* и он целенаправленно стремится удовлетворить спрос Y^*, то есть покупает товары в количествах:

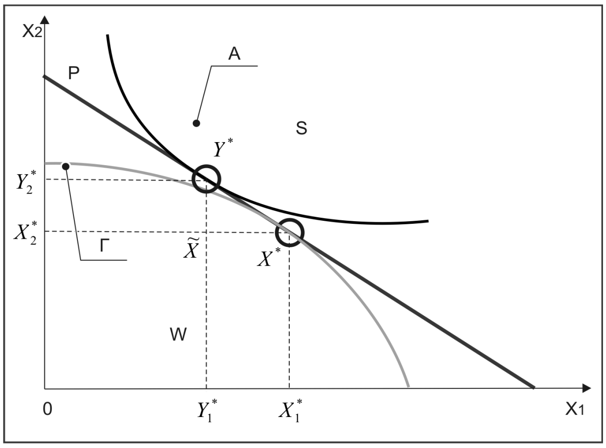

Рис. 2. Экономическая система с несбалансированным соотношением спроса и предложения

$$\widetilde{X} = \min(X_i^*, Y_i^*),\ i = 1,...,n. \qquad (7)$$

Из условия $\widetilde{X} \le X^*$ получаем свойство нереализованных остатков: $\Delta X = X^* - \widetilde{X} \ge 0$. При этом сумма средств, оставшихся у потребителя (отложенный спрос) составит $\Delta C = C - P\Delta X$. На эту сумму производитель недополучает свой доход.

Рассмотрим динамический многошаговый процесс из T шагов. На каждом шаге принимаются решения о векторах $P(t)$. $T=1,2, ...,T$. предположим, что $\Delta C(0) = 0$, $\Delta X(0) = 0$. Тогда основные соотношения, описывающие процесс, имеют на шаге t такой вид. Вектор предложения $\hat{X}(t)$ складывается из остатков $\Delta X(t-1)$ и нового выпуска $X^*(t)$,

$$\hat{X}(t) = X^*(t) + \Delta X(t-1). \qquad (8)$$

Спрос $Y^*(t)$ определяется, как и прежде, в результате решения задачи (2) в которой участвует вектор цен $P(t)$ и бюджет потребителя:

$$C(t) = P(t)X^*(t) + \Delta C(t-1), \qquad (9)$$

где второе слагаемое — объем отложенного спроса на предыдущем шаге. Модель замыкается тремя соотношениями:

$\widetilde{X}(t) = \min\{\widetilde{X}(t), Y^*(t)\}$ – реализованная продукция,

$\Delta X(t) = \hat{X}(t) - \widetilde{X}(t)$ – нереализованные остатки,

$\Delta C(t) = C(t) - P(t)\widetilde{X}(t)$ – объем отложенного спроса.

Проведем предварительный анализ модели, исключив из рассмотрения случай экономического равновесия. Рассмотрим для двумерного случая ($n=2$) взаимное расположение на плоскости двух точек: предложения $\hat{X}$ и спроса Y^*. Точка Y^* может занимать относительно $\hat{X}$ четыре характерных положения.

Ситуация 1: $Y_1^* < \hat{X}_1$, $Y_2^* < \hat{X}_2$,

откуда следует:

$$\Delta X_1 > 0,\ \Delta X_2 = 0 \qquad (13)$$

Ситуация 2:

$$\Delta X_1 = 0,\ \Delta X_2 > 0 \qquad (14)$$

Ситуация 3:

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0 \tag{15}$$

Ситуация 4:

$$\Delta X_1 > 0\,,\ \Delta X_2 > 0 \tag{16}$$

Кроме понятия «бюджетная прямая» $PX = C$, введем понятие «линия цен» $PX = q$. В этом случае q — стоимость всех товаров X, имеющихся в данный момент, в текущих ценах P. Бюджетная прямая в общем случае параллельна линии цен. Необходимым условие равновесия является совпадение этих прямых, то есть $q = C$.

Далее,

$$q = p\left(X^* + \Delta X\right),\ C = PX^* + \Delta C\,, \tag{17}$$

где ΔC – остаток денежных средств у потребителя.

Тогда необходимым условием равновесия является равенство:

$$\Delta C = P\Delta X\,, \tag{18}$$

которое выполняется далеко не всегда при изменении цен $P(t)$. В ситуации, когда $\Delta C \neq P\Delta X$,единственным средством создания необходимых условий равновесия является корректировка положения бюджетной прямой с помощью скалярного коэффициента розничных цен η. Этот параметр моделирует повышение цен (при $\eta > 1$) или процесс распродажи (при $0 < \eta < 1$). Соотношение, учитывающее возможность такой корректировки выглядит так: $\eta PX = C$.

Величину $\eta > 1$ следует задавать, например, в том случае, если нереализованные остатки равны достаточно велик. Если предложение превышает спрос и есть нереализованные остатки товаров, можно ввести нужно $\eta < 1$, это приведет к тому, что цены снижаются, доход производителя падает.

Для достижения равновесия нужно выбрать η из соотношения:

$$\eta = \frac{PX^* + \Delta C}{PX^* + P\Delta X}\,. \tag{19}$$

Соответствующим выбором η можно обеспечивать условия равновесия в ситуациях 3 и 4. Для ситуации 3 вместе с условием (15) имеет место $\Delta C > 0$, то есть абсолютное превышение спроса над предложением, нулевые остатки товаров и наличие накопления денег («развитой социализм»). В этом случае следует выдрать $\eta = 1 + \dfrac{\Delta C}{PX^*} > 1$ (повышать розничные цены вплоть до возникновения явления гиперинфляции с целью обесценить накопившуюся денежную массу без адекватного повышения уровня производства).

В ситуации 4 имеет место абсолютное превышение предложения: остатки всех товаров положительны, но $\Delta C = 0$ («развитой капитализм»). В соответствии с (19) нужно выбрать $\eta < 1$. Наконец. В ситуациях 1 и 2 $\Delta C > 0$, а величина η зависит от динамики цен.

Рассмотрим реализацию двумерного случая.

В качестве границы производственных возможностей выберем эллипс:

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1\,, \tag{20}$$

где a и b обозначают соответственно максимально возможные выпуски продуктов каждого типа. Уравнение касательной к эллипсу (20) в точке $\left(X_1^*, X_2^*\right)$ имеет вид:

$$\frac{X_1 X_1^*}{a^2} + \frac{X_2 X_2^*}{b^2} = 1\,, \tag{21}$$

а линия цен $PX = d$ соответствует уравнению:

$$\frac{P_1 X_1}{d} + \frac{P_2 X_2}{d} = 1\,, \tag{22}$$

Из (21) и (22) получим систему трех уравнений:

$$\frac{P_1}{d} = \frac{X_1^*}{a^2}, \frac{P_2}{d} = \frac{X_2^*}{b^2}, P_1 X_1^* + P_2 X_2^* = d\,, \tag{23}$$

Решение которой имеет вид:

$$d = \sqrt{P_1^2 a^2 + P_2^2 b^2}\,, X_1^* = \frac{P_1 a^2}{d}, X_2^* = \frac{P_2 b^2}{d}\,, \tag{24}$$

В результате чего определяется вектор оптимального выпуска X^2 и доход производителя d.

Линии безразличия [6] функции полезности потребителя описываются семейством эллипсов с центром в заданной точке (0,0) и постоянным коэффициентом растяжения β. Этот параметр можно интерпретировать как коэффициент предпочтения товаров с точки зрения потребителя.

Параметрическое семейство эллипсов описывается уравнением:

$$\frac{(Y_1 - O)^2}{\alpha^2} - \frac{(Y_1 - O)^2}{(\alpha\beta)^2} = 1, \qquad (25)$$

где $\alpha > 0$ параметр.

При $\beta = 1$ оба товара равноценны, при $\beta > 1$ «товар 2» предпочтительнее «товара 1». При $\beta < 1$ — наоборот. Координаты точки касания бюджетной прямой $P_1X_1 + P_2Y_2 = C$ с одним из семейства эллипсов (25) определяются как корни соответствующей системы уравнений:

$$Y_1^* = -\frac{P_1C}{P_1^2 + P_2^2\beta^2} + O, Y_2^* = -\frac{P_2C\beta^2}{P_1^2 + P_2^2\beta^2} + O. \qquad (26)$$

Для расширения области существования корней (26) должны соблюдаться условия: $O > a, O > b$.

Анализ модели позволяет сделать следующие выводы

1. Достижение равновесия в экономической системе с регулируемыми ценами в принципе возможно, однако трудно реализуемо.
2. В точке равновесия сбалансированное увеличение или снижение цен не приводит к дисбалансу системы в целом. Если же на момент ценовых колебаний имел место дисбаланс в виде отложенного спроса или денежных накоплений, погрешности в ценовой политике увеличивают общую сумму дисбаланса. Говоря, например, о режиме переходной экономики, экономическая стратегия должна заключаться в первоочередном балансировании спроса и только после этого в реализации товаров по свободным (рыночным) ценам.
3. При ограниченных производственных возможностях дисбаланс системы приводит к тому, что достичь точки равновесия становится невозможно за приемлемое время. Единственным выходом в такой ситуации является введение коэффициента розничных цен.

Список литературы

1. *Желтякова И.А. Маховикова Г.А., Пузыня Н.Ю. Цены и ценообразование. - СПб.: Издательство «Питер», 1999. - 112с.*
2. *Экономика. – 3-е изд., доп./под ред. Б. А. Райзберга. – Москва: ИНФРА-М, 2000.- 672с.*
3. *Нэгл Т.Т., Холден Р.К. Стратегия и тактика ценообразования. - СПб.: Издательство «Питер», 2001. – 544с.: (Серия «Теория и практика менеджмента»).*
4. *Слепнева Т. А., Яркин Е. В.. Цены и ценообразование. – М.: ИНФРА-М, 2001. - 453с.*
5. *Липсиц И.В. Коммерческое ценообразование. Сборник деловых ситуаций. Тесты. – 2-е изд., доп. и испр. – М., Издательство БЕК, 2001. - 368с.*
6. *Malcolm H. B/ McDonald and Peter Morris. The Marketing Plan: A pictorial guide for managers. – Butterworth-Heinemann Ltd./ www.amazon.co.uk*

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Н.И. Самойленко, Харьковская национальная академия городского хозяйства.

Авторы: *КАРПЕНКО Николай Юрьевич*
Харьковская национальная академия городского хозяйства, кандидат технических наук, доцент.
Раб. тел. – 707-31-45, E-mail – nictomkar@rambler.ru.
УФИМЦЕВА Виктория Борисовна
Харьковская национальная академия городского хозяйства, кандидат технических наук, доцент.
Раб. тел. – 707-31-45, E-mail – vika.uf@gmail.com.
ЛЕВИКОВ Юрий Владимирович
Харьковская национальная академия городского хозяйства, ассистент.
Раб. тел. – 707-31-45.

Математична модель економічної системи з регульованими параметрами

М.Ю. Карпенко, В.Б. Уфимцева, Ю.В. Левіков

У статті розглянута модель системи з регульованими параметрами, наведено її математичний аналіз з точки зору досягнення рівноваги. Запропонована динамічна модель, яка відображає взаємозв'язок між рівнем відкладеного попиту і споживання в залежності від цінової політики регулюючого органу. Модель працює з урахуванням споживчих переваг, враховує можливість введення коефіцієнта цін для імітації процесів девальвації грошової одиниці. Вона реалізована в складі комплексу тренажерів і ділових (рольових) ігор, спрямованих на моделювання різних економічних ситуацій.

Ключові слова: економічна система, регулювання цін, математична модель.

Mathematical model of an economic system with the adjustable parameter

N.Y. Karpenko, V.B. Ufimtseva, Y.V. Levikov

In the paper the model of a system with adjustable parameters, it is a mathematical analysis in terms of achieving balance. Proposed a dynamic model that reflects the relationship between the level of pent-up demand and consumption, depending on the pricing regulator. The model works with the consumer preferences, allows for the possibility of introducing price ratio to simulate the processes of devaluation of the currency. It is implemented as a component of exercise equipment and business (RPG) games, designed to simulate the different economic situations.

Keywords: economic system, price controls, mathematical model.