МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА

К. О. Метешкін,
Д. В. Шаульський

ПРАКТИКУМ
З МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ
ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Харків
ХНУМГ
2014

УДК [528.02:004.67](075)
ББК 26.11я73-6+22.172я73-6
М54

Рецензенти:

***А. І. Колосов**, д. ф.-м. н., професор (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова),*

***А. Б. Ачасов**, д. с-г. н., професор (Харківський національний аграрний університет ім. В. В. Докучаєва),*

***В. М. Ілюшко**, д. т. н., професор (Харківський національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ»)*

Рекомендовано на засіданні Вченої ради
Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова,
протокол №7 від 28. 01. 2013 р.

Метешкін К. О.
М54 Практикум з математичної обробки геодезичних вимірів: навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х.: ХНУМГ, 2014. – 100 с.

В навчальному посібнику викладені способи і методи виконання лабораторних і розрахунково-графічних робіт з курсу «математична обробка геодезичних вимірів». Велика увага приділена застосуванню комп'ютерних програм (на прикладі MS Excel) при виконанні розрахунків. Для самостійної перевірки отриманих теоретичних знань в посібнику приведені тестові завдання з відповідями на них.

Навчальний посібник призначений для студентів напряму підготовки «Геодезія, картографія та землеустрій» вищих навчальних закладів.

УДК [528.02:004.67](075)
ББК 26.11я73-6+22.172я73-6

ЗМІСТ

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Цей навчальний посібник призначений для полегшення засвоєння дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів». Він визначає склад, зміст, послідовність і способи виконання лабораторних і розрахунково-графічних робіт, передбачених робочою програмою навчальної дисципліни. Крім того, підручник містить тестові завдання з тем «Теорія похибок вимірювань» і «Спосіб найменших квадратів», які призначені для самостійного контролю студентами отриманих знань. Тестування за представленими в підручнику завданнями можна пройти в учбовому курсі «Математична обробка геодезичних вимірів» в системі Moodle за адресою http://cdo.kname.edu.ua/course/view.php?id=219.

Для спрощення розрахунків під час виконання лабораторних робіт рекомендується застосовувати програму MS Excel 2010. Рекомендації по роботі в програмі та приклади розрахунків наведені в кінці відповідного розділу посібника. Методика розрахунків в MS Excel передбачена для самостійного опанування.

Перед виконанням розрахунково-графічних і лабораторних робіт слід ознайомитися з теоретичним матеріалом з літератури [1 – 6], що зазначена в посиланнях на джерела, з конспекту лекцій та з інших джерел, наприклад, мережі Інтернет. До виконання лабораторних робіт допускаються ті студенти, які позитивно відповіли на запитання, основні з яких приведені на початку відповідного розділу цих вказівок.

Розрахунково-графічні і лабораторні роботи студенти виконують з використанням раніше одержаних знань у галузі геодезії, вищої математики й інформатики.

Лабораторні роботи студенти виконують під наглядом викладача на лабораторних заняттях, розрахунково-графічні роботи студенти виконують самостійно. Завдання слід виконувати поетапно, консультуючись з викладачем. Після перевірки звітних матеріалів з лабораторних і розрахунково-графічних робіт викладачем та виправлення вказаних недоліків, лабораторні і розрахунково-графічні роботи необхідно оформити з дотриманням вимог, приведених в цих методичних вказівках. Оформлені роботи захищаються студентом і заліковуються викладачем.

1.1. Складові частини звіту з розрахунково-графічних і лабораторних робіт

Звіт з розрахунково-графічних і лабораторних робіт складається з:

1. титульного аркуша;
2. змісту;
3. основної частини;
4. списку джерел.

Титульний аркуш оформлюють за зразком, наведеним в додатку А. Безпосередньо за титульним аркушем розміщують **зміст** (додаток Б) із зазначенням начальних номерів сторінок кожної лабораторної і розрахунково-графічної роботи.

В **основній частині** розкривають мету виконання кожної лабораторної і розрахунково-графічної роботи, дають теоретичні пояснення, приводять методи і послідовність розв'язання поставлених задач і отримані результати.

Список джерел, на які маються посилання в основній частині, приводять в кінці звіту, починаючи з нової сторінки. У відповідних місцях тексту повинні бути посилання. Бібліографічний опис використаних джерел оформлюють у відповідності зі стандартом [1].

1.2. Вимоги до оформлення розрахунково-графічних і лабораторних робіт

Звіт з розрахунково-графічних і лабораторних робіт оформлюють з одного боку аркуша паперу формату А4, використовуючи шрифт Times New Roman чорного кольору, розміром 14 pt з інтервалом 1.15. Абзац складає 1.25 см. Текст на сторінці розміщують дотримуючись таких розмірів полів: верхнє і нижнє – 20 мм, ліве 30 мм, праве 15 мм.

Сторінки слід нумерувати арабськими цифрами, дотримуючись наскрізної нумерації впродовж всього тексту звіту з розрахунково-графічних і лабораторних робіт. Номер сторінки проставляють в центрі нижньої частини сторінки. Титульний аркуш включають до загальної нумерації сторінок звіту, але номер сторінки на ньому не вказують.

Нумерація розділів і підрозділів. Розділи і підрозділи нумерують арабськими цифрами. Номер підрозділу складається із номера розділу і порядкового номера підрозділу, які розділяють крапкою. Після номера підрозділу точку не ставлять. Розділи і підрозділи повинні мати заголовок. Заголовок розділу розміщують посередині сторінки і друкують великими літерами без точки вкінці. Заголовки підрозділів друкують маленькими літерами, окрім першої великої. Перенос слів в заголовках не допускається.

Відстань між заголовком і наступним або попереднім абзацом тексту повинна складати два рядки. Не допускається розміщувати заголовок розділу або підрозділу в нижній частині сторінки, якщо після них розміщений тільки один рядок тексту.

Рисунки слід розміщувати безпосередньо після тексту, де вони вперше згадуються, або на наступній сторінці. На всі рисунки повинні бути посилання в тексті. Кожний рисунок повинен бути підписаний (знизу), наприклад, «*Рис. 1 – Схема геодезичної мережі*».

Числовий матеріал оформлюють у вигляді **таблиць**. На всі таблиці повинні бути посилання в тексті. Таблиці, як і рисунки, нумеруються арабськими цифрами. Нумерація може бути або наскрізною впродовж всього тексту звіту з розрахунково-графічних і лабораторних робіт, або складатися із номера розділу і порядкового номера таблиці (рисунка), розділених крапкою. Наприклад, «*Таблиця 3.5 – Результати вимірювання горизонтального кута*». Назву таблиці друкують маленькими літерами (крім першої великої) і розміщують над таблицею. Назва повинна відображати зміст таблиці і бути лаконічною.

При розриві таблиці на декілька сторінок допускається її верхній рядок із заголовками колонок замінювати номерами, використовуючи для цього арабські цифри. При цьому нумерацію виконують і в першій частині таблиці. Слово «Таблиця __» і заголовок зазначають один раз над першою частиною таблиці, над наступними частинами пишуть: «Продовженя таблиці __» із зазначенням її номеру.

Формули розміщують безпосередньо після тексту, в якому вони згадуються вперше, посередині рядка. Набирати формули слід за допомогою вбудованого в MS Word редактора формул, а не в текстовому режимі. Кожна формула повинна мати порядковий номер. Допускається наскрізна нумерація впродовж всього звіту з розрахунково-графічних і лабораторних робіт або окремого розділу. Номер вказують в дужках на одному рівні з формулою, в крайньому правому положенні рядка. Пояснення значень символів, які використовуються в формулі, приводять безпосередньо під формулою. Пояснення кожного символу дають з нового рядка. Перший рядок пояснень починається з абзацу словом «де» без двокрапки, наприклад,

$$f_{h_{\text{доп}}} = 50\sqrt{L}, \qquad (1)$$

де $f_{h_{\text{доп}}}$ – гранично допустима нев’язка нівелірного ходу;

L – довжина нівелірного ходу в кілометрах.

Бібліографічний опис джерел в переліку літератури приводять в порядку, в якому вони вперше згадуються в тексті. **Посилання** на джерела слід позначати порядковим номером даного джерела в переліку літератури, виділеним двома квадратними дужками, наприклад, «…відповідно до порядку [6]».

При посиланнях на розділи, рисунки, таблиці, формули, додатки, вказують їх номери. Слід писати, наприклад, «…в розділі 3», «…як зазначалось в 2.6», «…як видно з рис. 8», «…в табл. 2», «…за формулою (7)», «…в додатку А».

2. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

2.1. Вправи з математичних дій над матрицями в програмному середовищі MS Excel 2010

Література: [5, с. 5-14].

Питання для самоперевірки

1. Що називають транспонуванням матриці?
2. Яку матрицю називають нульовою?
3. Чи можна помножити матрицю A розміром (8x4) на матрицю B розміром (6x8)?
4. Що є сумою двох матриць A та B однакової розмірності?
5. Яку матрицю називають симетричною?
6. Що є добутком матриці A на матрицю A^{-1}, обернену до неї?

Мета роботи: засвоєння методики математичних обчислень в програмному середовищі MS Excel 2010 на прикладі дій над матрицями.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. За наведеним прикладом виконати основні математичні дії (добуток, транспонування, обернення та складання) над чотирма вихідними матрицями: a (8x4), l (8x1), b^T(8x4), W(4x1).

Порядок роботи

1. Запустити програму Microsoft Excel. На новому аркуші («Лист1») ввести у вільні комірки елементи матриць a і l.
   1.1. Транспонувати матрицю a, отримавши таким чином матрицю a^{T} розміром (4x8).
   1.2. Помножити матрицю a^{T}на матрицю a, результатом буде матриця A розміром (4x4).
   1.3. Знайти матрицю A^{-1} розміром (4x4), обернену до матриці A.
   1.4. Помножити матрицю a^{T}на матрицю l, результатом буде матриця λ розміром (4x1).
   1.5. Помножити матрицю A^{-1} з протилежним знаком на матрицю λ. Результатом буде матриця δ розміром (4x1).
   1.6. Помножити матрицю a на матрицю δ, до добутку додати матрицю l. Результатом буде матриця V розміром (8x1).
   1.7. Здійснити контроль обчислень, помноживши матрицю a^{T} на матрицю V. Результатом має бути нульова матриця розміром (4x1).

2. Відкрити новий аркуш («Лист2») ввести у вільні комірки елементи матриць b^T і W.
   2.1. Транспонувати матрицю b^T, отримавши таким чином матрицю b розміром (4x8).
   2.2. Помножити матрицю b на матрицю b^T. Результатом буде матриця B розміром (4x4).
   2.3. Знайти матрицю B^{-1} розміром (4x4), обернену до матриці B.
   2.4. Помножити матрицю B^{-1} з протилежним знаком на матрицю W. Результатом буде матриця k розміром (4x1).
   2.5. Помножити матрицю b^T на матрицю k. Результатом буде матриця V розміром (8x1).
   2.6. Транспонувати матрицю V, отримавши таким чином матрицю V^T розміром (1x8).
   2.7. Транспонувати матрицю k, отримавши таким чином матрицю k^T розміром (1x4).
   2.8. Здійснити контроль обчислень. Для цього знайти добуток матриць V^T і V та добуток матриць $-k$ і W. Порівняти результати – вони мають збігатися.
   2.9. Зберегти файл під ім'ям «МОГВ.xlsx», вийти з Microsoft Excel.

Приклад. *Дано чотири матриці*

$$a = \begin{pmatrix} -0.264 & -0.233 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.214 & 0.275 \\ 0.019 & 0.476 & 0.214 & -0.275 \\ 0.245 & -0.244 & 0 & 0 \\ 0.275 & -0.282 & -0.538 & 0.049 \\ -0.538 & 0.049 & 0.324 & 0.226 \\ 0 & 0 & 0.281 & 0.203 \\ 0.264 & 0.233 & -0.067 & -0.478 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.25 \\ 1.76 \\ -2.91 \\ 1.05 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.919 \\ 1 & 1 & 0 & -0.960 \\ 1 & 0 & 1 & 1.187 \\ 1 & 0 & 1 & -0.955 \\ 1 & -1 & 0 & 0.943 \\ 1 & -1 & 0 & -0.935 \\ 1 & 0 & -1 & 0.970 \\ 1 & 0 & -1 & -1.169 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -1.15 \\ -1.15 \\ -0.20 \\ -4.21 \end{pmatrix}.$$

Виконати математичні дії над ними в наведеному вище порядку.

1. Запускаємо Microsoft Excel. На новому аркуші («Лист1») курсором виділяємо комірку A5 і вводимо до неї з клавіатури текст «a =». Всі текстові і числові дані робимо шрифтом Times New Roman чорного кольору, розміром 12 pt. Починаючи з комірки B2 вводимо елементи матриці a (рис. 1).

В комірку F5 вводимо текст «l =», і починаючи з комірки G2 вводимо елементи матриці l.

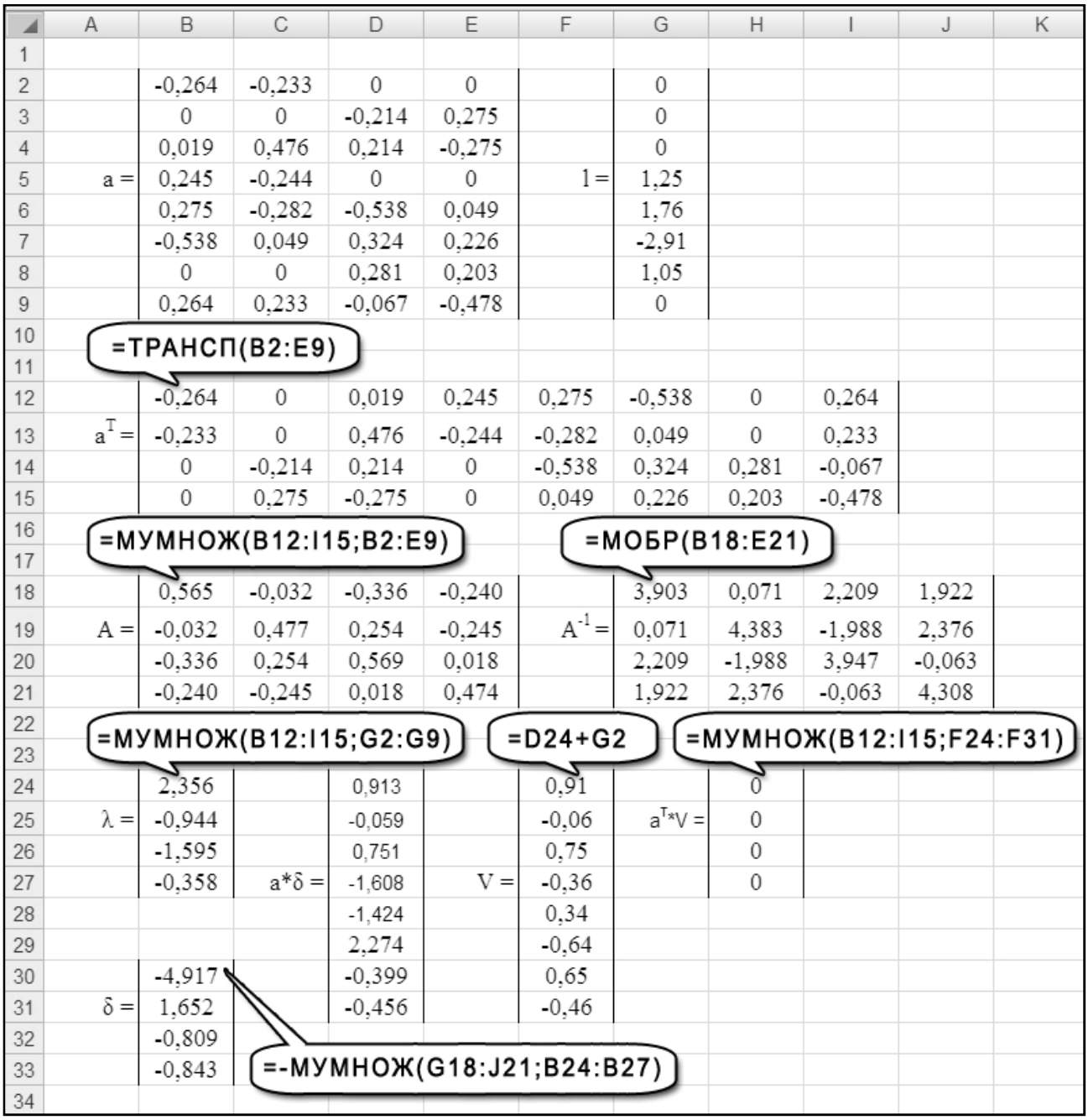


Рис. 1 – Загальний вигляд аркуша з результатами обчислень та формули, введені у відповідні комірки

1.1. Транспонуємо матрицю a. *Транспонування* матриці полягає в тому, що перший рядок матриці стає першим стовбцем нової матриці, другий рядок – другим стовбцем і т.д.

Формула для транспонування матриці має вигляд «=ТРАНСП(*масив*)», де *масив* – це діапазон комірок, який необхідно транспонувати.

Формула повинна бути введена як формула масиву. Це означає, що формулу треба ввести в ліву верхню комірку діапазону, в якому розміститься результуюча матриця. Потім цей діапазон комірок виділяють курсором миші і натискають на клавіатурі спочатку клавішу F2, а потім комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter.

Для транспонування матриці a в комірку A13 вводимо текст «a^T =». В комірку B12 вводимо формулу «=ТРАНСП(B2:E9)». Матриця a має розмір (8x4), значить транспонована матриця буде мати розмір (4x8). Виділяємо діапазон комірок від лівого верхнього кута B12 до правого нижнього – I15. Натискаємо комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 1).

1.2. Помножимо матрицю a^Tна матрицю a. Формула для добутку матриць має вигляд «=МУМНОЖ(*масив1;масив2*)», при цьому кількість стовбців *масиву1* повинна дорівнювати кількості рядків *масиву2*. Формула повинна бути введена як формула масиву.

Результатом є матриця з тим же числом рядків, що і *масив1*, і з тим же числом стовбців, що *і масив2*.

Для добутку матриць a^Tі a в комірку A19 вводимо текст «A =». В комірку B18 вводимо формулу «=МУМНОЖ(B12:I15;B2:E9)». Результат добутку – матриця A буде мати розмірність (4x4), тому виділяємо діапазон комірок від B18 до E21. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат.

1.3. Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до матриці A. Формула для обернення матриць має вигляд «=МОБР(*масив*)», де *масив* – це діапазон комірок з однаковою кількістю рядків і стовбців, який необхідно обернути. Формула повинна бути введена як формула масиву.

Для обернення матриці A в комірку F19 вводимо текст «A^{-1} =». В комірку G18 вводимо формулу «=МОБР(B18:E21)». Обернена матриця A^{-1} буде мати той же розмір, що і вихідна матриця A, тобто (4x4). Тому виділяємо діапазон комірок від G18 до J21, натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 1).

1.4. Помножимо матрицю a^T на матрицю l. Для цього в комірку A25 вводимо текст «λ =». В комірку B24 вводимо формулу «=МУМНОЖ(B12:I15;G2:G9)». Результат добутку – матриця λ буде мати розмір (4x1), тому виділяємо діапазон комірок від B24 до B27. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 1).

1.5. Помножимо матрицю A^{-1} з протилежним знаком на матрицю λ. Для цього в комірку A31 вводимо текст «δ =». В комірку B30 вводимо формулу

«=-МУМНОЖ(G18:J21;B24:B27)». Результат добутку – матриця δ буде мати розмір (4x1), тому виділяємо діапазон комірок від B30 до B33. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 1).

1.6. Помножимо матрицю a на матрицю δ. Для цього в комірку C27 вводимо текст «a*δ=». В комірку D24 вводимо формулу «=МУМНОЖ(B2:E9;B30:B33)». Результуюча матриця буде мати розмір (8x1), тому виділяємо діапазон комірок від D24 до D31. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 1).

Тепер додамо до отриманого добутку $a * \delta$ матрицю l. Додавати можна тільки ті матриці, які мають однакові розміри. В даному випадку обидві матриці мають розмір (8x1). В комірку E27 вводимо текст «V =». В комірку F24 вводимо формулу «=D24+G2». Копіюємо формулу на діапазон комірок F24:F31, отримуємо результат (рис. 1).

1.7. Для контролю виконаних обчислень знайдемо добуток матриць $a^{\mathrm{T}} * V$. В комірку G25 вводимо текст «a^T*V=». В комірку H24 вводимо формулу «=МУМНОЖ(B12:I15;F24:F31)». Результуюча матриця буде мати розмір (4x1), тому виділяємо діапазон комірок від H24 до H27. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат – нульову матрицю.

2. Відкриваємо новий аркуш («Лист2»), виділяємо курсором комірку A5 і вводимо в неї з клавіатури текст «b^T =». Починаючи з комірки B2 вводимо елементи матриці b^T. В комірку F3 вводимо текст «W =», і починаючи з комірки G2 вводимо елементи матриці W (рис. 2).

2.1. Транспонуємо матрицю b^T. Для цього в комірку A13 вводимо текст «b =». В комірку B12 вводимо формулу «=ТРАНСП(B2:E9)». Матриця b^T має розмірність (8x4), значить транспонована матриця буде мати розмірність (4x8). Виділяємо діапазон комірок від B12 до I15. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 2).

2.2. Помножимо матрицю b на матрицю b^T. Для цього в комірку A19 вводимо текст «B=». В комірку B18 вводимо формулу «=МУМНОЖ(B12:I15;B2:E9)». Результат добутку – матриця B буде мати розмірність (4x4), тому виділяємо діапазон комірок від B18 до E21. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 2).

2.3. Знайдемо матрицю B^{-1}, обернену до матриці B. Для цього в комірку F19 вводимо текст «B^{-1}=». В комірку G18 вводимо формулу «=МОБР(B18:E21)». Обернена матриця B^{-1} буде мати той же розмір, що і вихідна матриця B, тобто (4x4). Тому виділяємо діапазон комірок від G18 до J21, натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат.

2.4. Помножимо матрицю B^{-1} з протилежним знаком на матрицю W. Для цього в комірку A25 вводимо текст «k =». В комірку B24 вводимо формулу «=-МУМНОЖ(G18:J21;G2:G5)». Результат добутку – матриця k буде мати розмір (4x1), тому виділяємо діапазон комірок від B24 до B27. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 2).

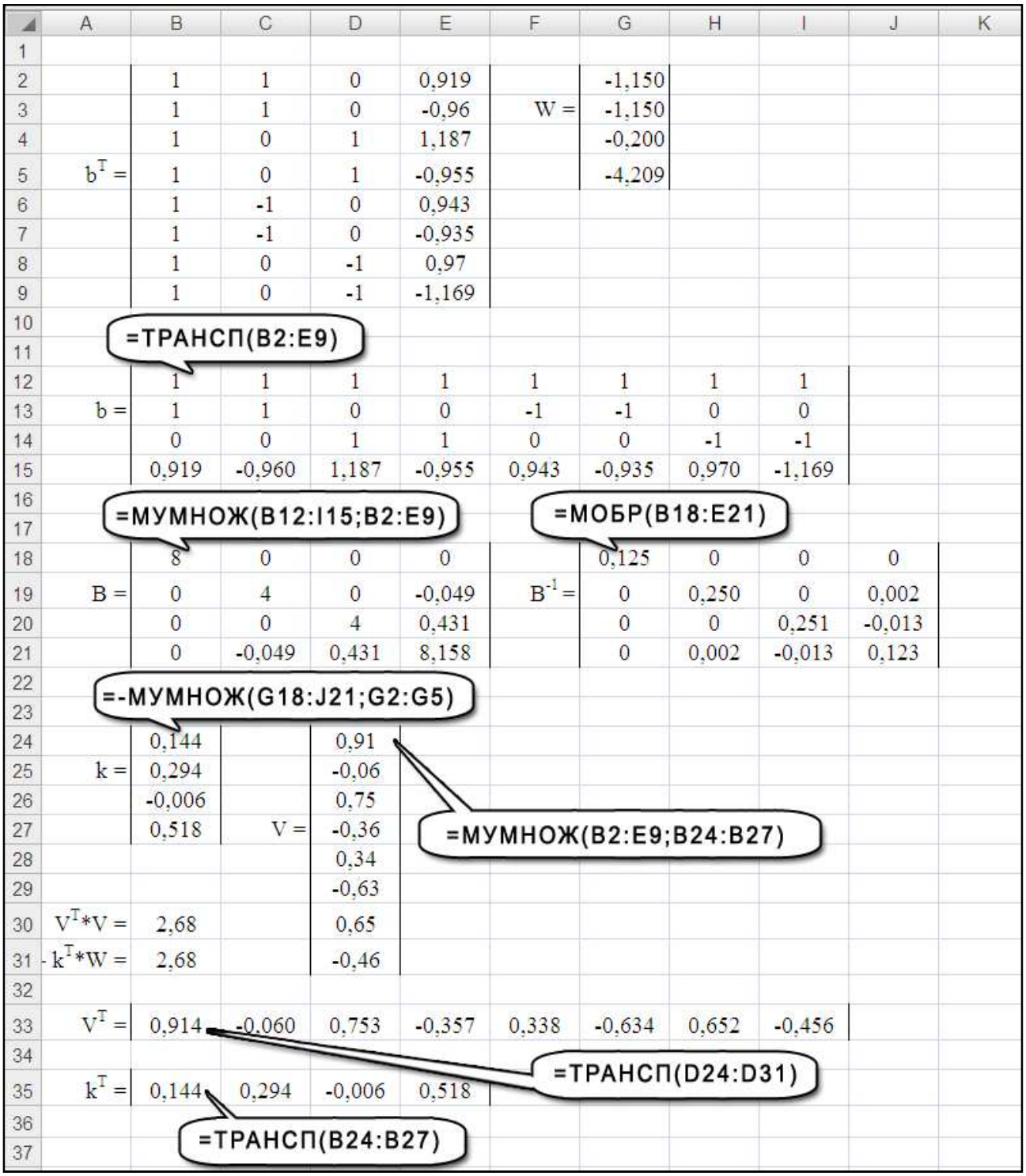


Рис. 2 – Загальний вигляд аркуша з результатами обчислень та формули, введені у відповідні комірки

2.5. Помножимо матрицю b^{T} на матрицю k. Для цього в комірку C27 вводимо текст «V =». В комірку D24 вводимо формулу «=МУМНОЖ(B2:E9;B24:B27)». Результат добутку – матриця V буде мати розмір (8x1), тому виділяємо діапазон комірок від B24 до B31. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 2).

2.6. Транспонуємо матрицю V. Для цього в комірку A33 вводимо текст «V^{T} =». В комірку B33 вводимо формулу «=ТРАНСП(D24:D31)». Матриця V має розмірність (8x1), відповідно матриця V^T буде мати розмірність (1x8). Отже виділяємо діапазон комірок від B33 до I33. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат (рис. 2).

2.7. Транспонуємо матрицю k. Для цього в комірку A35 вводимо текст «k^{T} =». В комірку B35 вводимо формулу «=ТРАНСП(B24:B27)». Матриця k^T буде мати розмірність (1x4), тому виділяємо діапазон комірок від B35 до E35. Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримуємо результат.

2.8. Здійснюємо контроль обчислень шляхом перевірки виконання рівності $V^T V = -kW$. Спочатку находимо добуток матриць V^T і V. Для цього в комірку A30 вводимо текст «V^{T}*V =», а в комірку B30 – формулу «=МУМНОЖ(B33:I33;D24:D31)». Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter – отримуємо результат.

Тепер находимо добуток матриць $-k$ і W. Для цього в комірку A31 вводимо текст «–k^{T}*W =», а в комірку B31 вводимо формулу «-МУМНОЖ(B35:У35;G2:G5)». Натискаємо F2 і комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter – отримуємо результат.

Порівнюємо значення в комірках B30 і B31 – вони повинні співпадати. В даному випадку 2.68 = 2.68 (рис. 2).

2.9. Зберігаємо файл під ім’ям «МОГВ.xlsx», виходимо з програми Microsoft Excel.

2.2. Дослідження похибок на випадковість

Література: [4, с. 35-40], [5, с. 183-214; 246-251.]

Питання для самоперевірки

1. Які існують види похибок вимірювань?
2. Якими властивостями володіють випадкові похибки вимірювань?
3. Назвіть моделі розподілу випадкових похибок вимірювань.
4. Що називають нульовою H_0 і альтернативною H_1 гіпотезами?
5. Що називають середньою квадратичною, середньою та граничною похибками вимірювань?

Мета роботи: засвоєння методики дослідження рядів похибок на випадковість.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. Реально існуючі випадкові похибки вимірювань підлягають нормальному закону розподілу. Але не всякі похибки вимірювань бувають випадковими. Тому виникає необхідність дослідження рядів похибок вимірювань на випадковість. За наведеним прикладом необхідно дослідити ряд похибок на випадковість, перевіривши нульову гіпотезу H_0 про їх нормальний закон розподілу.

Порядок роботи

1. Перевірити необхідні умови випадковості, шляхом перевірки виконання співвідношень

$$\theta \approx \frac{4}{5}m, \tag{1}$$

$$\rho \approx \frac{2}{3}m, \tag{2}$$

де θ – середня похибка результатів вимірювань;

m – середня квадратична похибка результатів вимірювань;

ρ – ймовірна похибка результатів вимірювань.

При цьому середню і середню квадратичну похибки, відповідно, обчислюють за формулами

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n}, \tag{3}$$

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \tag{4}$$

де Δ – істинна похибка результату вимірювання;

n – кількість вимірювань.

Співвідношення (1) і (2) є тільки необхідними, але не достатніми умовами випадковості. Якщо вони не виконуються, подальші дослідження можна не проводити, тобто наведений ряд похибок не є випадковим.

3. Якщо співвідношення (1) і (2) виконуються, необхідно побудувати інтервальний статистичний ряд розподілу похибок вимірювань та відповідний йому дискретний статистичний ряд.

4. За даними побудованих рядів обчислити оцінки параметрів нормального розподілу, а саме середнє вибіркове і вибіркову дисперсію.

5. Знайти всі значення функції густини нормального розподілу за даними дискретного статистичного ряду і на їх основі побудувати криву розподілу та гістограму відносних частот на одному графіку.

6. Із використанням критерію Пірсона χ^2 перевірити справедливість сформульованої нульової гіпотези H_0, якщо альтернативною гіпотезою H_1 буде логічне заперечення нульової гіпотези, тобто досліджуваний ряд похибок вимірювань не підлягає нормальному закону розподілу.

Приклад. *Задано ряд істинних похибок результатів вимірювань деякої величини -7, -6, -20, -2, 16, -7, -9, 2, 4, -7, -9, 2, 4, -7, -5, -3, 10, 5, -3, 3, 4, -8, 12, 6, -9, 5, 3, -2, -8, 9, 7, -4, 10, -16, 15, -8, 6, -7, -3, 4, -5, 9, 14, 11, -6, 2, -13, -8, 11, 16, -14, -7, 1. Потрібно визначити, чи є наведені похибки випадковими, чи носять інший характер.*

Спочатку обчислюємо середню квадратичну похибку за формулою (4)

$$m = \sqrt{\frac{4119}{54}} = 8.73.$$

Знаходимо середню похибку із виразу (3),

$$\theta = \frac{407}{54} = 7.53.$$

Будуємо абсолютний варіаційний ряд наведених похибок, тобто послідовність даних похибок, розміщених в порядку зростання за їх абсолютною величиною: *1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 20*.

З побудованого ряду отримуємо ймовірну похибку, тобто таке значення абсолютного варіаційного ряду, яке ділить його на дві рівні за обсягом частини

$$\rho = \frac{7+7}{2} = 7.0.$$

Перевіряємо виконання необхідних умов випадковості (1) і (2), тобто

$$7.53 \neq 6.98; \;\; 7.00 \neq 5.82.$$

Дані умови є необхідними і, як видно з результатів обчислень, вони не виконуються. Тобто наведений ряд похибок не є випадковим. Але на даному прикладі покажемо як проводити подальші дослідження на випадковість, тобто перевірку достатніх умов випадковості.

Обчислюємо граничну похибку

$$\Delta_{\text{гр}} = 3m = 3 \cdot 8.73 = 26.19,$$

яку не перевищують похибки з наведеного ряду, та середнє арифметичне похибок

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{1}{54} = 0.02,$$

яке для випадкових похибок повинно дорівнювати нулю.

Знаходимо кількість r та довжину h інтервалів за формулою Стерджеса

$$r = 1 + 3.322 \cdot \lg n = 1 + 1.322 \cdot \lg 54 \approx 7.$$

$$h = \frac{\Delta_{max} - \Delta_{min}}{r} = \frac{16 + 20}{7} \approx 5.1.$$

Будуємо інтервальний статистичний ряд розподілу похибок (табл. 1).

Таблиця 1 – *Інтервальний статистичний ряд розподілу похибок*

$[\Delta_i; \Delta_{i+1})$	[-20; -14.9)	[-14.9; -9.8)	[-9.8; -4.7)	[-4.7; 0.4)	[0.4; 5.5)	[5.5; 10.6)	[10.6; 16]
ε_i	-17.5	-12.4	-7.3	-2.2	3.0	8.1	13.3
k_i	2	3	16	6	12	7	8
p_i^*	0.04	0.06	0.30	0.11	0.22	0.13	0.15

В табл. 1 k_i – частота i-го інтервалу (кількість похибок, які потрапляють на даний інтервал); ε_i – середина i-го інтервалу; $p_i^* = \frac{k_i}{n}$ – відносна частота i-го інтервалу.

За даними інтервального статистичного ряду розподілу похибок обчислюємо середнє вибіркове $\bar{\Delta}$, вибіркову дисперсію S^2 та вибіркове середнє квадратичне відхилення S

$$\bar{\Delta} = \sum_{i=1}^{7} \varepsilon_i \cdot p_i^* = -17.5 \cdot 0.04 - 12.4 \cdot 0.06 - 7.3 \cdot 0.30 - 2.2 \cdot 0.11 +$$

$$+ 3.0 \cdot 0.22 + 8.1 \cdot 0.13 + 13.3 \cdot 0.15 = -0.17;$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{7} \varepsilon_i^2 \cdot p_i^* - \overline{\Delta^2} = 306.25 \cdot 0.04 + 153.76 \cdot 0.09 + 53.29 \cdot 0.03 + 4.84 \cdot 0.11$$

$$+ 9.00 \cdot 0.22 + 65 \cdot 61 \cdot 0.13 + 176.89 \cdot 0.15 = 75.04;$$

$$S = \sqrt{S^2} = 8.66.$$

Знаходимо нормуючі аргументи

$$t_i = \frac{\varepsilon_i - \bar{\Delta}}{S},$$

функції густини нормального розподілу та за таблицею (додаток В) знаходимо її значення. Результати заносимо до табл. 2.

Таблиця 2 – *Нормуючі аргументи та значення функції густини розподілу*

ε_i	-17.5	-12.4	-7.3	-2.2	3.0	8.1	13.3
t_i	-2.00	-1.41	-0.82	-0.23	0.37	0.95	1.56
$f(t_i)$	0.0540	0.1476	0.2850	0.3885	0.3726	0.2541	0.1182

Будуємо на одному графіку гістограму відносних частот та криву функції густини нормального розподілу (рис. 1).

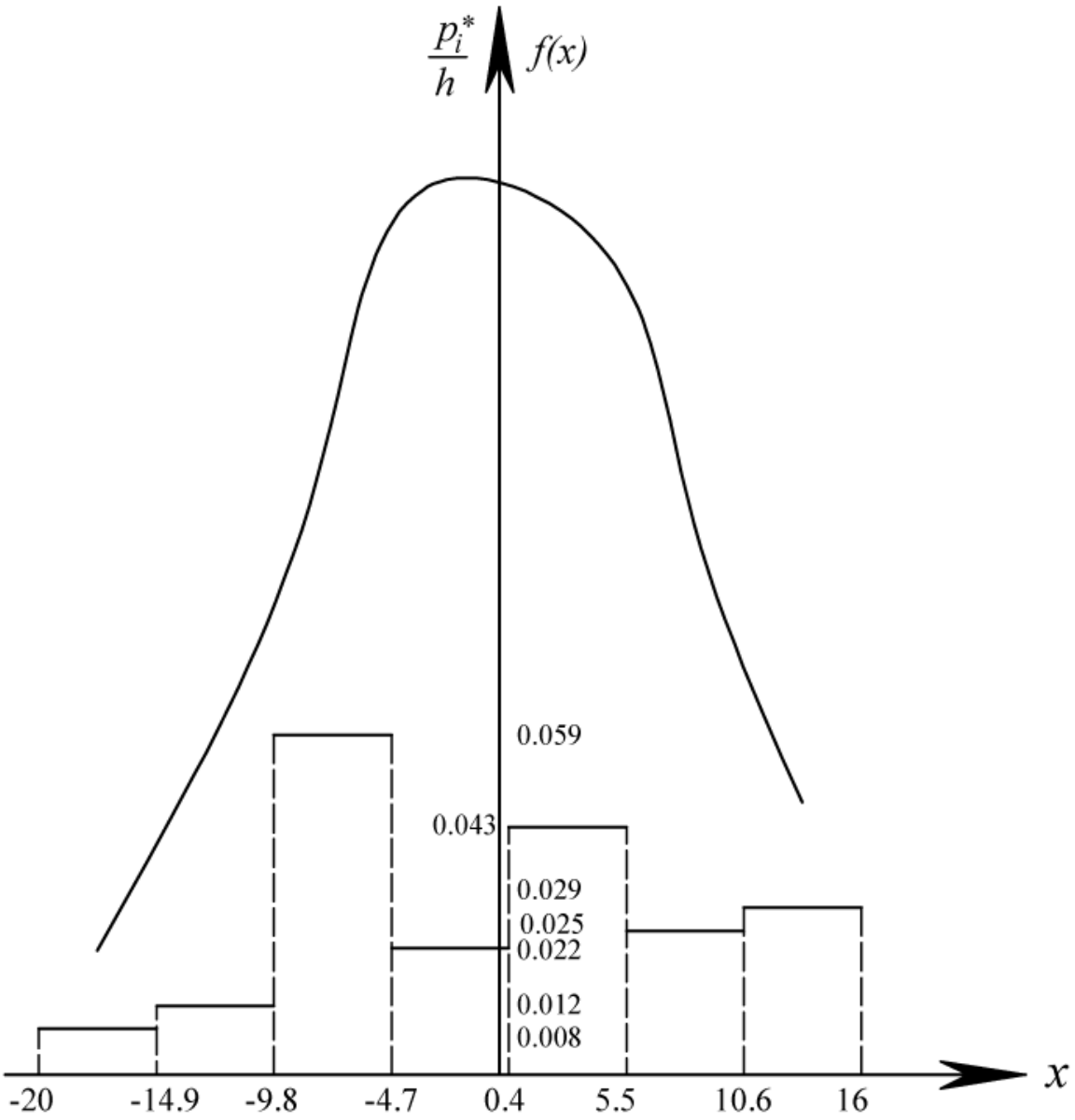


Рис. 3 – Графік функції та гістограма відносних частот

Перевіряємо нульову гіпотезу H_0, яка твердить, що наведений емпіричний розподіл є нормальним. Альтернативною гіпотезою H_1 буде заперечення нульової гіпотези H_0, тобто даний емпіричний розподіл не є нормальним.

Для перевірки нульової гіпотези H_0 використовуємо критерій Пірсона

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{5}$$

де $p_i = \Phi_0(z_{i+1}) - \Phi_0(z_i)$ – ймовірність потрапляння значення істинної похибки на i-й інтервал;

$\Phi_0(z_i)$ – функція Лапласа (додаток Г); $z_i = \frac{\Delta_i - \bar{\Delta}}{s}$.

Спочатку обчислюємо значення z_i, ймовірності p_i та $n \cdot p_i$.

$$n = \sum_{i=1}^{7} k_i = 2 + 3 + 16 + 6 + 12 + 7 + 8 = 54;$$

$$z_1 = \frac{-20 + 0.17}{8.66} = -2.290;\ z_2 = \frac{-14.9 + 0.17}{8.66} = -1.701;$$

$$z_3 = \frac{-9.8 + 0.17}{8.66} = -1.112;\ z_4 = \frac{-4.7 + 0.17}{8.66} = -0.523;$$

$$z_5 = \frac{-0.4 + 0.17}{8.66} = -0.027;\ z_6 = \frac{5.5 + 0.17}{8.66} = 0.655;$$

$$z_7 = \frac{10.6 + 0.17}{8.66} = 1.244;\ z_8 = \frac{16 + 0.17}{8.66} = 1.867;$$

$$p_1 = \Phi_0(z_2) - \Phi_0(z_1) = -\Phi_0(1.701) + \Phi_0(2.290) = -0.4554 + 0.4890 = 0.0336;$$

$$p_2 = \Phi_0(z_3) - \Phi_0(z_2) = -\Phi_0(1.112) + \Phi_0(1.701) = -0.3665 + 0.4554 = 0.0889;$$

$$p_3 = \Phi_0(z_4) - \Phi_0(z_3) = -\Phi_0(0.523) + \Phi_0(1.112) = -0.1985 + 0.3665 = 0.1680;$$

$$p_4 = \Phi_0(z_5) - \Phi_0(z_4) = -\Phi_0(0.027) + \Phi_0(0.523) = -0.0080 + 0.1985 = 0.1905;$$

$$p_5 = \Phi_0(z_6) - \Phi_0(z_5) = \Phi_0(0.655) + \Phi_0(0.027) = 0.2422 + 0.0120 = 0.2542;$$

$$p_6 = \Phi_0(z_7) - \Phi_0(z_6) = \Phi_0(1.244) - \Phi_0(0.655) = 0.3925 - 0.2422 = 0.1503;$$

$$p_7 = \Phi_0(z_8) - \Phi_0(z_7) = \Phi_0(1.867) - \Phi_0(1.244) = 0.4693 - 0.3925 = 0.0768;$$

$$np_1 = 54 \cdot 0.0336 = 2;\ np_2 = 54 \cdot 0.0889 = 5;\ np_3 = 54 \cdot 0.1680 = 9;$$

$$np_4 = 54 \cdot 0.1905 = 10;\ np_5 = 54 \cdot 0.2542 = 14;\ np_6 = 54 \cdot 0.1503 = 8;$$

$$np_7 = 54 \cdot 0.0768 = 4;$$

Знаходимо емпіричне значення критерію χ^2 за формулою (5)

$$\chi^2_{\text{емп}} = \frac{(2-2)^2}{2} + \frac{(3-5)^2}{5} + \frac{(16-9)^2}{9} + \frac{(6-10)^2}{10} +$$

$$+\frac{(12-14)^2}{14} + \frac{(7-8)^2}{8} + \frac{(8-4)^2}{4} = 12.255.$$

Задавши рівень значущості $\alpha = 0.05$ та визначивши кількість ступенів довільності $r = 7 - 3 = 4$, за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток Д) знаходимо точку правобічної критичної області $\chi^2_{\text{кр}}(0.05; 4) = 9.488$.

Оскільки $\chi^2_{\text{кр}} < \chi^2_{\text{емп}}$, то нульова гіпотеза H_0 про нормальний розподіл похибок результатів вимірювань відхиляється і на цьому завершується перевірка достатніх умов випадковості.

2.3. Оцінка точності функцій виміряних величин

Література: [4, с. 48-52; 54-60], [5, с. 251-260], [6, с. 31-34].

Питання для самоперевірки

1. На які види діляться вимірювання за точністю, за кількістю, за фізичним виконанням?
2. З якою метою виконують надлишкові вимірювання?
3. Приведіть приклади прямих і непрямих вимірювань в геодезії.
4. Сформулюйте основну теорему теорії похибок.
5. Чим відрізняється запис функції в явному та неявному вигляді?
6. Що називають похідною функції?

Мета роботи: практичне застосування основної теореми теорії похибок для оцінки точності функцій виміряних величин.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. При непрямих вимірюваннях значення шуканою величини отримують через безпосередньо виміряні величини. Оскільки значення безпосередньо виміряних величин отримані з похибками, то і значення шуканої величини, як функції від них, також буде отримано з якоюсь похибкою. Тому виникає задача визначення середньої квадратичної похибки функції виміряних величин.

Якщо є функція

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_t), \tag{6}$$

аргументи якої $x_1, x_2, \dots, x_t$ – незалежні результати безпосередніх вимірювань величин $X_1, X_2, \dots, X_t$, виконаних із середніми квадратичними похибками

$m_1, m_2, \dots, m_t$, то середня квадратична похибка даної функції дорівнюватиме

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 m_t^2}, \qquad (7)$$

де $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ – часткові похідні функції виміряних величин;

m_i – середні квадратичні похибки виміряних величин.

Необхідно вирішити три задачі на визначення середньої квадратичної похибки функції виміряних величин відповідно до свого варіанту.

Порядок роботи

1. Записати умову задачі в скороченому вигляді.
2. Накреслити пояснювальну схему до розв'язання задачі.
3. Встановити функціональну залежність між шуканою величиною та безпосередньо виміряними величинами.
4. Записати функцію (6) в явному вигляді.
5. Знайти часткові похідні цієї функції за всіма незалежними змінними.
6. Підставити часткові похідні й середні квадратичні похибки в формулу (7).
7. Виконати необхідні математичні перетворення й отримати кінцевий результат.

Приклад. *Обчислити прирости координат ΔX, ΔY та їх середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$, $m_{\Delta Y}$, якщо довжина лінії виміряна з середньою квадратичною похибкою m_d = 0.1 м, і становить d = 120.0 м, а її дирекційний кут α = 60˚00' виміряний з середньою квадратичною похибкою m_α = 1.5' (рис.4)*

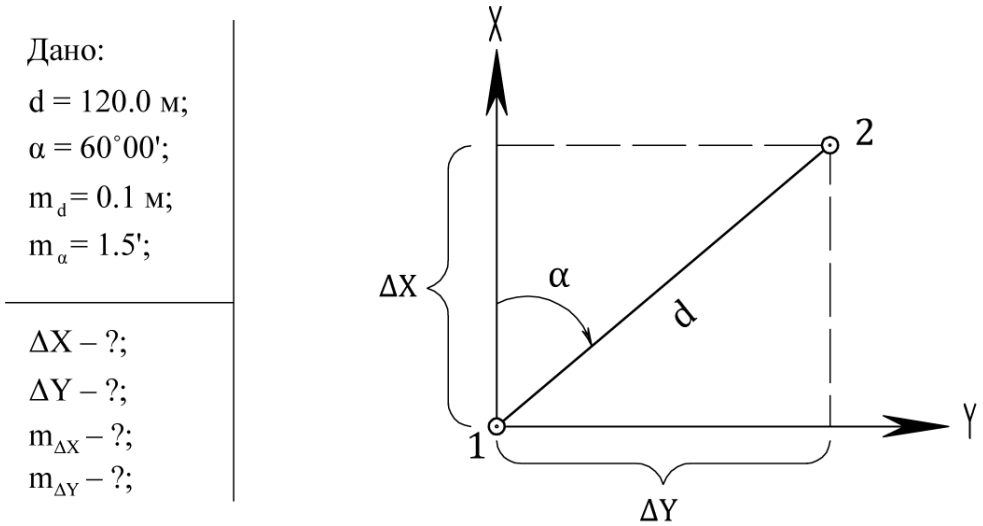


Рис. 4 – Схема, що пояснює зміст задачі

Виразимо функціонально прирости координат ΔX та ΔY через лінію d та її дирекцій ний кут α

$$\Delta X = d \cdot cos\alpha;$$
$$\Delta Y = d \cdot sin\alpha.$$

Обчислюємо значення приростів координат ΔX та ΔY

$$\Delta X = 120 \cdot cos\, 60^{\circ}00' = 60.0 \text{ м};$$
$$\Delta Y = 120 \cdot sin\, 60^{\circ}00' = 103.9 \text{ м}.$$

Користуючись таблицею похідних (додаток Е), знайдемо часткові похідні функцій ΔX та ΔY за змінними d і α.

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = cos\alpha;\ \frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = -d \cdot sin\alpha;$$
$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = sin\alpha;\ \frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = d \cdot cos\alpha.$$

Обчислимо значення часткових похідних $\frac{\partial \Delta X}{\partial d}$, $\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \Delta Y}{\partial d}$ і $\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha}$.

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = \cos 60^{\circ}00' = 0.5000';\ \frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = -120.0 \cdot \sin 60^{\circ}00' = 103.92 \text{ м};$$
$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = \sin 60^{\circ}00' = 0.8660;\ \frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = 120 \cdot \cos 60^{\circ}00' = 60.00 \text{ м}.$$

Підставляємо значення часткових похідних та середніх квадратичних похибок у вираз (2),

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(0.5000)^2 \cdot 0.1^2 + 103.92^2 \cdot \frac{1.5^2}{\rho^2}} = 0.05 \text{ м},$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(0.8660)^2 \cdot 0.1^2 + 60.00^2 \cdot \frac{1.5^2}{\rho^2}} = 0.09 \text{ м},$$

де ρ = 3438' – кількість мінут у радіані.

Ділення на ρ^2 в даному прикладі здійснюється тому, що середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$, $m_{\Delta Y}$ виміряних приростів ΔX, ΔY виражаються в лінійних одиницях.

Отже прирости координат дорівнюють

$$\Delta X = 60.0 \pm 0.05 \text{ м};$$
$$\Delta Y = 103.9 \pm 0.09 \text{ м}.$$

2.4. Математичне опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини

Література: [4, с. 60-68], [5, с. 260-263; 270-27], [6, с. 13-15; 16-18; 21-23].

Питання для самоперевірки

1. Які вимірювання називають рівноточними?
2. Чому за кінцевий результат вимірювань приймають арифметичну середину?
3. Назвіть властивості простої арифметичної середини.
4. За якою формулою обчислюють середню квадратичну похибку простої арифметичної середини?
5. Яка величина служить оцінкою точності результатів рівноточних вимірювань?

Мета роботи: практичне застосування формул математичного опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини; засвоєння методу визначення найбільш надійного або вірогіднішого значення вимірюваної величини та оцінки точності вимірювань.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. В результаті повторних рівноточних вимірювань однієї величини *X*, істинне значення якої є невідомим, отриманий ряд результатів

$$l_1, l_2 \dots l_n.$$

Необхідно обчислити найбільш надійне значення вимірюваної величини *X*, обчислити середні квадратичні похибки одного вимірювання і простої арифметичної середини результатів вимірювань. Оцінити їх надійність.

Порядок роботи

1. Визначити вірогідніше значення вимірюваної величини за формулою

$$L = \frac{[l]}{n}, \tag{8}$$

де L – проста арифметична середина результатів вимірювань;

$[l]$ – сума результатів вимірювань;

n – кількість вимірювань.

Замість формули (8) на практиці використовують більш зручну формулу

$$L = L_0 + \frac{[\delta]}{n}, \tag{9}$$

де L_0 – так званий «умовний нуль».

За умовний нуль зазвичай обирають найменше значення з наведеного ряду результатів вимірювань, або інше доцільно обране значення таким чином, щоб різниці

$$\delta_i = l_i - L_0 \tag{10}$$

були малими величинами.

Щоб не накопичувати похибки заокруглення, просту арифметичну середину L обчислюють з числом десяткових знаків на два більше, ніж у результатах вимірів l_i. Потім заокруглюють це значення, залишаючи кількість десяткових знаків на один більше, ніж у результатах вимірювань. Таким чином, отримують дещо зміщене значення L', яке відрізняється від L на малу величину

$$\beta = L' - L. \tag{11}$$

2. Обчислити поправки, тобто відхилення результатів вимірювань l_i від арифметичної середини, за формулою

$$v_i = l_i - L'. \tag{12}$$

Теоретично контролем обчислення поправок слугує четверта властивість простої арифметичної середини [2]. На практиці внаслідок заокруглення простої арифметичної середини на величину β, за формулою (12) мі отримуємо зміщенні поправки. Які, в свою чергу, теж відрізняються від вірогідніших на величину β. Тому контролем обчислення поправок слугує рівність

$$[v] = n \cdot \beta. \tag{13}$$

3. Двічі, враховуючи вираз

$$[V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n}, \tag{14}$$

обчислити емпіричну середню квадратичну похибку окремого вимірювання за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}. \tag{15}$$

4. Так як емпірична середня квадратична похибка, обчислена за формулою (15) – величина наближена, то необхідно оцінити її надійність. Тобто обчислити середню квадратичну похибку середньої квадратичної похибки. Для цього застосовують формулу

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{16}$$

5. Обчислити середню квадратичну похибку простої арифметичної середини за формулою

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

6. Обчислити надійність середньої квадратичної похибки простої арифметичної середини за формулою

$$m_M = \frac{m_m}{\sqrt{n}}. \tag{18}$$

Приклад. *Горизонтальний кут виміряний 9 прийомами теодолітом 2Т5. Результати вимірювань наведені в табл. 3. Виконати математичне опрацювання результатів рівноточних вимірювань.*

Таблиця 3 – *Результати математичного опрацювання рівноточних вимірювань*

№	Горизонтальний кут, l_i	δ, сек.	δ^2, сек^2.	v, сек.	v^2, сек^2.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	110˚ 08' 38.2"	5.1	26.01	-0.76	0.5776
2	110˚ 08' 43.9"	10.8	116.64	4.94	24.4036
3	110˚ 08' 33.1"	0	0	-5.86	34.3396
4	110˚ 08' 40.6"	7.5	56.25	1.64	2.6896
5	110˚ 08' 43.7"	10.6	112.36	4.74	22.4676
6	110˚ 08' 36.3"	3.2	10.24	-2.66	7.0756
7	110˚ 08' 39.1"	6.0	36.00	0.14	0.0196
8	110˚ 08' 36.5"	3.4	11.56	-2.46	6.0516
9	110˚ 08' 39.2"	6.1	37.21	0.24	0.0576
Σ		52.7	406.27	0.04	97.6824

За умовний нуль приймаємо найменший з результатів вимірювань горизонтального кута, тобто

$$L_0 = 110° \, 08' \, 33.1".$$

Обчисливши за формулою (10) різниці δ_i, находимо їх суму

$$[\delta] = 52.7".$$

Результати обчислень заносимо до табл. 3 (колонка 3). За формулою (9) обчислюємо вірогідніше значення горизонтального кута

$$L = 110° \, 08' \, 33.1" + \frac{52.7"}{9} = 110° \, 08' \, 38.956".$$

Заокруглюємо отриманий результат до 0.01"

$$L' = 110° \ 08' \ 38.96'',$$

і находимо похибку заокруглення β за формулою (11):

$$\beta = 110° \ 08' \ 38.96'' - 110° \ 08' \ 38.956'' = 0.004''$$

Для оцінки точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою (12), і находимо їх суму. Результати заокруглюємо до 0.01" і заносимо до табл. 3 (колонка 5). Виконуємо контроль обчислень шляхом підстановки отриманих значень в рівність (13)

$$0.04 = 0.04.$$

Находимо квадрати поправок і їх сумарне значення $[v^2]$, результати заокруглюємо до 0.0001 сек.^{2} і заносимо до табл. 3 (колонка 6). Перевіряємо виконання рівності (14)

$$97.6824 = 406.27 - \frac{52.7^2}{9},$$

$$97.6824 \approx 97.6822.$$

За формулою (15) обчислюємо емпіричну середню квадратичну похибку одного вимірювання

$$m = \sqrt{\frac{97.6824}{9-1}} = 3.49''.$$

Обчислюємо середню квадратичну похибку простої арифметичної середини за формулою (17)

$$M = \frac{3.49}{\sqrt{9}} = 1.16''.$$

Оцінюємо надійність величин m і M за формулами (16) і (18) відповідно

$$m_m = \frac{3.49}{\sqrt{2 \cdot (9-1)}} = 0.87'';$$

$$m_M = \frac{0.87}{\sqrt{9}} = 0.29''.$$

Остаточний результат математичного опрацювання рівноточних вимірювань горизонтального кута буде таким

$$L = 110° \ 08' \ 38.96'' \pm 1.16''.$$

Порядок обрахунків в програмі Microsoft Excel

Розглянемо методику математичного опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини для наведеного вище прикладу засобами Microsoft Excel.

Запускаємо Microsoft Excel, відкриваємо файл МОГВ.xlsx. На новому аркуші («Лист3») курсором виділяємо комірку B2 і вводимо з клавіатури заголовок «Математичне опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини». Всі текстові і числові дані робимо шрифтом Times New Roman чорного кольору, розміром 12 pt.

Пропускаємо один рядок. Починаючи з комірки B4 креслимо таблицю за зразком, приведеним на рис. 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Математичне опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини								
3										
4		№	Горизонтальний кут, l_i			δ, сек.	$δ^2$, $сек^2$.	v, сек.	v^2, $сек^2$.	
5			°	′	″					
6		1	2	3	4	5	6	7	8	
7		1	110	8	38,2					
8		2	110	8	43,9					
9		3	110	8	33,1					
10		4	110	8	40,6					
11		5	110	8	43,7					
12		6	110	8	36,3					
13		7	110	8	39,1					
14		8	110	8	36,5					
15		9	110	8	39,2					
16		∑								
17										

Рис. 5 – Заповнення таблиці з вихідними даними.

Таблиця повинна мати 8 колонок. Кількість рядків повинна відповідати числу вимірювань горизонтального кута (відповідно до завдання) плюс верхній рядок із назвою колонок, другий рядок із номерами колонок і нижній рядок для підбиття суми отриманих значень.

В другу, третю і четверту колонки відповідно вводимо значення градусів, мінут і секунд виміряного кута. Ці колонки об’єднуємо під загальною назвою «Горизонтальний кут, l_i».

Для об’єднання суміжних комірок виділяємо їх курсором і на вкладці «Главная» в групі «Выравнивание» обираємо команду «Объединить и поместить в центре» (рис. 6).

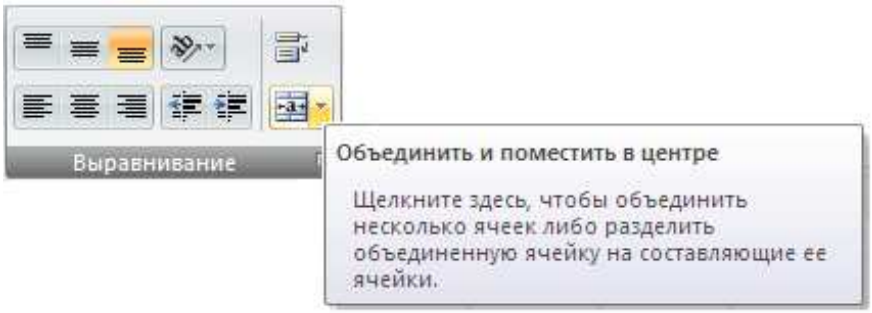


Рис. 6 – Кнопка об'єднання комірок

Для введення символів «δ», «°», «′», «″» на вкладці «Вставка» в групі «Текст» обираємо команду «Символ». У вікні, яке з'явилось (рис. 7) обираємо необхідний символ і натискаємо на клавішу «Вставить».

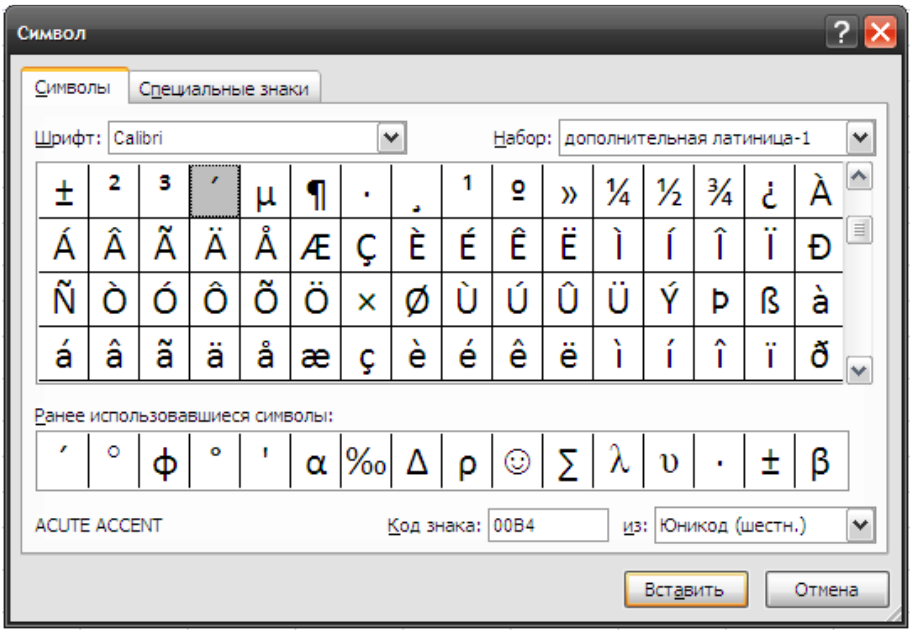


Рис. 7 – Таблиця символів

Для введення надрядкового символу натискаємо праву клавішу миші, в контекстному меню обираємо команду «Формат ячеек…». У вікні, яке з'явилось (рис. 8), у полі «Видоизменение» ставимо галочку напроти пункту «Надстрочный», і натискаємо на клавішу «ОК». Після цього вводимо символ з клавіатури.

Для накреслення границь таблиці, виділяємо курсором діапазон комірок, які займає таблиця (в даному випадку від B4 до I16). На вкладці «Главная» в групі «Шрифт» із випадаючого меню команди «Границы» обираємо пункт «Все границы» (рис. 9).

Під таблицею, пропустивши один вільний рядок, записуємо значення умовного нуля L_0, в якості якого приймаємо найменший з результатів вимірювань горизонтального кута. Запис оформлюємо таким чином (рис. 10): в

комірку B18 вводимо з клавіатури текст «L_0=», в комірку C18 вводимо формулу «=C7», в комірку D18 вводимо формулу «=D7», в комірку E18 вводимо формулу «=МИН(E7:E15)», де E7:E15 це діапазон комірок, з яких треба вибрати мінімальне значення.

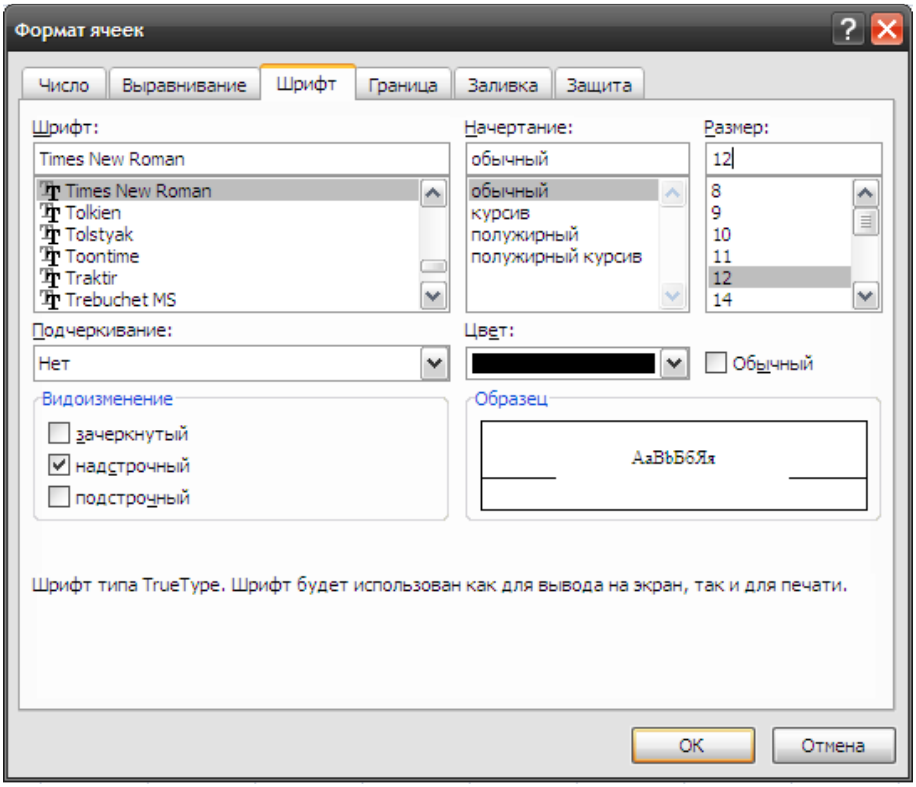


Рис. 8 – Установки властивостей шрифту

В п’ятій колонці таблиці (рис. 10) обчислюємо значення різниць δ_i. Для цього в комірку F7 вводимо формулу «=E7-E18», натискаємо на клавіатурі клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=E7-E18». Копіюємо дану формулу в усі рядки п’ятої колонки, крім нижнього. Для цього наводимо на нижній правий кут виділеної чарунки F7 курсор так, щоб він прийняв форму чорного перехрестя. Потім, затиснувши ліву клавішу миші, проводимо курсор вниз до комірки F15.

Обчислюємо суму різниць $[\delta]$. Для цього в комірку F16 вводимо формулу «=СУММ(F7:F15)».

Під значенням умовного нуля, на рядок нижче (рис. 10), обчислюємо значення простої арифметичної середини L. В комірці B19 записуємо «L=», в комірку C19 вводимо формулу «=C18», в комірку D19 вводимо формулу «=D18», в комірку E19 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(F16/B15;3)+E18», де цифра «3» вказує на число десяткових розрядів, до якого треба заокруглити кінцевий результат.

Отриманий результат заокруглюємо до 0.01" і отримуємо значення L'. Для цього до комірки B20 вводимо текст «L'=», в комірку C20 вводимо формулу

«=C19», в комірку D20 вводимо формулу «=D19», в комірку E20 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E19;2)».

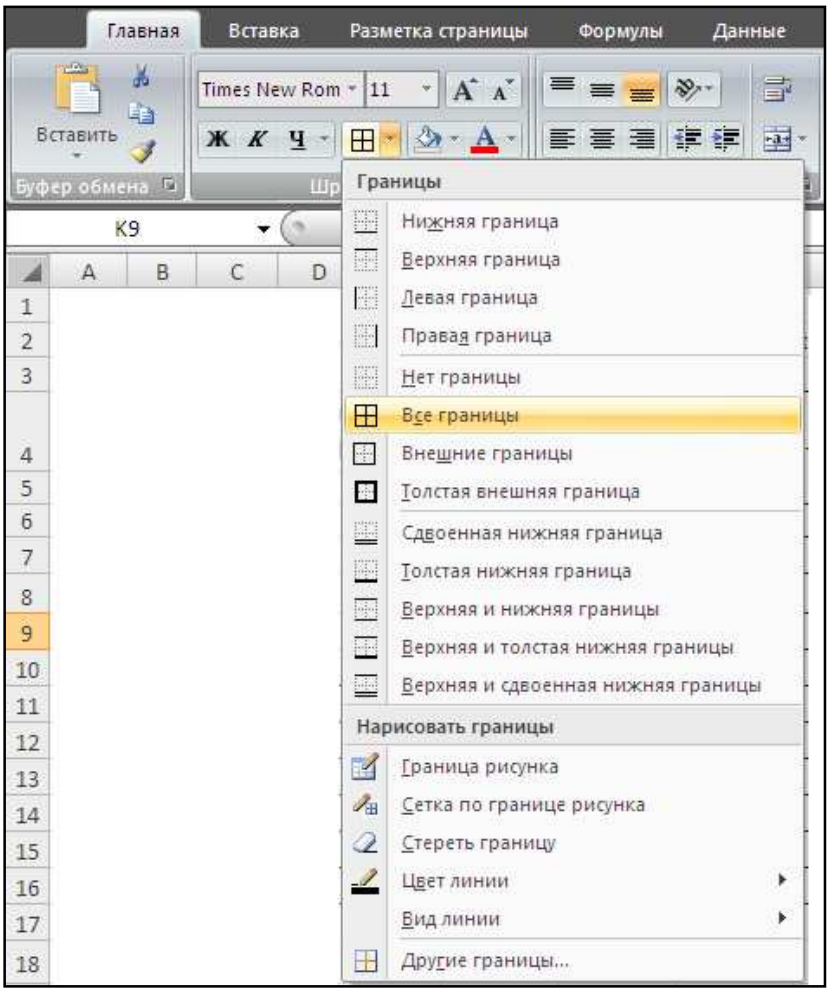


Рис. 9 – Меню «Границы»

Находимо похибку заокруглення β. В комірку B22 (рис. 10) вводимо текст «β =», а в комірку C22 вводимо формулу «=E20-E19».

В шостій колонці таблиці обчислюємо значення δ^2 і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до двох десяткових розрядів. Для цього в комірку G7 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E7^2;2)», і копіюємо її на всі рядки шостої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(G7:G15)».

В сьомій колонці обчислюємо поправки v і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до двох десяткових розрядів. Для цього в комірку H7 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E7-E20;2)», ставимо курсор перед адресою комірки «E20», натискаємо клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=ОКРУГЛ(E7-E20;2)»; копіюємо її на всі рядки сьомої колонки, крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(H7:H15)».

Математичне опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини

№	Горизонтальний кут, l_i			δ, сек.	δ^2, сек^2.	v, сек.	v^2, сек^2.
	°	′	″				
1	2	3	4	5	6	7	8
1	110	8	38,2	5,1	26,01	-0,76	0,5776
2	110	8	43,9	10,8	116,64	4,94	24,4036
3	110	8	33,1	0,0	0,00	-5,86	34,3396
4	110	8	40,6	7,5	56,25	1,64	2,6896
5	110	8	43,7	10,6	112,36	4,74	22,4676
6	110	8	36,3	3,2	10,24	-2,66	7,0756
7	110	8	39,1	6,0	36,00	0,14	0,0196
8	110	8	36,5	3,4	11,56	-2,46	6,0516
9	110	8	39,2	6,1	37,21	0,24	0,0576
∑				**52,7**	**406,27**	**-0,04**	**97,6824**
						0,04	97,68222
L_0 =	110	8	33,1				
L =	110	8	38,956				
L' =	110	8	38,96				
β =	0,004						
m =	3,49						
M =	1,16						
m_m =	0,87						
m_M =	0,29						

=МИН(E7:E15)

=ОКРУГЛ(F16/B15;3)+E18

=ОКРУГЛ(E19;2)

=E20-E19

=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(I16/(9-1));2)

=ОКРУГЛ(C24/КОРЕНЬ(9);2)

=ОКРУГЛ(C24/КОРЕНЬ(2*(9-1));2)

=ОКРУГЛ(C26/КОРЕНЬ(9);2)

Рис. 10 – Загальний вигляд аркуша з результатами обчислень

Виконуємо контроль обчислень, перевіркою рівності (13). Для цього під нижнім рядком сьомої колонки таблиці, в комірку H17 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(9*C22;2)», де цифра «9» дорівнює кількості вимірювань. Отримані значення в комірках H16 і H17 мають збігатися. В даному випадку умова виконується: 0.04 = 0.04.

В восьмій колонці таблиці находимо квадрати поправок і їх сумарне значення $[v^2]$, результати заокруглюємо до чотирьох десяткових розрядів. Для цього в комірку I7 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(H7^2;4)» і копіюємо її на всі

рядки восьмої колонки, крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(I7:I15)».

Перевіряємо виконання рівності (14). Для цього під нижнім рядком восьмої колонки таблиці, в комірку I17 вводимо формулу «=G16-F16^2/9», де цифра «9» дорівнює кількості вимірювань. В результаті маємо

$$97.6824 \approx 97.6822,$$

що не виходить за межі точності обчислень.

Обчислюємо емпіричну середню квадратичну похибку одного вимірювання m. Для цього в комірку B24 (рис. 10) вводимо текст «m =», а в комірку C24 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(I16/(9-1));2)», де цифра «9» дорівнює кількості вимірювань.

Обчислюємо середню квадратичну похибку простої арифметичної середини M. Для цього в комірку B25 вводимо текст «M =», а в комірку C25 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C24/КОРЕНЬ(9);2)», де цифра «9» дорівнює кількості вимірювань.

Оцінюємо надійність величини m. Для цього в комірку B26 вводимо текст «m_m=», а в комірку C26 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C24/КОРЕНЬ(2*(9-1));2)», де цифра «9» дорівнює кількості вимірювань.

Оцінюємо надійність величини M. Для цього в комірку B27 вводимо текст «m_M=», а в комірку C27 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C26/ КОРЕНЬ(9);2)», де цифра «9» дорівнює кількості вимірювань.

Зберігаємо зміни в файлі МОГВ.xlsx, виходимо з Microsoft Excel.

2.5. Математичне опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини

Література: [4, с. 75-77; 80-85; 88-90], [5, с. 276-276; 285-290], [6, с. 39-44; 49-50].

Питання для самоперевірки

1. Які вимірювання називають нерівноточними?
2. Що називають вагою результатів нерівноточних вимірювань?
3. Назвіть властивості загальної арифметичної середини.
4. За якою формулою обчислюють середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини?

Мета роботи: практичне застосування формул математичного опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини; засвоєння методу

визначення найбільш надійного або вірогіднішого значення вимірюваної величини та оцінки точності вимірювань.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. В результаті повторних нерівноточних вимірювань однієї величини *X*, істинне значення якої є невідомим, отриманий ряд результатів

$$l_1, l_2 \dots l_n$$

із середніми квадратичними похибками

$$m_1, m_2 \dots m_n.$$

Необхідно обчислити найбільш надійне значення вимірюваної величини *X*, обчислити середні квадратичні похибки одиниці ваги і загальної арифметичної середини результатів вимірювань. Оцінити їх надійність.

Порядок роботи

1. Обчислити ваги p_i результатів нерівноточних вимірювань за формулою

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \tag{19}$$

де m_i – середня квадратична похибка результату вимірювання;

c – коефіцієнт пропорційності, який може набувати довільних значень.

Коефіцієнт c обирають таким чином, щоб значення ваг були близькими до одиниці, наприклад, використовуючи формулу:

$$c = \frac{(m_{max-1}^2 + m_{min+1}^2)}{2}, \tag{20}$$

де m_{max-1} – друга за величиною найбільша середня квадратична похибка;

m_{min+1} – друга за величиною найменша середня квадратична похибка.

2. Обчислити вірогідніше значення вимірюваної величини, як загальну арифметичну середину результатів вимірювань, за формулою

$$L = \frac{[pl]}{[p]}, \tag{21}$$

де l – результат вимірювання;

p – вага результату вимірювання.

Якщо кількість вимірювань n є достатньо великою, то замість формули (21) на практиці застосовують більш зручну формулу

$$L = L_0 + \frac{[p\delta]}{[p]}, \tag{22}$$

де L_0 – так званий «умовний нуль», тобто найменше значення з приведеного ряду результатів вимірювань, або інше доцільно обране значення таким чином, щоб різниці (10) були малими величинами.

Щоб не накопичувати похибки заокруглення, загальну арифметичну середину L обчислюють з числом десяткових знаків на три більшим, ніж в результатах вимірювань l_i. Потім заокруглюють це значення, залишаючи таку ж кількість десяткових знаків, як у результатах вимірювань. Таким чином, отримують дещо зміщене значення L', яке відрізняється від L на малу величину β, обчислену за формулою (11).

3. Обчислити поправки, тобто відхилення результатів вимірювань l_i від загальної арифметичної середини L' за формулою (12).

Так як обчислення поправок виконують з використанням заокругленого на величину β значення загальної арифметичної середини, замість вірогідніших поправок отримують їх зміщені значення. Які, в свою чергу, також відрізняються від вірогідніших на величину β. Тому контролем обчислення поправок слугує не четверта властивість загальної арифметичної середини [2], а рівність

$$[pv] = [p] \cdot \beta. \tag{23}$$

4. Двічі, з урахуванням виразу

$$[pv^2] = [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} \tag{24}$$

обчислити емпіричну середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \tag{25}$$

5. Так як емпірична середня квадратична похибка одиниці ваги, обчислена за формулою (25), є величиною наближеною, то необхідно оцінити її надійність. Тобто обчислити середню квадратичну похибку середньої квадратичної похибки. Для цього застосовують формулу

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{26}$$

6. Обчислити середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (27)$$

7. Оцінити надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини за формулою

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (28)$$

Приклад. *Виконано 13 серій вимірювань довжини лінії світлодалекоміром. В кожній серії виконано різну кількість прийомів. Середнє значення довжини лінії в кожній серії і її середня квадратична похибка приведені в табл. 4. Виконати математичне опрацювання результатів нерівно точних вимірювань і оцінити їх надійність.*

Таблиця 4 – *Результати математичного опрацювання нерівноточних вимірювань*

№	l, м.	m, мм.	p	δ, мм.	$p\delta$	$p\delta^2$	v, мм.	pv	pv^2
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	251.035	3.2	1.2	2	2.4	4.8	14	16.8	235.2
2	251.035	4.2	0.7	2	1.4	2.8	14	9.8	137.2
3	251.060	0.6	33.3	27	899.1	24275.7	-11	-366.3	4029.3
4	251.033	1.6	4.7	0	0.0	0.0	16	75.2	1203.2
5	251.045	1.5	5.3	12	63.6	763.2	4	21.2	84.8
6	251.043	2.4	2.1	10	21.0	210.0	6	12.6	75.6
7	251.044	1.8	3.7	11	40.7	447.7	5	18.5	92.5
8	251.051	4.7	0.5	18	9.0	162.0	-2	-1.0	2.0
9	251.037	4.9	0.5	4	2.0	8.0	12	6.0	72.0
10	251.052	3.1	1.2	19	22.8	433.2	-3	-3.6	10.8
11	251.043	0.6	33.3	10	333.0	3330.0	6	199.8	1198.8
12	251.049	2.7	1.6	16	25.6	409.6	0	0.0	0.0
13	251.046	1.2	8.3	13	107.9	1402.7	3	24.9	74.7
Σ			**96.4**		**1528.5**	**31449.7**		**13.9**	**7216.1**

Находимо коефіцієнт пропорційності c, використовуючи вираз (20)

$$c = \frac{(4.7^2+1.2^2)}{2} \approx 12.$$

За формулою (19) обчислюємо ваги p_i вимірювань і підраховуємо їх суму. Результати заокруглюємо до 0.1 і заносимо до табл. 4 (колонка 4).

За умовний нуль приймаємо найменший із результатів вимірювань довжини лінії, тобто

$$L_0 = 251.033 \text{ м.}$$

Обчислюючи за формулою (10) різниці δ_i, виражаємо їх значення в міліметрах і заносимо до табл. 4 (колонка 5).

Обчислюємо добутки $p\delta$, результати заокруглюємо до 0.1 і підраховуємо їх суму

$$[p\delta] = 1528.5.$$

Результати обчислень заносимо до табл. 4 (колонка 6). За формулою (22) обчислюємо вірогідніше значення довжини лінії

$$L = 251.048856 \text{ м.}$$

Заокруглюємо отриманий результат до 0.001 мм,

$$L' = 251.049 \text{ м}$$

і находимо похибку заокруглення β за формулою (11)

$$\beta = 251.049 - 251.048856 = \text{-}0.000144 \text{ м} = \text{-}0.144 \text{ мм.}$$

Для оцінки точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою (12). Далі обчислюємо добутки pv і находимо їх суму, результати заносимо до табл. 4 (колонка 9). Виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність (23)

$$13.9 = 13.9.$$

Обчислюємо добутки $p\delta^2$, і pv^2 їх сумарні значення. Результати заокруглюємо до 0.1 і заносимо до табл. 4 (колонки 7 і 10 відповідно).

Двічі, з урахуванням виразу (24), обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (25)

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{7216.1}{13-1}} = \sqrt{\frac{31449.7 - \frac{1528.5^2}{96.4}}{13-1}} = 24.5 \text{ мм.}$$

Обчислюємо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (27)

$$M = \pm\frac{24.5}{\sqrt{96.4}} = 2.5 \text{ мм.}$$

Оцінюємо надійність величин m і M за формулами (26) і (28) відповідно

$$m_\mu = \frac{24.5}{\sqrt{2 \cdot (13 - 1)}} = 5.0 \text{ мм};$$

$$m_M = \frac{2.5}{\sqrt{96.4}} = 0.51 \text{ мм}.$$

Остаточний результат математичного опрацювання нерівно точних вимірювань довжини лінії буде таким

$$L = 251.049 \text{ м} \pm 2.5 \text{ мм}.$$

Порядок обрахунків в програмі Microsoft Excel

Розглянемо методику математичного опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини для наведеного вище прикладу засобами Microsoft Excel.

Запускаємо Microsoft Excel, відкриваємо файл МОГВ.xlsx. На новому аркуші («Лист4») курсором виділяємо комірку С2 і вводимо з клавіатури заголовок «Математичне опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини». Всі текстові і числові дані робимо шрифтом Times New Roman чорного кольору, розміром 12 pt.

Пропускаємо один рядок. Починаючи з комірки В4 креслимо таблицю за зразком, приведеним на рис. 11.

Таблиця повинна мати 10 колонок. Кількість рядків повинна відповідати числу вимірювань довжини лінії (відповідно до завдання) плюс верхній рядок із назвою колонок, другий рядок із номерами колонок і нижній рядок для підбиття сумарних значень розрахунків.

В другу колонку вводимо результати вимірювання довжини лінії, в третю – їх середні квадратичні похибки.

Порядок введення символів у назви колонок таблиці і накреслення її границь було розглянуто раніше (див. п. 2.4).

Серед значень приведених в третій колонці находимо другу за величиною найбільшу m_{max-1} і другу за величиною найменшу m_{min+1} середні квадратичні похибки. Їх значення заносимо відповідно до комірок С21 і С22 (рис. 12).

Обчислюємо коефіцієнт пропорційності c. Для цього в комірку В23 вводимо текст «с =», а в комірку С23 вводимо формулу «=ОКРУГЛ((С21^2+С22^2)/2;0)».

Математичне опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини

№	l, м	m, мм	p	δ, мм	pδ	$p\delta^2$	v, мм	pv	pv^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	251,035	3,2							
2	251,035	4,2							
3	251,060	0,6							
4	251,033	1,6							
5	251,045	1,5							
6	251,043	2,4							
7	251,044	1,8							
8	251,051	4,7							
9	251,037	4,9							
10	251,052	3,1							
11	251,043	0,6							
12	251,049	2,7							
13	251,046	1,2							
∑									

Рис. 11 – Заповнення таблиці з вихідними даними

Нижче записуємо значення умовного нуля L_0, в якості якого приймаємо найменший з результатів вимірювань довжини лінії. Запис оформлюємо таким чином (рис. 12): в комірку B24 вводимо з клавіатури текст «L_0=», в комірку C24 вводимо формулу «=МИН(C6:C18)».

В четвертій колонці таблиці обчислюємо ваги p_i результатів вимірювань і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до одного десяткового розряду. Для цього в комірку E6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C23/(D6^2);1)», ставимо курсор перед адресою комірки «C23», натискаємо клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=ОКРУГЛ(C23/(D6^2);1)»; копіюємо її на всі рядки четвертої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(E6:E18)».

В п’ятій колонці таблиці обчислюємо значення різниць δ_i, результати виражаємо в міліметрах, для чого множимо їх на 1000. Послідовність дій наступна. В комірку F6 вводимо формулу «=(C6-C24)*1000», ставимо курсор перед адресою комірки «C24», натискаємо клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=(C6-C24)*1000»; копіюємо її на всі рядки п’ятої колонки, крім нижнього.

В шостій колонці таблиці обчислюємо добутки $p\delta$ і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до одного десяткового розряду. Для цього в комірку

G6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E6*F6;1)», і копіюємо її на всі рядки шостої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(G6:G18)».

Під значенням умовного нуля, на рядок нижче (рис. 12), обчислюємо значення загальної арифметичної середини *L*. В комірці B25 записуємо «L=», в комірку C25 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C24+((G19/E19)/1000;6)».

Математичне опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини

№	l, м	m, мм	p	δ, мм	pδ	$p\delta^2$	v, мм	pv	pv^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	251,035	3,2	1,2	2	2,4	4,8	14	16,8	235,2
2	251,035	4,2	0,7	2	1,4	2,8	14	9,8	137,2
3	251,060	0,6	33,3	27	899,1	24275,7	-11	-366,3	4029,3
4	251,033	1,6	4,7	0	0,0	0,0	16	75,2	1203,2
5	251,045	1,5	5,3	12	63,6	763,2	4	21,2	84,8
6	251,043	2,4	2,1	10	21,0	210,0	6	12,6	75,6
7	251,044	1,8	3,7	11	40,7	447,7	5	18,5	92,5
8	251,051	4,7	0,5	18	9,0	162,0	-2	-1,0	2,0
9	251,037	4,9	0,5	4	2,0	8,0	12	6,0	72,0
10	251,052	3,1	1,2	19	22,8	433,2	-3	-3,6	10,8
11	251,043	0,6	33,3	10	333,0	3330,0	6	199,8	1198,8
12	251,049	2,7	1,6	16	25,6	409,6	0	0,0	0,0
13	251,046	1,2	8,3	13	107,9	1402,7	3	24,9	74,7
∑			**96,4**		**1528,5**	**31449,7**		**13,9**	**7216,1**

[P]β= -13,9 =ОКРУГЛ(E19*C27;1)

m_{max-1} = 4,7

m_{min+1} = 1,2 =ОКРУГЛ((C21^2+C22^2)/2;0)

c = 12 =МИН(C6:C18)

L_0 = 251,033 =ОКРУГЛ(C24+((G19/E19)/1000);6)

L = 251,048856 =ОКРУГЛ((C25);3)

L' = 251,049 =(C25-C26)*1000

β = -0,144 =ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(K19/(13-1));1)

μ = 24,5 =ОКРУГЛ(КОРЕНЬ((H19-G19^2/E19)/(13-1));1)

μ = 24,5 =ОКРУГЛ(C28/КОРЕНЬ(E19);1)

M = 2,5 =ОКРУГЛ(C28/КОРЕНЬ(2*(13-1));1)

m_μ = 5,0 =ОКРУГЛ(C31/КОРЕНЬ(E19);2)

m_M = 0,51

Рис. 12 – Загальний вигляд аркуша з результатами обчислень

Отриманий результат заокруглюємо до трьох десяткових розрядів і отримуємо значення L'. Для цього в комірці B26 записуємо «L'=», в комірку C26 вводимо формулу «=ОКРУГЛ((C25);3)».

Находимо похибку заокруглення β, результат виражаємо в міліметрах. В комірку B27 вводимо текст «β =», а в комірку C27 вводимо формулу «=(C25-C26)*1000».

В сьомій колонці таблиці обчислюємо значення $p\delta^2$ і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до одного десяткового розряду. Для цього в комірку H6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E6*F6^2;1)», і копіюємо її на всі рядки сьомої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(H6:H18)».

В восьмій колонці обчислюємо поправки v. Для цього в комірку I6 вводимо формулу «=(C26-C6)*1000», ставимо курсор перед адресою комірки «C26», натискаємо клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=(C26-C6)*1000»; копіюємо її на всі рядки сьомої колонки, крім нижнього.

В дев’ятій колонці таблиці обчислюємо добутки pv і їх сумарне значення $[pv]$, результати заокруглюємо до одного десяткового розряду. Для цього в комірку J6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E6*I6;1)» і копіюємо її на всі рядки дев’ятої колонки, крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(J6: J18)».

Виконуємо контроль обчислень, перевіркою рівності (17). Для цього під нижнім рядком дев’ятої колонки таблиці, в комірку J20 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E19*C27;1)». Отримані значення в комірках J19 і J20 мають збігатися. В даному випадку умова виконується: 13.9 = 13.9.

В десятій колонці таблиці обчислюємо значення pv^2 і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до одного десяткового розряду. Для цього в комірку K6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ((I6^2)*E6;1)», і копіюємо її на всі рядки десятої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(K6:K18)».

Обчислюємо емпіричну середню квадратичну похибку одиниці ваги μ. Для цього в комірку B28 (рис. 12) вводимо текст «μ =», а в комірку C28 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(K19/(13-1));1)», де число «13» дорівнює кількості вимірювань.

Для контролю обчислюємо величину емпіричної середньої квадратичної похибки ще раз. Для цього в комірку B29 вводимо текст «μ =», а в комірку C29 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ((H19-G19^2/E19)/(13-1));1)», де число «13» дорівнює кількості вимірювань. Отримані значення мають збігатися, в даному випадку 24.5 = 24.5.

Обчислюємо середню квадратичну похибку загальної арифметичної

середини M. Для цього в комірку B30 вводимо текст «M =», а в комірку C30 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C28/КОРЕНЬ(E19);1.

Оцінюємо надійність величини μ. Для цього в комірку B31 вводимо текст «m_μ =», а в комірку C31 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C28/КОРЕНЬ(2*(13-1));1)», де число «13» дорівнює кількості вимірювань.

Оцінюємо надійність величини M. Для цього в комірку B32 (рис. 12) вводимо текст «m_M=», а в комірку C32 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C31/ КОРЕНЬ(E19);2)».

Зберігаємо зміни в файлі МОГВ.xlsx, виходимо з Microsoft Excel.

2.6. Математичне опрацювання подвійних рівноточних вимірювань

Література: [2, с. 52-56], [4, с. 90-96], [5, с. 264-266; 270-275].

Питання для самоперевірки

1. Які вимірювання називають подвійними?
2. Наведіть приклади подвійних рівноточних вимірювань в геодезії.
3. В чому полягає різниця в оцінці точності подвійних вимірювань при наявності і при відсутності систематичних похибок?
4. Який критерій використовують для виявлення систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірювань?
5. Чому різниці подвійних вимірювань вважають істинними похибками подвійних вимірювань?

Мета роботи: практичне застосування формул математичного опрацювання подвійних рівноточних вимірювань; засвоєння методів оцінки точності вимірювань.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. В геодезичній практиці достатньо точно можна отримувати шукані величини, вимірюючи кожну з них для контролю двічі. Так, наприклад, горизонтальний кут вимірюють при положеннях вертикального круга теодоліті «КП» і «КЛ», довжину лінії вимірюють в прямому і зворотному напрямках і т.д. Задовільно оцінити точність кожного вимірювання в одній такій парі неможливо. Але якщо за двома повторними вимірюваннями отримані значення багатьох величин, оцінка точності може бути виконана спеціальними методами, що у ряді випадків дає змогу виявити систематичні похибки.

В кожній парі подвійних вимірювань має місце різниця

$$d_i = l_i' - l_i'', \tag{29}$$

де l_i', l_i'' – результати двох вимірювань одного об’єкту.

Ряд подвійних вимірювань буде вважатись рівноточним, якщо вимірювання в парах, і пари між собою є рівно точними.

За наведеними даними необхідно виконати аналіз різниць подвійних рівноточних вимірювань і оцінити їх точність.

Порядок роботи

1. Обчислити різниці d_i подвійних рівноточних вимірювань за формулою (29). При наявності двох результатів рівноточних вимірювань однієї величини можна припустити, що їх систематичні похибки близькі за значенням одна до іншої. Це означає, що систематичний вплив в різницях d_i буде в значній мірі компенсований. Тому систематичні похибки в різницях подвійних вимірювань називають *залишковим*.

2. Виконати перевірку значущості залишкових систематичних похибок у різницях подвійних вимірювань. Критерієм значущості в даному випадку буде виконання нерівності

$$|[d]| \geq 2.5 \cdot \frac{[|d|]}{\sqrt{n}}, \tag{30}$$

де n – кількість пар подвійних вимірювань.

Якщо нерівність (30) не виконується, приходимо до висновку, що залишкові систематичні похибки в різницях подвійних вимірювань незначущі, – ними можна знехтувати. В протилежному випадку, необхідно обчислити величину середньої систематичної похибки θ_d в різницях подвійних вимірювань.

3. Обчислити величину середньої систематичної похибки θ_d за формулою

$$\theta_d = \frac{[d]}{n}. \tag{31}$$

4. Обчислити середню систематичну похибку окремого вимірювання. Якщо систематичними похибками в різницях подвійних вимірювань можна знехтувати, то середню квадратичну похибку обчислюють за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{32}$$

У випадку, коли залишкова систематична похибка в різницях d_i має достатньо велике значення, її вилучають із різниць подвійних вимірювань. А середню квадратичну похибку в такому разі обчислюють за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2 \cdot (n-1)}}, \tag{33}$$

де $d' = d - \theta_d$.

5. Обчислити середню квадратичну похибку середнього значення з двох вимірювань за формулою

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}}. \tag{34}$$

6. Оцінити надійність величин, отриманих на підставі виразів (32) – (34). При відносно невеликій кількості вимірювань n це можна зробити за формулами

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}; \tag{35}$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}. \tag{36}$$

Приклад. *Наведені результати рівноточних вимірювань довжин ліній світлодалекоміром (табл. 5). Кожна лінія виміряна двічі. Виконати оцінку точності подвійних рівноточних вимірювань.*

Обчислюємо різниці d_i в кожній парі подвійних рівноточних вимірювань за формулою (29) і находимо їх суму. Результати виражаємо в міліметрах і заносимо до табл. 5 (колонка 4).

Зіставляємо нерівність (30), яка є критерієм значущості систематичної похибки в різницях подвійних вимірювань

$$|-78| \geq 2.5 \cdot \frac{[94]}{\sqrt{14}},$$

$$78 \geq 62.8.$$

Так як нерівність виконується, приходимо до висновку, що різниці d_i містять залишкову систематичну похибку, яку необхідно врахувати під час виконання оцінки точності.

В такому випадку, визначаємо величину середньої систематичної похибки θ_d за формулою (31)

$$\theta_d = \frac{-78}{14} = -5.6 \text{ мм},$$

і вилучаємо її із різниць d_i, тобто обчислюємо величини $d_i' = d_i - \theta_d$. Результати заокруглюємо до 0.1 мм, підраховуємо їх суму і заносимо до табл. 5 (колонка 5).

Таблиця 5 – *Результати обчислень*

№	Довжина лінії, м		d_i, мм.	d'_i, мм.	d'^2, мм^2.
	l'_i	l''_i			
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	451.259	451.264	-5	0,6	0,36
2	357.437	357.434	3	8,6	73,96
3	495.557	495.562	-5	0,6	0,36
4	424.053	424.061	-8	-2,4	5,76
5	396.236	396.243	-7	-1,4	1,96
6	241.971	241.979	-8	-2,4	5,76
7	340.614	340.625	-11	-5,4	29,16
8	377.504	377.513	-9	-3,4	11,56
9	407.643	407.665	-22	-16,4	268,96
10	334.896	334.901	-5	0,6	0,36
11	225.038	225.037	1	6,6	43,56
12	390.858	390.858	0	5,6	31,36
13	316.733	316.729	4	9,6	92,16
14	361.279	361.285	-6	-0,4	0,16
Σ			-78	0.4	565.44

Контролем обчислень різниць d'_i слугує рівність

$$|[d']| = 0, \tag{37}$$

яка повинна виконуватись в межах похибки заокруглення. Результати вимірювань довжин ліній в даному прикладі отримані з точністю 1 мм. При обчисленні середньої систематичної похибки θ_d ми залишаємо на один десятковий знак більше, ніж у вихідних даних. Тому гранична похибка заокруглення величини θ_d становить ±0.05 мм, а рівність (37) в даному випадку повинна виконуватись в межах

$$|[d']| \leq 0.05 \cdot n.$$

Підставивши відповідні числові значення, отримаємо

$$0.4 \leq 0.7.$$

Якщо нерівність виконується, далі обчислюємо значення d'^2 з точністю 0.01 мм^2 і підраховуємо їх суму. Результати заносимо до табл. 5 (колонка 6).

Середню квадратичну похибку окремого результату вимірювання обчислюємо за формулою (33)

$$m = \sqrt{\frac{565.44}{2 \cdot (14 - 1)}} = 4.7 \text{ мм.}$$

Обчислюємо середню квадратичну похибку середньої довжини лінії в кожній парі подвійних вимірювань за формулою (34)

$$M = \frac{4.7}{\sqrt{2}} = 3.3 \text{ мм.}$$

Оцінюємо надійність величин m і M за формулами (35) і (36) відповідно

$$m_m = \frac{4.7}{\sqrt{2 \cdot 14}} = 0.89 \text{ мм;}$$

$$m_M = \frac{3.3}{\sqrt{2 \cdot 14}} = 0.62 \text{ мм.}$$

Порядок обрахунків в програмі Microsoft Excel

Розглянемо методику математичного опрацювання подвійних рівноточних вимірювань для наведеного вище прикладу засобами Microsoft Excel.

Запускаємо Microsoft Excel, відкриваємо файл МОГВ.xlsx. На новому аркуші («Лист5») курсором виділяємо комірку B2 і вводимо з клавіатури заголовок «Математичне опрацювання подвійних рівноточних вимірювань». Всі текстові і числові дані робимо шрифтом Times New Roman чорного кольору, розміром 12 pt.

Пропускаємо один рядок. Починаючи з комірки B4 креслимо таблицю за зразком, приведеним на рис. 13.

Таблиця повинна мати 6 колонок. Кількість рядків повинна відповідати числу вимірювань довжини лінії (відповідно до завдання) плюс верхній рядок із назвою колонок, другий рядок із номерами колонок і нижній рядок для підбиття сумарних значень розрахунків.

До другої і третьої колонок вводимо результати подвійних вимірювань довжини лінії l_i' і l_i'' .

Порядок введення символів у назви колонок таблиці і накреслення її границь було розглянуто раніше (див. п. 2.4).

В четвертій колонці таблиці (рис. 14) обчислюємо різниці d_i результатів вимірювань і знаходимо їх суму. Результати виражаємо в міліметрах, для чого множимо їх на 1000. Послідовність дій наступна в комірку E7 вводимо формулу «=(C7-D7)*1000» і копіюємо її на всі рядки четвертої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(E7:E20)».

Зіставляємо нерівність (30), яка є критерієм значущості систематичної похибки в різницях подвійних вимірювань. В комірці А24 (рис. 14) обчислюємо ліву частину нерівності за формулою «=ABS(E21)». В комірці С24 обчислюємо праву частину нерівності, для чого вводимо до неї формулу «=2,5*(ABS(E7)+ABS(E8)+ABS(E9)+ABS(E10)+ABS(E11)+ABS(E12)+ABS (E13)+ABS(E14)+ABS(E15)+ABS(E16)+ABS(E17)+ABS(E18)+ABS(E19)+ABS (E20))/КОРЕНЬ(14)».

Отримуємо значення

$$78 \geq 62.8.$$

Так як нерівність виконується, приходимо до висновку, що різниці d_i містять залишкову систематичну похибку θ_d. В такому випадку, визначаємо її величину в комірці С26 за формулою «=ОКРУГЛ(E21/(14);1)», де цифра «14» дорівнює кількості пар подвійних вимірювань.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Математичне опрацювання подвійних рівноточних вимірювань						
3								
4		№	Довжина лінії		d_i, мм.	d_i', мм.	$d_i'^2$	
5			l′	l″				
6		1	2	3	4	5	6	
7		1	451,259	451,264				
8		2	357,437	357,434				
9		3	495,557	495,562				
10		4	424,053	424,061				
11		5	396,236	396,243				
12		6	241,971	241,979				
13		7	340,614	340,625				
14		8	377,504	377,513				
15		9	407,643	407,665				
16		10	334,896	334,901				
17		11	225,038	225,037				
18		12	390,858	390,858				
19		13	316,733	316,729				
20		14	361,279	361,285				
21		∑						
22								

Рис. 13 – Заповнення таблиці з вихідними даними

В п’ятій колонці таблиці обчислюємо величини d_i' і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до одного десяткового розряду. Для цього в комірку F7 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(E7-C26;1)», ставимо курсор перед адресою

комірки «С26», натискаємо клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=ОКРУГЛ(Е7-$С$26;1)»; копіюємо її на всі рядки п’ятої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(F7: F20)».

Математичне опрацювання подвійних рівноточних вимірювань

№	Довжина лінії, м		d_i, мм.	d_i', мм.	d'^2
	l′	l″			
1	2	3	4	5	6
1	451,259	451,264	-5	0,6	0,36
2	357,437	357,434	3	8,6	73,96
3	495,557	495,562	-5	0,6	0,36
4	424,053	424,061	-8	-2,4	5,76
5	396,236	396,243	-7	-1,4	1,96
6	241,971	241,979	-8	-2,4	5,76
7	340,614	340,625	-11	-5,4	29,16
8	377,504	377,513	-9	-3,4	11,56
9	407,643	407,665	-22	-16,4	268,96
10	334,896	334,901	-5	0,6	0,36
11	225,038	225,037	1	6,6	43,56
12	390,858	390,858	0	5,6	31,36
13	316,733	316,729	4	9,6	92,16
14	361,279	361,285	-6	-0,4	0,16
∑			**-78**	**0,4**	**565,44**
				0,7	

=ABS(E21)

=0,05*14

78 ≥ 62,8

=ОКРУГЛ(E21/(14);1)

θ_d = -5,6

=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(G21/(2*(14-1)));1)

m = 4,7

M = 3,3

=ОКРУГЛ(C27/КОРЕНЬ(2);1)

m_m = 0,89

=ОКРУГЛ(C27/КОРЕНЬ(2*14);2)

m_M = 0,62

=ОКРУГЛ(C28/КОРЕНЬ(2*14);2)

Рис. 14 – Загальний вигляд аркуша з результатами обчислень

Виконуємо контроль обчислень різниць d_i' перевіркою виконання нерівності $|[d']| \leq 0.05 \cdot n$. Для цього під нижнім рядком п'ятої колонки таблиці, в комірку F22 вводимо формулу «=0.05*14». У результаті маємо

$$0.4 \leq 0.7.$$

Отже нерівність виконується. В шостій колонці таблиці обчислюємо значення d'^2 і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до двох десяткових розрядів. Для цього в комірку G7 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(F7^2;2)», і копіюємо її на всі рядки шостої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(G7:G20)».

Під таблицею (рис. 14) обчислюємо середню квадратичну похибку окремого результату вимірювання. Для цього в комірку B27 вводимо текст «m =», а в комірку C27 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(G21/(2*(14-1)));1)».

Обчислюємо середню квадратичну похибку M середньої довжини лінії в кожній парі подвійних вимірювань. Для цього в комірку B28 вводимо текст «M =», а в комірку C28 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C27/КОРЕНЬ(2);1)».

Оцінюємо надійність величини m. Для цього в комірку B29 вводимо текст «m_m=», а в комірку C29 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C27/ КОРЕНЬ(2*14);2)», де число «14» дорівнює кількості пар подвійних вимірювань.

Оцінюємо надійність величини M. Для цього в комірку B30 вводимо текст «m_M=», а в комірку C30 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C28/ КОРЕНЬ(2*14);2)», де число «14» дорівнює кількості пар подвійних вимірювань.

Зберігаємо зміни в файлі МОГВ.xlsx, виходимо з Microsoft Excel.

2.7. Математичне опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань

Література: [2, с. 57-60], [4, с. 96-101], [5, с. 284-290].

Питання для самоперевірки

1. Наведіть приклади подвійних нерівноточних вимірювань в геодезії.
2. В чому полягає різниця в оцінці точності подвійних нерівно точних вимірювань при наявності і при відсутності систематичних похибок?
3. За якою формулою обчислюють вагу лінійних вимірювань теодолітного ходу?
4. За якою формулою обчислюють вагу нівелірного ходу?

Мета роботи: практичне застосування формул математичного опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань; засвоєння методів оцінки точності вимірювань.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. У результаті подвійних нерівно точних вимірювань отриманий ряд результатів. За наведеними даними необхідно виконати аналіз різниць подвійних нерівно точних вимірювань і оцінити їх точність.

Подвійні нерівно точні вимірювання мають місце у випадках, коли вимірювання всередині пари рівноточні, а пари між собою є нерівноточними. Така ситуація виникає, наприклад, при порівнянні результатів подвійного нівелювання в ходах різної довжини. Для подвійних нерівноточних вимірювань виконується співвідношення $m_i' = m_i'' \neq m_j' = m_j''$, відповідно вага кожної пари різна.

Порядок роботи

1. Обчислити вагу p_i перевищення кожного нівелірного ходу за формулою

$$p_i = \frac{1}{L_\mathrm{i}}, \tag{38}$$

де L_i – довжина нівелірного ходу в км.

2. Обчислити суму різниць d_i перевищень прямого і зворотного ходу і суму довжин нівелірних ходів L_i.

3. Визначити величину коефіцієнта систематичного впливу за формулою

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]}. \tag{39}$$

4. Обчислити добутку λL_i. Їх сума повинна дорівнювати сумі різниць d_i, тобто

$$[d] = [\lambda L]. \tag{40}$$

5. Обчислити різниці

$$d_i' = d_i - \lambda L_i. \tag{41}$$

6. Обчислити середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}. \tag{42}$$

7. Оцінити надійність величини, отриманої на підставі (36). Це можна зробити за формулою

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{43}$$

8. Обчислити середню квадратичну похибку кожного нівелірного ходу за формулою

$$m_i = \mu\sqrt{L_i}. \tag{44}$$

9. Обчислити середню квадратичну похибку середнього перевищення в нівелірному ході за формулою

$$M_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \tag{45}$$

Приклад. *Прокладено 17 ходів нівелювання III класу. Нівелювання виконано в прямому і зворотному напрямках. Довжина нівелірного ходу і різниці перевищень прямого і зворотного ходу приведені в табл. 6. Необхідно виконати оцінку точності нівелірних ходів.*

Таблиця 6 – *Результати вимірювань в нівелірних ходах*

№	d_i, мм.	L_i, мм.	λL_i	d_i', мм.	$d_i'^2$	p_i	pd'^2	m_i, мм.	M_i, мм.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	70.5	3.4	0.66	69.84	4877.63	0.29	1414.51	29.1	20.6
2	17.4	8.3	1.62	15.78	249.01	0.12	29.88	45.5	32.2
3	-50.4	6.9	1.35	-51.75	2678.06	0.14	374.93	41.5	29.3
4	33.7	4.0	0.78	32.92	1083.73	0.25	270.93	31.6	22.3
5	45.5	2.6	0.51	44.99	2024.10	0.38	769.16	25.5	18.0
6	-44.1	7.2	1.40	-45.50	2070.25	0.14	289.84	42.4	30.0
7	-48.1	7.2	1.40	-49.50	2450.25	0.14	343.04	42.4	30.0
8	6.9	3.8	0.74	6.16	37.95	0.26	9.87	30.8	21.8
9	-38.9	2.8	0.55	-39.45	1556.30	0.36	560.27	26.4	18.7
10	-18.4	1.8	0.35	-18.75	351.56	0.56	196.87	21.2	15.0
11	-57.3	3.1	0.60	-57.90	3352.41	0.32	1072.77	27.8	19.7
12	-50.0	5.8	1.13	-51.13	2614.28	0.17	444.43	38.1	26.9
13	66.7	7.3	1.42	65.28	4261.48	0.14	596.61	42.7	30.2
14	54.9	3.0	0.59	54.31	2949.58	0.33	973.36	27.4	19.4
15	-24.4	1.9	0.37	-24.77	613.55	0.53	325.18	21.8	15.4
16	11.1	5.6	1.09	10.01	100.20	0.18	18.04	37.4	26.4
17	40.5	5.4	1.05	39.45	1556.30	0.19	295.70	36.7	26.0
Σ	15.6	80.1	15.6	-0.01			7985.39		

Обчислюємо вагу перевищення кожного нівелірного ходу за формулою (38), результати заокруглюємо до 0.01 і заносимо до табл. 6 (колонка 7).

Підбивши суму різниць $[d_i]$ і суму довжин нівелірних ходів $[L_i]$, визначаємо величину коефіцієнта систематичного впливу λ за формулою (39)

$$\lambda = \frac{15.6}{80.1} = 0.195.$$

Обчислюємо добутки λL_i, результати заокруглюємо до 0.01 і заносимо до табл. 6 (колонка 4).

Перевіряємо виконання рівності (40)

$$15.6 = 15.6.$$

Обчислюємо з точністю 0.01 різниці d_i' за формулою (41), результати заносимо до табл. 6 (колонка 5).

Обчислюємо значення $d_i'^2$ і добутки pd'^2. Підраховуємо суму добутків $[pd'^2]$.

Обчислюємо середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (42)

$$\mu = \sqrt{\frac{7985.39}{2(17-1)}} = 15.6.$$

Оцінюємо її надійність за формулою (43)

$$m_\mu = \frac{15.6}{\sqrt{2(17-1)}} = 2.8.$$

Обчислюємо середні квадратичні похибки кожного нівелірного хода за формулою (44), результати заносимо до табл. 6 (колонка 9).

Обчислюємо середні квадратичні похибки середнього перевищення в кожному нівелірному ході за формулою (45), результати заносимо до табл. 6 (колонка 10).

Порядок обрахунків в програмі Microsoft Excel

Розглянемо методику математичного опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань для наведеного вище прикладу засобами Microsoft Excel.

Запускаємо Microsoft Excel, відкриваємо файл МОГВ.xlsx. На новому аркуші («Лист6») курсором виділяємо комірку С2 і вводимо з клавіатури заголовок «Математичне опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань». Всі текстові і числові дані робимо шрифтом Times New Roman чорного кольору, розміром 12 pt.

Пропускаємо один рядок. Починаючи з комірки В4 креслимо таблицю за зразком, приведеним на рис. 15.

Математичне опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань

№	d, мм	L_i, км	λL_i, мм	d_i', мм	$d_i'^2$	p_i	pd'^2	m_i,мм	M_i, мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	70,5	3,4							
2	17,4	8,3							
3	-50,4	6,9							
4	33,7	4,0							
5	45,5	2,6							
6	-44,1	7,2							
7	-48,1	7,2							
8	6,9	3,8							
9	-38,9	2,8							
10	-18,4	1,8							
11	-57,3	3,1							
12	-50,0	5,8							
13	66,7	7,3							
14	54,9	3,0							
15	-24,4	1,9							
16	11,1	5,6							
17	40,5	5,4							
∑									

Рис. 15 – Заповнення таблиці з вихідними даними

Таблиця повинна мати 10 колонок. Кількість рядків повинна відповідати числу нівелірних ходів (відповідно до завдання) плюс верхній рядок із назвою колонок, другий рядок із номерами колонок і нижній рядок для підбиття сумарних значень розрахунків.

До другої і третьої колонок вводимо результати вимірювань – різниці перевищень прямого і зворотного ходу і довжини нівелірних ходів, відповідно.

Порядок введення символів у назви колонок таблиці і накреслення її границь було розглянуто раніше (див. п. 2.4).

В сьомій колонці таблиці (рис. 15) обчислюємо вагу перевищення кожного нівелірного ходу p_i, із заокругленням результатів до двох десяткових розрядів. Для цього в комірку H6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(1/D6;2)» і копіюємо її на всі рядки сьомої колонки крім нижнього.

В другій і третій колонках обчислюємо суми $[d_i]$ і $[L_i]$. Для цього в комірку C23 вводимо формулу «=СУММ(C6:C22)», а в комірку D23 – формулу «=СУММ(D6:D22)».

Під таблицею, пропустивши один вільний рядок, обчислюємо величину коефіцієнта систематичного впливу λ. Для цього в комірку B25 вводимо текст «λ =», а в комірку C25 – формулу «ОКРУГЛ(C23/D23;3).

В четвертій колонці таблиці обчислюємо значення добутків λL_i, результати заокруглюємо до двох десяткових розрядів і підраховуємо їх суму. Для цього в комірку E6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C25*D6;2)», ставимо курсор перед адресою комірки «C25», натискаємо клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=ОКРУГЛ(C25*D6;2)»; копіюємо її на всі рядки четвертої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(E6: E22)».

Математичне опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань

№	d, мм	L_i, км	λL_i, мм	d_i', мм	$d_i'^2$	p_i	pd'^2	m_i,мм	M_i, мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	70,5	3,4	0,66	69,84	4877,63	0,29	1414,51	29,1	20,6
2	17,4	8,3	1,62	15,78	249,01	0,12	29,88	45,5	32,2
3	-50,4	6,9	1,35	-51,75	2678,06	0,14	374,93	41,5	29,3
4	33,7	4,0	0,78	32,92	1083,73	0,25	270,93	31,6	22,3
5	45,5	2,6	0,51	44,99	2024,10	0,38	769,16	25,5	18,0
6	-44,1	7,2	1,40	-45,50	2070,25	0,14	289,84	42,4	30,0
7	-48,1	7,2	1,40	-49,50	2450,25	0,14	343,04	42,4	30,0
8	6,9	3,8	0,74	6,16	37,95	0,26	9,87	30,8	21,8
9	-38,9	2,8	0,55	-39,45	1556,30	0,36	560,27	26,4	18,7
10	-18,4	1,8	0,35	-18,75	351,56	0,56	196,87	21,2	15,0
11	-57,3	3,1	0,60	-57,90	3352,41	0,32	1072,77	27,8	19,7
12	-50,0	5,8	1,13	-51,13	2614,28	0,17	444,43	38,1	26,9
13	66,7	7,3	1,42	65,28	4261,48	0,14	596,61	42,7	30,2
14	54,9	3,0	0,59	54,31	2949,58	0,33	973,36	27,4	19,4
15	-24,4	1,9	0,37	-24,77	613,55	0,53	325,18	21,8	15,4
16	11,1	5,6	1,09	10,01	100,20	0,18	18,04	37,4	26,4
17	40,5	5,4	1,05	39,45	1556,30	0,19	295,70	36,7	26,0
∑	15,6	80,1	15,6	-0,01			7985,39		

λ = 0,195 =ОКРУГЛ(C23/D23;3)

μ = 15,8 =ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(I23/(2*(17-1)));1)

m_μ = 2,8 =ОКРУГЛ(C27/КОРЕНЬ(2*(17-1));1)

Рис. 16 – Загальний вигляд аркуша з результатами обчислень

Перевіряємо виконання рівності (40), тобто суми значень в колонках 2 і 4 повинні співпадати. В даному випадку 15.6= 15.6 – умова виконується (рис. 15).

В п’ятій колонці таблиці обчислюємо різниці d_i' і знаходимо їх суму. Для цього в комірку F6 вводимо формулу «=C6-E6» і копіюємо її на всі рядки п’ятої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(F6: F22)».

В шостій колонці таблиці обчислюємо значення $d_i'^2$ із заокругленням результатів до двох десяткових розрядів. Для цього в комірку G6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(F6^2;2)» і копіюємо її на всі рядки шостої колонки крім нижнього.

В восьмій колонці таблиці обчислюємо добутки $pd_i'^2$ і знаходимо їх суму із заокругленням результатів до двох десяткових розрядів. Для цього в комірку I6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(H6*G6;2)» і копіюємо її на всі рядки восьмої колонки крім нижнього. В нижню комірку вводимо формулу «=СУММ(I6: I22)».

Під таблицею обчислюємо середню квадратичну похибку одиниці ваги μ. Для цього в комірку B27 вводимо текст «μ =», а в комірку C25 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(I23/(2*(17-1)));1)», де число «17» дорівнює кількості нівелірних ходів.

Оцінюємо надійність величини μ. Для цього в комірку B28 вводимо текст «m_μ=», а в комірку C28 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C27/КОРЕНЬ(2*(17-1));1)», де число «17» дорівнює кількості нівелірних ходів.

В дев’ятій колонці таблиці обчислюємо середні квадратичні похибки кожного нівелірного хода m_i, результати заокруглюємо до одного десяткового розряду. Для цього в комірку J6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(C27*КОРЕНЬ(D6);1)», ставимо курсор перед адресою комірки «C27», натискаємо клавішу F4 і Enter. Формула приймає вигляд «=ОКРУГЛ(C27* КОРЕНЬ(D6);1)»; копіюємо її на всі рядки дев’ятої колонки крім нижнього.

В десятій колонці таблиці обчислюємо середні квадратичні похибки середнього перевищення в кожному нівелірному ході M_i, результати заокруглюємо до одного десяткового розряду. Для цього в комірку K6 вводимо формулу «=ОКРУГЛ(J6/КОРЕНЬ(2);1)» і копіюємо її на всі рядки десятої колонки крім нижнього.

Зберігаємо зміни в файлі МОГВ.xlsx, виходимо з Microsoft Excel.

2.8. Кореляційний аналіз сукупності вимірювань

Література: [2, с. 63-65], [4, с. 101-107], [5, с. 226-230].

Питання для самоперевірки

1. Які види залежностей можуть існувати між виміряними величинами?
2. Що називають стохастичною залежністю?
3. Яку залежність називають кореляційною?
4. Назвіть кількісні характеристики лінійної стохастичної залежності.
5. Назвіть властивості коефіцієнта кореляції.
6. За яким критерієм визначають значимість вибіркового коефіцієнта кореляції, якщо n > 50?

Мета роботи: засвоєння основ використання методів кореляційного аналізу для опрацювання результатів геодезичних вимірювань.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Зміст роботи. За наведеними даними необхідно виконати аналіз сукупності результатів вимірювань, при заданій довірчій вірогідності встановити наявність кореляційної залежності між ними та побудувати рівняння регресії.

Порядок роботи

1. Обчислити вибірковий кореляційний момент k, який є однією з характеристик оцінки тісноти зв'язку між величинами D і m. Кореляційний момент обчислюють за формулою

$$k = \frac{1}{n}[(D_i - \overline{D})(m_i - \overline{m})], \tag{46}$$

де n – об'єм вибірки, тобто кількість пар величин D і m;

$\overline{D}$ – середнє значення D;

$\overline{m}$ – середнє значення m.

Величина k залежить від розмірності величин D і m, і в цьому відношенні вона не є зручною. Найбільш ефективним критерієм тісноти зв'язку є вибірковий коефіцієнт кореляції.

2. Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції r за формулою

$$r = \frac{k}{m_{\mathrm{D}} \cdot m_{\mathrm{m}}}, \tag{47}$$

де m_{D}, m_{m} – середні квадратичні відхилення величин D і m, які в свою чергу обчислюють за формулами:

$$m_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{[(D_i - \overline{D})^2]}{n}}, \tag{48}$$

$$m_m = \sqrt{\frac{[(m_i - \overline{m})^2]}{n}}.$$

3. Оцінити значущість коефіцієнту кореляції r методом побудови довірчого інтервалу з використанням функції Фішера

$$Z = \frac{1}{2}(\ln(1 + r) - \ln(1 - r)), \tag{49}$$

яка підпорядковується нормальному закону розподілу. Довірчий інтервал для величини Z буде таким

$$Z_0 - \frac{t}{\sqrt{n-3}} < Z < Z_0 + \frac{t}{\sqrt{n-3}}, \tag{50}$$

де Z_0 – обчислене значення функції Фішера для відповідного значення r;

t – параметр нормального розподілу, який отримують із таблиці інтеграла вірогідності для заданої довірчої вірогідності (див. Додаток Г).

4. Після знаходження довірчого інтервалу для функції Z, розв'язавши обернену задачу, отримати довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції r.

5. Зробити висновки щодо існування лінійної кореляційної залежності між величинами D і m.

6. В разі встановлення лінійної кореляційної залежності між величинами D і m, побудувати рівняння регресії вигляду

$$m_i = \overline{m} + r\frac{m_m}{m_{\mathrm{D}}}(D_i - \overline{D}), \tag{51}$$

яке описує стохастичну залежність між величинами D і m.

Приклад. *Встановити наявність кореляційної залежності між виміряними довжинами ліній D і середніми квадратичними похибками m, які отримані при їх вимірюванні (табл. 7) із довірчою вірогідністю $\gamma = 0.95$. Побудувати рівняння регресії m на D.*

Знаходимо суми довжин ліній і середніх квадратичних похибок

$$[D] = 23.89 \text{ м};$$
$$[m] = 128.30 \text{ мм}.$$

Результати заносимо до табл. 7, колонка 2 і 3 відповідно.

Визначаємо середні значення довжини лінії та середньої квадратичної похибки за формулами

$$\overline{D} = \frac{[D]}{n} = \frac{23.89}{12} = 1.991 \text{ км};$$
$$\overline{m} = \frac{[m]}{n} = \frac{128.3}{12} = 10.69 \text{ мм}.$$

Таблиця 7 – *Вихідні дані та результати кореляційного аналізу*

№	D, км	m, мм	$D_i - \overline{D}$	$m_i - \overline{m}$	$(D_i - \overline{D})^2$	$(m_i - \overline{m})^2$	$(D_i - \overline{D})(m_i - \overline{m})$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.70	10.6	-0.291	-0.09	0.0847	0.0081	0.0262
2	1.62	10.5	-0.371	-0.19	0.1376	0.0361	0.0705
3	2.38	10.9	0.389	0.21	0.1513	0.0441	0.0817
4	2.64	11.0	0.649	0.31	0.4212	0.0961	0.2012
5	1.53	10.4	-0.461	-0.29	0.2125	0.0841	0.1337
6	3.77	12.1	1.779	1.41	3.1648	1.9881	2.5084
7	1.59	10.4	-0.401	-0.29	0.1608	0.0841	0.1163
8	1.63	10.4	-0.361	-0.29	0.1303	0.0841	0.1047
9	1.92	10.7	-0.071	0.01	0.0050	0.0001	-0.0007
10	1.88	10.7	-0.111	0.01	0.0123	0.0001	-0.0011
11	1.45	10.1	-0.541	-0.59	0.2927	0.3481	0.3192
12	1.78	10.5	-0.211	-0.19	0.0445	0.0361	0.0401
Σ	**23.89**	**128.3**			**4.8177**	**2.8092**	**3.6002**

Обчислюємо різниці $(D_i - \overline{D})$ і $(m_i - \overline{m})$, результати заносимо до табл. 7, в колонки 4 і 5 відповідно.

Обчислюємо квадрати різниць $(D_i - \overline{D})^2$ і $(m_i - \overline{m})^2$ і знаходимо їх суми. Результати заносимо до табл. 7, в колонки 6 і 7 відповідно.

Обчислюємо добутки $(D_i - \overline{D})(m_i - \overline{m})$ і знаходимо їх суму. Результати заносимо до табл. 7, колонка 8.

Обчислюємо вибірковий кореляційний момент k за формулою (46)

$$k = \frac{1}{12} \cdot 3.6002 = 0.30.$$

Обчислюємо середні квадратичні відхилення довжини лінії D та середньої квадратичної похибки m за формулами (48)

$$m_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{4.8177}{12}} = 0.63,$$

$$m_m = \sqrt{\frac{2.8092}{12}} = 0.48.$$

Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції r за формулою (47)

$$r = \frac{0.30}{0.63 \cdot 0.48} = 0.99.$$

За формулою (49) находимо значення функції Фішера Z_0 для $r = 0.99$

$$Z_0 = \frac{1}{2}(\ln(1 + 0.99) - \ln(1 - 0.99)) = 2.647.$$

За довірчою вірогідністю $\gamma = 0.95$ знаходимо в таблиці інтеграла вірогідностей (додаток Г) параметр нормального розподілу $t = 1.96$. Зіставляємо довірчій інтервал (50) для величини Z

$$1.993 < Z < 3.300.$$

Значення вибіркового коефіцієнта кореляції r, які відповідають значенням функції Фішера $Z = 1.993$ та $Z = 3.300$, відповідно дорівнюють $r_1 = 0.964$ та $r_2 = 0.997$ (див. Додаток Г). Звідси довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції r буде таким:

$$0.964 \leq r \leq 0.997.$$

Отже, з вірогідністю $\gamma = 0.95$ встановлюємо, що значення коефіцієнта кореляції лежить в межах від 0.964 до 0.997.

Коефіцієнт кореляції буде значущім, якщо довжина одержаного інтервалу буде менше, ніж значення коефіцієнта кореляції

$$r_2 - r_1 < r.$$

В даному випадку $0.997 - 0.964 = 0.034 < 0.99$,

тому з вірогідністю 0.95 можна стверджувати, що між виміряними довжинами ліній D і середніми квадратичними похибками m існує лінійна кореляційна залежність. в протилежному випадку, тобто коли довжина довірчого інтервалу є більшою від значення вибіркового коефіцієнта кореляції, лінійної кореляційної залежності між випадковими величинами D і m не існує.

Так як встановлено, що залежність між виміряними довжинами ліній D і середніми квадратичними похибками m значуща, то може бути побудоване рівняння регресії (51)

$$m_i = 0.76 \cdot D_i + 9.19.$$

3. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

3.1. Зрівнювання геодезичного чотирикутника параметричним методом

Література: [3, с. 8-40], [4, с. 115-140], [5, с. 292-298; 312-324; 365-377].

Зміст роботи. На місцевості побудована мережа у вигляді геодезичного чотирикутника. Відомі координати двох вихідних пунктів і значення виміряних напрямків всередині чотирикутника. Необхідно знайти координати двох шуканих пунктів, які максимально відповідали б їх дійсним значенням.

Робота складається з двох етапів: зрівнювання результатів вимірювань параметричним методом; оцінка точності вимірювань.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Приклад. За відомими координатами вихідних пунктів Ф і Х (табл. 9) і виміряними напрямками (табл. 8) виконати зрівнювання геодезичного чотирикутника ХФНЧ, знайти координати шуканих пунктів Н і Ч, та виконати оцінку точності вимірювань.

Таблиця 8 – *Виміряні напрямки*

Станція	Пункт візування	Виміряний напрямок
Ч	Х	0° 00' 00.00"
	Ф	45° 52' 17.75"
	Н	92°46' 59.99"
Х	Ч	0° 00' 00.00"
	Ф	272° 02' 47.02"
	Н	319° 27' 32.07"
Ф	Ч	0° 00' 00.00"
	Х	46° 10' 28.22"
	Н	319° 53' 56.66"
Н	Ч	0° 00' 00.00"
	Х	46° 40' 32.18"
	Ф	92° 59' 14.32"

Спочатку будуємо схему геодезичної мережі в масштабі 1:50000 (рис. 17 г). Для цього на окремому аркуші паперу креслимо дві взаємно перпендикулярні осі – X та Y, і оцифровуємо їх відповідно до заданого масштабу. Початок координат обираємо довільно, але так, щоб схема мала компактні розміри.

Наносимо на схему вихідні пункти Ф і Х за їх прямокутними координатами та з’єднуємо їх прямою лінією (рис. 17 а). З вихідних пунктів за допомогою транспортиру будуємо виміряні напрямки (табл. 8) на шукані пункти Н і Ч.

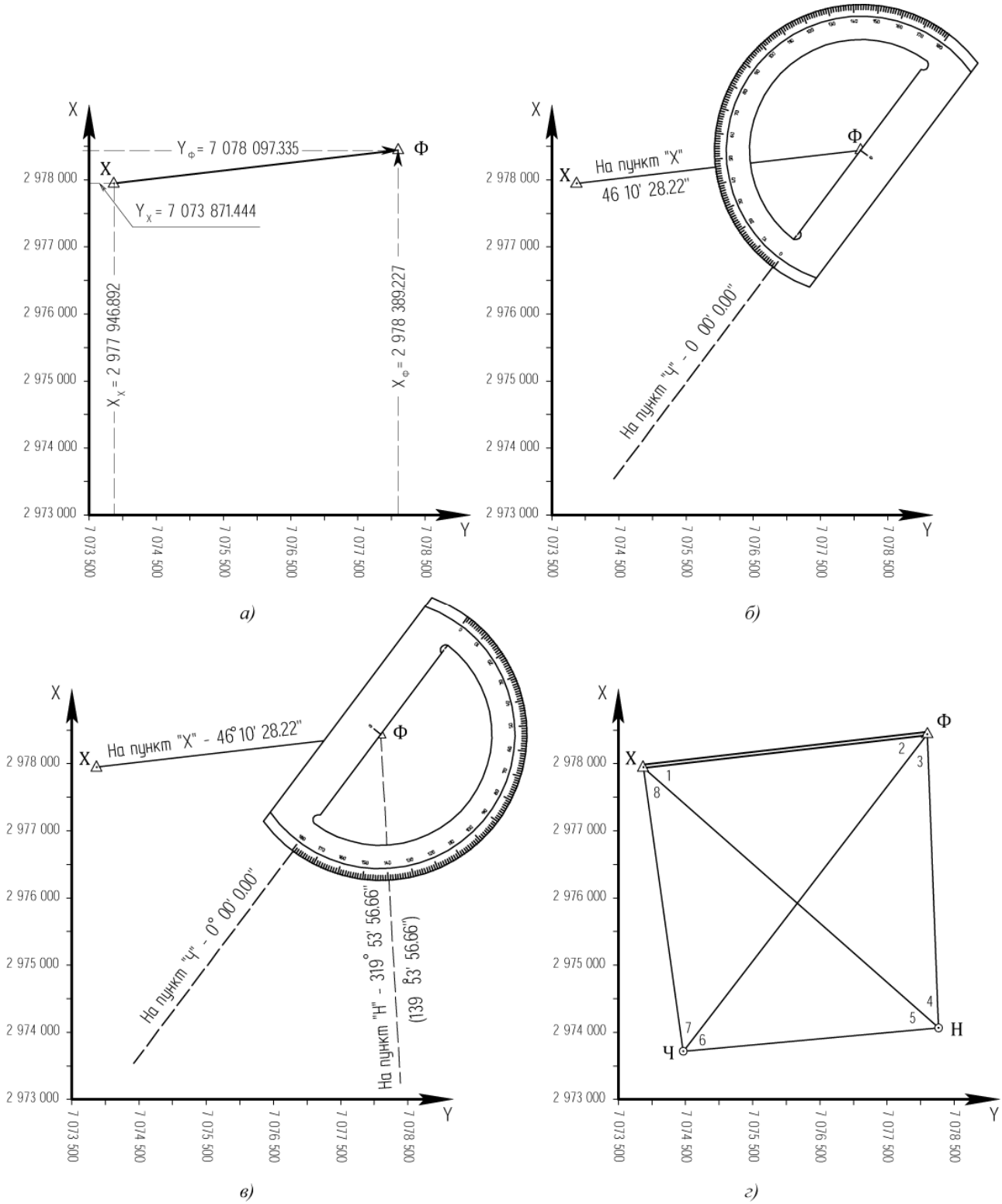


Рис. 17 – Побудова схеми геодезичного чотирикутника

Для цього спочатку суміщаємо центр транспортира з пунктом Ф (рис. 17 б), та обертаємо транспортир таким чином, щоб відлік 46° 10' 28.22" був зорієнтований на пункт Х. В такому положенні транспортира відлік 0° 00' 00.00" відповідає напрямку на пункт Ч, – будуємо його на схемі.

Щоб побудувати напрямок з пункту Ф на пункт Н (319° 53' 56.66"), розвертаємо транспортир на 180° (рис. 17 в). Знаходимо на шкалі транспортира відлік, який дорівнює 319° 53' 56.66" – 180° = 139° 53' 56.66", відмічаємо його на схемі та будуємо напрямок на пункт Н.

Аналогічним чином будуємо напрямки на пункти Н і Ч з пункту Х. На перетині однойменних напрямків отримуємо шукані пункти. З'єднуємо всі чотири пункти між собою прямими лініями та нумеруємо за ходом годинникової стрілки внутрішні кути побудованого чотирикутника (рис. 17 г).

Таблиця 9 – *Координати вихідних і шуканих пунктів*

Назва пункту	Наближені координати, м		Поправки, м		Вихідні і зрівняні координати, м	
	X_0	Y_0	δ_X	δ_Y	X	Y
Ф	-	-	-	-	2978389.227	7078097.535
Х	-	-	-	-	2977946.892	7073871.444
Н	2974066.218	7078267.439	-0.049	0.016	2974066.169	7078267.455
Ч	2973717.793	7074467.435	-0.008	-0.008	2973717.785	7074467.426

За виміряними напрямками обчислюємо значення горизонтальних кутів, результати заносимо до табл. 10 (колонка 4). Наприклад, перший кут, виміряний зі станції Х, буде дорівнювати різниці напрямків на пункти Н і Ф

$$\beta_1 = 319° \, 27'32.07'' - \, 272° \, 02'47.02'' = 47° \, 24'45.05''.$$

Таблиця 10 – *Виміряні і зрівняні кути*

№ кута	Вільні члени, сек	Кути, обчислені за наближеними координатами	Виміряні кути	Поправ-ки, сек	Зрівняні кути
1	0	47° 24' 45.05"	47° 24' 45.05"	0.91	47° 24' 45.96"
2	0	46° 10' 28.22"	46° 10' 28.22"	-0.06	46° 10' 28.16"
3	0	40° 06' 03.34"	40° 06' 03.34"	0.75	40° 06' 04.09"
4	1.25	46° 18' 43.39"	46° 18' 42.14"	-0.36	46° 18' 41.78"
5	1.76	46° 40' 33.94"	46° 40' 32.18"	0.34	46° 40' 32.52"
6	-2.91	46° 54' 39.33"	46° 54' 42.24"	-0.63	46° 54' 41.61"
7	1.05	45° 52' 18.80"	45° 52' 17.75"	0.65	45° 52' 18.40"
8	0	40° 32' 27.93"	40° 32' 27.93"	-0.46	40° 32' 27.47"
∑	**1.15**	**360° 00' 00.00''**	**359° 59' 58.85''**	**1.15**	**360° 00' 00.00''**

Підраховуємо кількість невідомих t, якими в даному випадку є координати X і Y шуканих пунктів Н і Ч, тобто $t = 2 \cdot 2 = 4$. Число незалежних вимірювань $n = 8$. Число надлишкових вимірювань, відповідно, становить $r = 8 - 4 = 4$.

За виміряними кутами (табл. 10) та координатами вихідних пунктів (табл. 9) обчислюємо наближені координати X і Y шуканих пунктів Н і Ч. Використовуємо для цього допоміжну схему взаємного розміщення пунктів в трикутнику (рис. 18) і формули Юнга

$$X_C = \frac{X_L ctg\,\beta + X_P ctg\alpha + Y_P - Y_L}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta},$$

$$Y_C = \frac{Y_L ctg\,\beta + Y_P ctg\alpha - X_P + X_L}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta}, \qquad (52)$$

де X_L, Y_L, X_P, Y_P – координати лівого пункту L і правого пункту P відповідно.

α; β – кути трикутника, вершинами яких є відповідно пункти L і P.

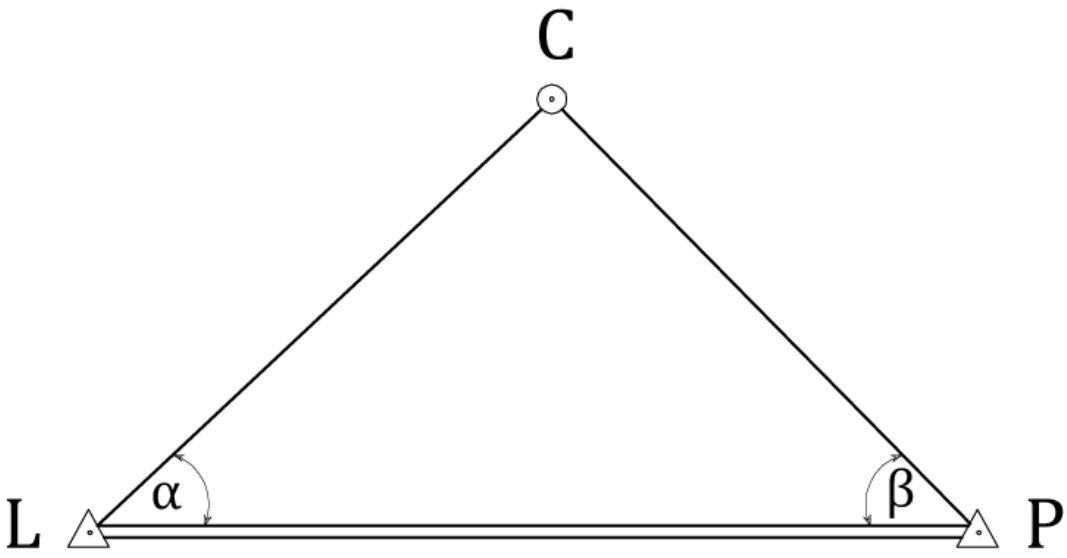


Рис. 18 – Пояснювальна схема до формул (52)

При позначенні вершин трикутника керуються таким правилом: якщо дивитися із середини базисної сторони трикутника на шуканий пункт, то ліворуч буде знаходитися вихідний пункт L і виміряний кут α, а праворуч – вихідний пункт P і виміряний кут β.

Застосувавши це правило, виділяємо з чотирикутника ЧХФН два трикутники – ΔФХН і ΔФХЧ (рис. 19).

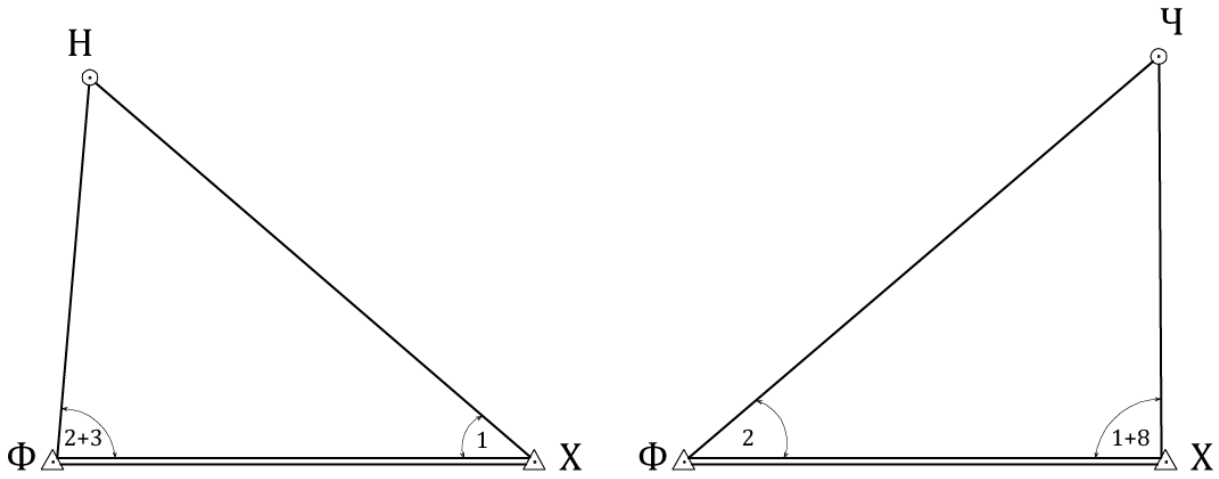


Рис. 19 – Трикутники, з яких отримують координати шуканих пунктів

Для пунктів Н і Ч згідно із рис. 19 формули (52) приймуть такий вигляд

$$X_{\text{Н}} = \frac{X_{\Phi} ctg\ \beta_1 + X_{\text{Х}} ctg(\beta_2 + \beta_3) + Y_{\text{Х}} - Y_{\Phi}}{ctg\ (\beta_2 + \beta_3) + ctg\ \beta_1},$$

$$Y_{\text{Н}} = \frac{Y_{\Phi} ctg\ \beta_1 + Y_{\text{Х}} ctg(\beta_2 + \beta_3) - X_{\text{Х}} + X_{\Phi}}{ctg\ (\beta_2 + \beta_3) + ctg\ \beta_1}, \qquad (53)$$

$$X_{\text{Ч}} = \frac{X_{\Phi} ctg\ (\beta_1 + \beta_8) + X_{\text{Х}} ctg\ \beta_2 + Y_{\text{Х}} - Y_{\Phi}}{ctg\ \ \beta_2 + ctg\ (\beta_1 + \beta_8)},$$

$$Y_{\text{Ч}} = \frac{Y_{\Phi} ctg\ (\beta_1 + \beta_8) + Y_{\text{Х}} ctg\ \beta_2 - X_{\text{Х}} + X_{\Phi}}{ctg\ \ \beta_2 + ctg\ (\beta_1 + \beta_8)}.$$

Підставляємо в формули (53) числові значення та отримуємо наближені координати пунктів Н і Ч. Обчислення виконуємо в табл. 11. Результати заокруглюємо до 0.001 м.

Таблиця 11 – *Обчислення наближених координат шуканих пунктів*

Назва пункту	Виміряні кути	Координати	
		X	*Y*
Ф	86° 16' 31.56"	2978389.227	7078097.535
Х	47° 24' 45.05"	2977946.892	7073871.444
Н		2974066.218	7078267.439
Ф	46° 10' 28.22"	2978389.227	7078097.535
Х	87° 57' 12.98"	2977946.892	7073871.444
Ч		2973717.793	7074467.435

Обчислені наближені координати пунктів Н і Ч заносимо до табл. 9. Складаємо рівняння поправок до виміряних кутів

$$\rho\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L{}^2+\Delta Y_L{}^2}\delta x_L-\rho\frac{\Delta X_L}{\Delta X_L{}^2+\Delta Y_L{}^2}\delta y_L-\rho\frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P{}^2+\Delta Y_P{}^2}\delta x_P+\rho\frac{\Delta X_P}{\Delta X_P{}^2+\Delta Y_P{}^2}\delta y_P-$$

$$-\rho\left(\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2+\Delta Y_L^2}-\frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P^2+\Delta Y_P^2}\right)\delta x_C+\rho\left(\frac{\Delta X_L}{\Delta X_L^2+\Delta Y_L^2}-\frac{\Delta X_P}{\Delta X_P^2+\Delta Y_P^2}\right)\delta y_C+l_\beta=V_\beta\,.$$

де $\delta x_L, \delta y_L, \delta x_P, \delta y_P, \delta x_C, \delta y_C$ – поправки до наближених координат;

l_β – вільний член рівняння поправок;

V – поправка до виміряного кута.

Вільні члени рівнянь поправок обчислюємо за формулою

$$l_\beta=\beta_{\text{обч}}-\beta_{\text{вим}}\,, \tag{54}$$

де $\beta_{\text{вим}}$ – виміряний кут;

$\beta_{\text{обч}}$ – кут, обчислений за наближеними координатами.

Кути, обчислені за наближеними координатами, отримуємо із виразу

$$tg\,\beta_{\text{обч}}=\frac{\Delta X_L\Delta Y_P-\Delta X_P\Delta Y_L}{\Delta X_L\Delta X_P+\Delta Y_L\Delta Y_P}\,. \tag{55}$$

Для спрощення обчислень заповнюємо табл. 12, в якій представляємо коефіцієнти рівнянь поправок в буквеному позначенні.

Таблиця 12 – *Коефіцієнти рівнянь поправок в буквеному позначенні*

Пункт / Кут	Поправки до наближених координат			
	$\delta x_{\text{Н}}$	$\delta y_{\text{Н}}$	$\delta x_{\text{Ч}}$	$\delta y_{\text{Ч}}$
1	2	3	4	5
1/Х	$-\rho\frac{\Delta Y_{\text{ХН}}}{\Delta X_{\text{ХН}}^2+\Delta Y_{\text{ХН}}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{\text{ХН}}}{\Delta X_{\text{ХН}}^2+\Delta Y_{\text{ХН}}^2}$	----------	----------
2/Ф	----------	----------	$\rho\frac{\Delta Y_{\text{ФЧ}}}{\Delta X_{\text{ФЧ}}^2+\Delta Y_{\text{ФЧ}}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{\text{ФЧ}}}{\Delta X_{\text{ФЧ}}^2+\Delta Y_{\text{ФЧ}}^2}$
3/Ф	$\rho\frac{\Delta Y_{\text{ФН}}}{\Delta X_{\text{ФН}}^2+\Delta Y_{\text{ФН}}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{\text{ФН}}}{\Delta X_{\text{ФН}}^2+\Delta Y_{\text{ФН}}^2}$	$-\rho\frac{\Delta Y_{\text{ФЧ}}}{\Delta X_{\text{ФЧ}}^2+\Delta Y_{\text{ФЧ}}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{\text{ФЧ}}}{\Delta X_{\text{ФЧ}}^2+\Delta Y_{\text{ФЧ}}^2}$
4/Н	$-\rho\frac{\Delta Y_{\text{НХ}}}{\Delta X_{\text{НХ}}^2+\Delta Y_{\text{НХ}}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{\text{НФ}}}{\Delta X_{\text{НФ}}^2+\Delta Y_{\text{НФ}}^2}$	$\rho\frac{\Delta Y_{\text{НХ}}}{\Delta X_{\text{НХ}}^2+\Delta Y_{\text{НХ}}^2}-$ $-\rho\frac{\Delta Y_{\text{НФ}}}{\Delta X_{\text{НФ}}^2+\Delta Y_{\text{НФ}}^2}$	----------	----------

Продовження таблиці 12

1	2	3	4	5
5/Н	$-\rho\frac{\Delta Y_{НЧ}}{\Delta X_{НЧ}^2+\Delta Y_{НЧ}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ИХ}}{\Delta X_{НХ}^2+\Delta Y_{НХ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{НЧ}}{\Delta X_{НЧ}^2+\Delta Y_{НЧ}^2}-$ $-\rho\frac{\Delta X_{ИХ}}{\Delta X_{НХ}^2+\Delta Y_{НХ}^2}$	$\rho\frac{\Delta Y_{НЧ}}{\Delta X_{НЧ}^2+\Delta Y_{НЧ}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{НЧ}}{\Delta X_{НЧ}^2+\Delta Y_{НЧ}^2}$
6/Ч	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЧН}}{\Delta X_{ЧН}^2+\Delta Y_{ЧН}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{ЧН}}{\Delta X_{ЧН}^2+\Delta Y_{ЧН}^2}$	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЧФ}}{\Delta X_{ЧФ}^2+\Delta Y_{ЧФ}^2}$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ЧН}}{\Delta X_{ЧН}^2+\Delta Y_{ЧН}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЧФ}}{\Delta X_{ЧФ}^2+\Delta Y_{ИФ}^2}$ $-\rho\frac{\Delta X_{ЧН}}{\Delta X_{ЧН}^2+\Delta Y_{ЧН}^2}$
7/Ч	----------	----------	$-\rho\frac{\Delta Y_{ЧХ}}{\Delta X_{ЧХ}^2+\Delta Y_{ЧХ}^2}+$ $+\rho\frac{\Delta Y_{ЧФ}}{\Delta X_{ЧФ}^2+\Delta Y_{ЧФ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ЧХ}}{\Delta X_{ЧХ}^2+\Delta Y_{ЧХ}^2}-$ $-\rho\frac{\Delta X_{ЧФ}}{\Delta X_{ЧФ}^2+\Delta Y_{ЧФ}^2}$
8/Х	$\rho\frac{\Delta Y_{ХН}}{\Delta X_{ХН}^2+\Delta Y_{ХН}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{ХН}}{\Delta X_{ХН}^2+\Delta Y_{ХН}^2}$	$-\rho\frac{\Delta Y_{ХЧ}}{\Delta X_{ХЧ}^2+\Delta Y_{ХЧ}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{ХЧ}}{\Delta X_{ХЧ}^2+\Delta Y_{ХЧ}^2}$

Підставивши в формулу (55), вихідні координати пунктів Ф і Х та наближені координати пунктів Н і Ч, обчислюємо тангенси кутів $\beta_{обч}$. Значення кутів отримуємо через арктангенс. Обчислення представлені в табл. 13. Контроль обчислень – сума кутів повинна дорівнювати 360°.

Таблиця 13 – *Обчислення кутів за наближеними координатами*

№ кута	Напрямок	Приріст		Тангенс кута $tg\ \beta_{обч}$	Значення кута $\beta_{обч}$
		ΔX	ΔY		
1	ХФ	442.335	4226.091	1.08796865	47° 24' 45.05"
	ХН	-3880.674	4395.995		
2	ФЧ	-4671.434	-3630.100	1.04186197	46° 10' 28.22"
	ФХ	-442.335	-4226.091		
3	ФН	-4323.009	169.904	0.84210587	40° 06' 03.34"
	ФЧ	-4671.434	-3630.100		
4	НХ	3880.674	-4395.995	1.04688104	46° 18' 43.39"
	НФ	4323.009	-169.904		
5	НЧ	-348.425	-3800.004	1.06028756	46° 40' 33.94"
	НХ	3880.674	-4395.995		
6	ЧФ	4671.434	3630.100	1.06903179	46° 54' 39.33"
	ЧН	348.425	3800.004		
7	ЧХ	4229.099	-595.991	1.03090738	45° 52' 18.80"
	ЧФ	4671.434	3630.100		
8	ХН	-3880.674	4395.995	0.85532178	40° 32' 27.93"
	ХЧ	-4229.099	595.991		

Кути, обчислені за наближеними координатами, заносимо до табл. 10 (колонка 3). За формулою (54) обчислюємо вільні члени рівнянь поправок, результати заносимо до табл. 10 (колонка 2).

За виразами, наведеними в табл. 9, використовуючи значення ΔX і ΔY з табл. 13, обчислюємо значення коефіцієнтів рівнянь поправок. Щоб не отримувати занадто великих значень коефіцієнтів рівнянь поправок і з метою запобігання втрати точності обчислень, зменшимо постійну ρ в 100 разів, тобто приймемо $\rho = 2062.65$.

З числових значень коефіцієнтів рівнянь поправок формуємо матрицю a.

$$a = \begin{pmatrix} -0.264 & -0.233 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.214 & 0.275 \\ 0.019 & 0.476 & 0.214 & -0.275 \\ 0.245 & -0.244 & 0 & 0 \\ 0.275 & -0.282 & -0.538 & 0.049 \\ -0.538 & 0.049 & 0.324 & 0.226 \\ 0 & 0 & 0.281 & 0.203 \\ 0.264 & 0.233 & -0.067 & -0.478 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю a і помножимо її на таку ж матрицю. В результаті отримаємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь A.

$$A = a^{\mathrm{T}} a = \begin{pmatrix} 0.565 & -0.032 & -0.336 & -0.239 \\ -0.032 & 0.477 & 0.254 & -0.245 \\ -0.336 & 0.254 & 0.570 & 0.018 \\ -0.239 & -0.245 & 0.018 & 0.475 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю, обернену до матриці A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3.904 & 0.074 & 2.207 & 1.920 \\ 0.074 & 4.385 & -1.987 & 2.378 \\ 2.207 & -1.987 & 3.943 & -0.065 \\ 1.920 & 2.378 & -0.065 & 4.303 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо матрицю-стовбець вільних членів нормальних рівнянь λ.

$$\lambda = a^{\mathrm{T}} l = \begin{pmatrix} 2.357 \\ -0.945 \\ -1.597 \\ -0.358 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо вектор-стовбець поправок до наближених координат пунктів Н і Ч. Результати отримуємо в сантиметрах.

$$\delta = -A^{-1}\lambda = \begin{pmatrix} -4.919 \\ 1.649 \\ -0.807 \\ -0.843 \end{pmatrix}.$$

Отримані поправки заносимо до табл. 6, попередньо зменшивши їх в 100 разів, щоб розмірність була в метрах.

Знаходимо в табл. 9 значення зрівняних координат шуканих пунктів Н і Ч.

Обчислюємо вектор-стовбець поправок до виміряних кутів. Результати отримуємо в секундах.

$$V = a\delta + l = \begin{pmatrix} 0.913 \\ -0.060 \\ 0.753 \\ -0.357 \\ 0.338 \\ -0.634 \\ 0.652 \\ -0.456 \end{pmatrix}.$$

Отримані результати заносимо до табл. 10 і обчислюємо зрівняні кути. Для контролю обчислень знаходимо суму зрівняних кутів, – вона повинна дорівнювати 360° 00' 00.00". В даному випадку умова виконується.

На цьому зрівнювання результатів вимірювань завершено. Після зрівнювання виконуємо оцінку точності вимірювань.

Обчислюємо емпіричну середню квадратичну похибку виміряного кута за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-t}}\,, \tag{56}$$

де v – поправка до виміряного кута;

n – кількість вимірювань;

t – кількість невідомих.

$$m = \sqrt{\frac{2.682}{8-4}} = 0.82''.$$

Оцінюємо надійність емпіричної середньої квадратичної похибки за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-t)}}\,; \tag{57}$$

$$m_m = \frac{0.82}{\sqrt{2(8-4)}} = 0.29''.$$

Обчислюємо середню квадратичну похибку зрівняного кута за формулою

$$m_{\text{зр}} = \sqrt{m^2 \frac{t}{n}}; \tag{58}$$

$$m_{\text{зр}} = \sqrt{0.82^2 \frac{4}{8}} = 0.58''.$$

Позначивши $A^{-1} = Q$, знаходимо середні квадратичні похибки положення шуканих пунктів Н і Ч за осями координат, використовуючи діагональні елементи матриці Q.

$$A^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{32} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.904 & 0.074 & 2.207 & 1.920 \\ 0.074 & 4.385 & -1.987 & 2.378 \\ 2.207 & -1.987 & 3.943 & -0.065 \\ 1.920 & 2.378 & -0.065 & 4.303 \end{pmatrix}.$$

Пункт Н

$m_x = m\sqrt{Q_{11}} = 1.62$ см,

$m_y = m\sqrt{Q_{22}} = 1.71$ см,

Пункт Ч

$m_x = m\sqrt{Q_{33}} = 1.63$ см,

$m_y = m\sqrt{Q_{44}} = 1.70$ см.

Знаходимо кругові середні квадратичні похибки положення пунктів Н і Ч за формулою

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \tag{59}$$

$m_{\text{Н}} = 2.36$ см, $m_{\text{Ч}} = 2.35$ см.

Використовуючи елементи матриці Q, знаходимо параметри еліпсів похибок (рис. 20), орієнтування і розміри осей якого визначають найбільш вірогідні напрямки і величину максимальної і мінімальної середньої квадратичної похибки положення пунктів Н і Ч.

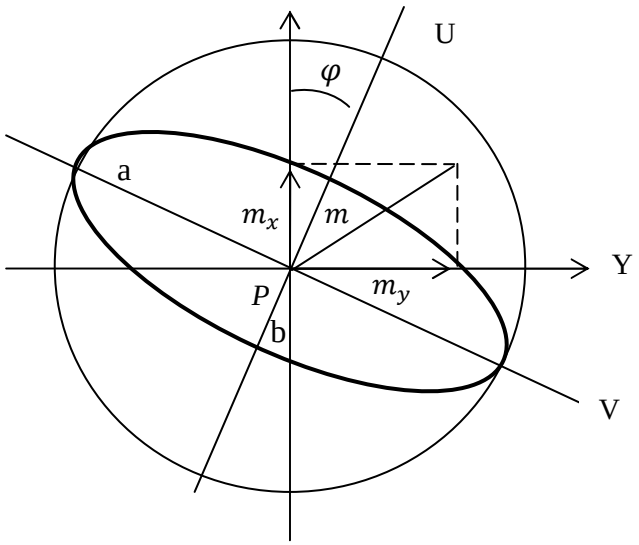


Рис. 20 – Параметри еліпсу похибок

Кут повороту осей еліпсу похибок знаходимо із виразу

$$2\varphi = arctg\left(\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}\right), \tag{60}$$

де Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{xy} – елементи матриці Q.

Якщо кут φ, обчислений за формулою (60) приймає від'ємне значення, додаємо до нього 180°.

Із матриці Q виділяємо 2 блоки: перший відповідає пункту Н, другий – пункту Ч (в тому порядку, в якому вони були внесені до табл. 12).

Пункт Н

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{32} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{pmatrix}$$

Пункт Ч

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

Пункт Н

$Q_{xx} = 3.904,$

$Q_{yy} = 4.385,$

$Q_{xy} = 0.074,$

$\varphi = 171^0 30'.$

Пункт Ч

$Q_{xx} = 3.943,$

$Q_{yy} = 4.303,$

$Q_{xy} = -0.065,$

$\varphi = 9^0 57'.$

Розміри великої і малої напіввісі еліпсів похибок, відповідно, обчислюємо за формулами

$$a = m\sqrt{Q_{uu}}, \qquad b = m\sqrt{Q_{vv}}, \tag{61}$$

де елементи Q_{uu} і Q_{vv} дорівнюють

$$Q_{uu} = \frac{1}{2}\left(Q_{xx} + Q_{yy} + \sqrt{\left(Q_{xx} - Q_{yy}\right)^2 + 4Q_{xy}^2}\right), \tag{62}$$

$$Q_{vv} = \frac{1}{2}\left(Q_{xx} + Q_{yy} - \sqrt{\left(Q_{xx} - Q_{yy}\right)^2 + 4Q_{xy}^2}\right).$$

Отже, підставивши числові значення елементів матриці Q у вирази (61) і (62), отримаємо такі результати

Пункт Н	Пункт Ч
$Q_{uu} = 4.40,$	$Q_{uu} = 4.31,$
$Q_{vv} = 3.89,$	$Q_{vv} = 3.93,$
$a = 1.72$ см,	$a = 1.70$ см,
$b = 1.62$ см,	$b = 1.62$ см.

За обчисленими параметрами еліпсів похибок (φ, a, b), будуємо їх на схемі геодезичної мережі. Прикладаємо транспортир вертикально, центром до пункту Н (рис. 21). Під кутом $\varphi = 171^0 30'$ відкладаємо в обидва боки від пункту Н відстань $a = 1.70$ см. Таким чином отримуємо велику вісь еліпсу похибок. Під кутом 90^0 до неї відкладаємо відстані $b = 1.62$ см від пункту Н – отримуємо малу вісь еліпсу. Навколо побудованих осей будуємо еліпс похибок.

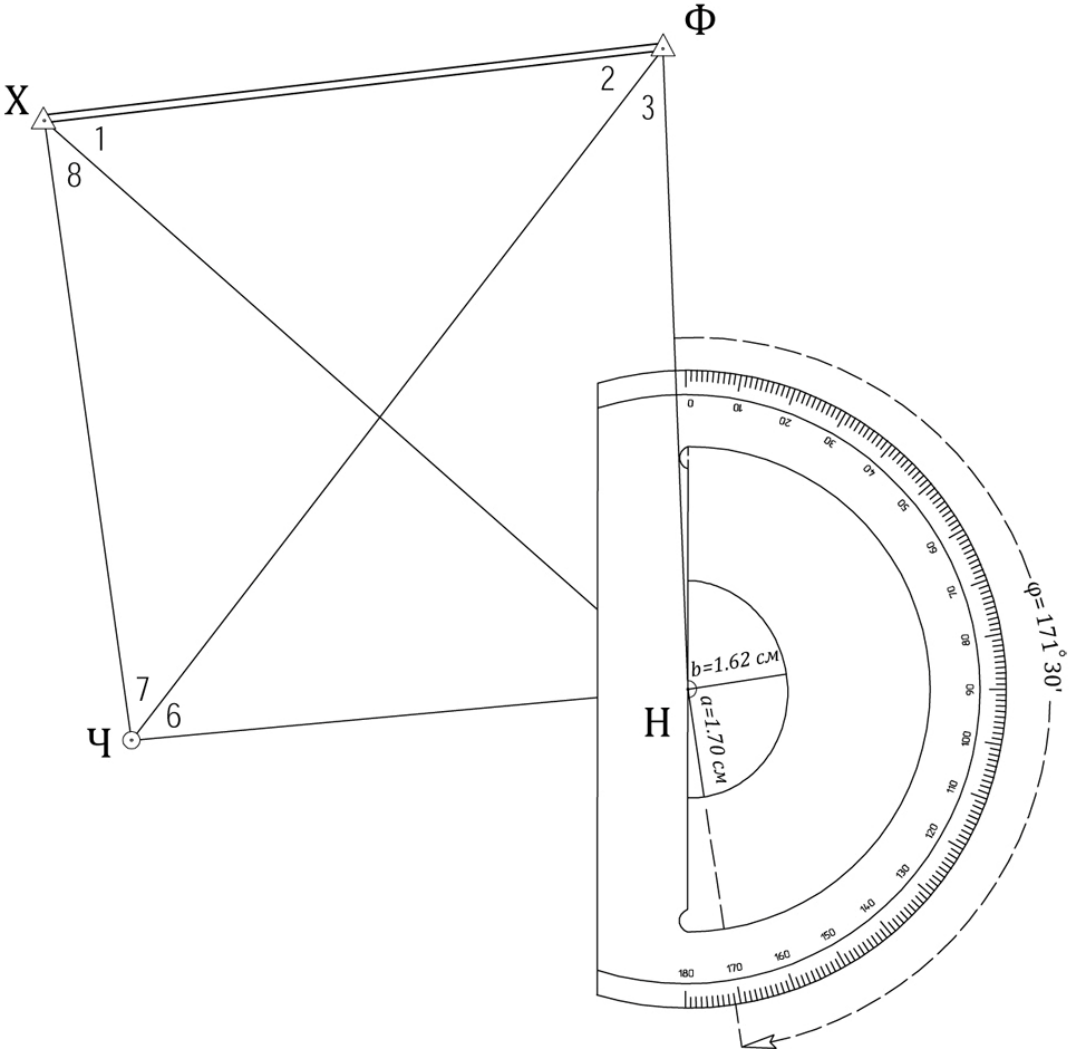


Рис. 21 – Побудова еліпсу похибок

Аналогічно будуємо другий еліпс похибок навколо пункту Ч. В результаті отримуємо схему геодезичного чотирикутника ЧХФН, побудовану в масштабі 1:50000, з нанесеними в масштабі 1:1 еліпсами похибок.

Таким чином, застосувавши параметричний метод зрівнювання, були знайдені координати шуканих пунктів Н і Ч (табл. 9), які максимально відповідають їх дійсним значенням. Виконано оцінку точності вимірювань, основні характеристики якої проілюстровані графічно на схемі геодезичного чотирикутника (Додаток Ж).

3.2. Зрівнювання геодезичного чотирикутника корелатним методом

Література: [3, с. 40-64], [4, с. 140-159], [5, с. 324-330; 339-346; 348-358].

Зміст роботи. На місцевості побудована мережа у вигляді геодезичного чотирикутника. Відомі координати двох вихідних пунктів і значення виміряних напрямків всередині чотирикутника. Необхідно знайти координати двох шуканих пунктів, які максимально відповідали б їх дійсним значенням.

Робота складається з двох етапів: зрівнювання результатів вимірювань корелатним методом; оцінка точності вимірювань.

Вихідні дані. Видаються викладачем за індивідуальним номером варіанту.

Приклад. За відомими координатами вихідних пунктів Ф і Х (табл. 6) і виміряними напрямками (табл. 5) виконати зрівнювання геодезичного чотирикутника ХФНЧ, знайти координати шуканих пунктів Н і Ч, та виконати оцінку точності вимірювань.

Спочатку будуємо схему геодезичної мережі в масштабі 1:50000 (рис. 22), як це описано в п. 3.1.

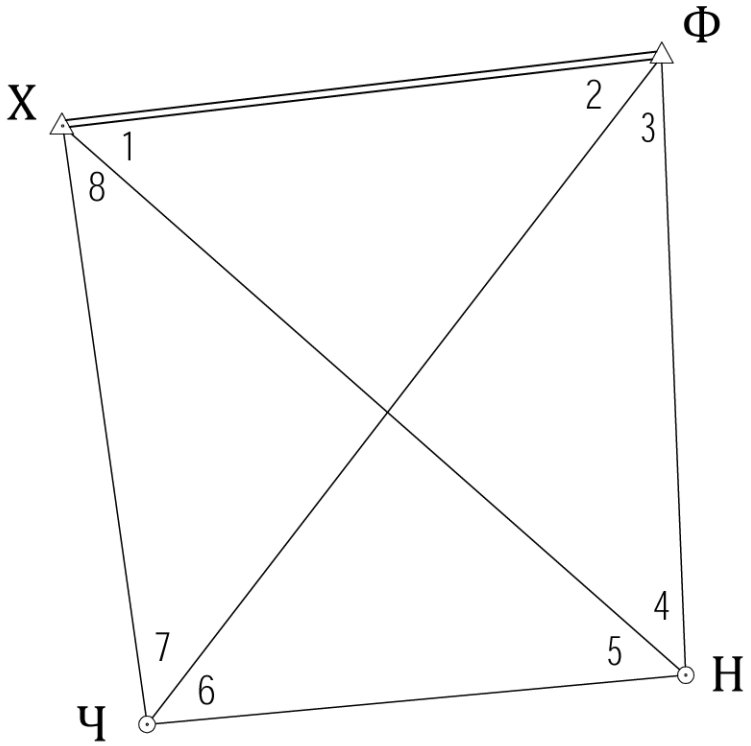


Рис. 22 – Схема геодезичного чотирикутника

За виміряними напрямками обчислюємо значення горизонтальних кутів, результати заносимо до табл. 14 (колонка 1).

Визначаємо кількість надлишкових вимірювань за формулою

$$r = n - t,$$

де t – кількість невідомих, якими в даному випадку є координати X і Y шуканих пунктів Н і Ч, тобто $t = 2 \cdot 2 = 4$;

n – кількість незалежних вимірювань; $n = 8$.

Отже число надлишкових вимірювань становить

$$r = 8 - 4 = 4.$$

Таблиця 14 – Виміряні і зрівняні кути, коефіцієнту умовних рівнянь.

№	Виміряні кути	Коефіцієнти умовних рівнянь				Поправки, сек.	Зрівняні кути
		a	b	c	d		
	k =	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000		
1	47° 24' 45.05"	1	1	0	0.919	0.91	47° 24' 45.96"
2	46° 10' 28.22"	1	1	0	-0.960	-0.06	46° 10' 28.16"
3	40° 06' 03.34"	1	0	1	1.187	0.75	40° 06' 04.09"
4	46° 18' 42.14"	1	0	1	-0.955	-0.36	46° 18' 41.78"
5	46° 40' 32.18"	1	-1	0	0.943	0.34	46° 40' 35.52"
6	46° 54' 42.24"	1	-1	0	-0.935	-0.63	46° 54' 41.61"
7	45° 52' 17.75"	1	0	-1	-0.970	0.65	45° 52' 18.40"
8	40° 32' 27.93"	1	0	-1	-1.169	-0.46	40° 32' 27.47"
	W =	-1.15	-1.15	-0.20	-4.209	1.15	360° 00' 00.00"

Складаємо умовні рівняння. В даному випадку будемо мати

1. Одну умову чотирикутника

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + W_{\mathrm{I}} = 0, \qquad (63)$$

де $W_{\mathrm{I}} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 - 360°$,

2. Дві умови сум і різниць

$$V_1 + V_2 - V_5 - V_6 + W_{\mathrm{II}} = 0, \qquad (64)$$
$$V_3 + V_4 - V_7 - V_8 + W_{\mathrm{III}} = 0,$$

де $W_{\mathrm{II}} = \beta_1 + \beta_2 - \beta_5 - \beta_6$,

$W_{\mathrm{III}} = \beta_3 + \beta_4 - \beta_7 - \beta_8$.

3. Умову полюсу

$$ctg\beta_1 V_1 - ctg\beta_2 V_2 + ctg\beta_3 V_3 - ctg\beta_4 V_4 + ctg\beta_5 V_5 - ctg\beta_6 V_6 + \qquad (65)$$
$$+ctg\beta_7 V_7 - ctg\beta_8 V_8 + W_{IV} = 0$$

де

$$W_{IV} = \left(\frac{sin\beta_1 \cdot sin\beta_3 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_7}{sin\beta_2 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_6 \cdot sin\beta_8} - 1\right)\rho".$$

За формулами (63), (64), (65) визначаємо коефіцієнти умовних рівнянь і заносимо їх до відповідних колонок табл. 14.

Обчислюємо вільні члени (нев'язки) W умовних рівнянь, які розміщуємо в нижній частині табл. 14. Із числових значень коефіцієнтів умовних рівнянь, представлених в табл. 14, формуємо матрицю b^T.

$$b^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.919 \\ 1 & 1 & 0 & -0.960 \\ 1 & 0 & 1 & 1.187 \\ 1 & 0 & 1 & -0.955 \\ 1 & -1 & 0 & 0.943 \\ 1 & -1 & 0 & -0.935 \\ 1 & 0 & -1 & 0.970 \\ 1 & 0 & -1 & -1.169 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю b^T

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0.919 & -0.960 & 1.187 & -0.955 & 0.943 & -0.935 & 0.970 & -1.169 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь

$$B = b \cdot b^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -0.048 \\ 0 & 0 & 4 & 0.431 \\ 0 & -0.048 & 0.431 & 8.161 \end{pmatrix}.$$

Находимо матрицю B^{-1}, обернену до матриці B

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.250 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0.251 & -0.013 \\ 0 & 0.001 & -0.013 & 0.123 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо корелати

$$k = -B^{-1}W = \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.294 \\ -0.006 \\ 0.518 \end{pmatrix}.$$

Результати заносимо до табл. 14. Обчислюємо поправки до виміряних кутів

$$V = b^T k = \begin{pmatrix} 0.913 \\ -0.060 \\ 0.753 \\ -0.357 \\ 0.338 \\ -0.634 \\ 0.652 \\ -0.456 \end{pmatrix}.$$

Здійснюємо контроль зрівнювальних обчислень за формулою

$$V^T V = -kW.$$

В результаті маємо

$$V^T V = 2.68, \quad -kW = 2.68.$$

Поправки заносимо до табл. 14 і там же обчислюємо зрівняні кути. Для контролю обчислень знаходимо суму зрівняних кутів, – вона повинна дорівнювати 360° 00' 00.00". В даному випадку умова виконується.

Використовуючи зрівняні кути за формулами Юнга (52), обчислюємо координати шуканих пунктів (табл. 15).

Таблиця 15 – *Обчислення координат шуканих пунктів*

Назва пункту	Зрівняні кути	Координати	
		X	Y
Ф	86° 16' 32.25"	2978389.227	7078097.535
Х	47° 24' 45.96"	2977946.892	7073871.444
Н		2974066.169	7078267.455
Ф	46° 10' 28.16"	2978389.227	7078097.535
Х	87° 57' 13.44"	2977946.892	7073871.444
Ч		2973717.785	7074467.426

На цьому зрівнювання результатів вимірювань завершено. Після зрівнювання виконуємо оцінку точності вимірювань.

Обчислюємо емпіричну середню квадратичну похибку виміряного кута за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}, \tag{66}$$

де v – поправка до виміряного кута;

r – кількість надлишкових вимірювань.

$$m = \sqrt{\frac{2.682}{4}} = 0.82''.$$

Оцінюємо надійність емпіричної середньої квадратичної похибки за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2r}}; \tag{67}$$

$$m_m = \frac{0.82}{\sqrt{2 \cdot 4}} = 0.29''.$$

Обчислюємо середню квадратичну похибку зрівняного кута за формулою

$$m_{\text{зр}} = m\sqrt{1 - \frac{r}{n}}; \tag{68}$$

$$m_{\text{зр}} = 0.82\sqrt{1 - \frac{4}{8}} = 0.58''.$$

Далі визначаємо сукупну середню квадратичну похибку положення шуканих пунктів відносно вихідних. Для спрощення задачі оцінки точності введемо допоміжну систему координат (рис. 23):

- за початок умовної системи координат приймемо пункт Х;
- вісь абсцис спрямуємо вздовж лінії ХФ.

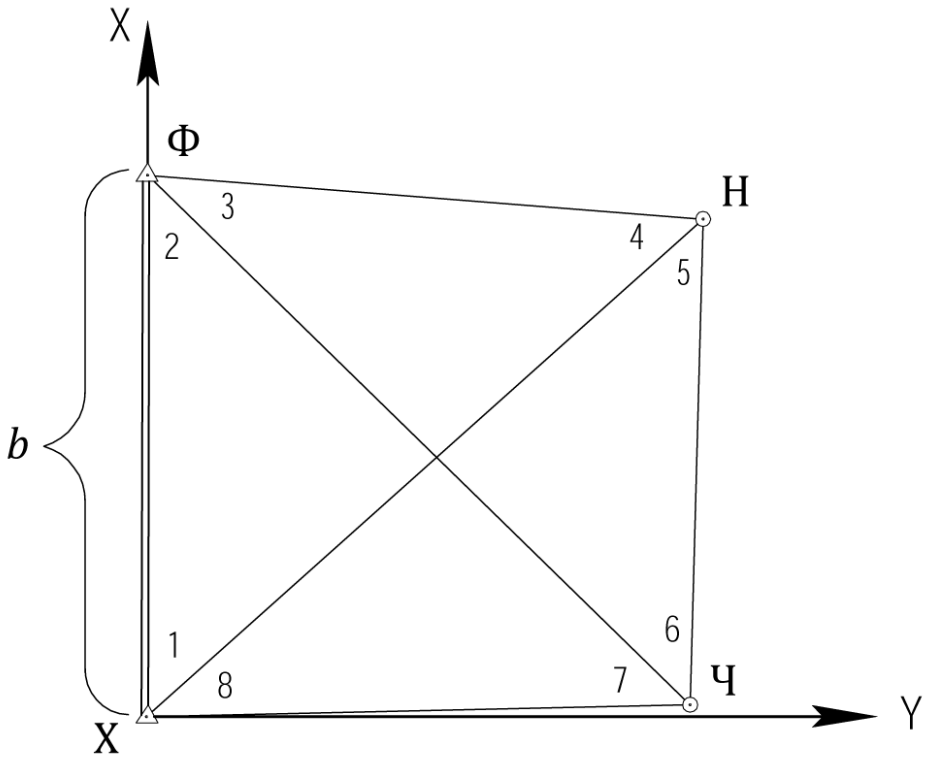


Рис. 23 – Геодезичний чотирикутник в умовній системі координат

Обчислюємо координати шуканих пунктів Н і Ч в прийнятій системі координат. Як видно з рис. 00, координати пункту Н дорівнюватимуть

$$X_{\text{Н}} = X_{\text{Х}} + d_{\text{ХН}} \cdot cos\beta_1; \tag{69}$$

$$Y_{\text{Н}} = Y_{\text{Х}} + d_{\text{ХН}} \cdot sin\beta_1.$$

Так як пункт Х є початком координат, то $X_{\text{Х}} = 0$; $Y_{\text{Х}} = 0$, а формули (69) приймають вигляд

$$X_{\text{Н}} = d_{\text{ХН}} \cdot cos\beta_1; \qquad (70)$$
$$Y_{\text{Н}} = d_{\text{ХН}} \cdot sin\beta_1.$$

Довжина лінії $d_{\text{ХН}}$ є невідомою. Її находимо із трикутника $\Delta ХФН$, застосувавши теорему синусів, за формулою

$$d_{\text{ХН}} = \frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4}, \qquad (71)$$

де b – довжина базисної лінії ХФ; її обчислюємо за координатами вихідних пунктів

$$b = \sqrt{(X_{\text{Ф}} - X_{\text{Х}})^2 + (Y_{\text{Ф}} - Y_{\text{Х}})^2} = 4249.177 \text{ м}.$$

Підставивши вираз (71) в формули (70), отримаємо

$$X_{\text{Н}} = \frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} cos\beta_1 = 3968.148 \text{ м};$$
$$Y_{\text{Н}} = \frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} sin\beta_1 = 4317.259 \text{ м}.$$

Аналогічно знайдемо координати пункту Ч в умовній системі координат

$$X_{\text{Ч}} = X_{\text{Х}} + d_{\text{ХЧ}} \cdot cos(\beta_1 + \beta_8) = d_{\text{ХЧ}} \cdot cos(\beta_1 + \beta_8); \qquad (72)$$
$$Y_{\text{Ч}} = Y_{\text{Х}} + d_{\text{ХЧ}} \cdot sin(\beta_1 + \beta_8) = d_{\text{ХЧ}} \cdot sin(\beta_1 + \beta_8).$$

Довжину лінії $d_{\text{ХЧ}}$ находимо із трикутника $\Delta ХНЧ$ за формулою

$$d_{\text{ХЧ}} = \frac{b \cdot \sin\beta_2}{sin\beta_7}, \qquad (73)$$

де b – довжина базисної лінії ХФ; $b = 4249.177$ м.

Підставивши вираз (73) в формули (72), отримаємо

$$X_{\text{Ч}} = \frac{b \cdot \sin\beta_2}{sin\beta_7} cos(\beta_1 + \beta_8) = 152.499 \text{ м};$$
$$Y_{\text{Ч}} = \frac{b \cdot \sin\beta_2}{sin\beta_7} sin(\beta_1 + \beta_8) = 4268.171 \text{ м}.$$

Далі, користуючись таблицею похідних (додаток Е), знаходимо елементи матриці F^T, які є частковими похідними координат шуканих пунктів за виміряними кутами.

$$\frac{\partial X_{\text{Н}}}{\partial \beta_1} = -\frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} sin\beta_1 \cdot \frac{cos\beta_1}{cos\beta_1} = -X_{\text{Н}} tg\beta_1;$$

$$\frac{\partial X_{\text{Н}}}{\partial \beta_2} = \frac{b \cdot cos(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} cos\beta_1 \cdot \frac{\sin(\beta_2 + \beta_3)}{\sin(\beta_2 + \beta_3)} = X_{\text{Н}} ctg(\beta_2 + \beta_3);$$

$$\frac{\partial X_{\text{Н}}}{\partial \beta_3} = \frac{b \cdot cos(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} cos\beta_1 \cdot \frac{\sin(\beta_2 + \beta_3)}{\sin(\beta_2 + \beta_3)} = X_{\text{Н}} ctg(\beta_2 + \beta_3);$$

$$\frac{\partial X_{\text{Н}}}{\partial \beta_4} = -\frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4 \cdot sin\beta_4} cos\beta_1 \cdot cos\beta_4 = -X_{\text{Н}} ctg\beta_4;$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Н}}}{\partial \beta_1} = \frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} cos\beta_1 \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_1} = Y_{\text{Н}} ctg\beta_1;$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Н}}}{\partial \beta_2} = \frac{b \cdot \cos(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} sin\beta_1 \cdot \frac{\sin(\beta_2 + \beta_3)}{\sin(\beta_2 + \beta_3)} = Y_{\text{Н}} ctg(\beta_2 + \beta_3);$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Н}}}{\partial \beta_3} = \frac{b \cdot \cos(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} sin\beta_1 \cdot \frac{\sin(\beta_2 + \beta_3)}{\sin(\beta_2 + \beta_3)} = Y_{\text{Н}} ctg(\beta_2 + \beta_3);$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Н}}}{\partial \beta_4} = -\frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4 \cdot sin\beta_4} sin\beta_1 \cdot cos\beta_4 = -Y_{\text{Н}} ctg\beta_4;$$

$$\frac{\partial X_{\text{Ч}}}{\partial \beta_1} = -\frac{b \cdot \sin \beta_2}{sin\beta_7} sin(\beta_1 + \beta_8) \cdot \frac{cos(\beta_1 + \beta_8)}{cos(\beta_1 + \beta_8)} = -X_{\text{Ч}} tg(\beta_1 + \beta_8)_1;$$

$$\frac{\partial X_{\text{Ч}}}{\partial \beta_2} = \frac{b \cdot \cos \beta_2}{sin\beta_7} cos(\beta_1 + \beta_8) \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_2} = X_{\text{Ч}} ctg\beta_2;$$

$$\frac{\partial X_{\text{Ч}}}{\partial \beta_7} = -\frac{b \cdot \sin \beta_2}{sin\beta_7 \cdot sin\beta_7} sin(\beta_1 + \beta_8) \cdot cos\beta_7 = -X_{\text{Ч}} ctg\beta_7;$$

$$\frac{\partial X_{\text{Ч}}}{\partial \beta_8} = -\frac{b \cdot \sin \beta_2}{sin\beta_7} sin(\beta_1 + \beta_8) \cdot \frac{cos(\beta_1 + \beta_8)}{cos(\beta_1 + \beta_8)} = -X_{\text{Ч}} tg(\beta_1 + \beta_8)_1;$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Ч}}}{\partial \beta_1} = \frac{b \cdot \sin \beta_2}{sin\beta_7} cos(\beta_1 + \beta_8) \cdot \frac{sin(\beta_1 + \beta_8)}{sin(\beta_1 + \beta_8)} = Y_{\text{Ч}} ctg(\beta_1 + \beta_8);$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Ч}}}{\partial \beta_2} = \frac{b \cdot \cos \beta_2}{sin\beta_7} sin(\beta_1 + \beta_8) \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_2} = Y_{\text{Ч}} ctg\beta_2;$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Ч}}}{\partial \beta_7} = -\frac{b \cdot \sin \beta_2}{sin\beta_7 \cdot sin\beta_7} sin(\beta_1 + \beta_8) \cdot \cos \beta_7 = -Y_{\text{Ч}} ctg\beta_7;$$

$$\frac{\partial Y_{\text{Ч}}}{\partial \beta_8} = \frac{b \cdot \sin \beta_2}{sin\beta_7} cos(\beta_1 + \beta_8) \cdot \frac{sin(\beta_1 + \beta_8)}{sin(\beta_1 + \beta_8)} = Y_{\text{Ч}} ctg(\beta_1 + \beta_8).$$

Отримані часткові похідні ділимо на $\rho = 2062.65$, щоб перейти від кутової міри до лінійної, і заносимо до табл. 16.

За формулами, приведеними в табл. 11, обчислюємо елементи матриці F^T

$$F^T = \begin{pmatrix} -2.093 & 1.924 & -2.069 & 0.074 \\ 0.125 & 0.136 & 0.071 & 1.986 \\ 0.125 & 0.136 & 0 & 0 \\ -1.838 & -1.999 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.072 & -2.007 \\ 0 & 0 & -2.069 & 0.074 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю F^T

$$F = \begin{pmatrix} -2.093 & 0.125 & 0.125 & -1.838 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.924 & 0.136 & 0.136 & -1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.069 & 0.071 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.072 & -2.069 \\ 0.074 & 1.986 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.007 & 0.074 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 16 – Часткові похідні координат шуканих пунктів за виміряними кутами

	$\partial X_{\text{Н}}$	$\partial Y_{\text{Н}}$	$\partial X_{\text{Ч}}$	$\partial Y_{\text{Ч}}$
1	$-\frac{X_{\text{Н}}}{\rho''} tg\beta_1$	$\frac{Y_{\text{Н}}}{\rho''} ctg\beta_1$	$-\frac{X_{\text{Ч}}}{\rho''} tg(\beta_1 + \beta_8)$	$\frac{Y_{\text{Ч}}}{\rho''} ctg(\beta_1 + \beta_8)$
2	$\frac{X_{\text{Н}}}{\rho''} ctg(\beta_2 + \beta_3)$	$\frac{Y_{\text{Н}}}{\rho''} ctg(\beta_2 + \beta_3)$	$\frac{X_{\text{Ч}}}{\rho''} ctg\beta_2$	$\frac{Y_{\text{Ч}}}{\rho''} ctg\beta_2$
3	$\frac{X_{\text{Н}}}{\rho''} ctg(\beta_2 + \beta_3)$	$\frac{Y_{\text{Н}}}{\rho''} ctg(\beta_2 + \beta_3)$	_____	_____
4	$-\frac{X_{\text{Н}}}{\rho''} ctg\beta_4$	$-\frac{Y_{\text{Н}}}{\rho''} ctg\beta_4$	_____	_____
5	_____	_____	_____	_____
6	_____	_____	_____	_____
7	_____	_____	$-\frac{X_{\text{Ч}}}{\rho''} ctg\beta_7$	$-\frac{Y_{\text{Ч}}}{\rho''} ctg\beta_7$
8	_____	_____	$-\frac{X_{\text{Ч}}}{\rho''} tg(\beta_1 + \beta_8)$	$\frac{Y_{\text{Ч}}}{\rho''} ctg(\beta_1 + \beta_8)$

Обчислюємо матрицю S^2

$$S^2 = F(E - b^T \cdot B^{-1} \cdot b)F^T = \begin{pmatrix} 4.395 & -0.022 & 2.369 & 2.004 \\ -0.022 & 3.894 & -1.903 & 2.216 \\ 2.369 & -1.903 & 4.286 & 0.101 \\ 2.004 & 2.216 & 0.101 & 3.960 \end{pmatrix},$$

помноживши яку на квадрат емпіричної середньої квадратичної похибки m, знайдемо на сукупну похибку положення шуканих пунктів.

$$M_U^2 = \begin{pmatrix} 2.947 & -0.015 & 1.588 & 1.343 \\ -0.015 & 2.610 & -1.276 & 1.486 \\ 1.588 & -1.276 & 2.873 & 0.068 \\ 1.343 & 1.486 & 0.068 & 2.655 \end{pmatrix}.$$

Позначивши $M_U^2 = Q$, знаходимо середні квадратичні похибки положення шуканих пунктів Н і Ч за осями координат, використовуючи діагональні елементи матриці Q.

$$M_U^2 = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{32} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.947 & -0.015 & 1.588 & 1.343 \\ -0.015 & 2.610 & -1.276 & 1.486 \\ 1.588 & -1.276 & 2.873 & 0.068 \\ 1.343 & 1.486 & 0.068 & 2.655 \end{pmatrix}.$$

Пункт Н	Пункт Ч
$m_x = m\sqrt{Q_{11}} = 1.72$ см,	$m_x = m\sqrt{Q_{33}} = 1.70$ см,
$m_y = m\sqrt{Q_{22}} = 1.62$ см,	$m_y = m\sqrt{Q_{44}} = 1.63$ см.

Знаходимо кругові середні квадратичні похибки положення пунктів Н і Ч за формулою (00)

$$m_{\text{Н}} = 2.36 \text{ см};$$
$$m_{\text{Ч}} = 2.35 \text{ см}.$$

Використовуючи елементи матриці S^2, знаходимо параметри еліпсів похибок (рис. 1), орієнтування і розміри осей якого визначають найбільш вірогідні напрямки і величину максимальної і мінімальної середньої квадратичної похибки положення пунктів Н і Ч.

Кут повороту осей еліпсу похибок знаходимо із виразу

$$2\varphi = arctg\left(\frac{2S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}}\right), \tag{74}$$

де S_{xx}, S_{yy}, S_{xy} – елементи матриці S^2.

Якщо кут φ, обчислений за формулою (63) приймає від'ємне значення, додаємо до нього 180°.

Із матриці S^2 виділяємо 2 блоки: перший відповідає пункту Н, другий – пункту Ч (в тому порядку, в якому вони були внесені до табл. 00).

Пункт Н

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}$$

Пункт Ч

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix}$$

Пункт Н

$S_{xx} = 4.395,$

$S_{yy} = 3.894,$

$S_{xy} = -0.022,$

$\varphi = 177^0 29'.$

Пункт Ч

$S_{xx} = 4.286,$

$S_{yy} = 3.960,$

$S_{xy} = 0.101,$

$\varphi = 15^0 56'.$

Розміри великої і малої напіввісі еліпсів похибок, відповідно, обчислюємо за формулами

$$a = m\sqrt{S_{uu}}, \tag{75}$$

$$b = m\sqrt{S_{vv}},$$

де елементи S_{uu} і S_{vv} дорівнюють

$$S_{uu} = \frac{1}{2}\left(S_{xx} + S_{yy} + \sqrt{\left(S_{xx} - S_{yy}\right)^2 + 4S_{xy}^2}\right), \tag{76}$$

$$S_{vv} = \frac{1}{2}\left(S_{xx} + S_{yy} - \sqrt{\left(S_{xx} - S_{yy}\right)^2 + 4S_{xy}^2}\right).$$

Отже, підставивши числові значення елементів матриці S^2 у вирази (01) і (99), отримаємо такі результати

Пункт Н	Пункт Ч
$S_{uu} = 4.40,$	$S_{uu} = 4.31,$
$S_{vv} = 3.89,$	$S_{vv} = 3.93,$
$a = 1.72$ см,	$a = 1.70$ см,
$b = 1.62$ см,	$b = 1.62$ см.

За обчисленими параметрами еліпсів похибок (φ, a, b), будуємо їх на схемі геодезичної мережі.

Таким чином, застосувавши параметричний метод зрівнювання, були знайдені координати шуканих пунктів Н і Ч (табл. 15), які максимально відповідають їх дійсним значенням. Виконано оцінку точності вимірювань, основні характеристики якої проілюстровані графічно на схемі геодезичного чотирикутника (Додаток Ж).

4. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Приведені в цьому розділі тестові завдання мають за мету перевірку теоретичних знань, отриманих під час вивчення курсу «Математична обробка геодезичних вимірів». Тестування за представленими в підручнику завданнями можна пройти в учбовому курсі в системі Moodle за адресою Інтернет http://cdo.kname.edu.ua/course/view.php?id=219.

4.1. Тестування з теми «Теорія похибок вимірювань»

1. Як називають різницю між результатом даного вимірювання й істинним (або дійсним) значенням вимірюваної величини?
   a. Нев'язка.
   b. Поправка.
   c. Похибка.
   d. Вага.

2. Яка із перелічених властивостей не притаманна випадковим похибкам?
   a. Властивість компенсації.
   b. Властивість ефективності.
   c. Властивість незалежності.
   d. Властивість розсіювання.

3. За якою формулою обчислюють середню квадратичну похибку (m_y) функції загального вигляду $y = f(x_1, x_2, \dots, x_t)$?

   a. $m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 m_t^2}$;

   b. $m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right) m_t^2}$;

   c. $m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 m_t}$;

   d. $m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) m_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) m_2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right) m_t}$.

4. Чому дорівнює похибка суми кутів трикутника, якщо результат вимірювання дорівнює 179° 59.5'?
   a. 0.5'.
   b. 40.5'.
   c. 1.5'.
   d. -0.5'.

5. Якщо вимірювання виконані в однакових умовах, їх результати називають…
   a. Рівноточними.
   b. Технічними.
   c. Високоточними.
   d. Нерівноточними.
6. Значення фізичної величини, яке ідеальним чином відображало би відповідну властивість об’єкту, називають…
   a. Розміром фізичної величини.
   b. Істинним значенням фізичної величини.
   c. Вірогіднішим значенням фізичної величини.
   d. Дійсним значенням фізичної величини.
7. Як називають величину, додавши яку до результату вимірювання, отримують його істинне значення?
   a. Наближена поправка.
   b. Нев’язка.
   c. Вірогідніша поправка.
   d. Точна поправка.
8. Яке із приведених вимірювань за фізичним виконанням є прямим?
   a. Вимірювання перевищення при тригонометричному нівелюванні.
   b. Вимірювання довжини лінії мірною стрічкою.
   c. Вимірювання відстані лазерною рулеткою.
   d. Вимірювання площі ділянки планіметром.
9. Якого виду похибок не існує?
   a. Технічні.
   b. Грубі.
   c. Систематичні.
   d. Випадкові.
10. Яка величина є дробом, чисельник якої – сума добутків результатів нерівноточних вимірювань на відповідні їм ваги, а знаменник – сума ваг вимірювань $\left(\frac{[pl]}{[p]}\right)$?
   a. Проста арифметична середина.
   b. Загальна арифметична середина.
   c. Середня квадратична похибка одиниці ваги.
   d. Середня похибка.

11. Чому дорівнює сума відхилень від простої арифметичної середини результатів вимірювань?

    a. Одиниці.
    b. Середній квадратичній похибці результатів вимірювань.
    c. Нулю.
    d. Істинній похибці результатів вимірювань.

12. Похибки вимірювань пов'язані між собою співвідношенням (де θ – систематична похибка; ε – істинна похибка; Δ – випадкова похибка):

    a. $\varepsilon = \theta + \Delta$.
    b. $\varepsilon = \theta - \Delta$.
    c. $\varepsilon = \theta \cdot \Delta$.
    d. $\varepsilon = \Delta - \theta$.

13. Середня квадратична похибка (m_y) функції незалежних змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_t)$ завжди –

    a. Менша, ніж найменша середня квадратична похибка (m_{i}) аргументів функції;
    b. Дорівнює найбільшій середній квадратичній похибці (m_{i}) аргументів функції;
    c. Більша, ніж найбільша середня квадратична похибка (m_{i}) аргументів функції;
    d. Менша, ніж найбільша середня квадратична похибка (m_{i}) аргументів функції.

14. Середня квадратична похибка i-го вимірювання функції незалежних змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_t)$ завжди –

    a. Менша, ніж середня квадратична похибка (m_y) функції;
    b. Дорівнює середній квадратичній похибці (m_y) функції;
    c. Більша, ніж середня квадратична похибка (m_y) функції;
    d. Можливий будь-який з варіантів.

15. Середня квадратична похибка «одиниці ваги» характеризується вагою, яка дорівнює:

    a. 1;
    b. 10;
    c. 100;
    d. 0.

16. Точність вимірювань за матеріалами математичної обробки незалежного рівноточного ряду спостережень оцінюється за формулою:

a. $\boldsymbol{m} = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}$.

b. $m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2\cdot(n-1)}}$.

c. $\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}$.

d. $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$.

17. Точність вимірювань за матеріалами математичної обробки незалежного нерівноточного ряду спостережень оцінюється за формулою:

a. $m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}$.

b. $m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2\cdot(n-1)}}$.

c. $\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}$.

d. $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$.

18. Точність вимірювань за матеріалами математичної обробки незалежних рівноточних подвійних спостережень оцінюється за формулою:

a. $m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}$.

b. $m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2\cdot(n-1)}}$.

c. $\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}$.

d. $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$.

19. Вага і дисперсія вимірювань:

a. Прямо пропорційні.
b. Не пов’язані між собою.
c. Обернено пропорційні.
d. Дорівнюють одна одній.

20. Точність вимірювань за матеріалами математичної обробки незалежних нерівноточних подвійних спостережень оцінюється за формулою:

a. $m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}$.

b. $m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2\cdot(n-1)}}$.

c. $\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}$.

d. $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$.

4.2. Тестування з теми «Спосіб найменших квадратів»

1. Яке математичне співвідношення відображає сутність методу найменших квадратів?
   a. $\sum_{i=1}^{n} p_i V_i^2 = [pV^2] \rightarrow f(x)$.
   b. $\sum_{i=1}^{n} V_i^2 = [V^2] \rightarrow min$.
   c. $\mu^2 = \frac{[pV^2]}{n-1}$.
   d. $\mu^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i V_i^2$.

2. Чи вірно, що задача зрівнювання виникає тільки тоді, коли поряд із необхідними вимірюваннями виконані надлишкові вимірювання?
   a. Вірно.
   b. Невірно.

3. За якою формулою обчислюють поправки до виміряних величин?
   a. $V = a\delta + l$.
   b. $V = a\delta - l$.
   c. $V = -A^{-1}\lambda$.
   d. $V = A\delta + \lambda$.

4. Які з приведених формул є формулами Юнга?
   a. $X_C = \frac{X_L \mathrm{tg}\beta + X_P \mathrm{tg}\alpha + Y_P - Y_L}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}, Y_C = \frac{Y_L \mathrm{tg}\beta + Y_P \mathrm{tg}\alpha - X_P + X_L}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}$,
   b. $X_C = \frac{X_L \mathrm{ctg}\beta + X_P \mathrm{ctg}\alpha + Y_P - Y_L}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}, Y_C = \frac{Y_L \mathrm{ctg}\beta + Y_P \mathrm{ctg}\alpha - X_P + X_L}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$,
   c. $X_C = \frac{X_L \mathrm{ctg}\beta - X_P \mathrm{ctg}\alpha - Y_P - Y_L}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta}, Y_C = \frac{Y_L \mathrm{ctg}\beta - Y_P \mathrm{ctg}\alpha - X_P - X_L}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta}$,

5. Вірно, що рішення знайдене способом найменших квадратів відповідає найменшій вазі шуканої величини?
   a. Вірно.
   b. Невірно.

6. Чи вірно, що якщо результати вимірів містять лише випадкові похибки, то значення невідомих, знайдені за способом найменших квадратів будуть вірогіднішими і володітимуть найменшою середньою квадратичною похибкою?
   a. Вірно.
   b. Невірно.

7. Чи вірно, що якщо результати вимірів, містять систематичні похибки, то зрівнювання вимірювань за способом найменших квадратів дасть однозначне рішення, проте отримані значення не будуть вірогіднішими і не будуть володіти найбільшою вагою?
   a. Вірно.
   b. Невірно.

8. З якого співвідношення визначають кут повороту осей еліпсу похибок?
   a. $\mathrm{tg}2\varphi = \dfrac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$.
   b. $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$.
   c. $\mathrm{tg}2\varphi = \dfrac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2Q_{xy}}$.
   d. $\mathrm{tg}2\varphi = \dfrac{Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$.

9. За якою формулою обчислюють малу піввісь еліпсу похибок?
   a. $b = m\sqrt{Q_{vv}}$.
   b. $b = 2m\sqrt{Q_{vv}}$.
   c. $b = m\sqrt{2Q_{vv}}$.
   d. $b = 2\sqrt{Q_{vv}}$.

10. За якою формулою обчислюють велику піввісь еліпсу похибок?
   a. $a = m\sqrt{Q_{uu}}$.
   b. $a = 2m\sqrt{Q_{uu}}$.
   c. $a = m\sqrt{2Q_{uu}}$.
   d. $a = 2\sqrt{Q_{uu}}$.

11. Відношення квадрата середньої квадратичної похибки після зрівнювання до квадрату середньої квадратичної похибки до зрівнювання дорівнює

a. відношенню числа необхідних вимірів до числа всіх вимірів;

b. відношенню числа необхідних вимірів до числа надлишкових вимірів;

c. відношенню числа всіх вимірів до числа необхідних вимірів;

d. відношенню числа надлишкових вимірів до числа необхідних вимірів.

12. За якою формулою обчислюють емпіричну середню квадратичну похибку?

a. $m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-t}}$.

b. $m^2 = \frac{[V]}{n-t}$.

c. $m^2 = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-t}}$.

d. $m = \frac{[V^2]}{\sqrt{n-t}}$.

13. За якою формулою обчислюють кругову середню квадратичну похибку?

a. $m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$.

b. $m = \sqrt{m_x + m_y}$.

c. $m = 2\sqrt{m_x^2 + m_y^2}$.

d. $m = \frac{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}}{2}$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бібліографічний опис документів відповідно до ДСТУ 7.1:2006, запровадженого в дію в Україні 01.07.2007 [Текст]: метод. реком. / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Н. Б. Давидова, Н. О. Рибакова, О. М. Науменко; відп. ред. П. М. Кузнєцов. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 12 с.

2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») [Текст] / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.

3. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 2. Способ наименьших квадратов учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») [Текст] / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2007. – 75 с.

4. Метешкін, К.О. Математична обробка геодезичних вимірів: навч. посібник [Текст] / К.О. Метешкін, Д.В. Шаульський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 177 с.

5. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Навчальний посібник [Текст] / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

6. Петров, Н.С. Основы теории ошибок измерений [Текст] / Н.С. Петров. – М.: Госгортехиздат, 1963. – 76 с.

Додаток А. Зразок титульного аркушу

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет міського господарства мені О. М. Бекетова

Кафедра геоінформаційних систем,
оцінки землі та нерухомого майна

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ТА ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

з дисципліни

«Математична обробка геодезичних вимірів»

Виконала: ст. гр. ГІС2008-1

Окішева Ю.І.

Перевірив: ас. каф. ГІС, оцінки землі
та нерухомого майна

Шаульский Д.В.

Харків – 2014

Додаток Б. Зміст звіту з лабораторних та розрахунково-графічних робіт

ЗМІСТ

Стор.

Додаток В. *Функція густини нормального розподілу* $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}$

t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00	0.39894	0.39	0.36973	0.78	0.29431	1.17	0.20121	1.56	0.11816
0.01	0.39892	0.40	0.36827	0.79	0.29200	1.18	0.19886	1.57	0.11632
0.02	0.39886	0.41	0.36678	0.80	0.28969	1.19	0.19652	1.58	0.11450
0.03	0.39876	0.42	0.36526	0.81	0.28737	1.20	0.19419	1.59	0.11270
0.04	0.39862	0.43	0.36371	0.82	0.28504	1.21	0.19186	1.60	0.11092
0.05	0.39844	0.44	0.36213	0.83	0.28269	1.22	0.18954	1.61	0.10915
0.06	0.39822	0.45	0.36053	0.84	0.28034	1.23	0.18724	1.62	0.10741
0.07	0.39797	0.46	0.35889	0.85	0.27798	1.24	0.18494	1.63	0.10567
0.08	0.39767	0.47	0.35723	0.86	0.27562	1.25	0.18265	1.64	0.10396
0.09	0.39733	0.48	0.35553	0.87	0.27324	1.26	0.18037	1.65	0.10226
0.10	0.39695	0.49	0.35381	0.88	0.27086	1.27	0.17810	1.66	0.10059
0.11	0.39654	0.50	0.35207	0.89	0.26848	1.28	0.17585	1.67	0.09893
0.12	0.39608	0.51	0.35029	0.90	0.26609	1.29	0.17360	1.68	0.09728
0.13	0.39559	0.52	0.34849	0.91	0.26369	1.30	0.17137	1.69	0.09566
0.14	0.39505	0.53	0.34667	0.92	0.26129	1.31	0.16915	1.70	0.09405
0.15	0.39448	0.54	0.34482	0.93	0.25888	1.32	0.16694	1.71	0.09246
0.16	0.39387	0.55	0.34294	0.94	0.25647	1.33	0.16474	1.72	0.09089
0.17	0.39322	0.56	0.34105	0.95	0.25406	1.34	0.16256	1.73	0.08933
0.18	0.39253	0.57	0.33912	0.96	0.25164	1.35	0.16038	1.74	0.08780
0.19	0.39181	0.58	0.33718	0.97	0.24923	1.36	0.15822	1.75	0.08628
0.20	0.39104	0.59	0.33521	0.98	0.24681	1.37	0.15608	1.76	0.08478
0.21	0.39024	0.60	0.33322	0.99	0.24439	1.38	0.15395	1.77	0.08329
0.22	0.38940	0.61	0.33121	1.00	0.24197	1.39	0.15183	1.78	0.08183
0.23	0.38853	0.62	0.32918	1.01	0.23955	1.40	0.14973	1.79	0.08038
0.24	0.38762	0.63	0.32713	1.02	0.23713	1.41	0.14764	1.80	0.07895
0.25	0.38667	0.64	0.32506	1.03	0.23471	1.42	0.14556	1.81	0.07754
0.26	0.38568	0.65	0.32297	1.04	0.23230	1.43	0.14350	1.82	0.07614
0.27	0.38466	0.66	0.32086	1.05	0.22988	1.44	0.14146	1.83	0.07477
0.28	0.38361	0.67	0.31874	1.06	0.22747	1.45	0.13943	1.84	0.07341
0.29	0.38251	0.68	0.31659	1.07	0.22506	1.46	0.13742	1.85	0.07206
0.30	0.38139	0.69	0.31443	1.08	0.22265	1.47	0.13542	1.86	0.07074
0.31	0.38023	0.70	0.31225	1.09	0.22025	1.48	0.13344	1.87	0.06943
032	0.37903	0.71	0.31006	1.10	0.21785	1.49	0.13147	1.88	0.06814
0.33	0.37780	0.72	0.30785	1.11	0.21546	1.50	0.12952	1.89	0.06687
0.34	0.37654	0.73	0.30563	1.12	0.21307	1.51	0.12758	1.90	0.06562
0.35	0.37524	0.74	0.30339	1.13	0.21069	1.52	0.12566	1.91	0.06438
0.36	0.37391	0.75	0.30114	1.14	0.20831	1.53	0.12376	1.92	0.06316
0.37	0.37255	0.76	0.29887	1.15	0.20594	1.54	0.12188	1.93	0.06195
0.38	0.37115	0.77	0.29659	1.16	0.20357	1.55	0.12001	1.94	0.06077

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.95	0.05959	2.37	0.02406	2.79	0.00814	3.21	0.00231	3.63	0.00055
1.96	0.05844	2.38	0.02349	2.80	0.00792	3.22	0.00224	3.64	0.00053
1.97	0.0573	2.39	0.02294	2.81	0.00770	3.23	0.00216	3.65	0.00051
1.98	0.05618	2.40	0.02239	2.82	0.00748	3.24	0.00210	3.66	0.00049
1.99	0.05508	2.41	0.02186	2.83	0.00727	3.25	0.00203	3.67	0.00047
2.00	0.05399	2.42	0.02134	2.84	0.00707	3.26	0.00196	3.68	0.00046
2.01	0.05292	2.43	0.02083	2.85	0.00687	3.27	0.00190	3.69	0.00044
2.02	0.05186	2.44	0.02033	2.86	0.00668	3.28	0.00184	3.70	0.00042
2.03	0.05082	2.45	0.01984	2.87	0.00649	3.29	0.00178	3.71	0.00041
2.04	0.0498	2.46	0.01936	2.88	0.00631	3.30	0.00172	3.72	0.00039
2.05	0.04879	2.47	0.01888	2.89	0.00613	3.31	0.00167	3.73	0.00038
2.06	0.0478	2.48	0.01842	2.90	0.00595	3.32	0.00161	3.74	0.00037
2.07	0.04682	2.49	0.01797	2.91	0.00578	3.33	0.00156	3.75	0.00035
2.08	0.04586	2.50	0.01753	2.92	0.00562	3.34	0.00151	3.76	0.00034
2.09	0.04491	2.51	0.01709	2.93	0.00545	3.35	0.00146	3.77	0.00033
2.10	0.04398	2.52	0.01667	2.94	0.00530	3.36	0.00141	3.78	0.00031
2.11	0.04307	2.53	0.01625	2.95	0.00514	3.37	0.00136	3.79	0.00030
2.12	0.04217	2.54	0.01585	2.96	0.00499	3.38	0.00132	3.80	0.00029
2.13	0.04128	2.55	0.01454	2.97	0.00485	3.39	0.00127	3.81	0.00028
2.14	0.04041	2.56	0.01506	2.98	0.00470	3.40	0.00123	3.82	0.00027
2.15	0.03955	2.57	0.01468	2.99	0.00457	3.41	0.00119	3.83	0.00026
2.16	0.03871	2.58	0.01431	3.00	0.00443	3.42	0.00115	3.84	0.00025
2.17	0.03788	2.59	0.01394	3.01	0.00430	3.43	0.00111	3.85	0.00024
2.18	0.03706	2.60	0.01358	3.02	0.00417	3.44	0.00107	3.86	0.00023
2.19	0.03626	2.61	0.01323	3.03	0.00405	3.45	0.00104	3.87	0.00022
2.20	0.03547	2.62	0.01289	3.04	0.00393	3.46	0.00100	3.88	0.00021
2.21	0.03470	2.63	0.01256	3.05	0.00381	3.47	0.00097	3.89	0.00021
2.22	0.3394	2.64	0.01223	3.06	0.00370	3.48	0.00094	3.90	0.00020
2.23	0.03319	2.65	0.01191	3.07	0.00358	3.49	0.00090	3.91	0.00019
2.24	0.03246	2.66	0.01160	3.08	0.00348	3.50	0.00087	3.92	0.00018
2.25	0.03174	2.67	0.01130	3.09	0.00337	3.51	0.00084	3.93	0.00018
2.26	0.03103	2.68	0.01100	3.10	0.00327	3.52	0.00081	3.94	0.00017
2.27	0.03034	2.69	0.01071	3.11	0.00317	3.53	0.00079	3.95	0.00016
2.28	0.02965	2.70	0.01042	3.12	0.00307	3.54	0.00076	3.96	0.00016
2.29	0.02898	2.71	0.01014	3.13	0.00298	3.55	0.00073	3.97	0.00015
2.30	0.02833	2.72	0.00987	3.14	0.00288	3.56	0.00071	3.98	0.00014
2.31	0.02768	2.73	0.00961	3.15	0.00279	3.57	0.00068	3.99	0.00014
2.32	0.02705	2.74	0.00935	3.16	0.00271	3.58	0.00066	4.00	0.00013
2.33	0.02643	2.75	0.00909	3.17	0.00262	3.59	0.00063	4.01	0.00013
2.34	0.02582	2.76	0.00885	3.18	0.00254	3.60	0.00061	4.02	0.00012
2.35	0.02522	2.77	0.00861	3.19	0.00246	3.61	0.00059	4.03	0.00012
2.36	0.02463	2.78	0.00837	3.20	0.00238	3.62	0.00057	4.04	0.00011

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.05	0.00011	4.16	0.00007	4.27	0.00004	4.38	0.00003	4.49	0.00002
4.06	0.00011	4.17	0.00007	4.28	0.00004	4.39	0.00003	4.50	0.00002
4.07	0.00010	4.18	0.00006	4.29	0.00004	4.40	0.00002	4.51	0.00002
4.08	0.00010	4.19	0.00006	4.30	0.00004	4.41	0.00002	4.52	0.00001
4.09	0.00009	4.20	0.00006	4.31	0.00004	4.42	0.00002	4.53	0.00001
4.10	0.00009	4.21	0.00006	4.32	0.00004	4.43	0.00002	4.54	0.00001
4.11	0.00009	4.22	0.00005	4.33	0.00003	4.44	0.00002	4.55	0.00001
4.12	0.00008	4.23	0.00005	4.34	0.00003	4.45	0.00002	4.56	0.00001
4.13	0.00008	4.24	0.00005	4.35	0.00003	4.46	0.00002	4.57	0.00001
4.14	0.00008	4.25	0.00005	4.36	0.00003	4.47	0.00002	4.58	0.00001
4.15	0.00007	4.26	0.00005	4.37	0.00003	4.48	0.00002	4.60	0

Додаток Г. *Значення функції Лапласа* $\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{\frac{-x^2}{2}}dx$

t	$\Phi_0(t)$	t	$f(t)$	t	$\Phi_0(t)$	t	$\Phi_0(t)$	t	$\Phi_0(t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00	0.0000	0.39	0.1517	0.78	0.2823	1.17	0.3790	1.56	0.4406
0.01	0.0040	0.40	0.1554	0.79	0.2852	1.18	0.3810	1.57	0.4418
0.02	0.0080	0.41	0.1591	0.80	0.2881	1.19	0.3830	1.58	0.4429
0.03	0.0120	0.42	0.1628	0.81	0.2910	1.20	0.3849	1.59	0.4441
0.04	0.0160	0.43	0.1664	0.82	0.2939	1.21	0.3869	1.60	0.4452
0.05	0.0199	0.44	0.1700	0.83	0.2967	1.22	0.3883	1.61	0.4463
0.06	0.0239	0.45	0.1736	0.84	0.2995	1.23	0.3907	1.62	0.4474
0.07	0.0279	0.46	0.1772	0.85	0.3023	1.24	0.3925	1.63	0.4484
0.08	0.0319	0.47	0.1808	0.86	0.3051	1.25	0.3944	1.64	0.4495
0.09	0.0359	0.48	0.1844	0.87	0.3078	1.26	0.3962	1.65	0.4505
0.10	0.0398	0.49	0.1879	0.88	0.3106	1.27	0.3980	1.66	0.4515
0.11	0.0438	0.50	0.1915	0.89	0.3133	1.28	0.3997	1.67	0.4525
0.12	0.0478	0.51	0.1950	0.90	0.3159	1.29	0.4015	1.68	0.4535
0.13	0.0517	0.52	0.1985	0.91	0.3186	1.30	0.4032	1.69	0.4545
0.14	0.0557	0.53	0.2019	0.92	0.3212	1.31	0.4049	1.70	0.4554
0.15	0.0596	0.54	0.2054	0.93	0.3238	1.32	0.4066	1.71	0.4564
0.16	0.0636	0.55	0.2088	0.94	0.3264	1.33	0.4082	1.72	0.4573
0.17	0.0675	0.56	0.2123	0.95	0.3289	1.34	0.4099	1.73	0.4582
0.18	0.0714	0.57	0.2157	0.96	0.3315	1.35	0.4115	1.74	0.4591
0.19	0.0753	0.58	0.2190	0.97	0.3340	1.36	0.4131	1.75	0.4599
0.20	0.0793	0.59	0.2224	0.98	0.3365	1.37	0.4147	1.76	0.4608
0.21	0.0832	0.60	0.2257	0.99	0.3389	1.38	0.4162	1.77	0.4616
0.22	0.0871	0.61	0.2291	1.00	0.3413	1.39	0.4177	1.78	0.4625
0.23	0.0910	0.62	0.2324	1.01	0.3438	1.40	0.4192	1.79	0.4633
0.24	0.0948	0.63	0.2357	1.02	0.3461	1.41	0.4207	1.80	0.4641
0.25	0.0987	0.64	0.2389	1.03	0.3485	1.42	0.4222	1.81	0.4649
0.26	0.1026	0.65	0.2422	1.04	0.3508	1.43	0.4236	1.82	0.4656
0.27	0.1064	0.66	0.2454	1.05	0.3551	1.44	0.4251	1.83	0.4664
0.28	0.1103	0.67	0.2486	1.06	0.3554	1.45	0.4265	1.84	0.4671
0.29	0.1141	0.68	0.2517	1.07	0.3577	1.46	0.4279	1.85	0.4678
0.30	0.1179	0.69	0.2549	1.08	0.3599	1.47	0.4292	1.86	0.4686
0.31	0.1217	0.70	0.2580	1.09	0.3621	1.48	0.4306	1.87	0.4693
032	0.1255	0.71	0.2611	1.10	0.3643	1.49	0.4319	1.88	0.4699
0.33	0.1293	0.72	0.2642	1.11	0.3665	1.50	0.4332	1.89	0.4706
0.34	0.1331	0.73	0.2673	1.12	0.3686	1.51	0.4345	1.90	0.4713
0.35	0.1368	0.74	0.2703	1.13	0.3708	1.52	0.4357	1.91	0.4719
0.36	0.1406	0.75	0.2734	1.14	0.3729	1.53	0.4370	1.92	0.4726
0.37	0.1443	0.76	0.2764	1.15	0.3749	1.54	0.4382	1.93	0.4732
0.38	0.1480	0.77	0.2794	1.16	0.3770	1.55	0.4394	1.94	0.4738

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.95	0.4744	2.16	0.4846	2.42	0.4922	2.68	0.4963	2.94	0.4984
1.96	0.4750	2.18	0.4854	2.44	0.4927	2.70	0.4965	2.96	0.4985
1.97	0.4756	2.20	0.4861	2.46	0.4931	2.72	0.4967	2.98	0.4986
1.98	0.4761	2.22	0.4868	2.48	0.4934	2.74	0.4969	3.00	0.49865
1.99	0.4767	2.24	0.4875	2.50	0.4938	2.76	0.4971	3.20	0.49931
2.00	0.4772	2.26	0.4881	2.52	0.4941	2.78	0.4973	3.40	0.49966
2.02	0.4783	2.28	0.4887	2.54	0.4945	2.80	0.4974	3.60	0.499841
2.04	0.4793	2.30	0.4893	2.56	0.4948	2.82	0.4976	3.80	0.499928
2.06	0.4803	2.32	0.4898	2.58	0.4951	2.84	0.4977	4.00	0.499968
2.08	0.4812	2.34	0.4904	2.60	0.4953	2.86	0.4979	4.50	0.499997
2.10	0.4821	2.36	0.4909	2.62	0.4956	2.88	0.4980	5.00	0.499997
2.12	0.4830	2.38	0.4913	2.64	0.4959	2.90	0.4981		
2.14	0.4838	2.40	0.4918	2.66	0.4961	2.92	0.4982		

Додаток Д. *Критичні точки* χ^2*- розподілу*

Кількість ступенів довільності	Рівень значущості α					
	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
1	2	3	4	5	6	7
1	0.000157	0.000982	0.003932	3.841455	5.023903	6.634891
2	0.020100	0.050636	0.102586	5.991476	7.377779	9.210351
3	0.114832	0.215795	0.351846	7.814725	9.348404	11.34488
4	0.297107	0.484419	0.710724	9.487728	11.14326	13.27670
5	0.554297	0.831209	1.145477	11.07048	12.83249	15.08632
6	0.872083	1.237342	1.635380	12.59158	14.44935	16.81187
7	1.239032	1.689864	2.167349	14.06713	16.01277	18.47532
8	1.646506	2.179725	2.732633	15.50731	17.53454	20.09016
9	2.087889	2.700389	3.325115	16.91896	19.02278	21.66605
10	2.558199	3.246963	3.940295	18.30703	20.48320	23.20929
11	3.053496	3.815742	4.574809	19.67515	21.92002	24.72502
12	3.570551	4.403778	5.226028	21.02606	23.33666	26.21696
13	4.106900	5.008738	5.891861	22.36203	24.73558	27.68818
14	4.660415	5.628724	6.570632	23.68478	26.11893	29.14116
15	5.229356	6.262123	7.260935	24.99580	27.48836	30.57795
16	5.812197	6.907664	7.961639	26.29622	28.84532	31.99986
17	6.407742	7.564179	8.671754	27.58710	30.19098	33.40872
18	7.014903	8.230737	9.390448	28.86932	31.52641	34.80524
19	7.632698	8.906514	10.11701	30.14351	32.85234	36.19077
20	8.260368	9.590772	10.85080	31.41042	34.16958	37.56627
21	8.897172	10.28291	11.59132	32.67056	35.47886	38.93223
22	9.542494	10.98233	12.33801	33.92446	36.78068	40.28945
23	10.19569	11.68853	13.09051	35.17246	38.07561	41.63833
24	10.85635	12.40115	13.84842	36.41503	39.36406	42.97978
25	11.52395	13.11971	14.61140	37.65249	40.64650	44.31401
26	12.19818	13.84388	15.37916	38.88513	41.92314	45.64164
27	12.87847	14.57337	16.15139	40.11327	4.19452	46.96284
28	13.56467	15.30785	16.92788	41.33715	44.46079	48.27817
29	14.25641	16.04705	17.70838	42.55695	45.72228	49.58783
30	14.95346	16.79076	18.49267	43.77295	46.97922	50.89218
31	15.65547	17.53872	19.28056	44.98534	48.23192	52.19135
32	16.36220	18.29079	20.07191	46.19424	49.48044	53.48566
33	17.07348	19.04666	20.86652	47.39990	50.72510	54.77545
34	17.78910	19.80624	21.66428	48.60236	51.96602	56.06085
35	18.50887	20.56938	22.46501	49.80183	53.20331	57.34199
36	19.23263	21.33587	23.26862	50.99848	54.43726	58.61915
37	19.96027	22.10562	24.07494	52.19229	55.66798	59.89256
38	20.69141	22.87849	24.88389	53.38351	56.89549	61.16202

1	2	3	4	5	6	7
39	21.42614	23.65430	25.69538	54.57224	58.12005	62.42809
40	22.16420	24.43306	26.50930	55.75849	59.34168	63.69077
41	22.90556	25.21452	27.32556	56.94240	60.56055	64.94998
42	23.65014	25.99866	28.14405	58.12403	61.77672	66.20629
43	24.39757	26.78537	28.96471	59.30352	62.99031	67.45929
44	25.14801	27.57454	29.78750	60.48090	64.20141	68.70964
45	25.90120	28.36618	30.61226	61.65622	65.41013	69.95690
46	26.65719	29.16002	31.43900	62.82961	66.61647	71.20150
47	27.41582	29.95616	32.26761	64.00113	67.82064	72.44317
48	28.17697	30.75450	33.09807	65.17076	69.02257	73.68256
49	28.94059	31.55493	33.93029	66.33865	70.22236	74.91939
50	29.70673	32.35738	34.76424	67.50481	71.42019	76.15380
51	30.47501	33.16180	35.59986	68.66932	72.61603	77.38601
52	31.24569	33.96813	36.43708	69.83216	73.80992	78.61563
53	32.01855	34.77630	37.27589	70.99343	75.00190	79.84336
54	32.79343	35.58633	38.11620	72.15321	76.19206	81.06878
55	33.57052	36.39811	38.95805	73.31148	77.38044	82.29198
56	34.34954	37.21157	39.80127	74.46829	78.56713	83.51355
57	35.13056	38.02672	40.64592	75.62372	79.75218	84.73265
58	35.91351	38.84352	41.49198	76.77778	80.93560	85.95015
59	36.69818	39.66185	42.33930	77.93049	82.11737	87.16583
60	37.48480	40.48171	43.18797	79.08195	83.29771	88.37943
61	38.27320	41.30317	44.03790	80.23209	84.47640	89.59122
62	39.06326	42.12599	44.88904	81.38098	85.65370	90.80150
63	39.85509	42.95031	45.74135	82.52872	86.82963	92.00989
64	40.64851	43.77594	46.59490	83.67524	88.00398	93.21670
65	41.44355	44.60297	47.44957	84.82064	89.17716	94.42200
66	42.24025	45.43137	48.30538	85.96494	90.34883	95.62559
67	43.03836	46.26100	49.16225	87.10804	91.51933	96.82768
68	43.83804	47.09194	50.02026	88.25017	92.68849	98.02832
69	44.63917	47.92412	50.87924	89.39119	93.85648	99.22741
70	45.44170	48.75754	51.73926	90.53126	95.02315	100.4251
71	46.24564	49.59217	52.60030	91.67026	96.18873	101.6214
72	47.05102	50.42794	53.46232	92.80827	97.35298	102.8163
73	47.85773	51.26478	54.32530	93.94533	98.51621	104.0098
74	48.66566	52.10282	55.18922	95.08146	99.67838	105.2019
75	49.47512	52.94192	56.05405	96.21666	100.8393	106.3229
76	50.28553	53.78209	56.91982	97.35097	101.9992	107.5824
77	51.09732	54.62332	57.78646	98.48438	103.1581	108.7709
78	51.91041	55.46561	58.65393	99.61696	104.3159	109.9582
79	52.72478	56.30887	59.52228	100.7486	105.4727	111.1440
80	53.53998	57.15315	60.39146	101.8795	106.6285	112.3288

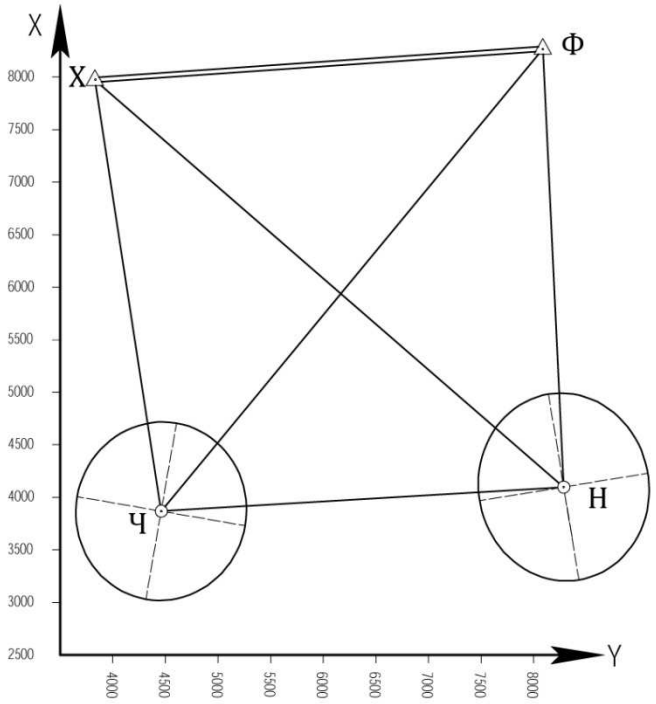
1	2	3	4	5	6	7
81	54.35668	57.99840	61.26150	103.0095	107.7834	113.5123
82	55.17428	58.84465	62.13230	104.1387	108.9373	114.6948
83	55.99301	59.69173	63.00389	105.2672	110.0902	115.8762
84	56.81293	60.53983	63.87624	106.3949	111.2422	117.0566
85	57.63391	61.38877	64.74937	107.5217	112.3933	118.2356
86	58.45588	62.23863	65.62326	108.6479	113.5436	119.4137
87	59.27906	63.08937	66.49788	109.7733	114.6929	120.5909
88	60.10295	63.94093	67.37323	110.8980	115.8415	121.7672
89	60.92799	64.79339	68.24927	112.0220	116.9890	122.9422
90	61.75402	65.64659	69.12602	113.1452	118.1359	124.1162
91	62.58097	66.50068	70.00347	114.2679	119.2820	125.2893
92	63.40892	67.35557	70.88159	115.3898	120.4270	126.4616
93	64.23800	68.21125	71.76032	116.5110	121.5714	127.6330
94	65.06761	69.06762	72.63976	117.6317	122.7152	128.8032
95	65.89826	69.92486	73.51982	118.7516	123.8580	129.9725
96	66.73003	70.78279	74.40057	119.8709	125.0001	131.1411
97	67.56234	71.64154	75.28184	120.9897	126.1414	132.3089
98	68.39571	72.50091	76.16378	122.1077	127.2821	133.4756
99	69.22986	73.36110	77.04631	123.2252	128.4219	134.6415
100	70.0650	74.22188	77.92944	124.3421	129.5613	135.8069

Додаток Е. *Таблиця похідних*

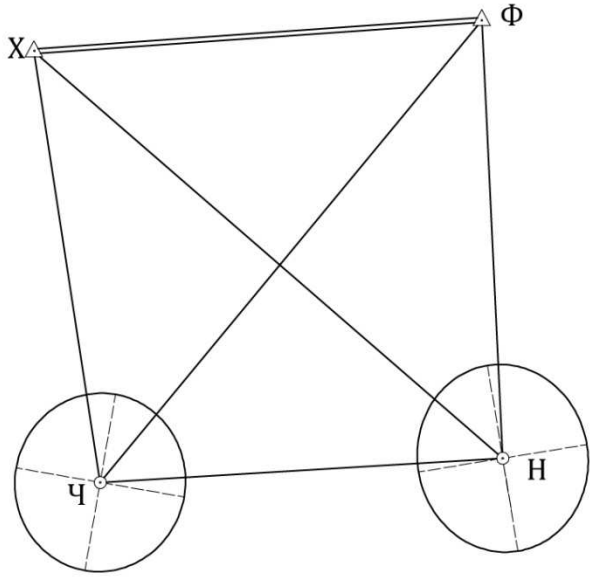
Похідні основних функцій		
$c' = 0$, де $c - const$	$(x)' = 1$	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_{\mathrm{a}} x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
Правила диференціювання		
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(cu)' = cu'$, де $c - const$	$(uv)' = u'v + uv'$
	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	
Похідна складної функції		
Якщо $y = f(g(x))$ і існують похідні $f_g{}'$ і $g_x{}'$, то $y_x{}' = f_g{}' \cdot g_x{}'$, де індекси g і x вказують, за яким аргументом обчислюють похідну. **Приклади:** 1. $\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; 2. $(\ln \sin x)' = \dfrac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = ctg\ x$; 3. $(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1)$.		

Додаток Ж. *Схема геодезичного чотирикутника*

ПАРАМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ЗРІВНЮВАННЯ



КОРЕЛАТНИЙ СПОСІБ ЗРІВНЮВАННЯ



Масштаб 1:50 000

Навчальне видання

МЕТЕШКІН Костянтин Олександрович

ШАУЛЬСЬКИЙ Дмитро Васильович

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В авторській редакції

Комп'ютерне верстання *Д. В. Шаульський*

Дизайн обкладинки *Д. В. Шаульський*

Підп. до друку 04.02.2014 р. Формат 60 х 84 /16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 3,3
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4064 від 12.05.2011 р.