

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА імені О.М. БЕКЕТОВА

Завдання для самостійної роботи за темою
«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ»
з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
з прикладами розв’язання типового варіанта

(для студентів 2 курсу денної форми навчання
за напрямом підготовки 6.080101 – «Геодезія, картографія та землеустрій»)

Завдання для самостійної роботи за темою «Елементи теорії ймовірності» з дисципліни «Вища математика» з прикладами розв'язання типового варіанта (для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.080101 – «Геодезія, картографія та землеустрій»). / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : С. М. Мордовцев, М. П. Данилевський,. – Х. : ХНУМГ, 2013. – 18 с.

Укладачі: С. М. Мордовцев,
М. П. Данилевський

Рецензент: доктор фізико-математичних наук, проф. А. І. Колосов

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
протокол №3 від 24.10.2012 р.

Завдання 1

Закон розподілу випадкової величини x заданий таблицею (перша строчка – можливі значення x , друга – відповідні їм значення ймовірностей p). Знайти: а) математичне очікування;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини x ;

г) побудувати графік інтегральної функції розподілу $F(X)$.

1	x_i	2	4	6	8	10
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
2	x_i	10	12	14	16	18
	p_i	0,04	0,15	0,24	0,3	0,27
3	x_i	8	12	16	20	24
	p_i	0,05	0,18	0,4	0,22	0,15
4	x_i	15	18	21	24	27
	p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,15
5	x_i	5	6	7	8	9
	p_i	0,03	0,14	0,25	0,36	0,22
6	x_i	2	4	6	8	10
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
7	x_i	10	12	14	16	18
	p_i	0,04	0,15	0,24	0,3	0,27
8	x_i	8	12	16	20	24
	p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,15
9	x_i	15	18	21	24	27
	p_i	0,03	0,14	0,25	0,36	0,22
10	x_i	2	4	6	8	10
	p_i	0,12	0,24	0,4	0,14	0,1
11	x_i	10	12	14	16	18
	p_i	0,08	0,2	0,3	0,22	0,2
12	x_i	8	12	16	20	24
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
13	x_i	5	6	7	8	9
	p_i	0,05	0,12	0,4	0,25	0,18

Продовження таблиці

14	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,1	0,24	0,31	0,2	0,15
15	x_i	2	5	8	11	14
	p_i	0,02	0,14	0,4	0,26	0,18
16	x_i	3	5	7	9	11
	p_i	0,13	0,27	0,34	0,23	0,03
17	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,07	0,18	0,27	0,33	0,15
18	x_i	9	13	17	21	25
	p_i	0,08	0,21	0,43	0,25	0,03
19	x_i	16	19	22	25	28
	p_i	0,08	0,18	0,33	0,18	0,23
20	x_i	6	7	8	9	10
	p_i	0,03	0,14	0,25	0,36	0,22
21	x_i	3	5	7	9	11
	p_i	0,08	0,22	0,37	0,18	0,15
22	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,1	0,21	0,3	0,36	0,03
23	x_i	9	13	17	21	25
	p_i	0,16	0,2	0,35	0,26	0,03
24	x_i	16	19	22	25	28
	p_i	0,05	0,15	0,3	0,36	0,14
25	x_i	3	5	7	9	11
	p_i	0,1	0,24	0,42	0,14	0,1
26	x_i	11	13	15	17	19
	p_i	0,06	0,22	0,32	0,22	0,18
27	x_i	9	13	17	21	25
	p_i	0,07	0,21	0,35	0,17	0,2
28	x_i	6	7	8	9	10
	p_i	0,1	0,15	0,35	0,22	0,18
29	x_i	12	14	16	18	20
	p_i	0,12	0,24	0,4	0,18	0,06
30	x_i	3	6	9	12	15
	p_i	0,05	0,14	0,41	0,26	0,14

Приклад розв'язку завдання 1

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,15	0,35	0,25	0,15

З аналізу ряду розподілу обчислимо математичне сподівання:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0,1 \cdot 1 + 0,15 \cdot 2 + 0,35 \cdot 3 + 0,25 \cdot 4 + 0,15 \cdot 5 = 3,2$$

дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = (1 - 3,2)^2 \cdot 0,1 + (2 - 3,2)^2 \cdot 0,15 + (3 - 3,2)^2 \cdot 0,35 + \\ + (4 - 3,2)^2 \cdot 0,25 + (5 - 3,2)^2 \cdot 0,15 = 1,36$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1,166$$

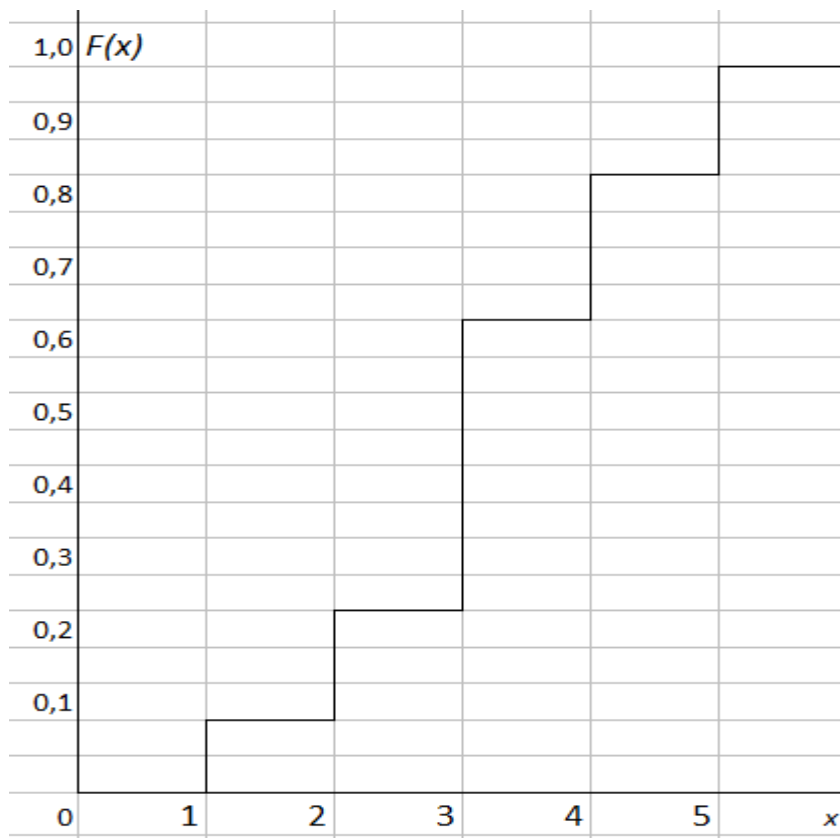


Рис. 1.1 – Графік інтегральної функції розподілу F(X)

Завдання 2

Випадкова величина x задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$.

Знайти:

- а) диференціальну функцію (щільність ймовірностей) розподілу;
- б) математичне очікування, дисперсію, середнє квадратичне відхилення;
- в) побудувати графік інтегральної та диференціальної функції;
- г) обчислити ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (α, β) .

1	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{(x-2)^2}{9} & \text{при } 2 \leq x < 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $\alpha = 4, \beta = 5,5$	2	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{4} & \text{при } 1 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 1,5, \beta = 2$
3	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ (x-2)^3 & \text{при } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 2,5$	4	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & \text{при } 0 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 2$
5	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{(x^2-x)}{2} & \text{при } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $\alpha = 0,5, \beta = 1,5$	6	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{x^3-x}{7} & \text{при } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 1,5$
7	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{x^2-x-2}{4} & \text{при } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 2,5$	8	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1/3 \\ \frac{(3x-1)^2}{25} & \text{при } 1/3 \leq x < 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 1,5$
9	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3 \\ \frac{(x-3)^2}{4} & \text{при } 3 \leq x < 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $\alpha = 3, \beta = 4$	10	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{(x-2)^2}{16} & \text{при } 2 \leq x < 6 \\ 1, & \text{при } x > 6 \end{cases}$ $\alpha = 4, \beta = 5$

11	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3 \\ \frac{(x-3)^2}{25} & \text{при } 3 \leq x < 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$ $\alpha = 4, \beta = 7$	12	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{9} & \text{при } 1 \leq x < 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $\alpha = 1,5, \beta = 3$
13	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{x^2-1}{3} & \text{при } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 1,5$	14	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0,5 \\ \frac{(2x-1)^2}{9} & \text{при } 0,5 \leq x < 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 1,5$
15	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{(x-1)^3}{8} & \text{при } 1 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 2,5$	16	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{при } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 1,5$
17	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{(x^2-x-2)}{4} & \text{при } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 2,5$	18	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{(2x-4)^2}{16} & \text{при } 2 \leq x < 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $\alpha = 2,5 \beta = 3$
19	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{4(x^2-1)}{21} & \text{при } 1 \leq x < 2,5 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $\alpha = 1,5, \beta = 2$	20	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^3-x^2}{4} & \text{при } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 1,5$
21	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{9} & \text{при } 1 \leq x < 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $\alpha = 1,5, \beta = 3$	22	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{(x-2)^3}{8} & \text{при } 2 \leq x < 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $\alpha = 2,5 \beta = 3$

23	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^2}{25} & \text{при } 0 \leq x < 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 3$	24	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{(x-2)^2}{4} & \text{при } 2 \leq x < 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 3$
25	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{8} & \text{при } 1 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 3$	26	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 2, \beta = 3$
27	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{5} & \text{при } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $\alpha = 2,5, \beta = 3$	28	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{при } 3 \leq x < 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $\alpha = 3,5, \beta = 4$
29	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0,5 \\ \frac{(x-0,5)^2}{4} & \text{при } 0,5 \leq x < 2,5 \\ 1, & \text{при } x > 2,5 \end{cases}$ $\alpha = 1, \beta = 2$	30	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$ $\alpha = \pi/4, \quad \beta = \pi/2.$

Приклад розв'язку завдання 2

Випадкова величина x задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{4x^2}{49} & \text{при } 0 < x \leq \frac{7}{2} \\ 1 & \text{при } x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

а) Знайдемо диференціальну функцію (щільність ймовірностей) розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{8x}{49} & \text{при } 0 < x \leq \frac{7}{2} \\ 0 & \text{при } x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

б) Обчислимо математичне очікування, дисперсію, середнє квадратичне відхилення:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{7}{2}} x \cdot \frac{8x}{49} dx = \frac{8}{49} \int_0^{\frac{7}{2}} x^2 dx = \frac{8}{49} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{7}{2}} = \frac{8 \cdot 49 \cdot 7}{49 \cdot 3 \cdot 8} = 7/3 \approx 2,33.$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{8}{49} \int_0^{\frac{7}{2}} x^3 dx - (7/3)^2 = \frac{8}{49} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\frac{7}{2}} - \frac{49}{9} = \\ &= \frac{49}{8} - \frac{49}{9} = 49/72 \approx 0,681; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,681} = 0,82.$$

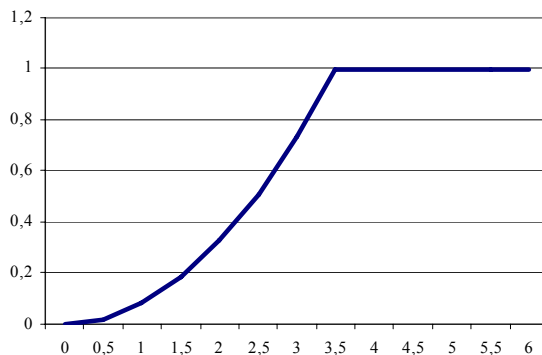


Рис. 2.1– Графік інтегральної функції F(X)

$f(x)$

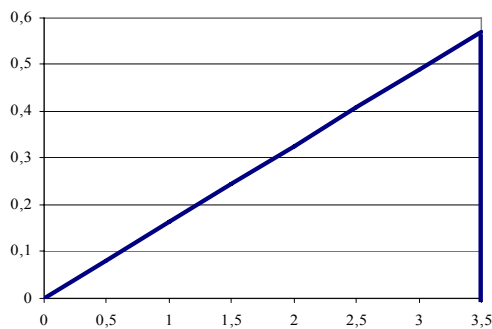


Рис. 2.2– Графік диференціальної функції $f(x)$.

Завдання 3

За вибіркою, що наведено у таблиці, необхідно згідно з варіантами:

- а) знайти рівняння лінійної регресії та побудувати графіки точкової функції і регресійної прямої;
- б) підрахувати коефіцієнти кореляції і детермінації;
- в) оцінити значущість рівняння регресії, використовуючи критерій Фішера;
- г) оцінити значущість коефіцієнтів рівняння регресії, використовуючи t -критерій Ст'юдента, і визначити довірчий інтервал для кожного коефіцієнта рівняння регресії.

Варіанти	1	2	3	4	5
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	12	18	19	12,5	1,1
1,5	8,2	17	18	9,7	1,6
2	6,5	16	16	7	2,2
2,5	4,8	15	13	6	3,2
3	3,6	12	9	5,5	4,1
3,5	2,8	8	4	4,8	5,5
4	2,1	4	-2	4,2	7,3
4,5	1,7	1	-9	3,5	10,5
5	1,6	-2	-14	3	14
5,5	1,3	-6	-19	2,5	16,1
Варіанти	6	7	8	9	10
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	11,5	13,2	2,2	11,7	19,3
2	7,7	10,4	2,7	7,4	18,8
3	6	7,7	3,3	6,1	17,4
4	4,3	6,7	4,3	4,2	13,6
5	3,1	6,2	5,2	3,5	9,1
6	2,3	5,5	6,6	2,5	4,3
7	1,6	4,9	8,4	1,7	1
8	1,2	4,2	11,6	1,2	-5
9	1,1	3,7	15,1	1,1	-13
10	0,8	3,2	17,2	0,8	-20

Продовження таблиці

Варіанти	11	12	13	14	15
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	10,2	10,9	1,3	-1,8	20
1,5	8	9	1,7	-1,3	19,5
2	6,6	7,7	2,3	-0,7	18,3
2,5	6	6,7	3,1	0,3	16,5
3	5,1	5,5	4	1,2	11
3,5	4,5	4,8	5,4	2,6	6
4	3,8	4,1	7,2	4,4	-1
4,5	3	3,6	10,4	7,6	-8
5	2,6	3,2	14,1	11,1	-14
5,5	2,2	3,1	16	13,2	-20
Варіанти	16	17	18	19	20
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	6	5,6	17,1	-6,9	11,8
2	3,9	6	13,3	-6,4	9,7
3	2,2	6,6	11,6	-5,8	8,3
4	0,5	7,4	9,9	-4,8	7,5
5	-0,7	8,3	8,7	-3,9	6,6
6	-1,5	9,7	7,9	-2,5	6
7	-2,2	11,5	7,2	-0,7	5,4
8	-2,6	14,7	6,8	2,5	4,6
9	-2,8	17,5	6,7	6	4,2
10	-3	20	6,4	8,1	4
Варіанти	21	22	23	24	25
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	16,4	5	8,4	15,2	5,4
1,5	15,4	5,5	4,1	12,4	1,6
2	14,4	6,1	2,8	9,7	-0,1
2,5	13,4	7,1	0,9	8,7	-1,8
3	10,4	8	0,2	8,2	-3
3,5	6,4	9,4	-0,8	7,5	-3,8
4	3	11,2	-1,6	6,9	-4,5
4,5	-2	14,4	-2,1	6,2	-4,9
5	-6,1	17,9	-2,2	5,7	-5
5,5	-10	20	-2,5	5,2	-5,3

Варіанти	26	27	28	29	30
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	7,8	-4,3	11	4,7	18,1
2	5	-3,8	10	5,2	14,3
3	2,3	-3,2	9	5,8	12,6
4	1,3	-2,2	8	6,8	10,9
5	0,8	-1,3	5	7,7	9,7
6	0,1	0,1	1	9,1	8,9
7	-0,5	1,9	-2,4	10,9	8,2
8	-1,2	5,1	-7,4	14,1	7,8
9	-1,7	8,6	-11,5	17,6	7,7
10	-2,2	10,7	-15,4	19,7	7,4

Приклад розв'язку завдання 3

У таблиці 1 дана вибірка

Таблиця 1 – Вихідні дані

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	7,5	6,9	6,1	5,2	4,6	3,7	2,9	1,7	1,2	0,9

Побудуємо графік точкової функції:

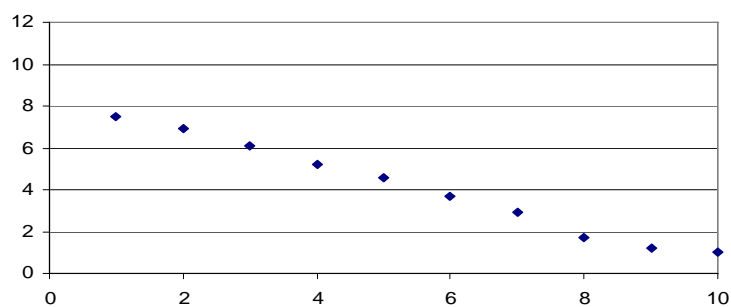


Рис. 3.1 Графік залежності y_i від x_i

За розташуванням точок є можливість передбачити наявність лінійної кореляційної або регресійної залежності. Будемо шукати рівняння регресії у виді:

$$\hat{y} = a + bx$$

Для визначення коефіцієнтів використовуємо метод найменших

квадратів, згідно з яким:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \Rightarrow \min$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} a &= \bar{y} - b\bar{x} \\ b &= \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{x} = \sum x_i / n$, $\bar{y} = \sum y_i / n$, $\overline{xy} = \sum x_i y_i / n$, $\overline{x^2} = \sum x_i^2 / n$

Коефіцієнт b називається коефіцієнтом регресії. Вираз у чисельнику для b є коваріацією (кореляційний момент) величин Y та X , який характеризує ступінь розсіювання навколо середнього значення:

$$\text{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Складемо таблицю 2 та обчислимо вибірккові середні.

Таблиця 2 – Визначення вибіркових середніх значень

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	7,5	1,00	7,50
2	6,9	4,00	13,80
3	6,1	9,00	18,30
4	5,2	16,00	20,80
5	4,6	25,00	23,00
6	3,7	36,00	22,20
7	2,9	49,00	20,30
8	1,7	64,00	13,60
9	1,2	81,00	10,80
10	0,9	100,00	9,00
\bar{x}	\bar{y}	$\overline{x^2}$	\overline{xy}
5,5	4,07	38,50	15,93

Обчислимо коефіцієнти за формулою (1):

$$b = (15.93 - 5.5 \cdot 4.07) / (38.5 - 5.5 \cdot 5.5) = -0.78242;$$

$$a = 4.07 - (-0.78242) \cdot 5.5 = 8.37333$$

Дисперсії змінних X та Y визначаються за формулами

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / n$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \sum (y_i - \bar{y})^2 / n$$

σ_x та σ_y називають середніми квадратичними відхиленнями.

Коефіцієнт кореляції визначається за формулою: $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$

При $r > 0$ кореляційний зв'язок між змінними – прямий, при $r < 0$ – зворотній.

Доповнимо таблицю двома стовпцями та обчислимо дисперсії.

Таблиця 3 – Остаточний варіант таблиці

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	7,5	1,00	7,50	20,25	11,76
2	6,9	4,00	13,80	12,25	8,01
3	6,1	9,00	18,30	6,25	4,12
4	5,2	16,00	20,80	2,25	1,28
5	4,6	25,00	23,00	0,25	0,28
6	3,7	36,00	22,20	0,25	0,14
7	2,9	49,00	20,30	2,25	1,37
8	1,7	64,00	13,60	6,25	5,62
9	1,2	81,00	10,80	12,25	8,24
10	0,9	100,00	9,00	20,25	10,05
\bar{x}	\bar{y}	$\overline{x^2}$	\overline{xy}	σ_x^2	σ_y^2
5,5	4,07	38,50	15,93	8,25	5,09

Обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r = \frac{(15,93 - 4,07 \cdot 5,5)}{\sqrt{8,25 \cdot 5,09}} = -0,9965$$

Після того, як знайдено рівняння лінійної регресії, проведемо оцінку значущості як рівняння в цілому, так і окремих його параметрів.

Коефіцієнт детермінації $R^2=r^2$.

Оцінка значущості рівняння регресії в цілому дається за допомогою F-критерію Фішера. При цьому висувається нульова гіпотеза H_0 , що коефіцієнт регресії дорівнює нулю, тобто $b = 0$, і, отже, чинник x не робить впливу на результат y . Для цього порівнюють фактичне значення $F_{\text{факт}}$ та критичне (табличне) $F_{\text{табл}}$ значення F – критерію, при цьому $F_{\text{факт}}$ обчислюється за

$$\text{формулою } F_{\text{факт}} = \frac{r^2}{1-r^2}(n-2) \approx 1136$$

Після обчислення цієї величини проводиться тест, який полягає в перевірці гіпотези H_0 про статичну не значущість рівняння регресії. Рівень значущості α – це ймовірність відкинути правильну гіпотезу за умови, що вона вірна. Приймаємо $\alpha=0,05$. Якщо $F_{\text{табл}} < F_{\text{факт}}$, то гіпотеза про випадкову природу оцінюваних характеристик відхиляється і признається статистична значущість і надійність рівняння регресії. Табличне значення вибирається із спеціальної таблиці з урахуванням того, що $k_1=1$ $k_2=n-2$.

Із таблиці визначимо $F_{\text{табл}}$ (при $k_1=1$, $k_2 = 8$, рівень значущості $\alpha=0,05$).
Значення $F_{\text{табл}} = 5,32$. У нашому випадку $F_{\text{табл}} = 5,32 < F_{\text{факт}} = 1136,503$.

Це означає, що гіпотеза H_0 про випадкову природу оцінюваних характеристик відхиляється і признається значущість рівняння регресії.

Для оцінки статистичної значущості коефіцієнтів регресії і кореляції розраховуються t- критерій Ст'юдента та довірчі інтервали для кожного з показників. Висувається гіпотеза H_0 про випадкову природу показників.

Випадкові помилки параметрів обчислюються за формулами:

$$t_a = \frac{a}{m_a} \quad t_b = \frac{b}{m_b}$$

Якщо $t_{\text{табл}} < t_{\text{факт}}$, то H_0 відхиляється, тобто a , b відрізняються від нуля і сформувалися під впливом діючого чинника x . Для розрахунку довірчого інтервалу визначаємо граничні помилки.

Тоді довірчі інтервали мають вид:

$$\Delta_a = t_{\text{табл}} m_a \quad \Delta_b = t_{\text{табл}} m_b$$

Обчислення стандартних помилок – досить трудомісткий процес, тому для визначення $a - \Delta_a \leq a \leq a + \Delta_a$ $b - \Delta_b \leq b \leq b + \Delta_b$ використовуємо вбудовану функцію Excel ЛИНЕЙН(). Для цього введемо таблицю 1 на робочому листі (починаючи з чарунку A1), а потім помітимо область чарунків A12:B16, для чого клацнемо по значку вибору функцій, виберемо категорію "Статистические" та знайдемо функцію ЛИНЕЙН(). З'явиться вікно, в якому необхідно вказати інтервал значень $y_i : x_i$. У полях "Конст" та "Статистика" введемо цифру 1. На рисунку 3.2 представлено заповнене вікно.

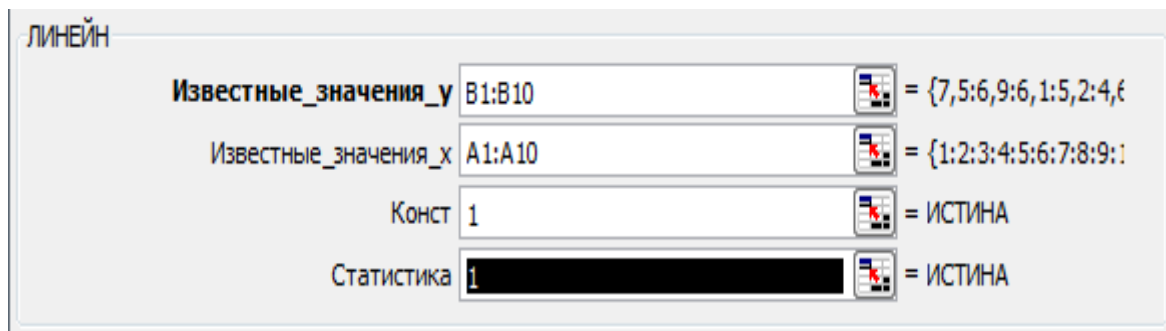


Рис 3.2 Введення аргументів функції ЛИНЕЙН()

Натиснемо ОК, потім клавішу F2, потім Enter при натиснутих одночасно Shift и CTRL. У поміченої області з'являться результати розрахунку (таблиця 4).

Таблиця 4 – Результати розрахунку

-0,78242	8,373333
0,023209	0,144008
0,99301	0,210807
1136,503	8
50,50548	0,355515

Проаналізуємо результати. У першому рядку таблиці отримані коефіцієнти b та a , тобто $b = -0,78242$; $a = 8,37333$. У другому рядку таблиці підраховані стандартні помилки $m_b = 0,023209$; $m_a = 0,144008$.

Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,99301$ вказано в третьому рядку, першого

стовпця. $F_{\text{факт}} = 1136,503$ (четвертий рядок, перший стовпець), число ступенів свободи дорівнює $n-2=8$ (четвертий рядок, другий стовпець).

Стандартна помилка Y дорівнює $0,210807$ (третій рядок, другий стовпець). Нарешті, регресійна і залишкова суми квадратів представлена в нижньому рядку. Таким чином, рівняння парної регресії має вид:

$$y = 8,37733 - 0,78242 x$$

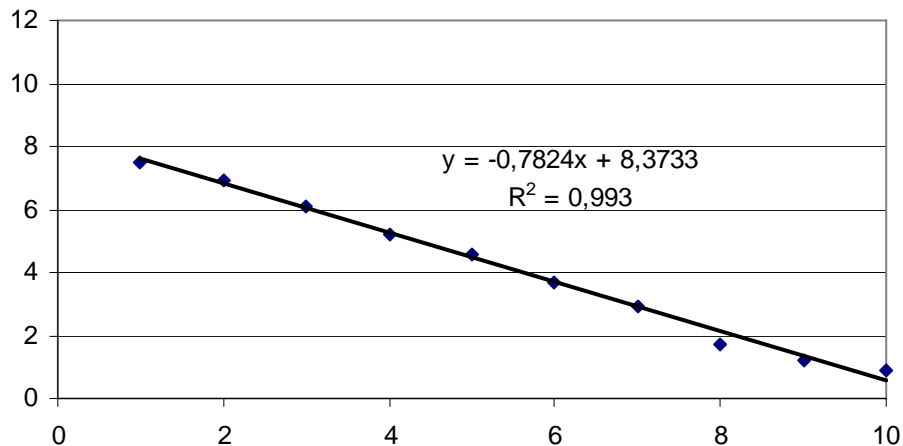


Рис. 3.3 – Графік регресійної прямої

Оцінимо якість рівняння регресії, значущість коефіцієнтів і визначимо довірчі інтервали.

$$t_b = -0,78242 / 0,023209 = -33,7 ; \quad t_a = 8,37333 / 0,144008 = 58,14$$

Табличне значення $t_{\text{табл}} = 2,306$ (при рівні значущості $\alpha=0,05$ та $k=8$). Табличне значення буде менше t_a , t_b , тому коефіцієнти рівняння регресії статистично значимі. Граничні помилки рівні:

$$\Delta_a = 2,306 * 0,144008 = 0,332 \quad \Delta_b = 2,306 * 0,023209 = 0,0535$$

Отже, довірчі інтервали коефіцієнтів рівняння мають вид:

$$8,04 \leq a \leq 8,705 \quad -0,8359 \leq b \leq -0,7289$$

Навчальне видання

Завдання для самостійної роботи за темою
«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ»
з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
з прикладами розв’язання типового варіанта
(для студентів 2 курсу денної форми навчання
за напрямом підготовки 6.080101 – «Геодезія, картографія та землеустрій»)

Укладачі **МОРДОВЦЕВ** Сергій Михайлович
ДАНИЛЕВСЬКИЙ Микола Прокопович

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*
За авторською редакцією
Комп’ютерне верстання *С. М. Мордовцев*

План 2013, поз. 116М

Підп. до друку	20.12.2013	Формат 60х84 /16
Друк на ризографі		Ум. друк. арк. 0,6
Зам. №		Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідectво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.