УДК 539.3

В.М.ТРАЧ, д-р техн. наук
Луцький національний технічний університет
М.М.ХОРУЖИЙ
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

СТІЙКІСТЬ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ

Побудована розв'язувальна система рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання у нормальному вигляді. Для приведення двовимірної задачі до одномірної розв'язувальні функції представлені у вигляді комплексних рядів Фур'є за коловою координатою. Проведені потрібні видозміни у методі ортогоналізації для можливості застосування його до розв'язку диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами.

Построена разрешающая система уравнений устойчивости анизотропных оболочек вращения в нормальном виде. Для приведения двумерной задачи к одномерной решающие функции представлены в виде комплексных рядов Фурье по круговой координатой. Проведены нужные видоизменения в методе ортогонализации для возможности применения его к решению дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами.

Built isolating system stability equations anisotropic shells of revolution in the normal way. To bring the two-dimensional problem to one dimensional isolating functions are represented as complex Fourier series of a circular coordinate. Conducted necessary modifications in the method of orthogonalization for its applicability to the solution of differential equations with complex coefficients.

Ключові слова: анізотропна оболонка, нелінійне деформування, стійкість.

Аналіз літератури з дослідження розв'язків задач теорії анізотропних оболонок [1-5, 7-9] показує, що питання нелінійного напружено-деформованого стану (НДС), стійкості та закритичної поведінки анізотропних оболонок середньої товщини недостатньо вивчені. Відомо, що для розрахунку таких конструкцій слід використовувати уточнені теорії. Найбільш широкого вжитку серед них набула теорія типу Тимошенко. В роботі представлений підхід побудови розв'язувальної системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання у нормальному вигляді на основі нелінійної теорії анізотропних оболонок середньої товщини.

В [6] виведена системи рівнянь, що описує нелінійну осесиметричну деформацію анізотропних оболонок. Використаємо її для побудови рівнянь, за допомогою яких визначається критичний стан оболонок, пов'язаний з явищем біфуркації.

Позначимо функції, через які виражаються граничні умови при $\alpha_1 = const$, так:

$$y_1 = u, \quad y_2 = v, \quad y_3 = w, \quad y_4 = \theta_1, y_5 = \theta_2,$$

$$y_6 = T_{11}, \quad y_7 = T_{12}^*, \quad y_8 = Q_{13}, \quad y_9 = M_{11}, \quad y_{10} = M_{12}^*. \tag{1}$$

Це дає можливість записати систему рівнянь нелінійного деформування анізотропних оболонок [10] в узагальненому вигляді

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_i(y) + q_k, \tag{2}$$

де y – вектор компонентами якого є функції y_i, q_k, $k = 1,3$ – компоненти навантаження, L_i – нелінійні диференціальні оператори, i = 1, …, 10. На основній траєкторії деформування рівняння (2) мають вигляд

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{i,o}}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o) + q_k. \tag{3}$$

Тоді як на суміжній їх потрібно записати у такий спосіб

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial(y_{i,o} + y_i)}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o + y) + q_k. \tag{4}$$

У відповідності з критерієм Ейлера тут y – це нескінченно малі збурення основного стану. Тому, користуючись поняттям похідної Фреше, можемо обмежитись в рядах Тейлора тільки двома членами

$$L_i(y_o + y) = L_i(y_o) + L_{i,j}(y_o)y. \tag{5}$$

Тут $L_{i,j}$ – похідні Фреше від операторів L_i за аргументом y_j $(j = 1,...,10)$. Рівняння (4) набують вигляду

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{i,o}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o) + L_{i,j}(y_o)y + q_k. \tag{6}$$

Враховуючи те, що навантаження q_k основного і суміжного станів однакові, а функції з індексом «0» задовольняють рівнянням (3) з виразу (6) отримаємо лінеаризоване рівняння відносно приростів функцій y при біфуркації.

Розглядувані оболонки замкнуті, тому розв'язувальні функції періодичні за коловою координатою α_2 або φ. Для задоволення вимогам періодичності за α_2, скористаємось рядами Фур'є у комплексній формі

$$y_j = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y_{j,n} e^{in\varphi}, \qquad \varphi = \alpha_2 \ , \quad 0 \le \alpha_2 \le 2\pi \ , \tag{7}$$

де $y_{j,n}$ – комплексні функції $j = 1,...,10$, а n – параметр колового хвилеутворення.

Після підстановки (7) в систему рівнянь стійкості, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яка для кожного додатного значення n має вигляд

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{1,n}}{d\alpha_1} = -in_a\left(T_{12,n}\right) + \psi_2\left(T_{22,n} - T_{11,n}\right) + \frac{1}{R_1}\left(y_{3,n} - in_a M_{12,n}\right);$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{2,n}}{d\alpha_1} = -in_a\left(\left(T_{22,n}\right) - \psi_2\left(2T_{12,n}\right) + \left(\frac{3}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\psi_2 M_{12,n} +\right.$$

$$+\frac{1}{R_2}\left(-T_{12}{}^0 y_{8,n} + T_{22}^0\theta_{2,n} - T_{12,n}y_8^0 + T_{22,n}\theta_2^0 + in_a M_{12,n}\right);$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{3,n}}{d\alpha_1} = -in_a\left(-T_{12}{}^0 y_{8,n} + T_{22}^0\theta_{2,n} - T_{12,n}y_8^0 + T_{22,n}\theta_2^0 + 2\psi_2 M_{12,n}\right) -$$

$$-\psi_2 y_{3,n} - \frac{1}{R_1}y_{1,n} - \frac{1}{R_2}\left(T_{22,n}\right);$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{4,n}}{d\alpha_1} = -in_a M_{12,n} - \psi_2\left(y_{4,n} - M_{22,n}\right) + y_{3,n} + T_{11}^0 y_{8,n} +$$

$$+T_{11,n}y_8^0 - T_{12}{}^0\theta_{2,n} - S_{,n}\theta_2^0;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{5,n}}{d\alpha_1} = \frac{1}{R_1}y_{7,n} - y_{8,n}y_8^0 + A_{11}T_{11,n} + A_{12}T_{12,n} + A_{13}y_{4,n} -$$

$$-d_{11}\varepsilon_{22,n} - d_{12}\chi_{22,n} - d_{13}\chi_{12,n} \ ;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{6,n}}{d\partial\alpha_1} = -in_a y_{5,n} + \psi_2 y_{6,n} + y_{8,n}\theta_2^0 + + y_8^0\theta_{2,n} + A_{12}T_{11,n} +$$

$$+A_{22}S_{,n} + A_{23}y_{4,n} - d_{21}\varepsilon_{22,n} - d_{22}\chi_{22,n} - d_{23}\chi_{12,n};$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{7,n}}{d\alpha_1}=-\frac{1}{R_1}y_{5,n}-y_{8,n}\ ;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{8,n}}{d\alpha_1}=-\frac{1}{R_1}\varepsilon_{1,n}+A_{13}T_{11,n}+A_{23}S_{,n}+A_{33}y_{4,n}-d_{31}\varepsilon_{22,n}-d_{32}k_{22,n}-d_{33}k_{12,n},$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{9,n}}{\partial\alpha_1}=Q^*_{23,n}+d_{31}\varepsilon_{22,n}+d_{32}\kappa_{22,n}+d_{33}\kappa_{12,n}\ ,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{10,n}}{\partial\alpha_1}=M^*_{12,n}+A_{32}T^*_{12,n}+d_{33}\kappa_{12,n}\ , \tag{8}$$

де $n_a=n/A_2$.

Таким чином, задача статичної стійкості симетрично завантаженої пружної анізотропної оболонки обертання зведена до системи з десяти звичайних однорідних диференціальних рівнянь у нормальній формі (8) із змінними коефіцієнтами і однорідними граничними умовами:

на контурі $\alpha_1=\alpha_0:\quad B_o y_n=0,$

на контурі $\alpha_1=\alpha_l:\quad B_n y_n=0.$ (9)

Мінімальне власне значення однорідної крайової задачі (8), (9) характеризує момент переходу від симетричного основного рівноважного стану до несиметричного, якому властиві відповідне число n хвилеутворень в коловому напрямку. Цей стан рівноваги повністю характеризується наступними величинами: $y_{1,n},\dots y_{10,n}$, $T_{11,n}$, $T_{22,n}$, $T_{12,n}$, $M_{22,n}$, $M_{12,n}$, $\varepsilon_{1,n}$, $\varepsilon_{2,n}$, $\varepsilon_{22,n}$, $\theta_{1,n}$, $\theta_{2,n}$, $k_{22,n}$, $k_{12,n}$, а також докритичними параметрами T^0_{11}, T^0_{22}, T^0_{12}, θ^0_1, θ^0_2.

Зусилля і моменти, що входять в (8), визначаються із залежностей $T_{11,n}=y_{6,n}$;

$$T_{22,n}=d_{11}T_{11,n}+d_{21}S_{,n}+d_{31}y_{4,n}+\left(C_{22}-C^0_{22}\right)\varepsilon_{22,n}+$$
$$+\left(K_{22}-K^0_{22}\right)k_{22,n}+\left(K_{26}-K^0_{26}\right)k_{12,n};$$

$$M_{22,n}=d_{12}T_{11,n}+d_{22}S_{,n}+d_{32}y_{4,n}+\left(K_{22}-K^0_{22}\right)\varepsilon_{22,n}+$$
$$\left(D_{22}-D^0_{22}\right)k_{22,n}+\left(D_{26}-D^0_{26}\right)k_{12,n};$$

$$M_{12,n} = d_{13}T_{11,n} + d_{23}S_{,n} + d_{33}y_{4,n} + \left(K_{26} - K_{26}^{0}\right)\varepsilon_{22,n} + \left(D_{26} - D_{26}^{0}\right)k_{22,n} + \left(D_{66} - D_{66}^{0}\right)k_{12,n}; \quad (10)$$

Мінімальне власне число знаходиться при послідовному збільшенні навантаження, коли визначник матриці граничних умов дорівнює нулю. При розв'язку системи диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами визначник також є комплексним. Щоб існував розв'язок системи однорідних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами необхідно, щоб були одночасно рівними нулю дійсна та уявна частини визначника.

Методика розв'язку, розглядуваної крайової задачі, базується на чисельному методі дискретної ортогоналізації.

1. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / В.А. Баженов, М.П. Семенюк, В.М. Трач. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.

2. Ванин Г.А. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами / Г.А. Ванин, Н.П. Семенюк. – К.: Наук. думка, 1987. – 200 с.

3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 448 с.

4. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков. – К., Наук. думка, 1988. – 264 с.

5. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.

6. Трач В.М. До питання про напружено-деформований стан анізотропних оболонок середнього згину // В.М. Трач, М.М. Хоружий // Збірник «Наукові нотатки». – Луцьк: ЛНТУ, 2013. – С. 252-257.

7. Семенюк Н.П. Устойчивость цилиндрических оболочек из армированных материалов при осевом сжатии с учетом особенностей послойной ориентации волокон / Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Прикладная механика. – 2006. – 42, № 3. – с.80-86.

8. Семенюк Н.П. Устойчивость и начальное закритическое поведение анизотропных цилиндрических оболочек при внешнем давлении / Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 3. – С. 86-103.

9. Трач В.М. Об устойчивости оболочек вращения из композитных материалов / В.М. Трач // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 109-124.

Отримано 25.11.2013