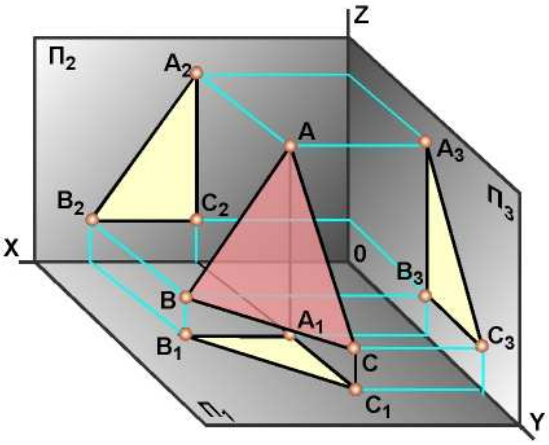
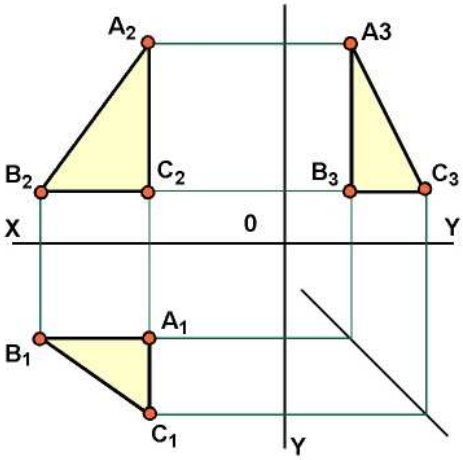
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА ИМЕНИ А. Н. БЕКЕТОВА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по курсу
«Начертательная геометрия»
Модуль №1

(Содержательный модуль № 1 – точка, линия, плоскость)





ХАРЬКОВ
ХНУГХ
2014

УДК 514.18(075)
ББК 22.151.3я73-6
Л86

Автор

Лусь Владимир Иванович, к.т.н., доцент, профессор кафедры инженерной и компьютерной графики Харьковского национального университета городского хозяйства имени А. Н. Бекетова

Рецензент

Ю. М. Тормосов, доктор технических наук, профессор. заведующий кафедрой механики и графики Харьковского государственного университета питания и торговли

Рекомендовано к печати Ученым советом
Харьковского национального университета городского хозяйства имени А. Н. Бекетова,
протокол №2 от 27.09.2013 г.

Лусь В. И.
Л86 Начертательная геометрия: учебн. пособие: в 3-х содержательных модулях / В. И. Лусь; Харьк. нац. ун-т. гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Х.: ХНУГХ, 2014. – Содержательный модуль №1. Точка, линия, плоскость. – 2014. – 65 с.

Учебное пособие содержит полный курс теоретического материала для успешного освоения студентами 1 курса «Начертательная геометрия» – модуль № 1.

Учебный материал разбит на три содержательных модуля. Каждый содержательный модуль является логически завершённой частью, заканчивается контрольными вопросами и тестом с ответами для самоконтроля студента.

Для студентов по направлениям подготовки 6.060101 «Строительство», 6.060103 «Гидротехника», 6.050201 «Электротехника и электротехнологии», 6.050702 «Электротехника».

УДК 514.18(075)
ББК 22.151.3я73-6

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Как вы думаете?

1. В начертательной геометрии при изучении метода проецирования рассматривается не геометрическая фигура, а её проекции («тень») на соответствующие плоскости проекций. А где же, в таком случае, находится сам предмет?

2. Каким образом по трём искажённым (в общем случае) проекциям геометрической фигуры (а тень очень редко соответствует своему оригиналу) можно определить ее конфигурацию и положение в пространстве?

3. Почему, проецируя предмет на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые пересекаются по осям *x*, *y*, *z*, в начертательной геометрии чаще пользуются безосными чертежами?

4. В начертательной геометрии утверждается, что предмет проецируется, в общем случае, на плоскости проекций с искажением. Тогда почему «искажённые проекции» облегчают процесс выполнения и чтения чертежа?

Ответить на эти вопросы Вы сможете, изучив курс Начертательной геометрии.

Данный курс рассчитан на студентов инженерно–технических специальностей ХНУГХ им. А. Н. Бекетова и соответствует государственной программе курса начертательной геометрии. Начертательная геометрия является фундаментальной дисциплиной развития научно–технической базы каждой страны.

Предмет и метод курса

Начертательная геометрия изучает пространственные формы и их отношения, используя метод проецирования («начертания»), с помощью которого строятся различные изображения, в том числе и технические чертежи. В теории изображения изучаются законы построения отображений различных фигур на плоскости. На основе этих законов выполняются чертежи как сложнейших машин и механизмов, так и простых деталей и моделей, а также формируется возможность изображать и такие предметы, которые существуют лишь в воображении человека.

Чертёж имеет исключительно большое значение в практической деятельности человека. Он является средством выражения замысла учёного, конструктора и основным производственным документом, по которому осуществляется строительство зданий и инженерных сооружений, создание машин, механизмов и их составных частей. Начертательная геометрия является основой графической грамотности и позволяет просто и наглядно решать графическими методами многие важные теоретические и практические задачи. В настоящем учебном пособии изложен краткий курс начертательной геометрии, базирующийся на положениях высшей геометрии.

Символика и обозначения

1. Точки – прописными буквами латинского алфавита(***A, B, C***) или арабскими цифрами (***1, 2, 3***).

2. Линии – строчными буквами латинского алфавита (***a, b, c***).

3. Поверхности – прописными буквами греческого алфавита: Γ – гамма, Δ – дельта, Λ – лямбда, Σ – сигма, Φ – фи, Ψ – пси, Ω – омега...

4. Углы – $\angle ABC$, $a \wedge b$, $m \wedge AB$ или α, β, γ .

5. Параллельность – $\parallel$.

6. Перпендикулярность – $\perp$.

7. Касание – $\cup$.

8. Совпадение или тождество – =.

9. Принадлежность, включение – $\subset$ или $\in$, концы знака направлены в сторону большемерной фигуры.

10. Пересечение – $\cap$.

11. Вращение – ©.

12. Логическое следствие – $\Rightarrow$.

13. Фигура, проецирующая относительно... – $\perp\perp$.

14. Скрещивающиеся прямые – $\overset{\circ}{\_}$.

15. Расстояние между элементами пространства – **//**: ***/AB /***– расстояние от точки ***A*** до точки ***B***; ***/Aa /***– расстояние от точки ***A*** до линии ***a***; ***/ab /***– расстояние между линиями ***a*** и ***b***; ***/AΣ/***– расстояние от точки ***A*** до поверхности ***Σ***; ***/ΓΣ/***– расстояние между поверхностями.

Примеры символической записи:

1. ***Σ(a ∩ b) // Γ(A,m)*** – плоскость, заданная пересекающимися прямыми ***a*** и ***b***, параллельна плоскости, заданной точкой ***A*** и прямой ***m.***

2. ***AB ⊥ Γ*** – отрезок ***AB*** перпендикулярен плоскости ***Γ***.

3. $A_1 = B_1$ – проекции точек ***A*** и ***B*** совпадают.

4. ***A ∈ a*** – точка ***A*** принадлежит прямой ***a***.

5. ***a ⊂ Σ***– прямая а принадлежит плоскости ***Σ***.

6. ***A ∈ b*** – прямая *b* проходит через точку ***A***.

7. ***Σ ∪ Φ(OA)*** – плоскость ***Σ***, касательная к сфере ***Φ***, заданной центром ***O*** и точкой ***A***, принадлежащей сфере.

Цели и задачи курса

Цели курса:

1. Дать студенту геометрическое образование.

2. Помочь овладеть теорией изображений, а это значит научиться решать две основные *задачи курса*:

1) моделирование пространства — это умение по оригиналу построить его плоское изображение;

2) реконструирование пространства — это умение по плоскому изображению восстановить оригинал.

Краткая история начертательной геометрии

Первые попытки построения проекционных изображений уходят в далёкие времена. Ещё в Древнем Египте при возведении сооружений применялись планы и фасады, то есть использовались плоские изображения — чертежи оригиналов.

Накопленные знания по теории и практике изображений систематизировал и обобщил французский ученый **Гаспар Монж** (1746 – 1818). Работа Монжа **Начертательная геометрия** была опубликована в 1795 г. как учебное пособие.

В 1812 году вышел в свет первый в России оригинальный курс начертательной геометрии Я. А. Севастьянова. Большой вклад в развитие начертательной геометрии внесли профессор Н. И. Макаров, В. И. Курдюмов, Н. А. Рынин, И. И. Котов, Н. С. Кузнецов и др.

1. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЕЦИРОВАНИЯ. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ, КРИВОЙ ЛИНИИ

В этом разделе Вы познакомитесь с понятием несобственных элементов (точек, прямых, плоскостей), которые упрощают решение многих задач.

Тень от треугольника может иметь форму треугольника или полосы (рис. 1.1 и 1.2).

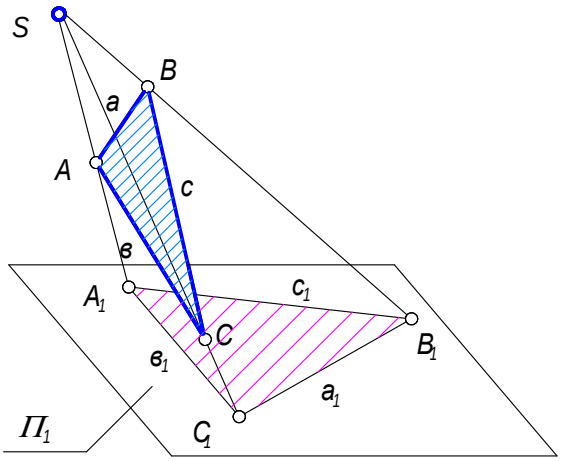


Рис. 1.1 – «Тень» от треугольника имеет форму треугольника

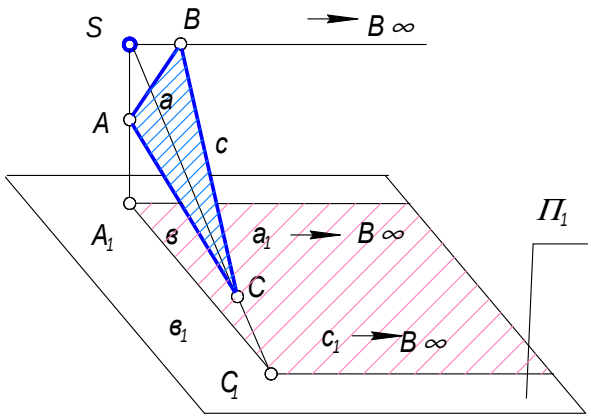


Рис. 1.2 – «Тень» от треугольника имеет форму полосы

Как Вы думаете? Какие еще формы может принимать тень от треугольника?

В курсе элементарной геометрии изучается трехмерное пространство, названное евклидовым по имени греческого учёного Евклида, описавшего его основные свойства и закономерности. Однако положений евклидовой геометрии недостаточно для выполнения некоторых операций проецирования.

Развитие науки привело к расширению понятия пространства, так как Вселенная представляется теперь состоящей из искривлённых пространств. Это позволило дополнить привычное для нас евклидово пространство новыми элементами – бесконечно удаленной точкой, прямой, плоскостью. Для того, чтобы получить соответствующие элементы в тех случаях, когда их не оказывается при выполнении операции проецирования, достаточно потребовать, чтобы две параллельные прямые считались пересекающимися, при этом точку их пересечения называют несобственной точкой или бесконечно удалённой (рис. 1.3). Это понятие было введено в 1636 году французским математиком Жаном Дезаргом.

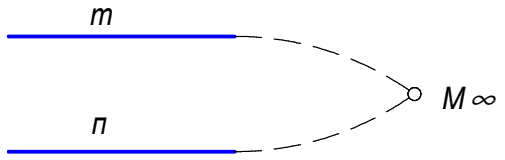


Рис. 1.3

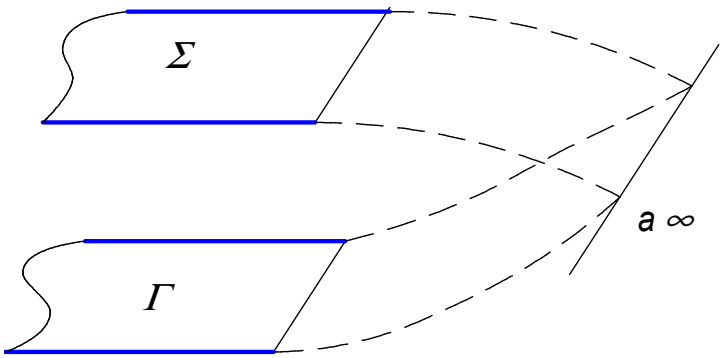


Рис. 1.4

Будем считать, что:

1) две параллельные прямые пересекаются в единственной несобственной точке (рис. 1.3) $\boldsymbol{m \parallel n \leftrightarrow m \cap n = M\infty}$

2) две параллельные плоскости пересекаются по единственной несобственной прямой (рис. 1.4): $\boldsymbol{\Sigma \parallel \Gamma \leftrightarrow \Sigma \cap \Gamma = a\infty}$

Вывод.

Несобственные элементы позволяют создать более строгую теорию метода проецирования.

1.1. Методы проецирования

Основной метод начертательной геометрии – метод проецирования
Различают:
1. Центральное проецирование
2. Параллельное проецирование
3. Ортогональное проецирование

1.2. Аппарат проецирования

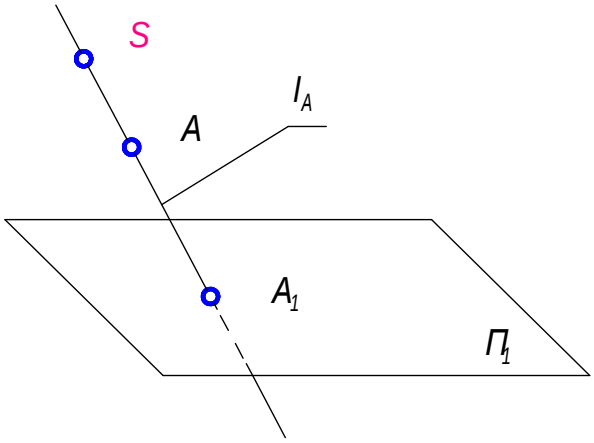


Рис. 1.5 – Состав аппарата проецирования

П₁ –плоскость проекций (картинная плоскость);

S – центр проецирования;

A – точка в пространстве;

A_1 – проекция точки;

l_A – проецирующий луч.

Спецификой курса начертательной геометрии является то, что изучение ведется на абстрактных геометрических фигурах: точка, линия, плоскость, поверхность. Мы будем изучать принципы построения изображений этих фигур на плоскости.

Прежде всего дадим определение простейшим геометрическим фигурам – точке и линии.

Точка — это нульмерная геометрическая фигура, неделимый элемент пространства, т.е. она не может быть определена другими более элементарными понятиями.

Обозначается ***A, B, C***… прописными буквами латинского алфавита или цифрами. Точка не имеет размеров, то что мы показываем на чертеже точку в виде какой-то площади, пересечением двух линий или кружочком, является лишь её условным изображением.

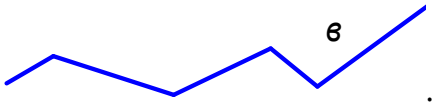
Линия — одномерная геометрическая фигура, обозначается строчными буквами латинского алфавита ***a, b, c***… В начертательной геометрии линия определяется кинематически, как траектория непрерывно движущейся точки в пространстве, а рассматриваются следующие линии:

1. Прямая – 

.

2. Отрезок – 

.

3. Ломаная состоящая из отрезков – 

.

4. Кривая – 

.

1.3. Центральное проецирование

Проецирование, при котором проецирующий луч проходит через фиксированную точку ***S***, называется **центральным**. На рис. 1.6 показано построение центральных проекций некоторых точек и прямой.

П₁ – плоскость проекций (картинная плоскость);

S – центр проецирования;

B, C, D – точки в пространстве;

C_1, B_1, D_1 – проекции точек;

l_B, l_C, l_D – проецирующие лучи;

Σ – плоскость, проведенная через центр проецирования *S* и прямую *a*.

AM – прямая в пространстве;

A_1M_1 – проекция прямой (или отрезка).

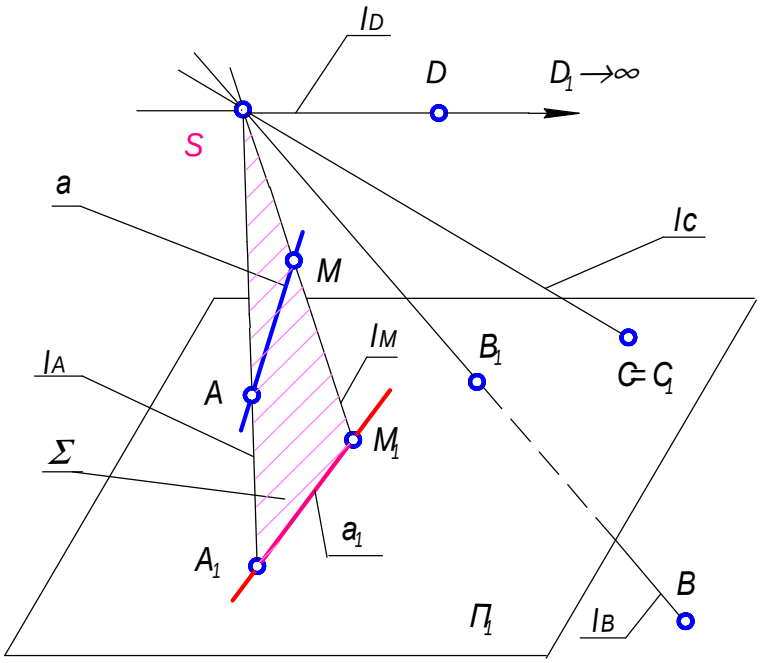


Рис. 1.6 – Центральное проецирование

Через точку ***S*** (центр проецирования) и точку ***B*** проведём проецирующий луч l_B, отметим точку пересечения проецирующего луча с картинной плоскостью: $S \in l_B$, $B \in l_B$, $l_B \cap П_1 = B_1$. На чертеже видно, что каждой точке пространства соответствует единственная проекция на плоскости.

Аналогично можно построить проекцию любой точки пространства, например точки ***C***. $C_1 = l_C \cap П_1$, если $C \in П_1$, то $C = C_1$. Если $l_D \parallel П_1$, то проекцией точки $D \Rightarrow D_1$ служит несобственная точка плоскости $П_1$.

По принципу центрального проецирования работают фото- и кинокамеры. Упрощённая схема работы человеческого глаза близка к этому виду проецирования. Изображения, построенные по принципу центрального проецирования, наиболее наглядны, и их широко используют в своей работе архитекторы, дизайнеры, геологи и др.

Описанным методом центрального проецирования может быть построена проекция любой точки геометрической фигуры, а следовательно, и проекция самой фигуры. Например, центральную проекцию отрезка ***AM*** на плоскость $П_1$ можно построить как линию пересечения плоскости ***Σ***, проведённой через центр ***S*** и прямую ***AB***, с плоскостью проекций. Так как две плоскости пересекаются по единственной прямой, то проекция прямой есть прямая, и притом единственная, то есть $\Sigma \supset S, AM;\ \Sigma \cap П_1 \Rightarrow A_1M_1$.

1.4. Параллельное проецирование

Проецирование называется параллельным, если центр проецирования удален в бесконечность, а все проецирующие лучи параллельны заданному направлению *s*.

S – направление проецирования

Чтобы найти точку A_1 – параллельную проекцию точки ***A***, построенную по направлению ***S***на плоскости проекций $П_1$, нужно через точку ***A*** провести проецирующий луч l_A, параллельный прямой ***s***, и определить точку его пересечения с плоскостью $П_1$: $l_A \supset A,\ l_A \parallel s,\ l_A \cap П_1 = A_1$.

Точка A_1 является параллельной проекцией как для точки ***A***, так и для точек A^1 и A^2.

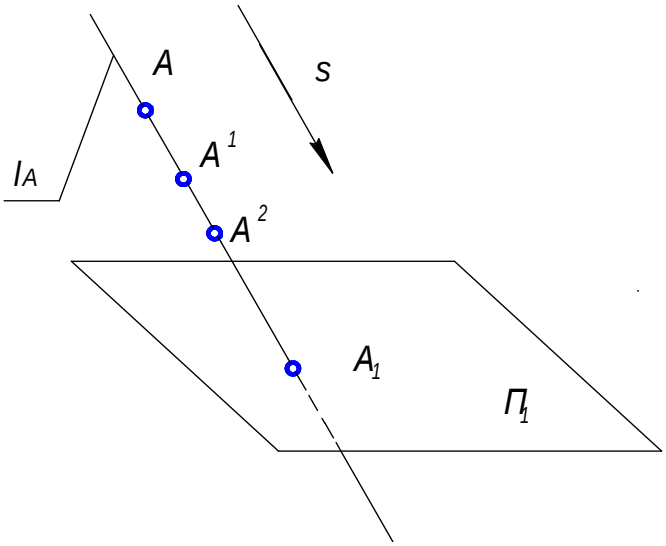


Рис. 1.7 – Параллельное проецирование

1.5. Свойства параллельных проекций

Геометрическая фигура в общем случае проецируется на плоскость проекций с искажением, но некоторые свойства оригинала сохраняются в проекциях при любом преобразовании и называются его инвариантами (остаются неизменными).

Первое свойство. Проекция точки на плоскость проекций есть точка.

Важно не само свойство, а следствие из него, а именно каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций. Доказательством может служить то, что через точку А можно провести только одну прямую, параллельную заданному направлению проецирования, и эта прямая пересечется с плоскостью проекций только в одной точке:

$$l_A \supset A,\ l_A \parallel s,\ l_A \cap \Pi_1 = A_1 .$$

Второе свойство. Проекция прямой линии в общем случае есть прямая:

$$\Gamma \cap a,\ \Gamma \cap \Pi_1 \Rightarrow a_1 .$$

Если прямая параллельна направлению проецирования то она вырождается в точку.

$$l_C \supset C,\ l_C \parallel s,\ l_C \cap \Pi_1 = C_1;\ C_1 \text{ – точка.}$$

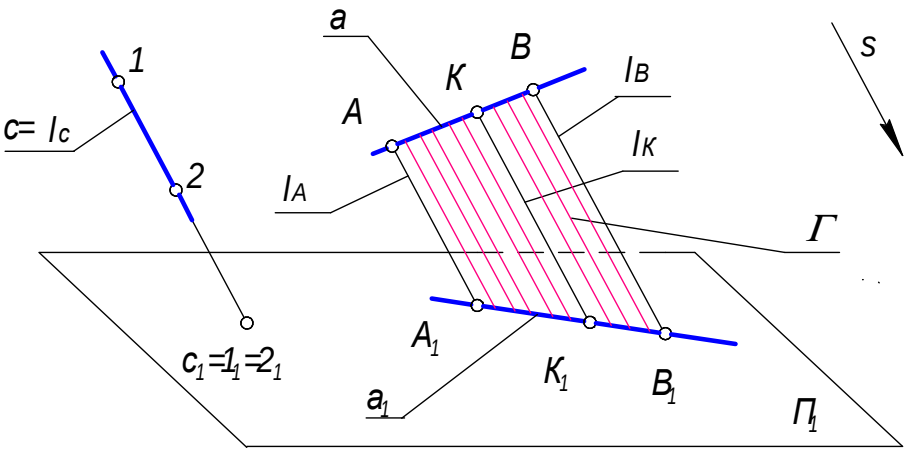


Рис. 1.8 – Свойства параллельного проецирования

Третье свойство – принадлежности. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой:

$$K \in a \Rightarrow K_1 \in a_1 .$$

Это свойство следует из определения проекции фигуры как совокупности проекций всех её точек (см. рис. 1.8).

Четвертое свойство — свойство простого соотношения трёх точек. Если точка делит отрезок в некотором отношении, то и проекция этой точки делит отрезок в том же отношении (см. рис. 1.8):

$$|AK| : |KB| = |A_1K_1| : |K_1B_1|.$$

Пятое свойство. Если прямые в пространстве параллельны, то их проекции также параллельны:

$$m \parallel n \Rightarrow m_1 \parallel n_1, \text{ т. к. } \Gamma \parallel \Sigma, \text{ (рис .1.9).}$$

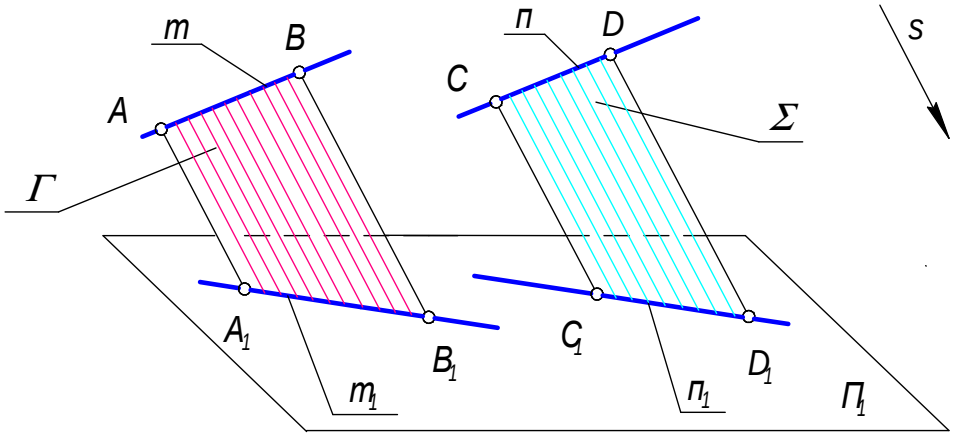


Рис. 1.9 – Свойства параллельного проецирования

Шестое свойство. Отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций:

$$AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1, \text{ (рис. 1.9).}$$

Седьмое свойство. Проекция геометрической фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскостей проекций: $A_1B_1C_1 = A^1B^1C^1$.

Если $\Pi_1 \parallel \Pi_1^1$, то $A_1A_1^1 = B_1B_1^1 = C_1C_1^1$ – как параллельные отрезки, заключенные между параллельными плоскостями. Следовательно четырёхугольники $A_1A_1^1B_1B_1^1$, $B_1B_1^1C_1C_1^1$ и $C_1C_1^1A_1A_1^1$ являются параллелограммами, а у параллелограммов параллельные стороны равны. Поэтому $\Delta A_1B_1C_1 = A_1^1B_1^1C_1^1$.

Рассмотренные свойства параллельного проецирования сохраняются при любом направлении проецирования.

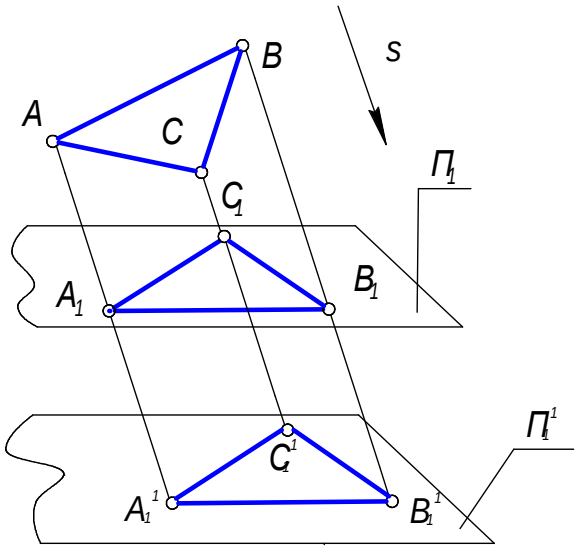


Рис. 1.10 – Свойства параллельного проецирования

1.6. Ортогональное проецирование. Свойства ортогонального проецирования

Ортогональное (прямоугольное) проецирование является частным случаем параллельного проецирования, когда направление проецирования перпендикулярно к плоскости проекций **($S \perp \Pi_1$)**. В этом случае проекции геометрических фигур называются ортогональными.

Ортогональному проецированию присущи все свойства параллельного проецирования, а также свойства, присущие только ортогональному проецированию.

Первое свойство. В общем случае ортогональная проекция отрезка всегда меньше его натуральной длины.

Если провести $A^*B \parallel A_1B_1$, то $\angle AA^*B = 90°$. Из прямоугольного треугольника следует, что AB – гипотенуза, A^*B – катет, а гипотенуза всегда больше катета ($A^*B = AB \times \cos\alpha$).

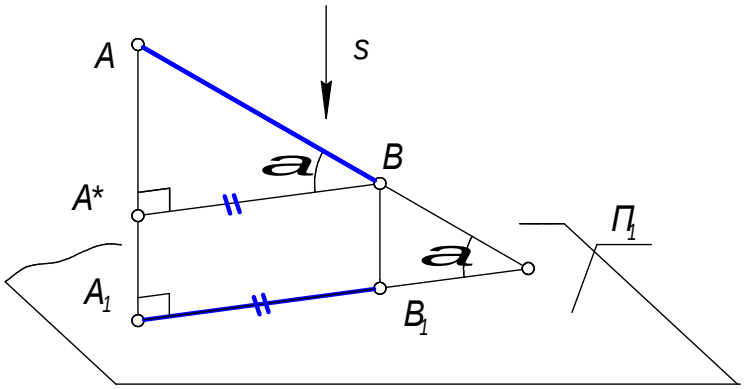


Рис. 1.11 – Свойства ортогонального проецирования

Рассмотрим частные случаи.

Если $\alpha = 0 \Rightarrow |A_1B_1| = |AB|$, то есть проекция равна самому отрезку.

Если $\alpha = 90° \Rightarrow A_1 = B_1$, то есть проекция отрезка – точка.

Второе свойство: теорема о проецировании прямого угла.

Если одна сторона прямого угла параллельна какой-нибудь плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна ей, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения.

Дано: $\angle ABC = 90°$, $BC \parallel П_1$.

Доказательство: Плоскость $\Phi = AB \cap BB_1$, плоскость $\Sigma = BC \cap BB_1$, $BC \perp \Phi$, так как $BC \perp AB$ и $BC \perp BB_1$, но $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow B_1C_1 \perp \Phi \Rightarrow B_1C_1 \perp A_1B_1$, значит $\angle A_1B_1C_1$ – прямой.

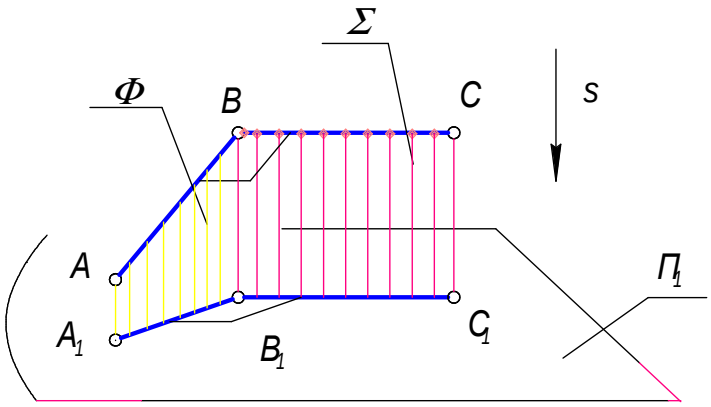


Рис. 1.12 – Проецирование прямого угла

Третье свойство. Ортогональная проекция окружности в общем случае есть эллипс.

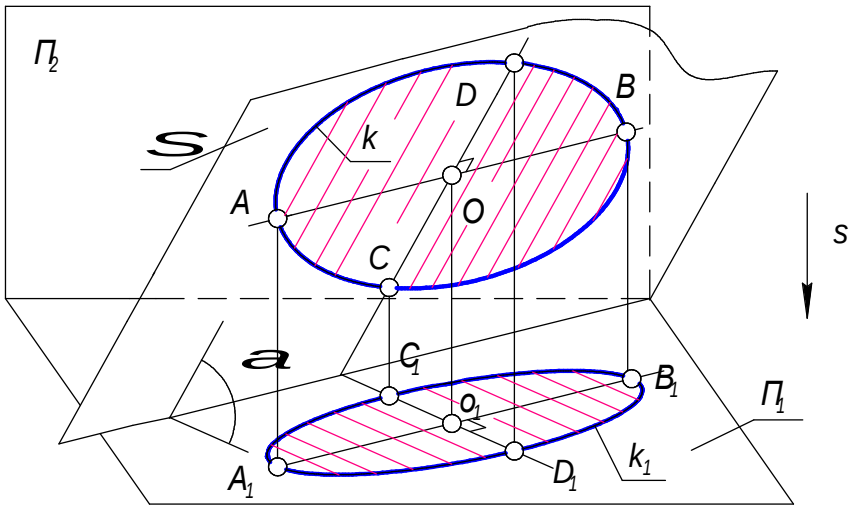


Рис. 1.13 – Ортогональное проецирование окружности

Заключим окружность в плоскость **Σ**, **Σ ^ П₁ = α**. Если **0 < α < 90°**, то окружность (**k**) – эллипс ($\mathbf{k_1}$);

AB ⊥ CD – сопряженные диаметры, пусть ***AB // П₁*** .

$\boldsymbol{A_1B_1 = AB}$ – большая ось эллипса;

$\boldsymbol{C_1D_1 = CD \times \cos\alpha}$ – малая ось эллипса.

Все хорды окружности, параллельные ***CD***, проецируются с коэффициентом сжатия $\boldsymbol{\cos\alpha}$ и делятся осью $\boldsymbol{A_1B_1}$ пополам, то есть ортогональная проекция окружности, в общем случае, есть замкнутая центрально симметричная кривая второго порядка, имеющая две взаимно перпендикулярные оси.

Частные случаи:

1. Если ***Σ // П₁***, то окружность (***k***) – проецируется без искажения.
2. Если **Σ ⊥ П₁**, то есть **∠α = 90°**, то окружность (***k***) – прямая линия, равная диаметру.

1.7. Метод Монжа

В машиностроительных чертежах используется метод прямоугольных проекций. Поэтому дальнейшее изучение курса будем вести, используя метод ортогонального проецирования.

Чтобы однозначно решить две основные задачи курса начертательной геометрии, чертежи должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Простота и наглядность.

2. Обратимость чертежа.

Рассмотренные методы проецирования с использованием однокартинных чертежей позволяют решать прямую задачу (по данному оригиналу построить его проекцию). Однако, обратную задачу (по проекции воспроизвести оригинал) решить однозначно невозможно. Эта задача допускает бесчисленное множество решений, т.к. каждую точку $\boldsymbol{A_1}$ плоскости проекций $\boldsymbol{П_1}$ можно считать проекцией любой точки проецирующего луча l_A, проходящего через $\boldsymbol{A_1}$. Таким образом, рассмотренные однокартинные чертежи не обладают свойством ***обратимости***.

Для получения обратимых однокартинных чертежей их дополняют необходимыми данными. Существуют различные способы такого дополнения. Например, ***чертежи с числовыми отметками***.

Способ заключается в том, что наряду с проекцией точки $\boldsymbol{A_1}$ задаётся высота точки, то есть её расстояние от плоскости проекций. Задают также масштаб. Такой способ использует-

ся в строительстве, архитектуре, геодезии и т. д. Однако он не является универсальным для создания чертежей сложных пространственных форм.

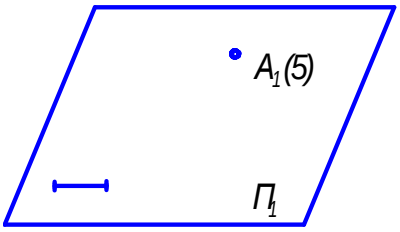


Рис. 1.14 – Чертеж точки А с числовой отметкой

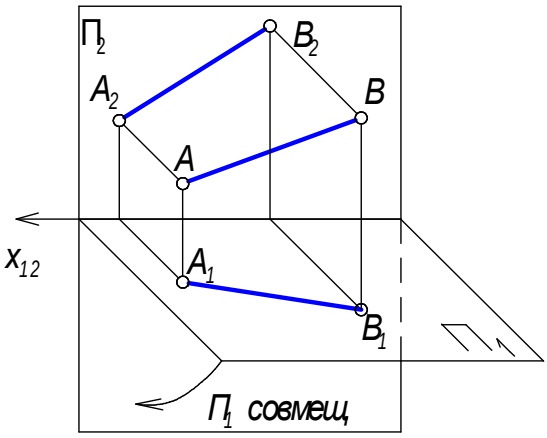


Рис. 1.15 – Пространственная модель проецирования отрезка АВ

В 1798 году французский геометр-инженер Гаспар Монж обобщил накопленные к этому времени теоретические знания и опыт и впервые дал научное обоснование общего метода построения изображений, предложив рассматривать плоский чертёж, состоящий из двух проекций, как результат совмещения двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Отсюда ведёт начало принцип построения чертежей, которым мы пользуемся и поныне.

Поставим перед собой задачу построить проекции отрезка ***[AB]*** на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ и $\boldsymbol{\Pi_2}$.

1. Пространственная модель

$\mathbf{\Pi_1 \perp \Pi_2}$. $\mathbf{AA_1 \perp \Pi_1}$; $\mathbf{|AA_1|}$ – расстояние от **А** до $\mathbf{\Pi_1}$.

$\boldsymbol{AA_2 \perp \Pi_2}$; $\boldsymbol{|AA_2|}$**–** расстояние от ***А*** до $\boldsymbol{\Pi_2}$. $\boldsymbol{\Pi_1}$ – горизонтальная плоскость проекций;

$\boldsymbol{\Pi_2}$ – фронтальная плоскость проекций.

$\boldsymbol{A_1B_1}$ – горизонтальная проекция отрезка;

$\boldsymbol{A_2B_2}$ – фронтальная проекция отрезка.

$\boldsymbol{x_{12}}$ – линия пересечения плоскостей проекций.

Однако в таком виде чертёж неудобно читать. Поэтому Гаспар Монж предложил совместить эти плоскости проекций, причём $\mathbf{\Pi_2}$ принимается за плоскость чертежа, а $\mathbf{\Pi_1}$ – поворачивается до совмещения с $\boldsymbol{\Pi_2}$. Такой чертёж называется комплексным чертежом.

2. Плоская модель

Рассмотрим совмещение плоскостей проекций со всем их содержимым на плоском чертеже. Совокупность проекций множества точек пространства на $\boldsymbol{\Pi_1}$ называется горизонтальным полем проекций, а на $\boldsymbol{\Pi_2}$ – фронтальным полем проекций.

$\boldsymbol{x_{12}}$ – ось проекций, база отсчёта.

$\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{B_1B_2}$ $\Rightarrow$ линия связи – это прямая, соединяющая две проекции точки на комплексном чертеже. Линия связи перпендикулярна оси проекций.

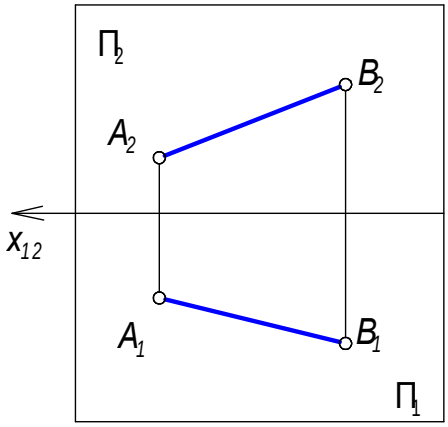


Рис. 1.16 – Плоская модель проекций отрезка АВ

Свойства двухкартинного комплексного чертежа Монжа:

1. Две проекции точки всегда лежат на одной линии связи установленного направления.

2. Все линии связи одного установленного направления параллельны между собой.

3. Безосный чертёж

Если совмещённые плоскости Π_1 и Π_2 перемещать параллельно самим себе на произвольные расстояния (см. положение осей x_{12}, x_{12}^{1}, x_{12}^{11} на рис. 1.17), то будут меняться расстояния от фигуры до плоскостей проекций.

Однако, сами проекции фигуры (в данном случае – отрезка ***AB***) при параллельном перемещении плоскостей проекций не меняются (согласно седьмому свойству параллельного проецирования).

Из рис. 1.17 видно, что при любом положении оси ***x***, величины ΔZ – разность расстояний от концов отрезка до Π_1, и Δy – разность расстояний от концов отрезка до Π_2, остаются неизменными. Поэтому нет необходимости указывать положение оси x_{12} на комплексном чертеже и тем самым предопределять положение плоскостей проекций Π_1 и Π_2 в пространстве.

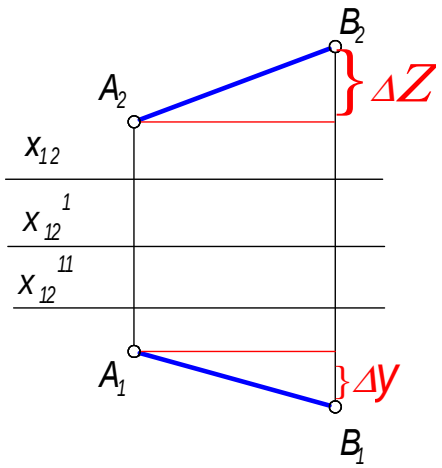


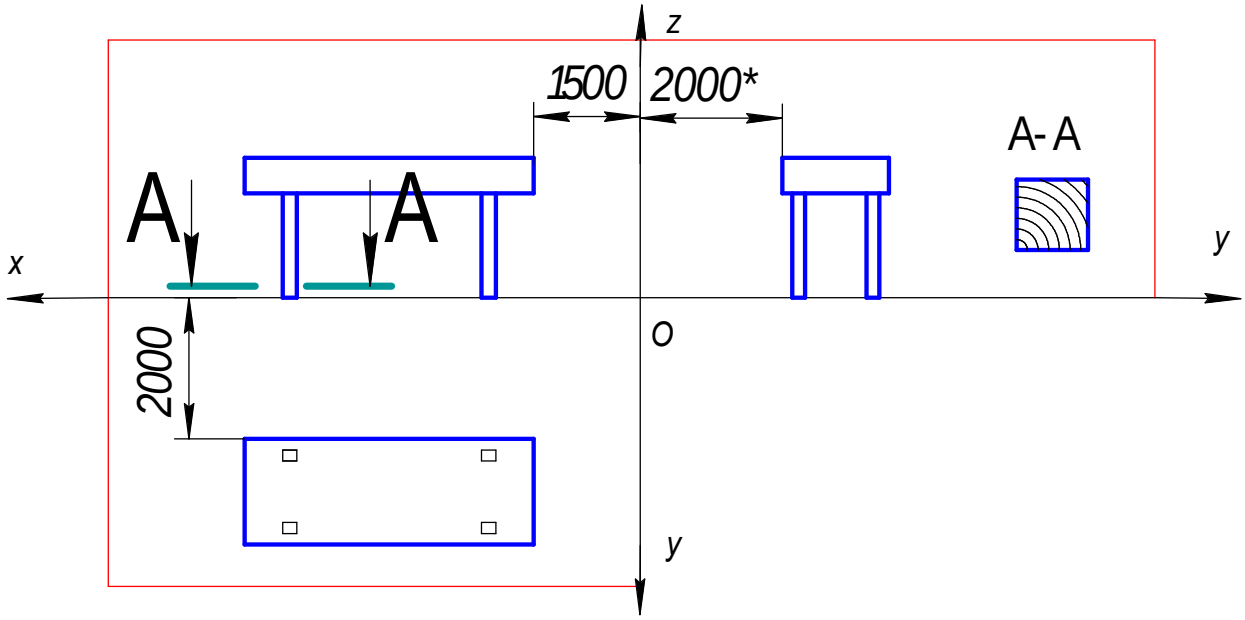
Рис. 1.17 – Пример безосного чертежа отрезка АВ

Это обстоятельство имеет место в чертежах, применяющихся в технике, и такой чертёж называется ***безосным***.

Проиллюстрируем вышесказанное на конкретном примере.

Задача. Составить чертёж для изготовления стола (рис. 1.18).

1. Построить три проекции стола, учитывая свойства эпюра Монжа.
2. Определить, чего не хватает для выполнения по чертежу данного изделия?
3. Да, конечно, размеров.



Ри

с. 1.18 а – Пример выполнения чертежа

4. Теперь, когда есть три изображения изделия и его размеры, имеют ли значение для изготовления изделия расстояния от изделия до плоскостей проекций, т. е. привязка к осям ***x***, ***y*** и ***z*** (размеры 1500, 2000, 2000 на чертеже).

5. Нет не имеют.

6. По данному чертежу изделие создается, а на каком расстоянии его установить от стен **($П_2$,$П_3$)** – это уже другая задача.

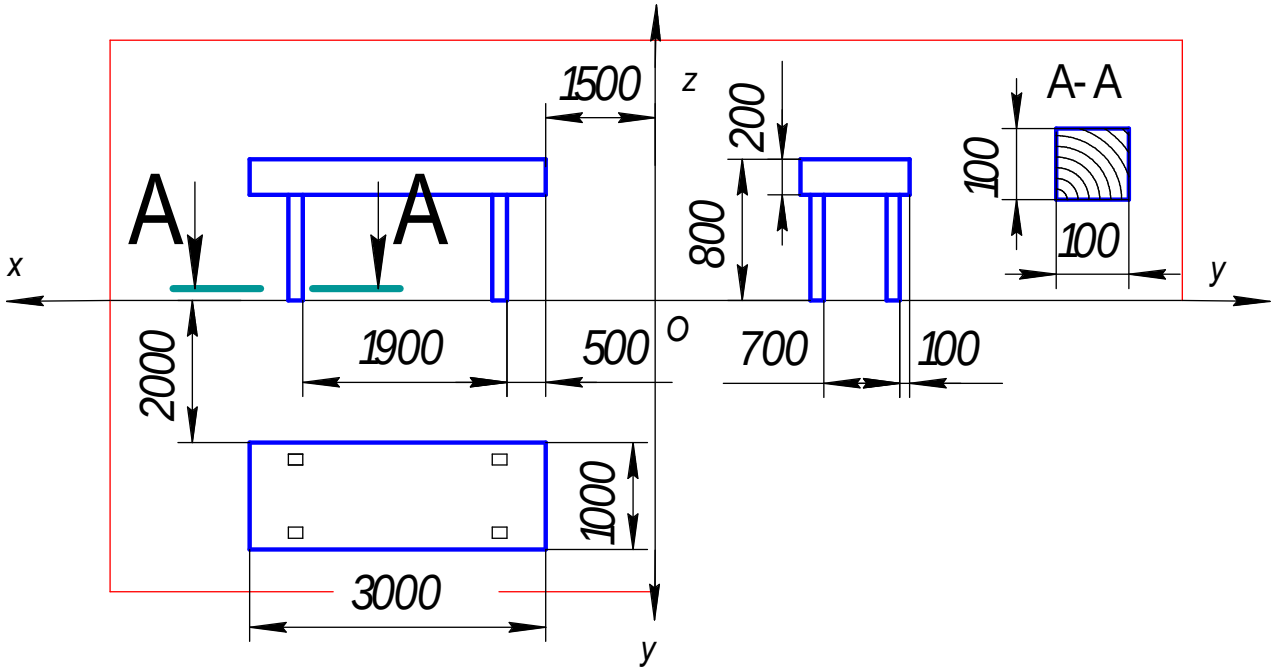


Рис. 1.18 б – Пример выполнения чертежа

Безосный чертёж позволяет, не привязываясь к осям, располагать изображения в удобном для исполнителя положении, но с соблюдением проекционной связи, то есть построение чертежа происходит по законам, установленным Гаспаром Монжем.

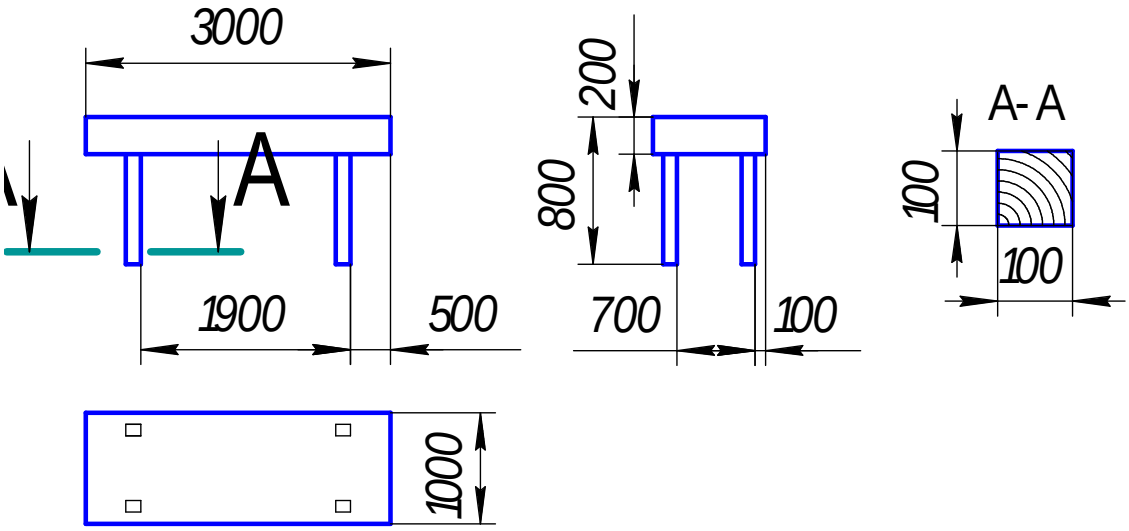


Рис. 1.18 в – Пример выполнения безосного чертежа

1.8. Доказательство обратимости чертежа Монжа

Если по плоскому изображению можно определить натуральную длину отрезка и его ориентацию в пространстве, значит реконструирование пространства возможно, то есть однозначно решается вторая (обратная) задача курса начертательной геометрии.

1. Пространственный чертёж

1. AB – отрезок прямой в пространстве. A_1B_1 – горизонтальная проекция отрезка.

Через точку A проведём $AB^1 \parallel A_1B_1$. Тогда получим: 1. ΔABB^1 – прямоугольный,

2. AB – гипотенуза треугольника – натуральная величина отрезка,

3. $AB^1 = A_1B_1$ – один из катетов равен проекции отрезка AB на плоскость проекций $П_1$.

4. Второй катет BB^1 есть разностью удалений концов отрезка от плоскости проекций $П_1$.

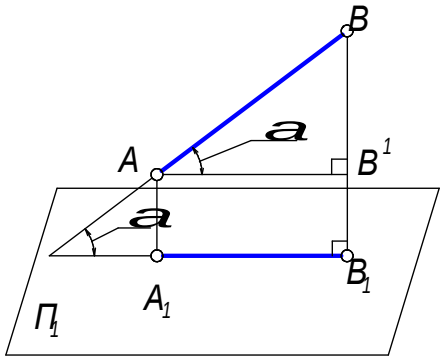


Рис. 1.19 – Пространственная модель метода прямоугольного треугольника

Проведя аналогичные рассуждения для плоскости проекций $П_2$, можно сделать вывод, что натуральная величина отрезка есть гипотенуза прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является проекция отрезка. Другой катет есть разностью удалений концов отрезка от той плоскости, проекцию на которую приняли за первый катет.

Такой метод нахождения натуральной величины отрезка общего положения называют ***методом прямоугольного треугольника***.

2. Плоский чертёж

Дано: две проекции отрезка AB – A_2B_2 *и* A_1B_1 (рис. 1.20). Требуется определить натуральную величину этого отрезка.

1. Исходя из вышесказанного, A_1B_1 является одним из катетов прямоугольного треугольника.

2. Чтобы найти второй катет, проведём $A_2B^1 \perp$ линиям связи (рис. 1.21). B_2B – это разность удалений концов отрезка от $П_1$.

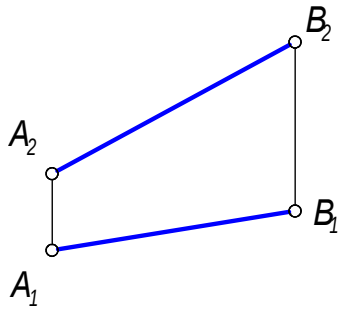


Рис. 1.20 – Двухкартинный комплексный чертеж отрезка АВ

3. Откладываем расстояние $/B_2B^1/$ на перпендикуляре к A_1B_1 с любой стороны.

4. Отрезок A_1B_0 – это натуральная величина $/AB/$, а угол α – есть угол наклона AB к $П_1$.

5. Аналогично можно найти угол наклона данного отрезка к $П_2$, построив прямоугольный треугольник на $П_2$.

Вывод: двухкартинный чертёж Монжа обратим.

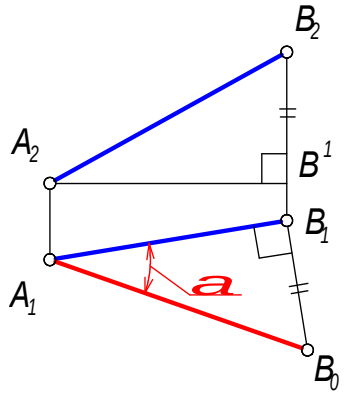


Рис. 1.21 – Определение натуральной величины отрезка АВ способом прямоугольного треугольника

1.9. Трёхкартинный комплексный чертёж точки

Двухкартинный чертёж является метрически определённым чертежом, то есть он вполне определяет форму и размеры фигуры и её ориентацию в пространстве. Однако часто комплексный чертёж становится более ясным, если помимо двух основных проекций дана ещё одна проекция на третью плоскость. В качестве такой плоскости применяют профильную плоскость проекций $П_3$.

1. Пространственный чертёж

$П_3 \perp x$, поэтому $П_3 \perp П_1$ и $П_3 \perp П_2$.

Три плоскости проекций образуют в пространстве прямоугольный трёхгранник, то есть систему трёх взаимно перпендикулярных плоскостей. Рёбра этого трёхгранника будем обозначать ***x, y, z***.

$П_3$ – профильная плоскость проекций.

A_3 – профильная проекция точки A.

$|AA_3| = |3A_2| = |2A_1|$ – удаление точки A от $П_3$.

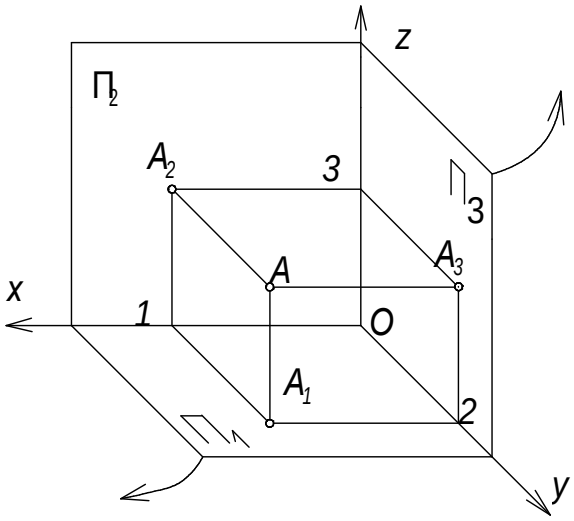


Рис. 1.22 – Пространственный чертеж точки А

2. Плоский чертёж

A_1A_2 – линия связи в системе $П_1 – П_2$

$|3A_3| = |1A_1|$;

A_2A_3 – линия связи в системе $П_2 – П_3$;

$1A_2$ – высота расположения точки;

$1A_1$ – глубина расположения точки;

$3A_2$ – ширина расположения точки;

x – абсцисса;

y – ордината;

z – аппликата.

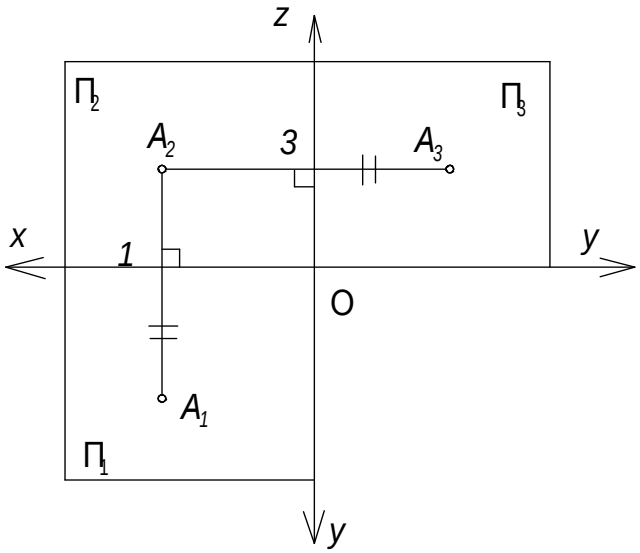


Рис. 1.23 – Трёхкартинный комплексный чертёж точки А

1.10. Связь ортогональных проекций точки с её прямоугольными координатами

Если в точку ***O*** поместить начало декартовой прямоугольной системы координат, то линии пересечения плоскостей проекций совпадут с соответствующими осями координат, и задание точки **двумя ортогональными проекциями** будет равносильно заданию её **тремя прямоугольными координатами**.

Так, по заданным: A_1 – определяем (***x, y***); A_2 – определяем (***x, z***).

И наоборот. Например: Даны координаты точки ***A*(18, 24, 18),** построить ортогональные проекции точки $A(A_1, A_2)$. По заданным координатам задаём две проекции точки ***A*** (рис. 1.24). При необходимости можно построить A_3.

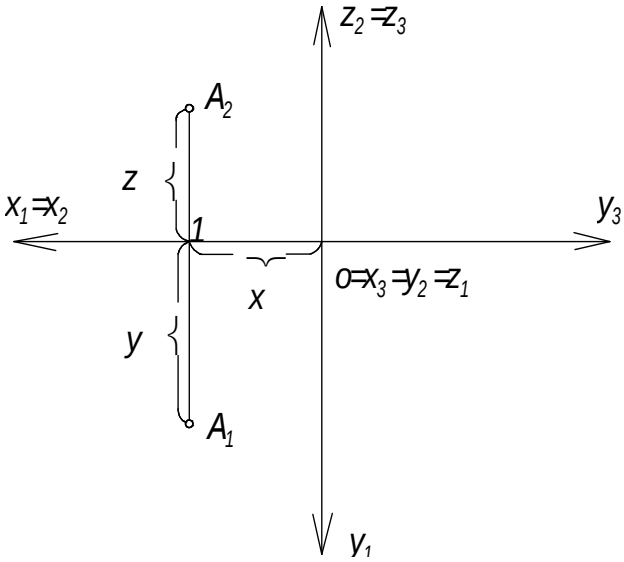


Рис. 1.24 – Построение ортогональных проекций точки А по ее координатам

Рассмотрим подробно трёхкартинный чертёж точки. Зададим на чертеже (рис. 1.25) точки с координатами: ***A*(15, 20, 10); *B*(15, 20, 30); *C*(25, 10, 15); *D*(25, 30, 15); *E*(35, 20, 10); *F*(45, 35, 0); *M*(55, 0, 40); *N*(65, 0, 0).**

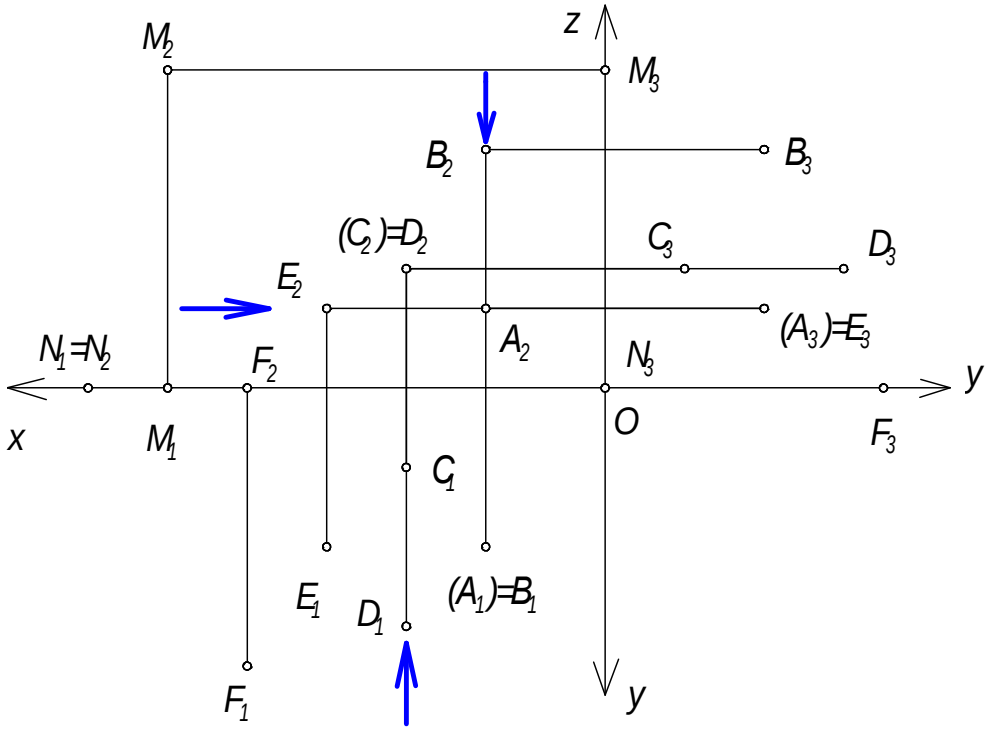


Рис. 1.25 – Пример построения трёхкартинного комплексного чертежа точек по их координатам

Точки ***A*** и ***B***, у которых совпадают горизонтальные проекции, называются ***горизонтально конкурирующими*** (рис.1.26). Из двух точек на $\boldsymbol{П_1}$ видна та, что выше. Расположение точек «выше – ниже» определяют по фронтальной проекции.

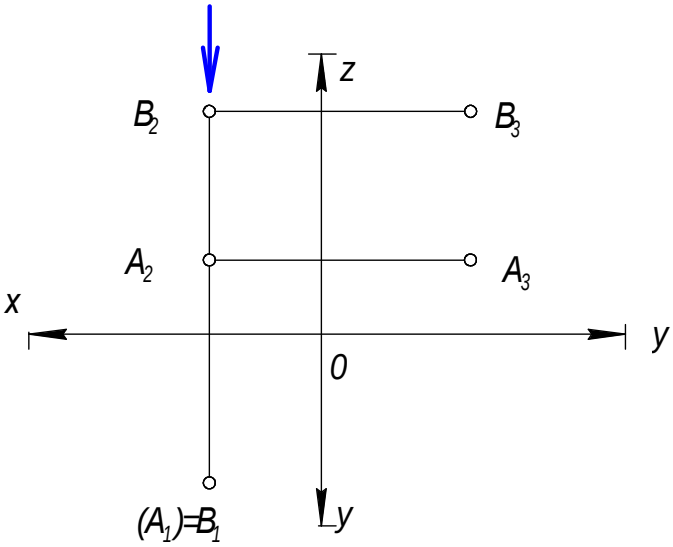


Рис. 1.26 – Горизонтально конкурирующие точки А и В

Точки **C** и **D**, у которых совпадают фронтальные проекции, называются ***фронтально конкурирующими*** (рис. 1.27). Из двух точек на $\boldsymbol{П_2}$ видна та, что ближе к наблюдателю. Расположение точек «ближе – дальше» определяют по горизонтальной проекции.

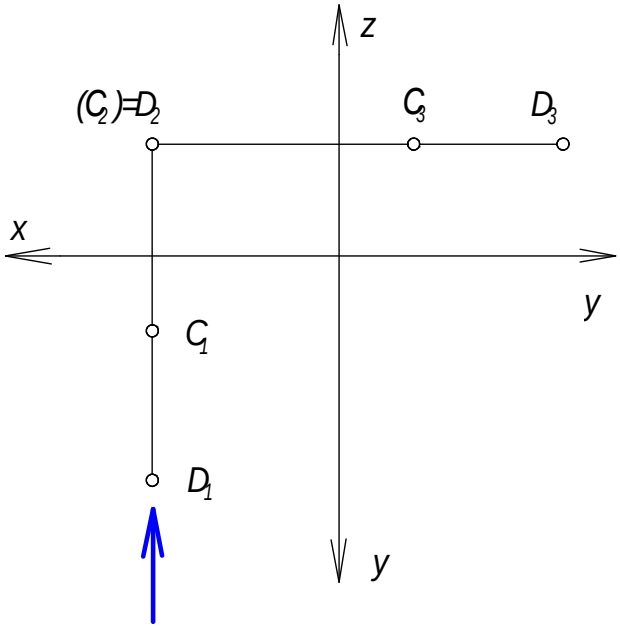


Рис. 1.27 – Фронтально конкурирующие точки С и D

Точки ***A*** и ***E*** (рис. 1.28), у которых совпадают профильные проекции, называются ***профильно конкурирующими***. Из двух точек на $\boldsymbol{П_3}$ видна та, что левее. Расположение точек «левее – правее» определяют по фронтальной проекции.

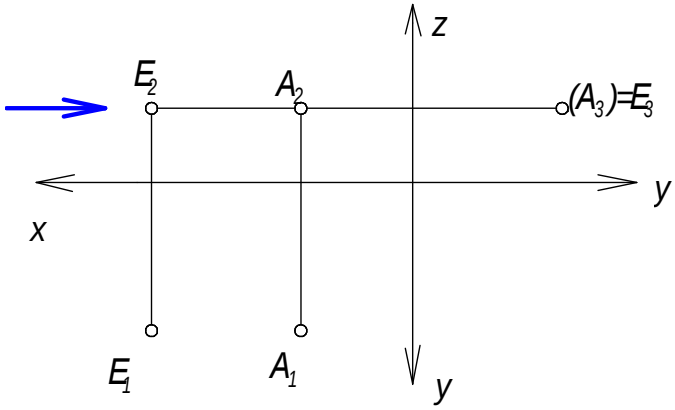


Рис. 1.28 – Профильно конкурирующие точки А и Е

Точки ***F*** и ***M*** (рис.1.29), у которых по две проекции расположены на координатных осях, принадлежат одной из плоскостей проекций **($F \in П_1$; $M \in П_2$).**

Точки, у которых две проекции расположены на координатных осях, а третья проекция совпадает с началом координат, принадлежат одной из осей координат **($N \in x$).**

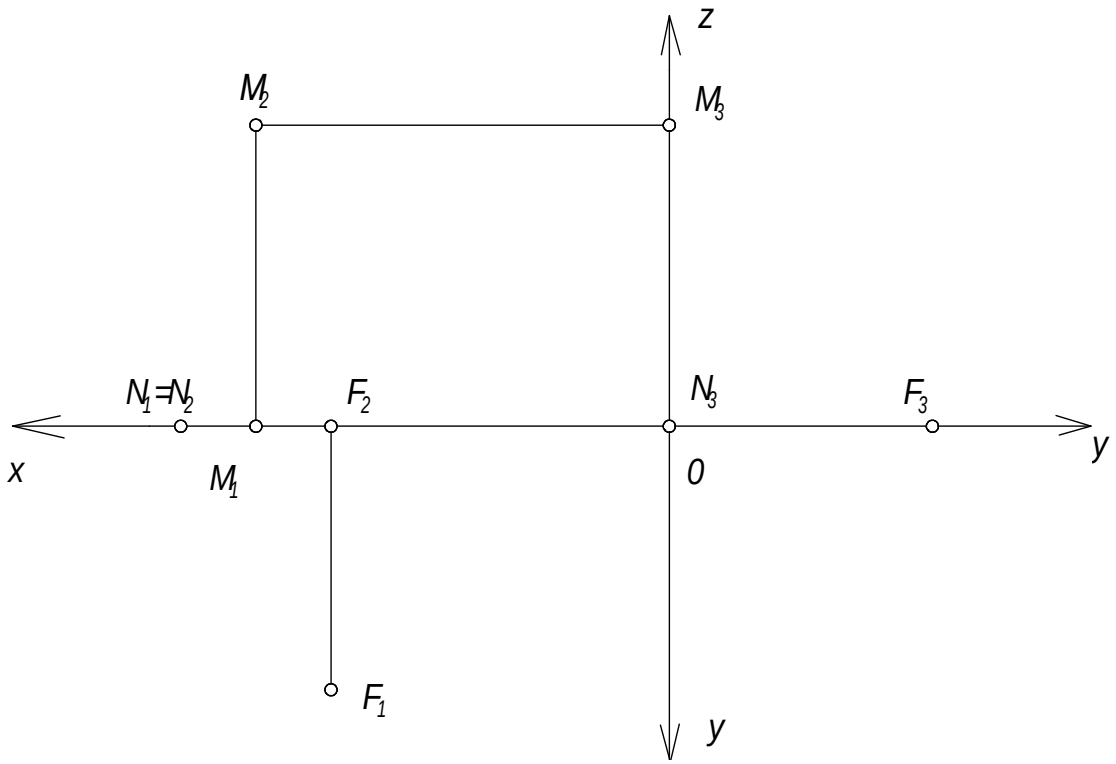


Рис. 1.29 – Принадлежность точек плоскости и оси проекций

Выводы:

1. Комплексным чертежом принято называть совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций оригинала, расположенных на одной плоскости чертежа.

2. Двухкартинный комплексный чертёж Монжа является метрически определённым чертежом, следовательно, он обратим.

3. Имея две проекции оригинала, можно построить сколько угодно адекватных проекций данного оригинала, что широко используется в технических чертежах.

1.11. Контрольные вопросы

1. Какой вид проецирования используется при построении машиностроительных чертежей?
2. Что означает понятие «обратимость чертежа»?
3. Что называется линиями связи, и как они располагаются относительно осей проекций?
4. Как найти натуральную величину отрезка общего положения?
5. Какими координатами определяется расстояние от точки до плоскостей проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$?
6. Какие точки называются конкурирующими?

Тест № 1

1	2	3	4	5	6
$A_2(C_2)$ C_1 A_1	A_2 C_2 B_2 B_1 A_1 C_1	$A(20, 20, 0)$	A_2 C_2 $(C_1)A_1$	C_2 B_2 A_2 C_1 A_1 B_1	$A(20, 0, 0)$

1. На каком чертеже точка ***B*** расположена дальше от наблюдателя, чем точки ***A*** и ***C*** ?
2. В каком случае точка ***A*** принадлежит оси ***OX*** ?
3. На каком чертеже точка ***C*** расположена выше точек ***A*** и ***B*** и дальше от наблюдателя ?
4. Укажите чертёж фронтально конкурирующих точек.
5. На каком чертеже точки ***A*** и ***B*** одинаково удалены от плоскости проекций Π_2?
6. В каком случае точка ***A*** принадлежит Π_1 ?
7. Укажите чертёж горизонтально конкурирующих точек.
8. На каком чертеже точки ***A*** и ***B*** одинаково удалены от плоскости проекций Π_1 ?

2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ЛИНИИ

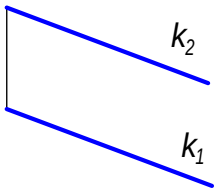
Кто совсем свободно знает (умеет проецировать)
прямую и плоскость, тот не встретит
затруднений в начертательной геометрии.

Г. Монж

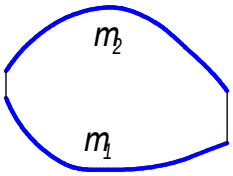
В этом разделе Вы узнаете, что линии подразделяются на прямые и кривые. Проекции прямой линии могут занимать общее или частное положение относительно плоскостей проекций. Различают кривые линии плоские и пространственные, закономерные и незакономерные.

Как Вы думаете?

1. Как расположена прямая $\boldsymbol{k}$ в пространстве, если $\boldsymbol{k_1 \parallel k_2}$?



2. Какая задана кривая на чертеже – плоская или пространственная?



3. Как расположена прямая относительно плоскостей проекций, если сумма равных углов, которые она образует с $\boldsymbol{\Pi_1}$ и $\boldsymbol{\Pi_2}$ равны **90°**

4. Сколько проекций должен иметь чертеж отрезка, чтобы его можно было назвать обратимым?

2.1. Задание прямой на комплексном чертеже

Прямая в пространстве может занимать **общее** и **частное** положение (рис. 2.1).

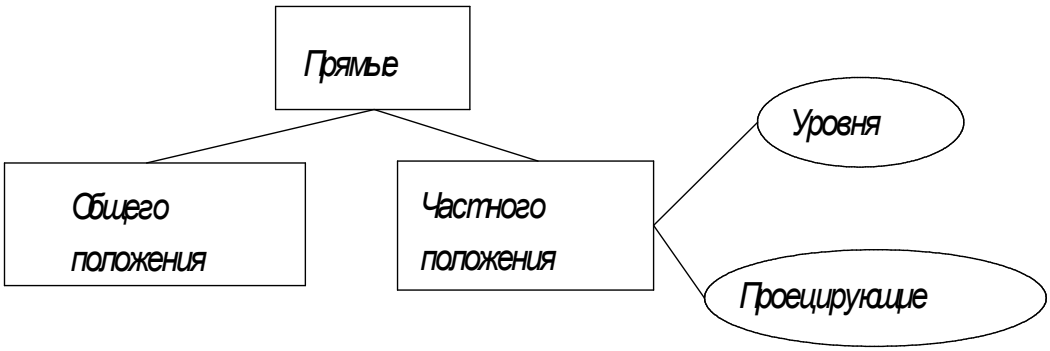


Рис. 2.1 – Классификация прямых

2.2. Прямые общего положения

Прямая (отрезок), не параллельная и не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций, называется ***прямой общего положения***.

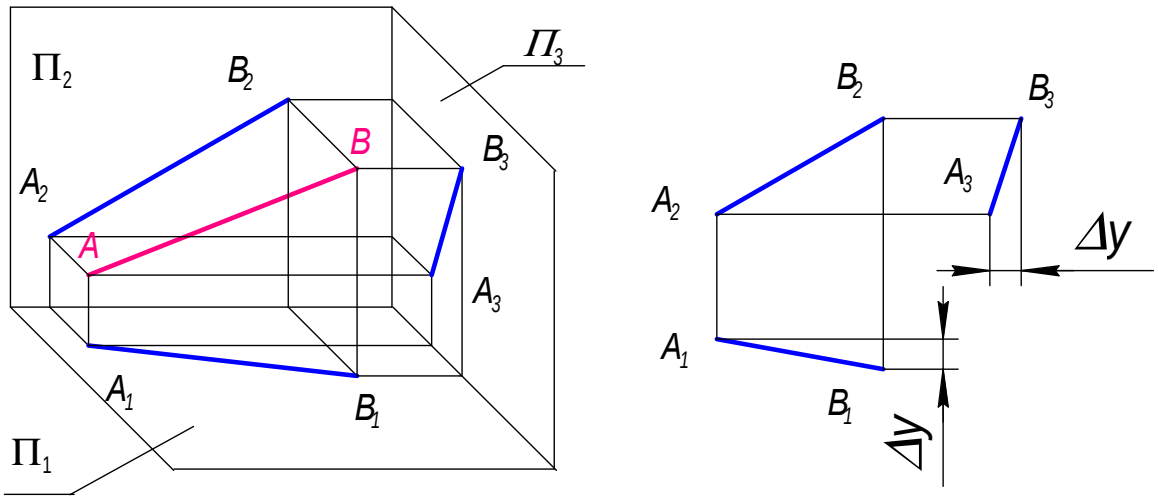


Рис. 2.2 – Пространственная модель и комплексный чертёж отрезка АВ прямой общего положения

Необходимо отметить особенности их задания на комплексном чертеже:

1. Любая проекция прямой общего положения искажает натуральную длину.

2. Любая проекция прямой общего положения наклонена к линиям связи под углом **≠ 90°,** ни один из них не показывает натуральную величину углов наклона к плоскостям проекций.

3. Натуральная величина прямой общего положения находится методом прямоугольного треугольника

Примеры комплексных чертежей прямых общего положения представлены на рис. 2.3, 2.4, 2.5.

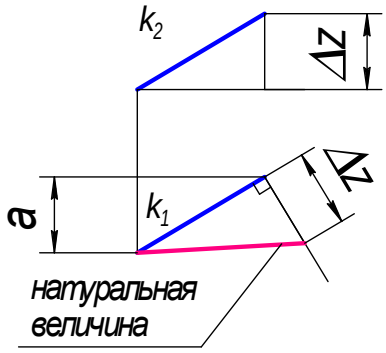


Рис. 2.3 – Пример комплексного чертежа прямой k

Прямая имеет одинаковые углы наклона к ***П₁*** и ***П₂***

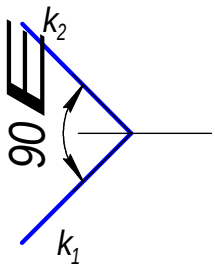


Рис. 2.4 – Пример комплексного чертежа прямой k

Точка пересечения проекций отрезка находится на оси ***X.***

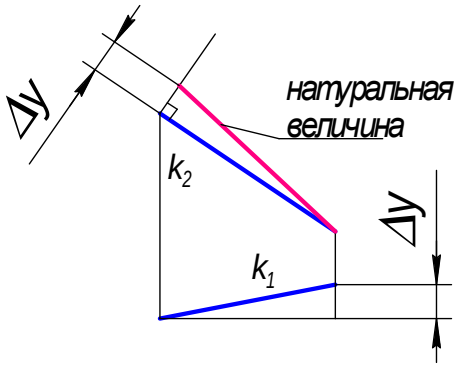


Рис. 2.5 – Определение натуральной величины отрезка на безосном чертеже

На безосных чертежах нет очертаний плоскостей проекций, но есть линии связи, поэтому положение геометрических фигур в пространстве будем определять положением их проекций относительно линий связи.

Графический признак прямой общего положения: ни одна из ее проекций не параллельна и не перпендикулярна линиям связи.

2.3. Прямые уровня

Прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются прямыми уровня.

Существует три линии уровня: ***h, f, p***

2.3.1. Горизонталь

h $(h_1, h_2, h_3) \parallel \Pi_1$

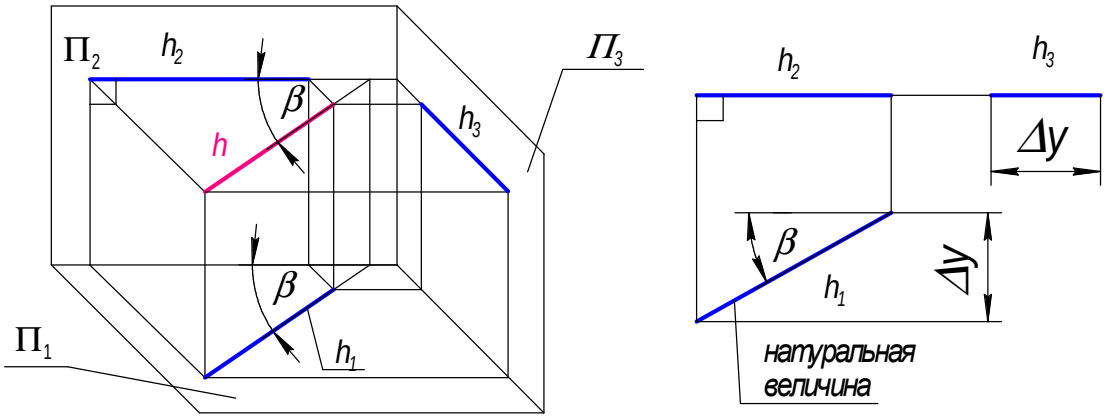


Рис. 2.6 – Пространственный и комплексный чертеж горизонтали

Если взять карандаш в руки и расположить его параллельно столу, то длина карандаша спроецируется на плоскость стола без искажения. У горизонтали $/h/ = /h_1/$ угол наклона к $\Pi_2 - \beta$ проецируется без искажения.

Графический признак горизонтали — её фронтальная проекция перпендикулярна линиям связи (с неё всегда начинается построение чертежа горизонтали ***h***).

2.3.2. Фронталь

f (f₁, f₂, f₃) // П₂

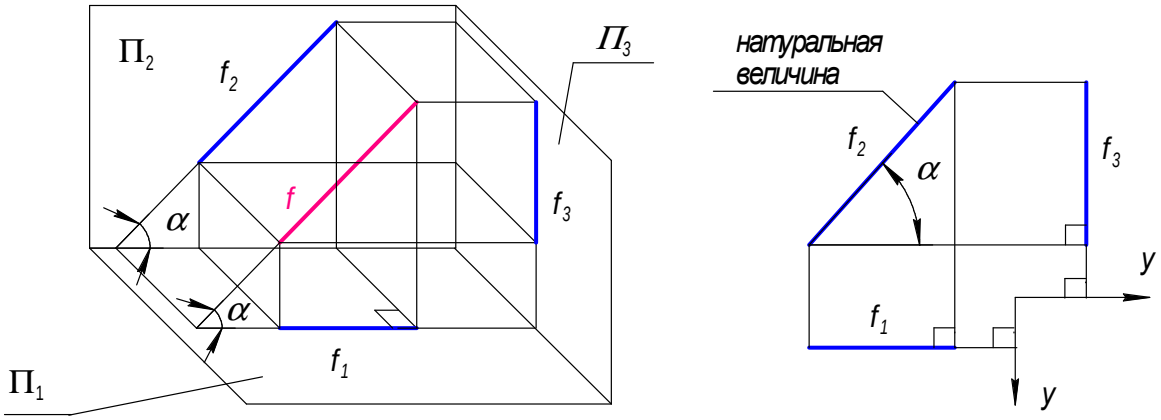


Рис. 2.7 – Пространственный и комплексный чертёж фронтали

Если взять карандаш в руки и расположить его параллельно стене, находящейся перед наблюдателем, то длина карандаша спроецируется на плоскость стены без искажения. У фронтали ***/f /= /f₂ /*** угол наклона к ***П₁*** – α спроецируется без искажения.

Графический признак фронтали – её горизонтальная проекция перпендикулярна линиям связи (с неё всегда начинается графическое построение фронтали ***f*).**

2.3.3. Профильная прямая

p (p₁, p₂, p₃) // П₃

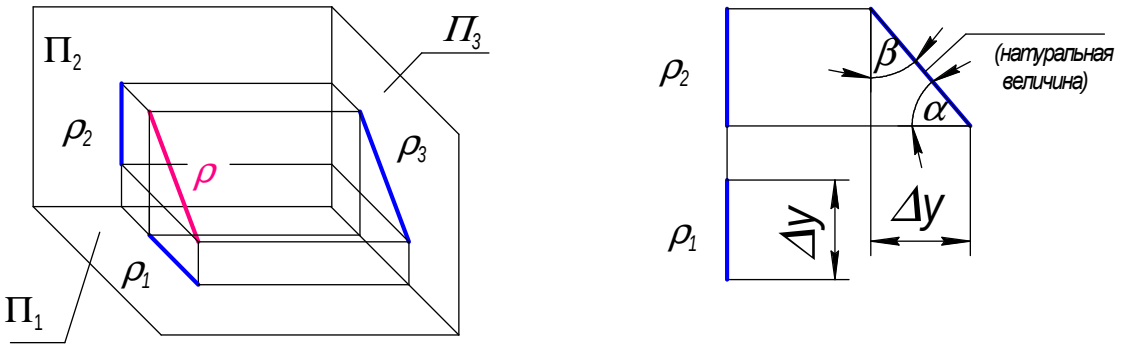


Рис. 2.8 – Пространственный и комплексный чертеж профильной прямой

/p /= /p₃ /– натуральная (истинная) величина

Углы наклона профильной прямой к ***П₁*** и ***П₂*** проецируются на ***П₃*** без искажения.

Графический признак профильной прямой – её горизонтальная и фронтальная проекции совпадают с линиями связи в системе $П_1 – П_2$.

Рассмотренные примеры позволяют отметить такие особенности задания прямых уровня на комплексном чертеже:

1. Одна из проекций прямых уровня перпендикулярна линиям связи установленного направления.

2. Одна из проекций прямой уровня параллельна самой прямой и даёт истинную величину, а также показывает без вспомогательных построений угол наклона к одной из плоскостей проекций (*h*, *f*) или к двум плоскостям проекций (*p*).

2.4. Проецирующие прямые

Прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций, называются проецирующими прямыми.

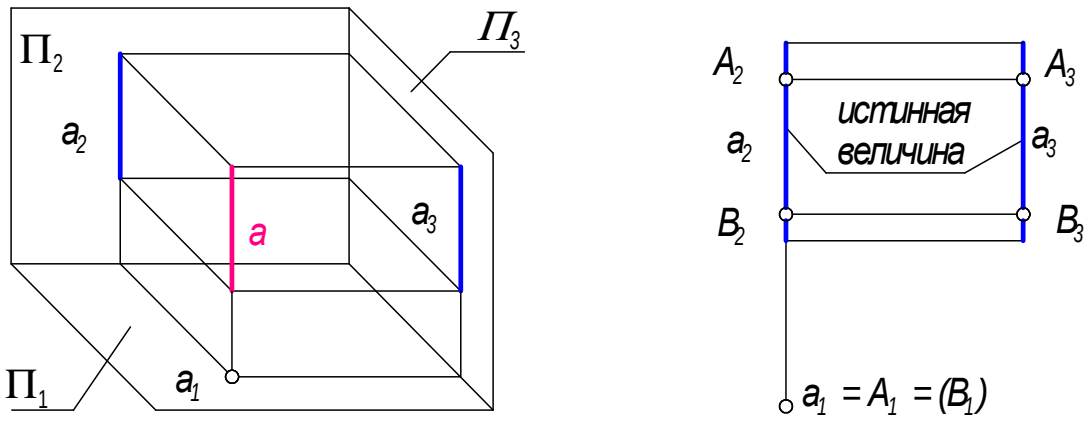


Рис. 2.9 – Пространственный и комплексный чертёж горизонтально проецирующей прямой

Графический признак горизонтально проецирующей прямой – ее горизонтальная проекция – это точка, она называется главной проекцией.

Определим понятие любой проецирующей геометрической фигуре, которое будем использовать и в дальнейшем как при изучении геометрических фигур, так и при решении позиционных и метрических задач.

Геометрическая фигура называется проецирующей, если одна из ее проекций есть геометрическая фигура на единицу меньшего измерения, она называется главной проекцией и обладает собирательными свойствами.

$\boldsymbol{a_1}$ – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, обозначенная на этой прямой, совпадет с её горизонтальной проекцией: $\Rightarrow \boldsymbol{a_1 = A_1 = B_1}$.

Точки ***A*** и ***B*** — горизонтально конкурирующие.

2.4.1. Фронтально проецирующая прямая $\boldsymbol{в(в_1, в_2, в_3) \perp П_2}$ $\boldsymbol{(в \parallel П_1 \text{ и } П_3)}$

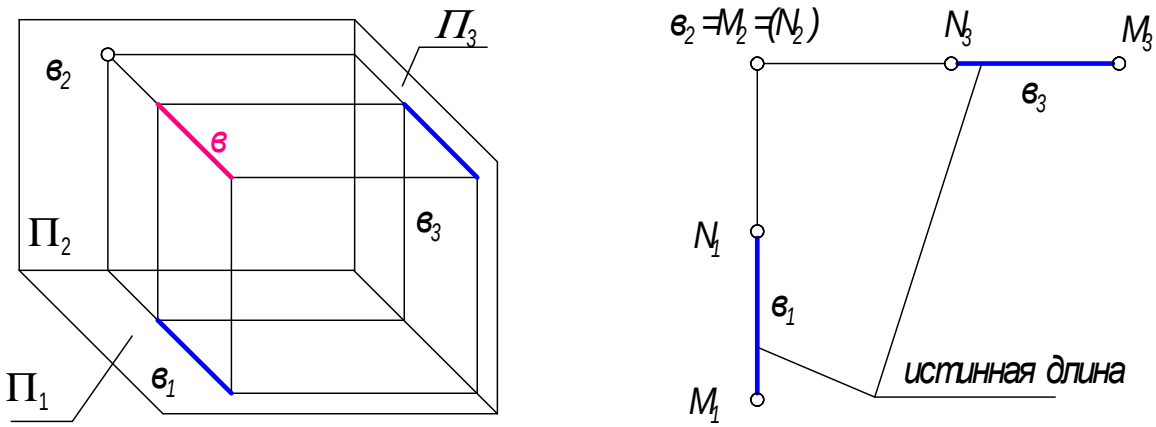


Рис. 2.10 – Пространственный и комплексный чертёж фронтально проецирующей прямой

Графическим признаком фронтально проецирующей прямой, её фронтальной проекцией является точка, она называется главной проекцией

$в_2$ – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, обозначенная на этой прямой, совпадет с её фронтальной проекцией: $\Rightarrow в_2 = M_2 = N_2$.

Точки ***M*** и ***N*** – фронтально конкурирующие.

2.4.2. Профильно проецирующая прямая $c(c_1, c_2, c_3) \perp П_3$ ($c \parallel П_1$ и $П_2$)

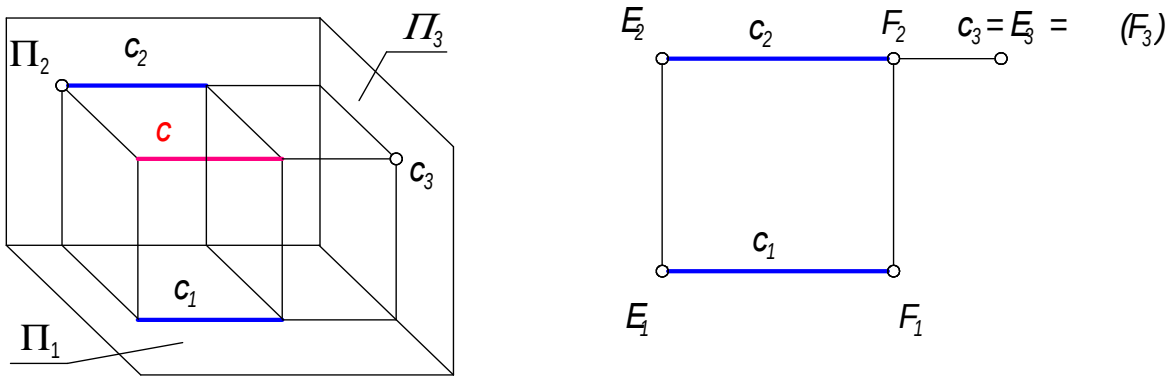


Рис. 2.11 – Пространственный и комплексный чертёж профильно проецирующей прямой

Графический признак профильно проецирующей прямой – её профильной проекцией является точка, она называется главной проекцией.

c_3 – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой совпадет с ее профильной проекцией $\Rightarrow c_3 = E_3 = F_3$.

Отличительным признаком **проецирующих прямых** на комплексном чертеже является то, что **одна из проекций прямой вырождается в точку.**

2.4.3. Контрольные вопросы

1. На какие группы делятся прямые в зависимости от расположения по отношению к плоскостям проекций?

2. Каковы характерные признаки чертежей

а) прямой общего положения,

б) горизонтали,

в) фронтали,

г) профильной прямой,

д) горизонтально проецирующей прямой,

е) фронтально проецирующей прямой,

ж) профильно проецирующей прямой?

Обучающий тест по теме «Задание прямой на комплексном чертеже». Ответы на этот тест Вы найдете в конце этого Модуля.

Тест №2

1	2	3	4	5	6
a_2 a_1	a_2 a_1	a_2 a_1	a_2 a_1	a_2 a_1	a_2 a_1

1. Укажите чертежи прямых общего положения.
2. Укажите профильно проецирующую прямую.
3. Укажите горизонтально проецирующую прямую.
4. Укажите фронтально проецирующую прямую.
5. Укажите, в каком случае на чертеже можно замерить угол наклона прямой к $\boldsymbol{П_1}$.

2.5. Взаимное положение прямых на комплексном чертеже

Как Вы думаете?

1. Могут ли проекции скрещивающихся прямых быть параллельными?
2. Могут ли проекции пересекающихся прямых изображаться одной линией?
3. Имеют ли скрещивающиеся прямые общую точку? А их проекции?

Две прямые в пространстве могут:

1. Пересекаться ($\boldsymbol{a \cap в}$).
2. Быть параллельными ($\boldsymbol{a \parallel в}$).
3. Скрещиваться ($\boldsymbol{a \overset{\circ}{\_} в}$).

2.5.1. Пресекающиеся прямые

Прямые называются пересекающимися, если они имеют единственную общую точку. Они всегда лежат в одной плоскости.

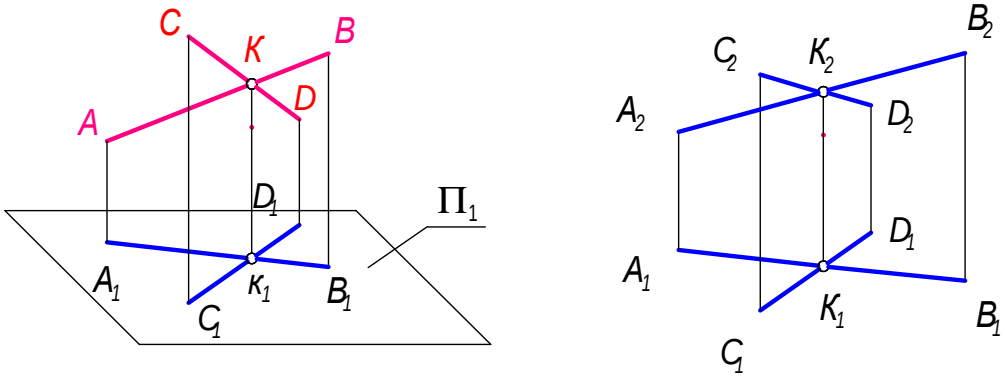


Рис. 2.12 – Пространственный и комплексный чертеж пересекающихся прямых

Если прямые пересекаются, то существует единственная точка пересечения: $\boldsymbol{a \cap в = К}$.
На основании свойства принадлежности $\boldsymbol{a \cap в = К \Rightarrow a_1 \cap в_1 = К_1,\ a_2 \cap в_2 = К_2}$.

Согласно свойству чертежа Монжа, обе проекции (***К₁*** и ***К₂***) точки **К** лежат на одной линии связи данного установленного направления.

Графический признак *а ∩ в* точки пересечения одноимённых проекций лежат на одной линии связи, установленного направления.

2.5.2. Параллельные прямые

На основании свойства параллельности прямых (***а ∥ в***) одноимённые проекции параллельных прямых параллельны: $a \parallel в \Rightarrow a_1 \parallel в_1,\ a_2 \parallel в_2$.

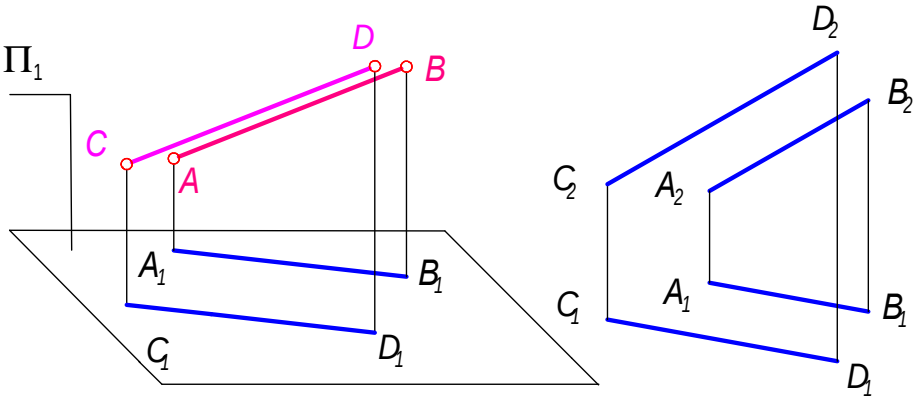


Рис. 2.13 – Пространственный и комплексный чертеж параллельных прямых

Графический признак *а ∥ в* – их одноименные проекции параллельны.

2.5.3. Скрещивающиеся прямые

Если прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися прямыми. Через скрещивающиеся прямые невозможно провести плоскость, т.к. если одна прямая будет принадлежать плоскости, то другая будет пересекать эту плоскость (рис. 2.14).

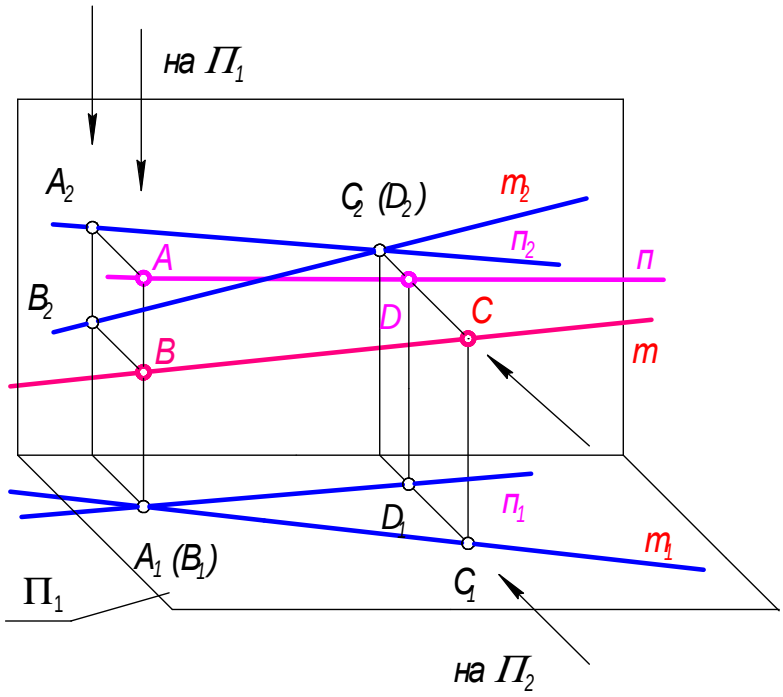
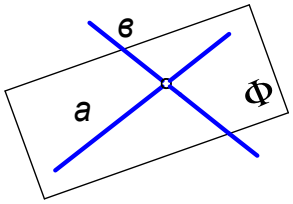
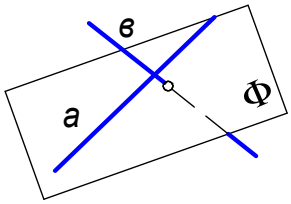


Рис. 2.14 – Пространственный чертеж скрещивающихся прямых

Сравним пересекающиеся и скрещивающиеся прямые (рис. 2.15).



Пересекающиеся прямые



Скрещивающиеся прямые

Рис. 2.15 – Сравнительный чертеж

Точки ***A*** и ***B*** – горизонтально конкурирующие. С их помощью определяется видимость геометрических фигур на $\boldsymbol{\Pi_1}$ при решении задач. Из двух точек видна та, что выше.

Точки ***C*** и ***D*** – фронтально конкурирующие. С их помощью определяется видимость на $\boldsymbol{\Pi_2}$. Из двух точек видна та, что ближе к наблюдателю.

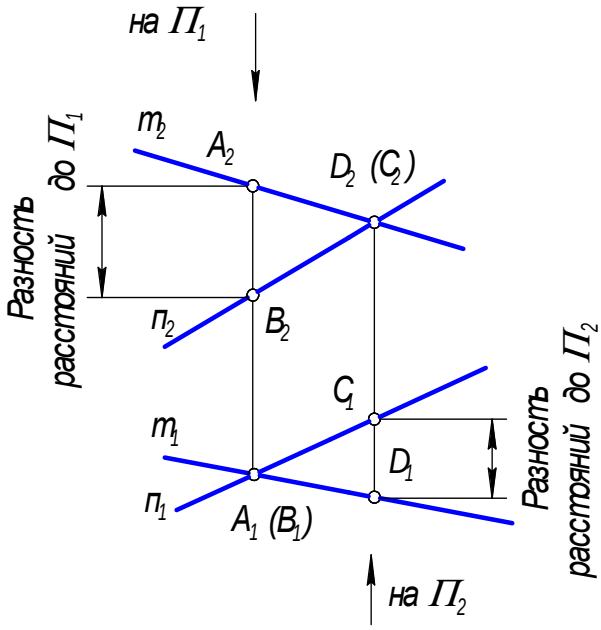


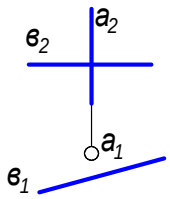
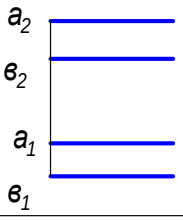
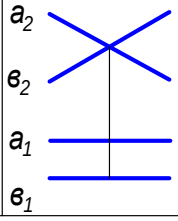
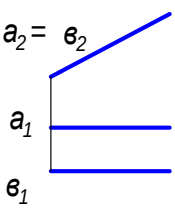
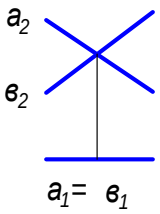
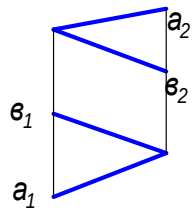
Рис. 2.16 – Комплексный чертеж срещивающихся прямых

Графический признак скрещивающихся прямых – точки пересечения одноимённых проекций прямых никогда не находятся на одной линии связи.

2.6. Контрольные вопросы

Тест №3 – Обучающий тест по теме «Взаимное положение прямых на комплексном чертеже».

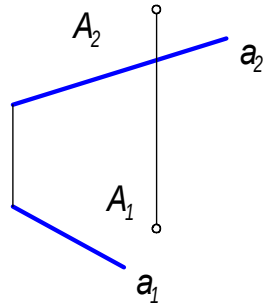
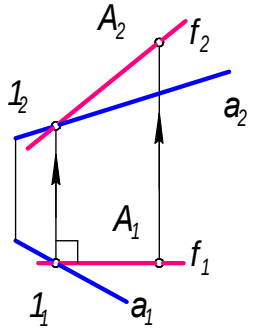
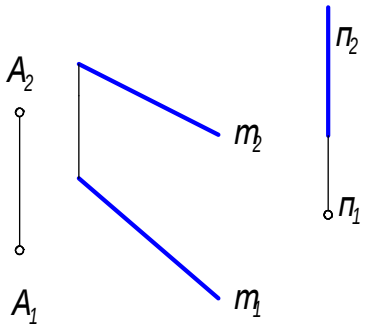
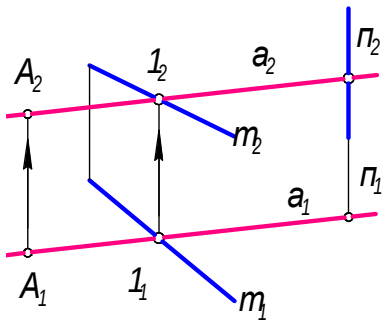
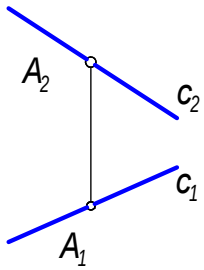
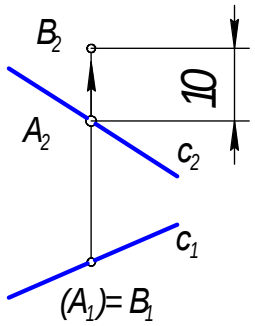
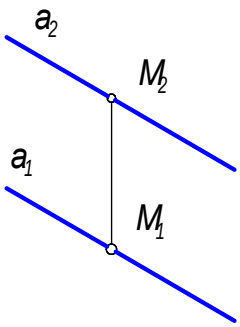
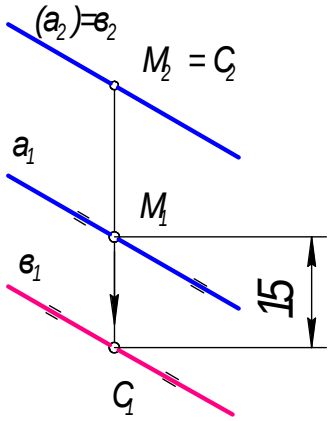
Ответы на этот тест Вы найдете в конце этого Модуля.

1	2	3	4	5	6
					

1. Укажите чертеж пересекающихся прямых.
2. Укажите чертежи параллельных прямых.
3. Укажите чертежи скрещивающихся прямых.

2.7. Справочный материал

Проиллюстрируем применение положений о взаимной принадлежности прямой и точки и взаимного расположения прямых при решении задач.

	1. Через точку **A** провести фронталь так, чтобы она пересекла прямую общего положения, **f ‖ П2, f ⊃ A, f ∩ a**	
	2. Провести прямую а так, чтобы **a ⊃ A, a ∩ m, a ∩ n**	
	3. Построить точку **B**, горизонтально конкурирующую с точкой **A** и расположенную на **10** мм выше точки **A**	
	4. Построить точку **C**, фронтально конкурирующую с точкой **M** и расположенную ближе к наблюдателю на **15** мм, а через неё провести прямую в параллельно заданной **a**.	

2.8. Комплексный чертёж кривых линий

Линия задается кинематически, – как траектория непрерывно перемещающейся точки в пространстве.

Линии применяются не только для выполнения изображений различных геометрических фигур, но и позволяют решать многие научные и инженерные задачи. Например, с помощью линии можно создавать наглядные модели многих процессов и исследовать функциональную зависимость между различными параметрами. Кривую линию можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей.

В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям. Построение проекций зависит от того, плоская кривая или пространственная.

Если все точки кривой расположены в одной плоскости, то такую кривую называют плоской кривой линией (например эллипс, окружность).

Если все точки кривой невозможно совместить с одной плоскостью, то такую кривую называют пространственной (винтовая линия).

Если существует математическое уравнение, описывающее движение точки, то кривую называют закономерной. Аналитически закономерные линии подразделяются на **алгебраические** и **трансцендентные**. Примером алгебраических кривых служат кривые второго порядка (**эллипс, парабола, гипербола**). К трансцендентным линиям относят графики тригонометрических функций (**синусоида, косинусоида**, **эвольвента, циклоида)**.

Если кривую линию не удаётся выразить в аналитической форме, то её задают графически. Графически может быть задана и закономерная линия, образование которой подчинено определённым геометрическим условиям.

Как графически определить порядок кривой?

Порядок алгебраической кривой равен степени её уравнения или определяется графически, то есть числом точек её возможного пересечения с произвольной прямой.

Например, эллипс кривая второго порядка (рис. 2.17).

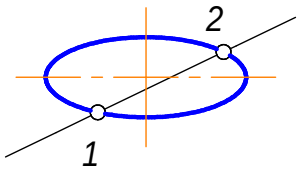


Рис. 2.17 – Определение порядка кривой на примере эллипса

Как спроецировать кривую на плоскость проекций? Мысленно проецируют все точки кривой на плоскость проекций, но практически же это сделать невозможно. Поэтому для проецирования выбирают конечное число точек (рис. 2.18). Чем больше точек, тем точнее проекция кривой. При выполнении заданий по нашему курсу следует брать не менее 8 - 12 точек.

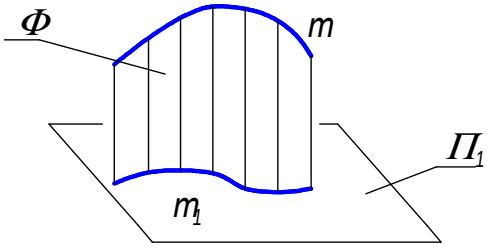


Рис. 2.18 – Проецирование кривой на плоскость

Ф – проецирующая поверхность (в данном случае кривая поверхность).

Проецирующая поверхность ***Ф*** пересекается с плоскостью проекций по кривой $\boldsymbol{m_1}$ – это горизонтальная проекция кривой. Фронтальная проекция получается аналогично.

2.9. Метод хорд

Линия считается заданной на чертеже, если известен закон нахождения каждой её точки. Для задания линии удобно использовать её **определитель.**

Определитель линии – это минимальная информация, необходимая и достаточная для однозначного построения на эпюре любой точки кривой.

Построение на эпюре любой точки кривой позволит однозначно решить вопрос о характере кривой линии (плоская или пространственная).

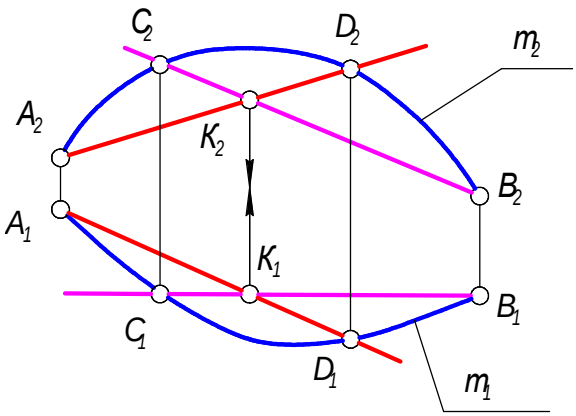


Рис. 2.19 – Плоская кривая линия

Если на заданной кривой обозначить произвольные четыре точки и через них провести хорды (секущие), то возможны два варианта:

1. Если хорды пересекаются (графически это видно на рис. 2.19, когда K_1, K_2 – точки пересечения проекций хорд – лежат на одной линии связи), то через пересекающиеся прямые можно провести плоскость, а это значит, что они образуют плоскость, в которой лежит заданная кривая. Значит, кривая линия — **плоская.**

2. Хорды не пересекаются, а скрещиваются (графически это изображено на рис. 2.20, когда K_1, K_2 – точки пересечения проекций хорд не лежат на одной линии связи), это значит кривая линия – **пространственная.**

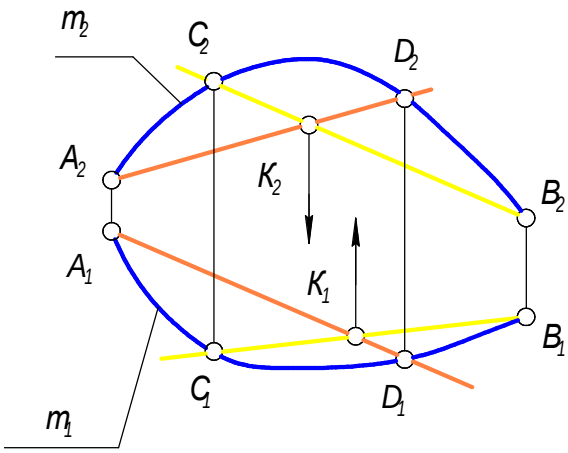


Рис. 2.20 – Пространственная кривая линия

2.10. Касательная, нормаль к кривой

Как построить касательную к кривой?

Для построения используем прямые, называемые **секущими**. Прямая, пересекающая кривую линию в одной, двух и более точках, называется секущей (***AB***).

Чтобы через точку ***A*** провести касательную ***t*** к кривой ***m***, в окрестности точки ***A*** (недалеко) выбирают точку ***B*** и проводят секущую ***AB***. Приближая точку ***B*** к точке ***A***, в пределе получают касательную ***t*** в данной точке: $B \to A \Rightarrow AB \to t$

Касательную (***t*** в точке ***A***) можно рассматривать как предельное положение секущей, которое занимает последняя при сближении точек пересечения ***A*** и ***B*** секущей ***AB*** до слияния их в одну точку.

n – **нормаль** кривой линии в данной точке, $n \perp t$. Сколько их можно провести? К пространственной кривой можно провести $n \to \infty$, то есть к касательной можно построить плоскость, нормальную к ней. Если кривая – плоская, то к касательной можно провести только одну нормаль.

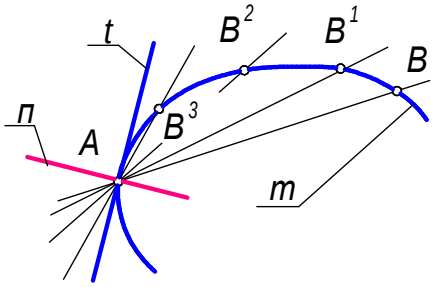


Рис. 2.21 – Касательная и нормаль в точке А кривой m

Рассмотренная точка ***A***, у которой только одна касательная и одна нормаль, называется **обыкновенной точкой** кривой. Если вся кривая состоит из обыкновенных точек, то она называется **регулярной** (гладкой, плавной).

У регулярной плоской кривой (рис. 2.22) в каждой точке ***A, B, C, D, E*** к касательной можно провести только одну нормаль, поэтому все точки являются обыкновенными (монотонными). Характеристикой плавной кривой может быть и угол наклона касательных относительно оси ***X***, который в данном случае меняется плавно.

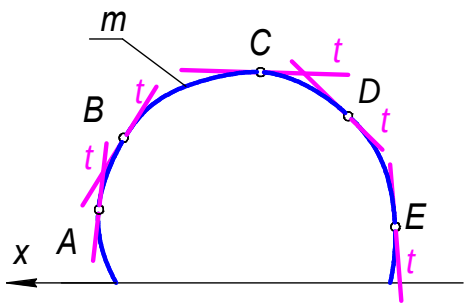


Рис. 2.22 – Регулярная кривая

2.11. Особые точки кривых линий

Точку кривой называют особой (нерегулярной), если положение или направление касательной в этой точке определено неоднозначно. К особым (нерегулярным) относятся: точки узловые (самопересечения) (рис. 2.23); точки возврата первого рода (рис. 2.24); точки возврата второго рода (клюв) (рис. 2.25); точки самосоприкосновения (рис. 2.26); точки угловые (точки излома) (рис. 2.27).

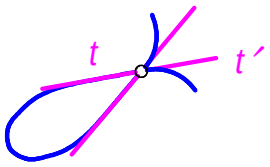


Рис. 2.23 – Точки узловые (самопересечения)

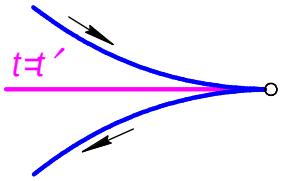


Рис. 2.24 – Точки возврата первого рода

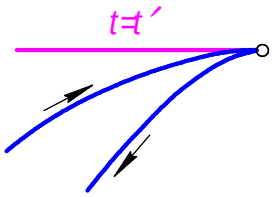


Рис. 2.25 – Точки возврата второго рода (клюв)

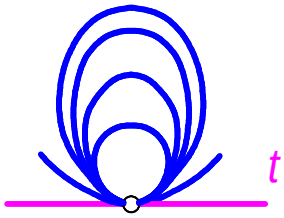


Рис. 2.26 – Точки самосоприкосновения

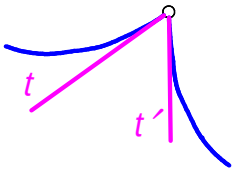


Рис. 2.27 – Точки угловые (точки излома)

2.12. Свойства проекций кривых линий

Свойства кривых линий и их проекций позволяют наглядно демонстрировать физические, химические и электрические процессы. В геометрии кривые линии – это линии пересечения поверхностей.

1. Проекцией кривой линии является кривая линия (в общем случае).

2. Касательная к кривой проецируется в касательную к её проекции.

3. Несобственная точка кривой проецируется в несобственную точку её проекции.

4. Порядок кривой (только для алгебраических кривых) в проекциях не изменяется.

5. Число точек пересечения кривой сохраняется при проецировании.

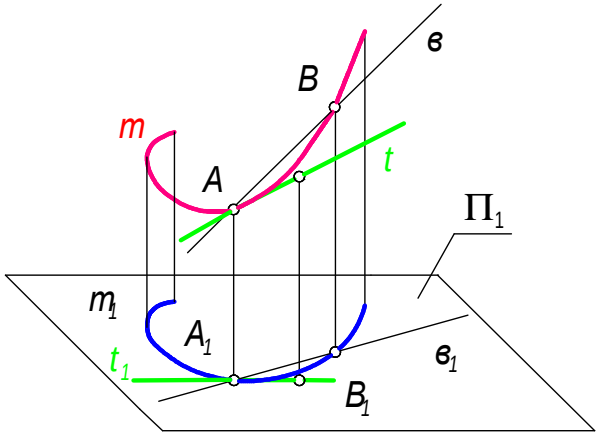


Рис. 2.28 – Проецирование кривой линии на плоскость

2.13. Некоторые плоские кривые линии

Эллипс, парабола, гипербола – алгебраические кривые второго порядка, определяются уравнением $f(x, y) = 0$.

Эллипс:
$AB = 2a$ – большая ось эллипса;
$CD = 2в$ – малая ось эллипса;
O – центр эллипса;
F_1; F_2 – фокусы эллипса;
A, B, C, D – вершины эллипса;
Точки M и N – любые точки эллипса;

$$/MF_1/ + /MF_2/ = /NF_1/ + /NF_2/ = AB - Const$$

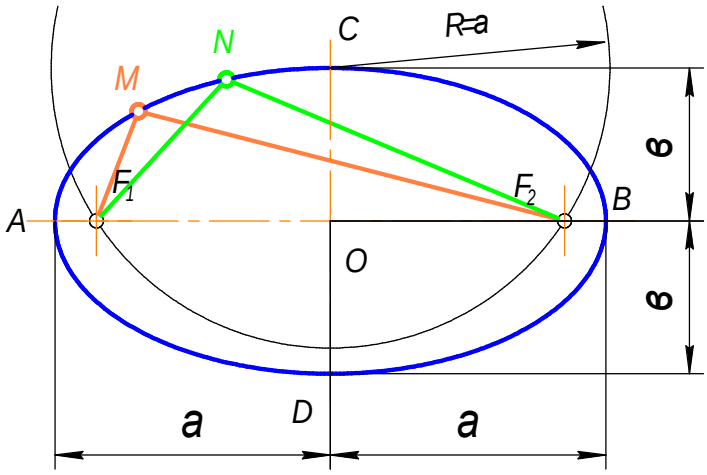


Рис. 2.29 – Образование эллипса

Эллипс – это всё множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная 2а.

У эллипса все точки собственные. Кривая симметрична относительно обеих осей. Всегда можно подобрать такую пару диаметров эллипса, когда хорды, параллельные одному диаметру, делятся другим диаметром пополам. Такие диаметры называются сопряжёнными.

Графически можно построить любую точку эллипса, если заданы его оси. Эллипс на рис. 2.29 построен равномерным сжатием окружности в направлении ***OC ⊥ OA***

AB – большая ось ***CD*** – малая ось (рис. 2.30а)

Разделить окружность на 12 равных частей (рис. 2.30б)

Из точек пересечения любого луча с окружностями провести прямые, параллельные осям эллипса: из точки ***1*** параллельно ***CD***, из точки ***2*** параллельно ***AB***. (рис. 2.30в)

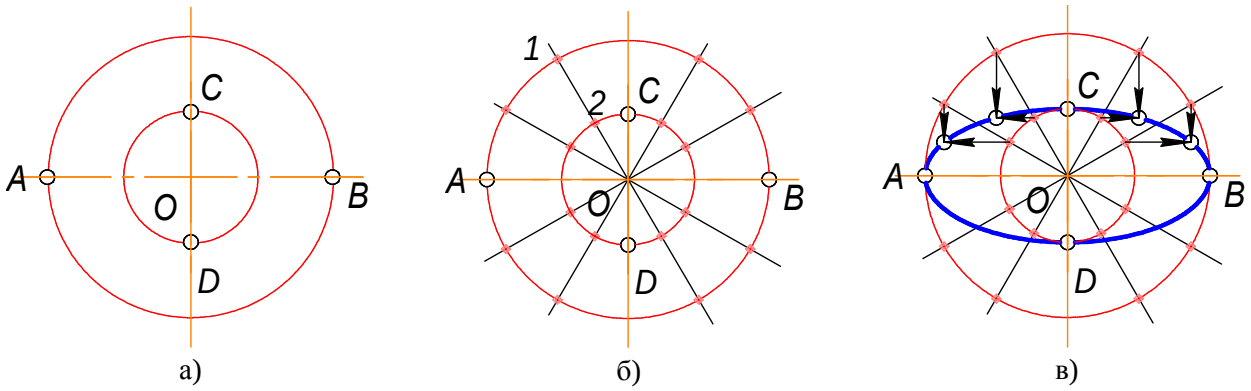


Рис. 2.30 – Построение эллипса по заданным осям

2.13.1. Парабола

Парабола имеет одну ось и две вершины: ***O*** – собственная точка и ***S∞*** – несобственная точка (парабола имеет одну несобственную точку), ***F*** – фокус и ***P*** – параметр параболы

Парабола – это всё множество точек, равноудаленных от прямой d (директрисы) и данной точки F (фокуса)

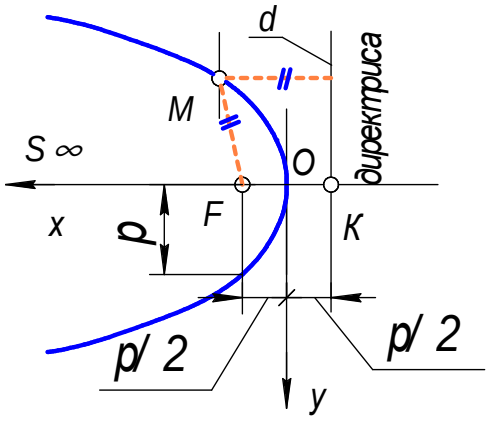


Рис. 2.31 – Образование параболы

Если требуется построить параболу по заданной вершине ***O***, оси ***X*** и точки ***M***, то строится прямоугольный треугольник – ***OAM*** (рис. 2.32).

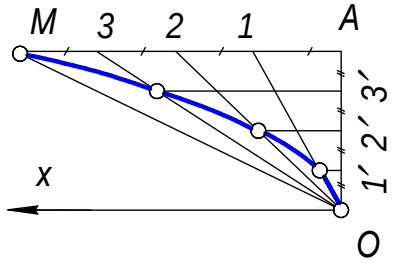


Рис. 2.32 – Построение параболы по заданной вершине, оси и точке

2.13.2. Гипербола

Гипербола – разомкнутая кривая, состоящая из двух симметричных ветвей; она имеет две оси симметрии – действительную (ось – ***x***) и мнимую (ось – ***y***). **Асимптоты** – это прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность (рис. 2.33).

Точки ***A*** и ***B*** – вершины гиперболы.

F_1 и F_2 – фокусы гиперболы:

$|MF_1| - |MF| = |NF_1| - |NF_2| = const = 2a$

Расстояние между F_1 и F_2 равняется сумме ($a^2 + в^2$).

Гипербола – это всё множество точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная 2a.

Построение гиперболы, если заданы вершины A, B и фокусы F_1, F_2.

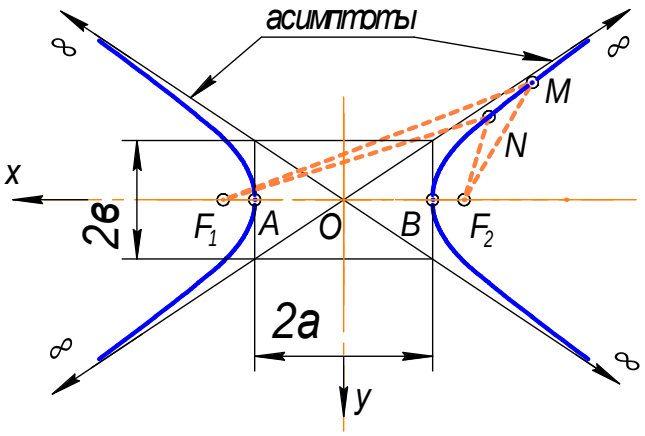


Рис. 2.33 – Построение гиперболы

Точки – ***1, 2, 3, 4, 5*** – ряд произвольно взятых точек. Из фокусов F_1 и F_2, как из центров, проводят дуги, радиусами которых служат расстояния от вершин ***A*** и ***B*** до точек ***1, 2, 3, 4, 5*** и т. д. (рис. 2.35), R_2 = ***B1, B2, B3, B4, B5*** ***R = A1, A2, A3, A4, A5.***

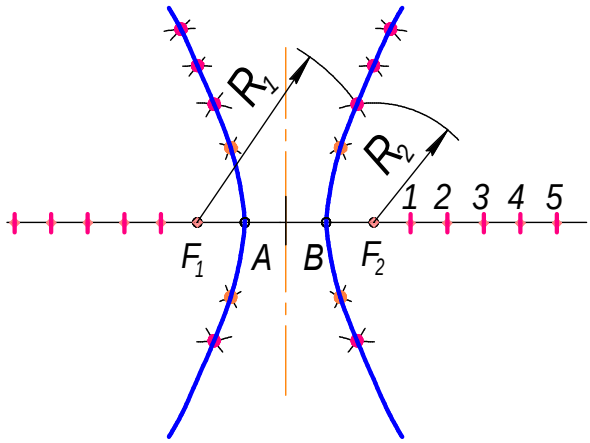


Рис. 2.34 – Построение гиперболы, если заданы вершины A и B и фокусы F_1 и F_2

2.13.3. Эвольвента

Эвольвента (развёртка окружности) – это лекальная кривая, широко применяемая в технике. Например, форма боковой поверхности зуба зубчатых передач, называемая профилем зуба, очерчивается по эвольвенте.

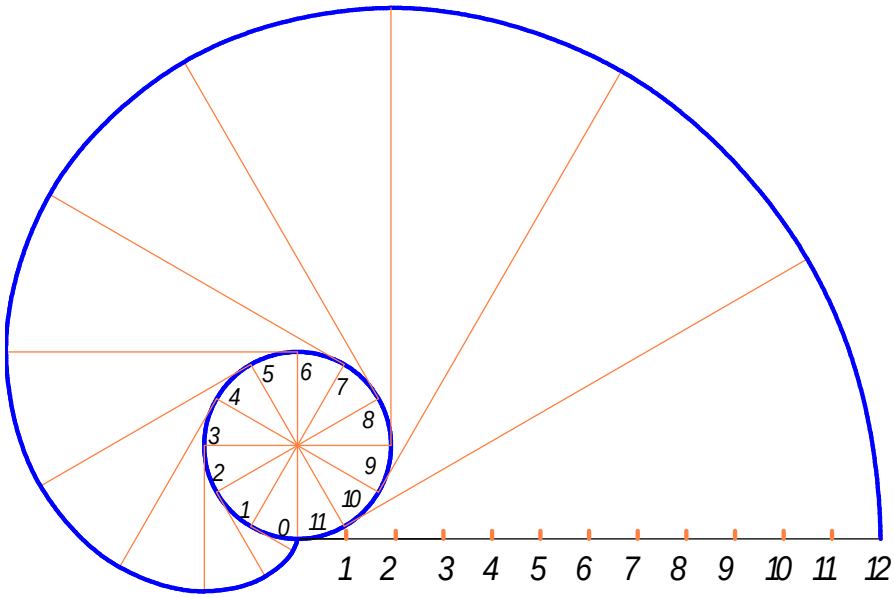


Рис. 2.35 – Построение эвольвенты

Алгоритм построения эвольвенты.

1. Окружность разделить на 12 частей.

2. В точках деления провести касательные к окружности, направленные в одну сторону.

3. На касательной, проведенной через последнюю точку, отложить отрезок, равный $2\pi R$, и разделить на 12 частей.

4. На первой касательной отложить 1/12 отрезка, на второй – 2/12 и т. д.

2.14. Комплексный чертёж пространственной кривой. Цилиндрическая винтовая линия

Из всех разновидностей закономерных пространственных кривых наиболее часто на практике применяют винтовые линии – цилиндрические и конические.

Цилиндрическая винтовая линия образуется вращением точки вокруг некоторой оси с одновременным поступательным движением вдоль этой же оси (рис. 2.36).

i – ось винтовой линии;

R – радиус вращения;

h – шаг, определяет расстояние между двумя смежными витками.

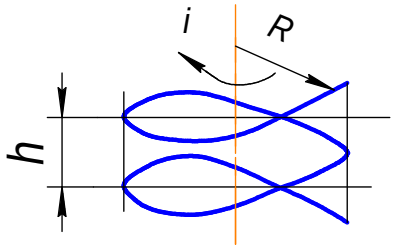


Рис. 2.36 – Образование цилиндрической винтовой линии

Алгоритм построения

Угловое перемещение точки прямо пропорционально линейному. Угол подъёма винтовой линии равен углу наклона касательной **t** в любой точке винтовой линии к плоскости, перпендикулярной её оси.

Алгоритм построения цилиндрической винтовой линии (рис. 2.37).

1. Горизонтальную проекцию (окружность) разделить на 12 частей.

2. Разделить принятое значение шага (***h***) на 12 частей.

3. Определить нулевое положение точки ***O (O₁ и O₂).***

4. Фронтальные проекции точек находятся как точки пересечения одноимённых горизонтальных и вертикальных прямых, проведённых через точки деления: $\boldsymbol{m_1}$ – окружность; $\boldsymbol{m_2}$ – синусоида.

Винтовую линию называют **правой**, если точка поднимается вверх и вправо по мере удаления от наблюдателя, и **левой**, если точка поднимается вверх и влево по мере удаления от наблюдателя.

$\boldsymbol{t^2}$ – касательная к винтовой линии в точке $\boldsymbol{2\ (2_1, 2_2)}$.

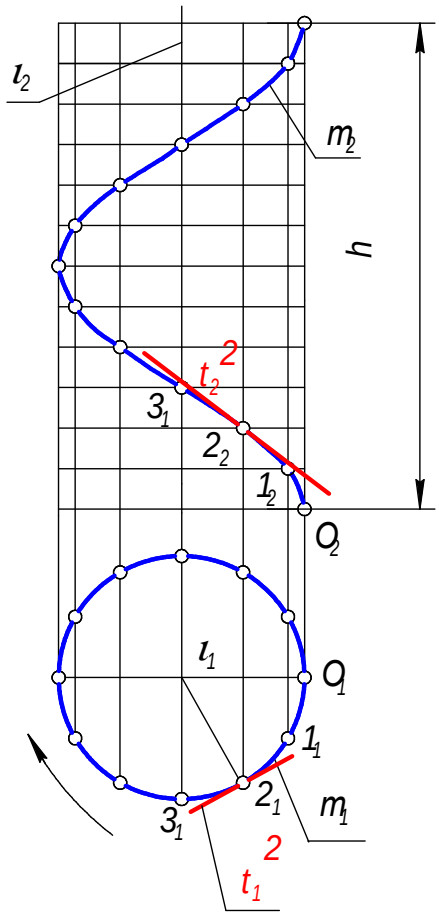


Рис. 2.37 – Алгоритм построения цилиндрической винтовой линии

Ответы на тесты № 1, 2, 3

Тест № 1

1–2, 2–6, 3–5, 4–1, 5–5, 6–3, 7–4, 8–2.

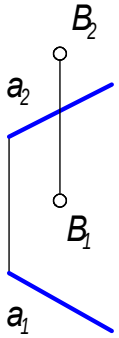
Тест № 2

1–3,6, 2–5, 3–1, 4–4, 5–2

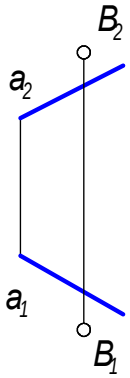
Тест № 3

1–5, 2–2,4, 3–1,3,6

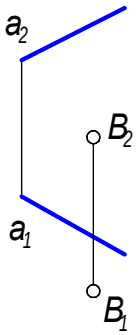
2.15. Примеры положения точки и прямой относительно плоскостей проекций



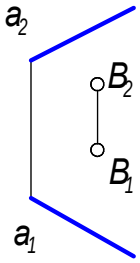
Точка **В** расположена выше прямой **а** и ближе к $\mathbf{П_2}$, чем прямая **а** (дальше от наблюдателя)



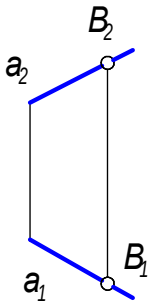
Точка **В** расположена выше прямой **а** и дальше от $\mathbf{П_2}$, чем прямая **а** (ближе к наблюдателю)



Точка **В** расположена ниже прямой **а** и дальше от $\mathbf{П_2}$, чем прямая **а** (ближе к наблюдателю)

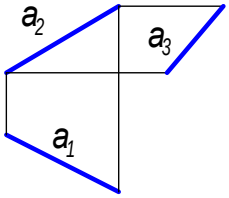
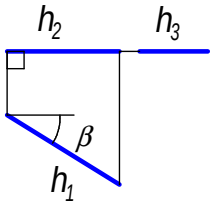
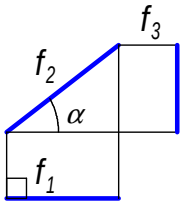
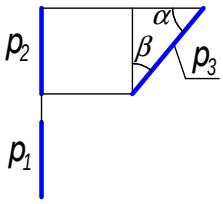
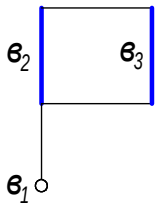
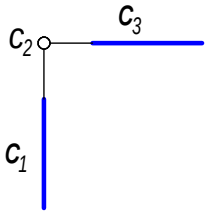
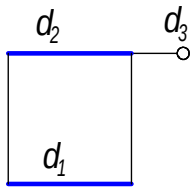


Точка **В** расположена ниже прямой **а** и ближе к $\mathbf{П_2}$, чем прямая **а** (дальше от наблюдателя)

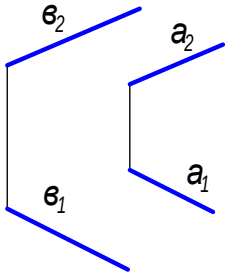


Точка **В** принадлежит прямой **а**

2.16. Задание прямых на комплексном чертеже

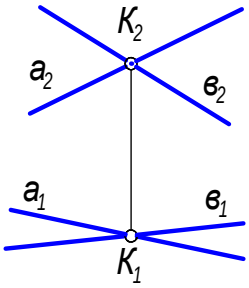
Прямая общего положения			$a_1 a_2 a_3$ - с искажением, углы наклона к $П_1, П_2, П_3$ - с искажением
Прямые уровня	Горизонталь		h_1 - без искажения h_2, h_3 - с искажением угол β - без искажения
	Фронталь		f_2 - без искажения f_1, f_3 - с искажением угол α - без искажения
	Профильная прямая		p_3 - без искажения p_1, p_2 - с искажением углы α, β - без искажения
Проецирующие прямые	Горизонтально проецирующая		$в_1$ - точка $в_2, в_3$ - без искажения
	Фронтально проецирующая		c_2 - точка c_1, c_3 - без искажения
	Профильно проецирующая		d_3 - точка d_1, d_2 - без искажения

Параллельные прямые



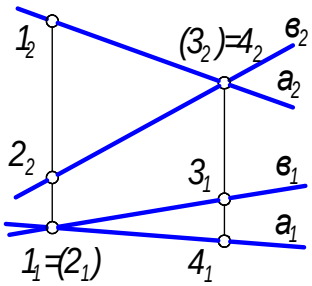
У параллельных прямых одноименные проекции параллельны

Пересекающиеся прямые



Точки пересечения проекций прямых находятся на одной линии связи

Скрещивающиеся прямые



Точки 1 и 2 - горизонтально конкурирующие

Точки 3 и 4 - фронтально конкурирующие

3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПЛОСКОСТИ

В данном разделе вы познакомитесь с различными видами поверхностей и их модификациями, способами задания их на комплексном чертеже, особенностями построения. Узнаете, что простейшая поверхность – это плоскость.

3.1. Задание плоскости на комплексном чертеже

Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину
Евклид «Начала», IVвек до н.э., книга 1, определение 5

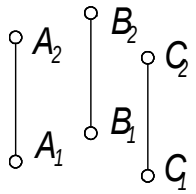
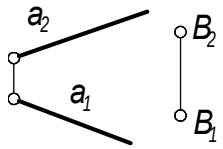
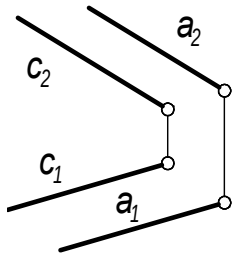
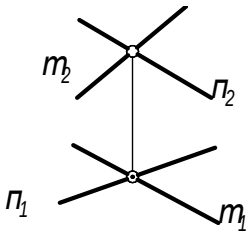
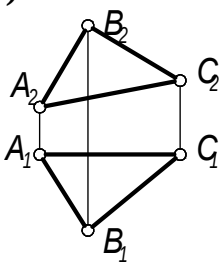
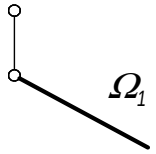
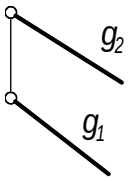
Как вы думаете?

1. Не дана ли трактовка поверхности в «Началах» слишком упрощённо?
2. Какая фигура в современном понимании имеет «только длину и ширину»?
3. Безразмерна ли плоскость или она имеет границы?
4. Можно ли задать плоскость пространственными линиями?

Плоскость является частным случаем поверхности. Это двухмерная геометрическая фигура, она имеет только длину и ширину, и не имеет толщины. Обозначается прописными буквами греческого алфавита.

Плоскость — это множество точек, но определяется она тремя точками (напомним, что прямую линию определяют две точки).

Плоскость можно задать на чертеже:

1. Тремя точками: ***Σ(A, B, C)*** 	2. Прямой и точкой, не лежащей на данной прямой: ***Г(a, B)*** 	3. Двумя параллельными прямыми: ***Δ(c∥a)*** 
4. Двумя пересекающимися прямыми: ***Φ(m ∩ n)*** 	5. Любой плоской фигурой: ***Λ(ABC)*** 	6. Своей главной проекцией: ***Ω (Ω₁)*** 
7. Линией наибольшего наклона плоскости: ***Θ (g₁ ,g₂);*** 		

Плоскости бывают **общего** и **частного** положения

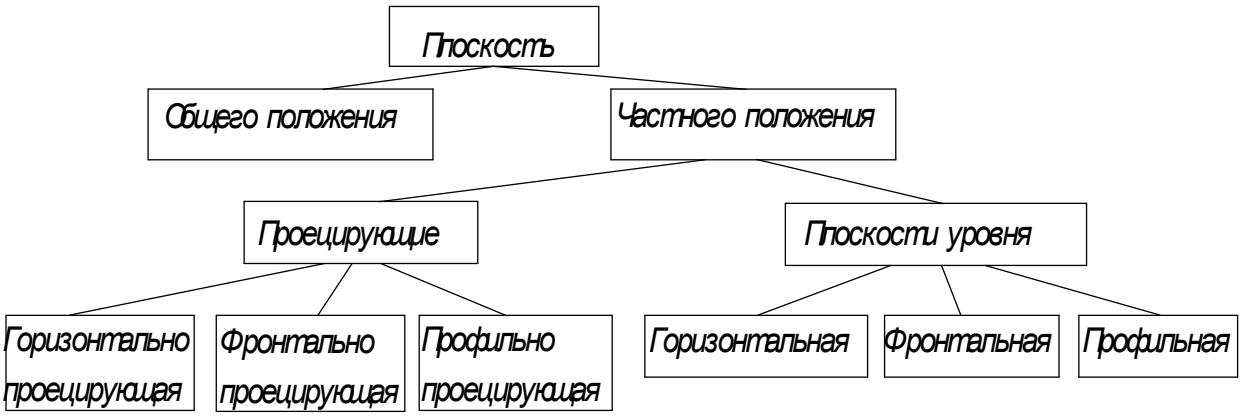


Рис. 3.1 – Классификация плоскостей

Если плоскость не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то она называется **плоскостью общего положения.** Примеры чертежа плоскости общего положения см. варианты 1 – 5; 7 (рис. 3.1).

3.2. Взаимная принадлежность точки и прямой плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Построение точки в плоскости сводится к двум операциям: построению в плоскости вспомогательной прямой и построению точки на этой прямой.

Задача. Плоскость Σ задана пересекающимися прямыми a и b (рис. 3.2). Точка $M(M_2)$ принадлежит плоскости.

Найти M_1.

Краткая запись условия задачи: $\Sigma(a \cap b)$, $M(M_2) \in \Sigma$; $M_1 = ?$

Решение. Через точку M_2 (рис. 3.3) проводим вспомогательную прямую $k \subset \Sigma$: $k_2 \cap a_2 = 1_2$; $k_2 \cap b_2 = 2_2$; затем находим горизонтальные проекции точек 1 и 2 по условию принадлежности прямым a и b соответственно; через две точки 1_1 и 2_1 проводим прямую k_1 и на ней, с помощью линии связи, находим точку M_1. Таких прямых можно провести сколько угодно, то есть вариантов решения бесчисленное множество.

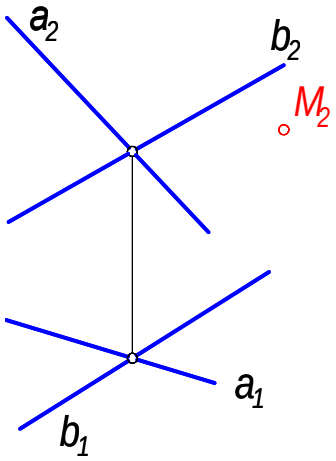


Рис. 3.2 – Графическое условие задачи

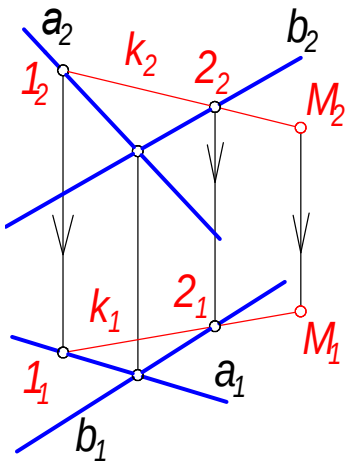


Рис. 3.3 – Графическое решение задачи

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки плоскости или через одну точку плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

В предыдущем примере мы рассмотрели, как построить прямую в плоскости по двум точкам. Для второго случая плоскость ***Г*** зададим треугольником ***ABC.***

Задача. Плоскость ***Г*** задана ***ΔABC*** (рис. 3.4).

Точка $M(M_1)$ принадлежит ***Г***. Найти M_2. $M(M_1) \in Г(ABC)$. $M_2 = ?$

Решение.

Через точку M_1 (рис. 3.5) проведём прямую ***k***, параллельную стороне треугольника ***AB***. Она пересечёт сторону ***AC*** в точке *1*: $k_1 \parallel A_1B_1$; $k_1A_1 \cap C_1 = 1_1$; с помощью линии связи найдём 1_2, проведём k_2 параллельно A_2B_2, ней найдём точку M_2:

Алгоритмическая запись решения:

$1_1 \in A_1C_1 \Rightarrow 1_2 \in A_2C_2$;

$1_2 \in k_2$, $k_2 \parallel A_2B_2$; $M_2 \in k_2$.

Как вы думаете?

Сколько решений имеет эта задача?

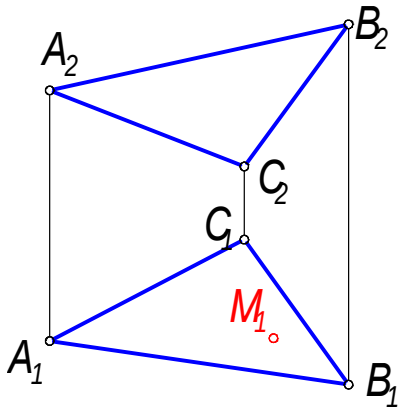


Рис. 3.4 – Графическое условие задачи

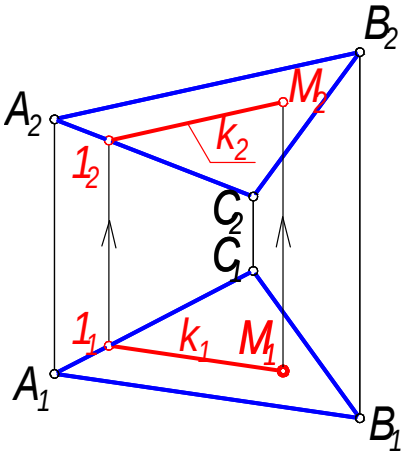


Рис. 3.5 – Графическое решение задачи

3.3. Плоскости частного положения

Плоскости, параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются ***плоскостями частного положения.***

Имеется две группы таких плоскостей:

1. Проецирующие плоскости.
2. Плоскости уровня.

3.3.1. Проецирующие плоскости

Если плоскость перпендикулярна только одной плоскости проекций, то она называется ***проецирующей.***

Одна из её проекций вырождается в прямую линию, называемую ***главной проекцией*** и обладающую ***собирательными*** свойствами.

3.3.1.1. Горизонтально проецирующая плоскость

Горизонтально проецирующая плоскость – это плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций: $Г \perp П_1$, (рис. 3.6, 3.7).

Графический признак: горизонтальная проекция $Г_1$ горизонтально проецирующей плоскости – прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это **главная** проекция.

Например, $Г \perp П_1$ – горизонтально проецирующая плоскость; $Г \perp П_1 \Rightarrow Г_1$ – прямая линия, главная проекция; $\angle\beta$ – угол наклона плоскости ***Г*** к $П_2$.

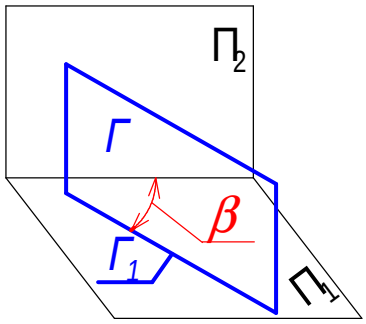


Рис. 3.6 – Пространственный чертёж

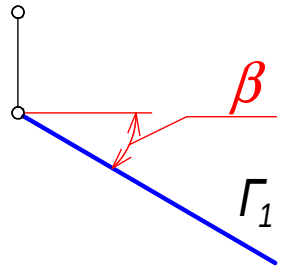


Рис. 3.7 – Плоский чертёж

3.3.1.2. Фронтально проецирующая плоскость

Фронтально проецирующая плоскость – это плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций: $\Sigma \perp \Pi_2$, (рис. 3.8, 3.9)

Графический признак: фронтальная проекция Σ_2 фронтально проецирующей плоскости – прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это ***главная*** проекция.

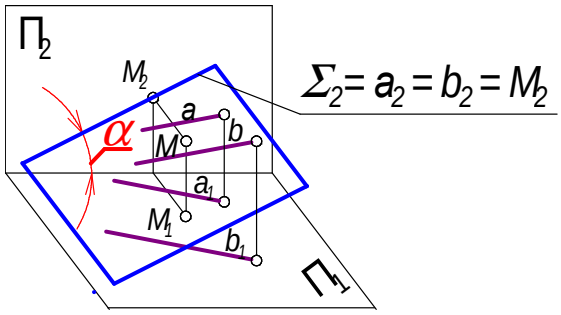


Рис. 3.8 – Пространственный чертёж

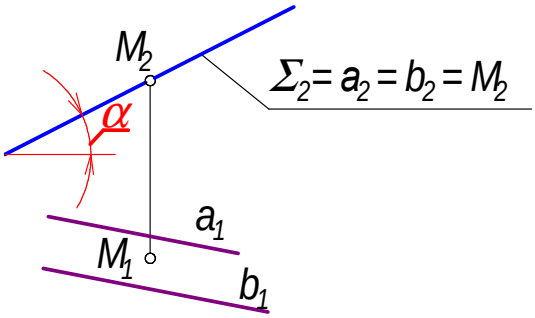


Рис. 3.9 – Плоский чертёж

$\Sigma(a \parallel b) \perp \Pi_2$ – фронтально проецирующая плоскость. $\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2$ – главная проекция; $\angle\alpha$ – угол наклона плоскости Σ к Π_1; прямые a и $b \subset \Sigma \Rightarrow a_2, b_2 = \Sigma_2$; Точка $M \in \Sigma \Rightarrow M_2 = \Sigma_2$.

3.3.2. Плоскости уровня (дважды проецирующие)

Если плоскость перпендикулярна одновременно двум плоскостям проекций, а следовательно, параллельна третьей, то она называется ***плоскостью уровня***.

3.3.2.1. Горизонтальная плоскость уровня

Горизонтальная плоскость уровня – это плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций: $\Delta \parallel \Pi_1$ (рис. 3.10, 3.11).

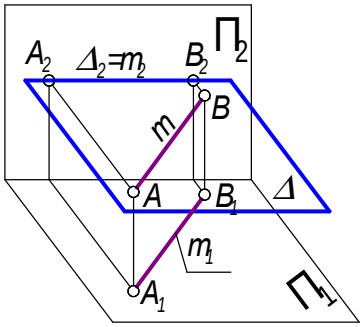


Рис. 3.10 – Пространственный чертёж

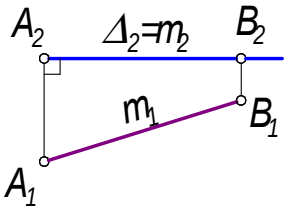


Рис. 3.11 – Плоский чертёж

$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp \Pi_2 \\ \Delta \perp \Pi_3\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \parallel \Pi_1$ – горизонтальная плоскость уровня; Δ_2 – главная проекция; $\Delta_2 \perp A_2A_1$; $m \subset \Delta \Rightarrow m_2 = \Delta_2$; $\Delta \parallel \Pi_1 \Rightarrow |m_1|$ – натуральная величина m.

Графический признак: фронтальная проекция Δ_2 горизонтальной плоскости уровня – прямая линия, перпендикулярная линиям связи в системе $\Pi_2 - \Pi_1$. Это ***главная*** проекция.

Так как каждая плоскость уровня параллельна одной из плоскостей проекций, то все плоские фигуры, расположенные на плоскости уровня, проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажений.

3.3.2.2. Фронтальная плоскость уровня

Фронтальная плоскость уровня – это плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций: $\Phi \parallel \Pi_2$ (рис. 3.12, 3.13).

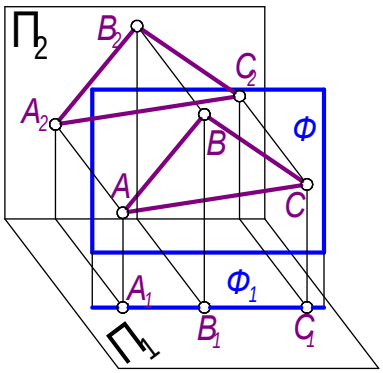


Рис. 3.12 – Пространственный чертёж

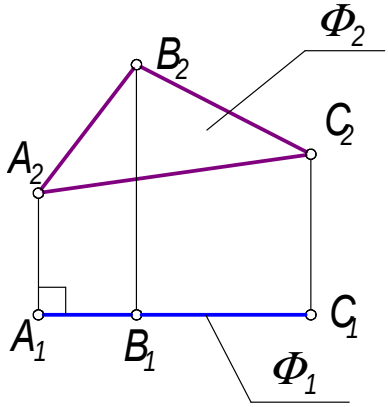


Рис. 3.13 – Плоский чертёж

Плоскость Φ задана ΔABC, Φ – фронтальная плоскость уровня.

$\left.\begin{array}{l}\Phi \perp \Pi_1 \\ \Phi \perp \Pi_3\end{array}\right\} \Rightarrow \Phi \parallel \Pi_2$; $\Phi 1 \perp A_2A_1$; $\Delta ABC \subset \Phi \Rightarrow A_1B_1C_1 = \Phi_1$; $|A_2B_2C_2|$ –натуральная величина ΔABC.

Графический признак: горизонтальная проекция Φ_1 фронтальной плоскости уровня – прямая линия, перпендикулярная линиям связи в системе $\Pi_1 - \Pi_2$. Это – ***главная*** проекция.

3.4. Особые линии плоскости

Если прямая принадлежит плоскости и занимает в ней какое–то особое положение, то она называется ***особой линией плоскости***. К ним относятся линии уровня плоскости: ***горизонталь, фронталь и профильная прямая***, а также ***линии наибольшего наклона*** плоскости.

3.4.1. Горизонталь плоскости

Горизонталь плоскости – это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная горизонтальной плоскости проекций: $\Gamma\ (a \parallel b)$

Построить: $h \subset \Gamma$; $h \parallel \Pi_1$

1. Проводим h_2 перпендикулярно линиям связи, (рис. 3.14)

2. Так как h принадлежит плоскости, то h_1 находим по двум точкам в плоскости ($1 \in a$, $2 \in b$). h_1 –натуральная величина h.

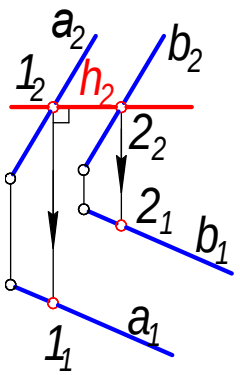


Рис. 3.14 – Начало построения горизонтали плоскости

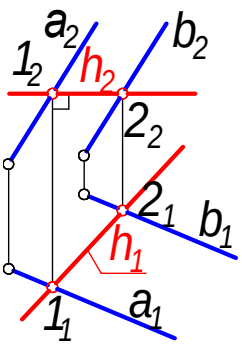


Рис. 3.15 – Конец построения горизонтали плоскости

Построение горизонтали в плоскости начинают с фронтальной проекции h_2: она всегда перпендикулярна линиям связи в системе $П_2 – П_1$. h_1 находят по принадлежности плоскости.

Если плоскость – фронтально проецирующая, то горизонталь такой плоскости – ***фронтально проецирующая прямая*** (рис. 3.16).

$Г(a \parallel b) \perp П_2;\ h \subset Г;\ h \parallel П_1$

Так как плоскость $Г$ – фронтально проецирующая, то единственная прямая в такой плоскости, параллельная плоскости проекций $П_1$ – фронтально проецирующая прямая $\Rightarrow h \perp П_2$.

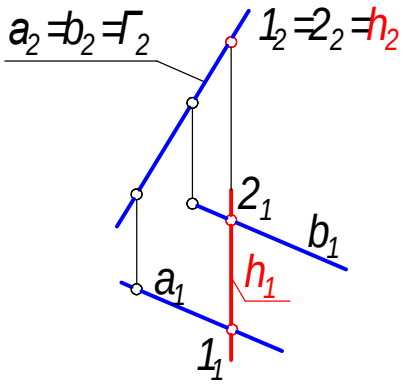


Рис. 3.16 – Построение горизонтали во фронтально проецирующей плоскости

3.4.2. Фронталь плоскости

Фронталь плоскости – это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций: $Σ(m \cap n)$ Построить: $f \subset Σ;\ f \parallel П_2$.

1. Проводим f_1 перпендикулярно линиям связи.

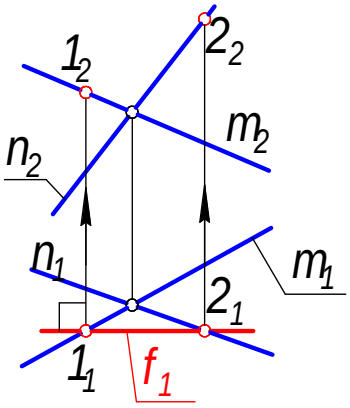


Рис. 3.17 – Начало построения горизонтали фронтали

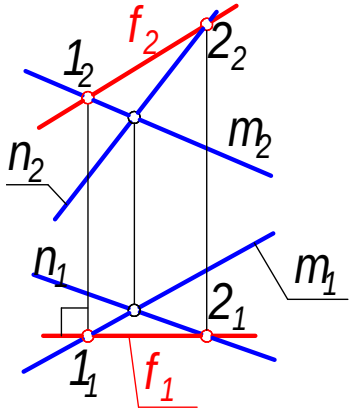


Рис. 3.18 – Конец построения горизонтали фронтали

2. Так как f принадлежит плоскости, то f_2 находим по двум точкам в плоскости **($1 \in m$, $2 \in n$).**

Построение фронтали в плоскости начинают с горизонтальной проекции f_1: она всегда перпендикулярна линиям связи в системе $\Pi_2 - \Pi_1$. Проекцию f_2 находят по принадлежности плоскости.

Это натуральная величина f.

Если плоскость – горизонтально проецирующая, то фронталь такой плоскости – ***горизонтально проецирующая прямая*** (рис. 3.19).

$\Sigma(m \cap n) \perp \Pi_1;\ f \subset \Sigma;\ f \parallel \Pi_2$

Так как плоскость Σ – горизонтально проецирующая, то единственная прямая в такой плоскости, параллельная плоскости проекций Π_2 – горизонтально проецирующая прямая $\Rightarrow f \perp \Pi_1$.

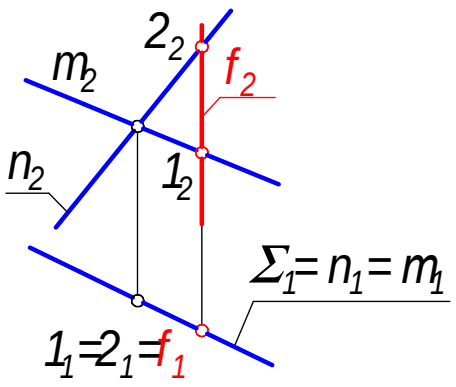


Рис. 3.19 – Построение фронтали в горизонтально–проецирующей плоскости.

3.4.3. Линия наибольшего наклона плоскости

Линия наибольшего наклона плоскости – это прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная одной из линий уровня плоскости. С её помощью определяют угол наклона заданной плоскости к одной из плоскостей проекций. Условимся линию наибольшего наклона плоскости к Π_1 обозначить буквой g, к Π_2 – буквой e.

Линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций называется **линией ската** (рис. 3.20.). Из физики известно, что шар, выпущенный из руки в точке A, покатится в плоскости Φ по линии ската g, перпендикулярной m – линии пересечения плоскостей Φ и Π_1.

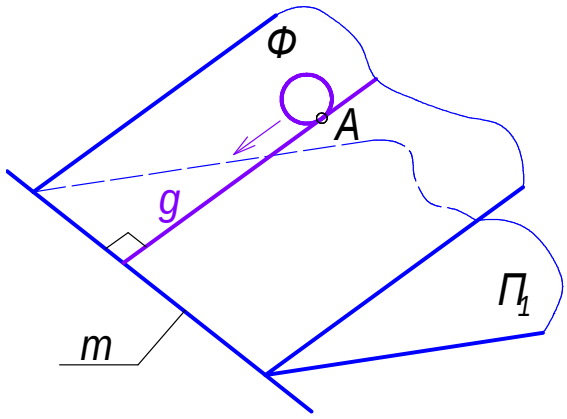


Рис. 3.20 – Физическое объяснение геометрического положения

Рассмотрим подробно построение этой линии на конкретном примере.

Задача: Определить угол наклона плоскости Φ к горизонтальной плоскости проекций (рис. 3.21).

Мерой двугранного угла является линейный угол. Следовательно, нам нужно определить угол между прямой g , перпендикулярной m (линии пересечения плоскостей Φ и Π_1), и её горизонтальной проекцией g_1 (рис. 3.22).

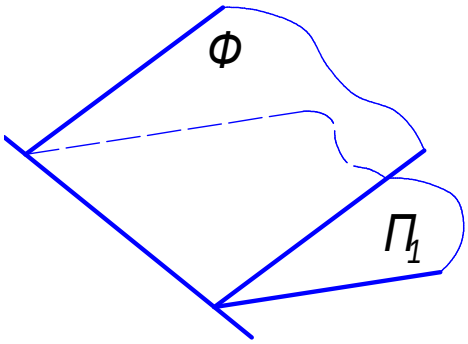


Рис. 3.21 – Пространственная модель.

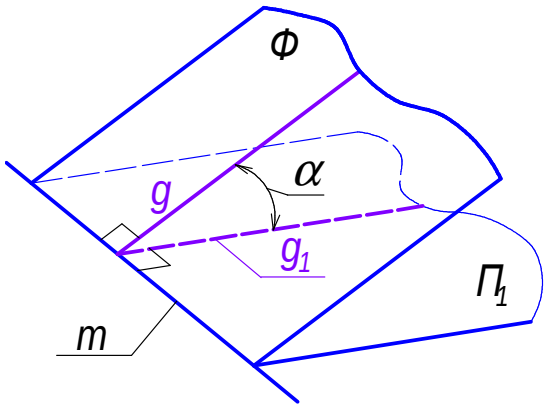


Рис. 3.22 – Пространственная геометрическая модель

Однако в плоских чертежах линии пересечения заданных плоскостей с плоскостями проекций чаще всего отсутствуют. Поэтому для построения линии ***g*** в плоскости ***Ф*** возьмём в этой плоскости горизонталь ***h*** (рис. 3.23).

Она будет располагаться параллельно ***m*** , так как ***m = Ф ∩ П₁*, а *h* // *П₁*.**

Поскольку ***g ⊥ m* , а *h* // *m* , то *g ⊥ h* .**

Спроецируем ***h*** на ***П₁*,** получим ***h₁*** (рис. 3.24). Так как ***h* // *m*** , то ***h₁* // *m₁***.

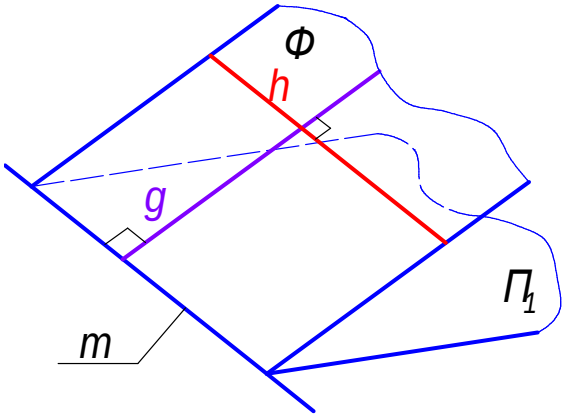


Рис. 3.23 – Начало построения

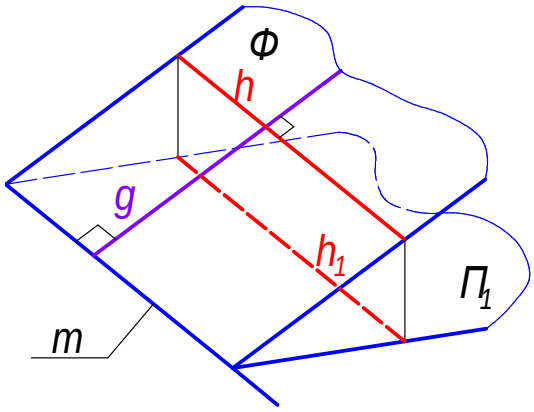


Рис. 3.24 – Последовательность построения

Согласно теореме о проецировании прямого угла (2-е свойство ортогонального проецирования), если ***g ⊥ h***, то ***g₁ ⊥ h₁***. Проводим ***g₁*** (рис. 3.25).

Угол ***α*** между ***g*** и ***g₁*** – есть угол наклона плоскости ***Ф*** к ***П₁***.

Таким образом, ***угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций – это угол между горизонтальной проекцией линии ската этой плоскости и её натуральной величиной***.

Выполним алгоритмическую запись вышеизложенного:

Ф ^ П₁ = g ^ g₁; g ⊥ h ⇒ g₁ ⊥ h₁.

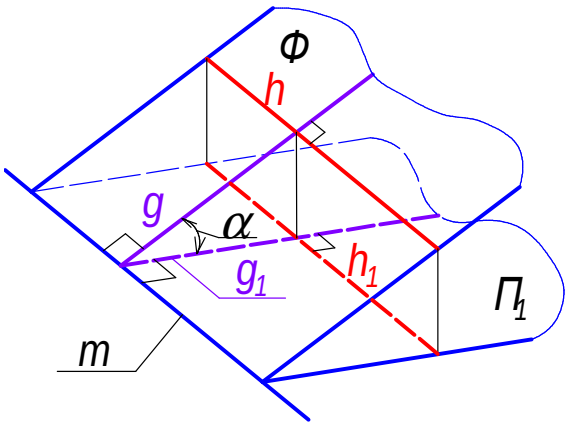


Рис. 3.25 – Конец пространственного моделирования задачи

Плоский чертёж

Зададим плоскость ***Ф*** треугольником ***ABC*** (рис. 3.83).

Алгоритм решения задачи

1. Проводим в плоскости ***Ф(ABC)*** горизонталь ***h(h₁,h₂)***.

2. Проводим $g_1(B_1K_1) \perp h_1$. Находим $g_2(B_2K_2)$ по принадлежности плоскости.

3. Находим натуральную величину g методом прямоугольного треугольника (рис. 3.26).

4. Угол α между g_1 и g – это угол наклона плоскости $\Phi(ABC)$ к Π_1.

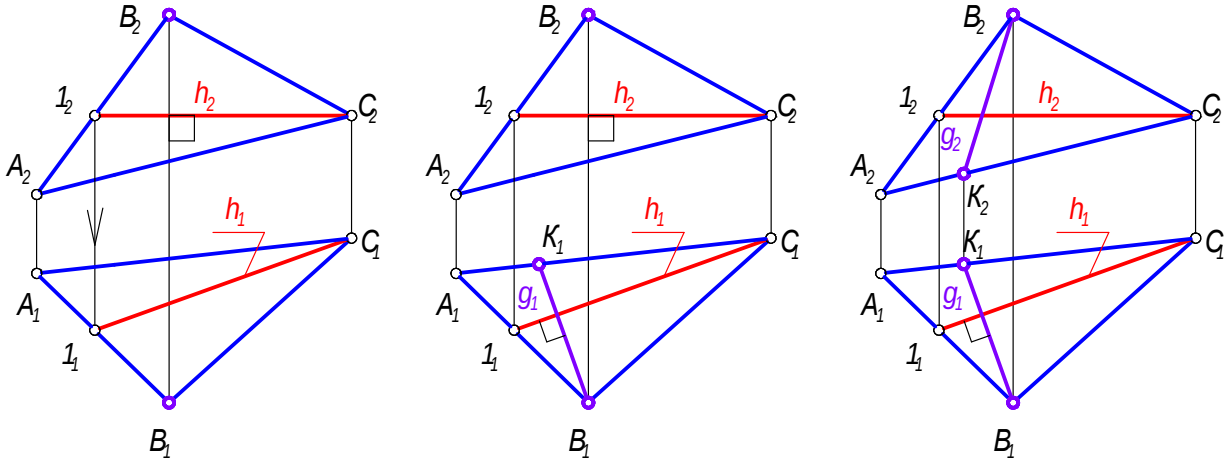


Рис. 3.26 – Последовательность решения задачи

Полное решение задачи представлено на рис. 3.28.

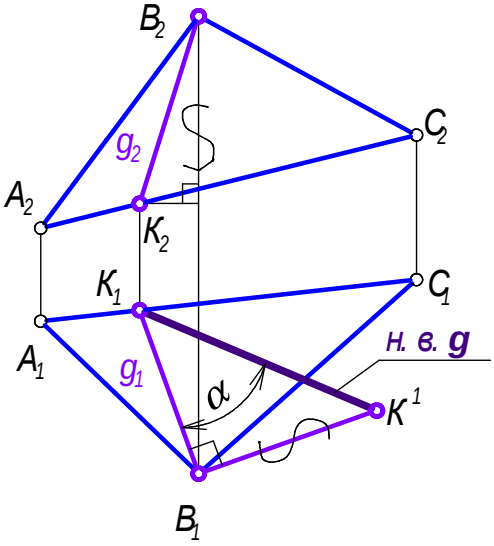


Рис. 3.27 – Выполнение пунктов 3 и 4 алгоритма построения

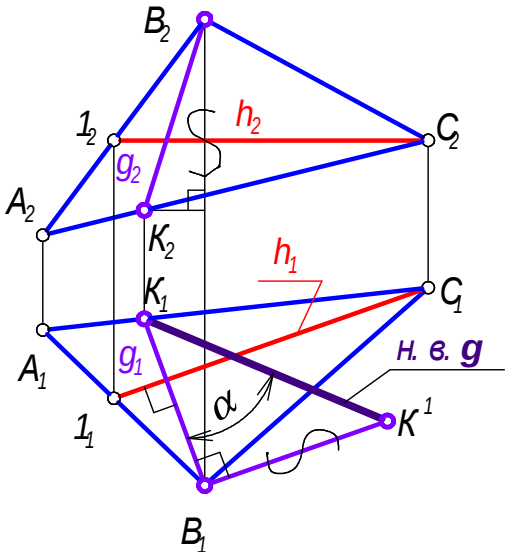


Рис. 3.28 – Полное решение задачи

Аналогично можно решить задачу на определение угла наклона плоскости Φ к Π_2. Для этого в плоскости Φ нужно выбрать фронталь, линию наибольшего наклона плоскости к Π_2 – e строить перпендикулярно фронтали ($e_2 \perp f_2 \Rightarrow e$) и находить натуральную величину e на Π_2.

Далее, рассмотрим задание плоскости с помощью линии ската g (рис.3.29 а) и линии наибольшего наклона плоскости к Π_2 – e (рис.3.30 а). В первом случае при решении конкретных задач к линии ската необходимо добавить горизонталь ($h_2 \perp$ линиям связи, $h_1 \perp g_1$) (рис.3.29 б); во втором – к линии наибольшего наклона e добавляют фронталь ($f_1 \perp$ линиям связи, $f_2 \perp e_2$) (рис. 3.30 б). В обоих случаях плоскость получается заданной пересекающимися прямыми.

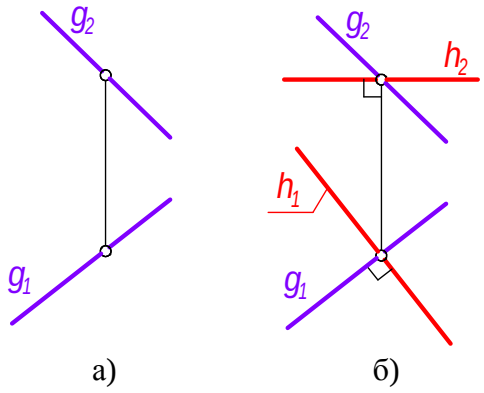


Рис. 3.29 – Задание плоскости с помощью линии ската

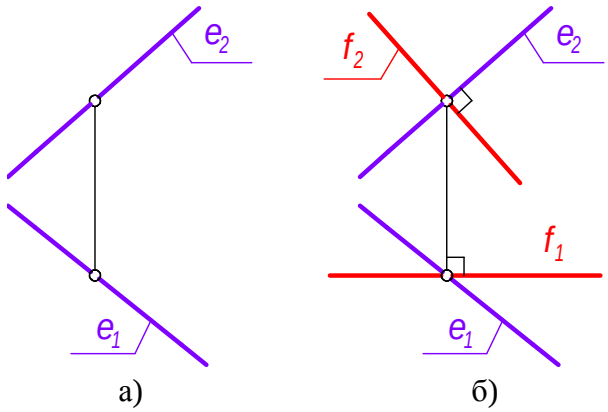


Рис. 3.30 – Задание плоскости с помощью линии наибольшего наклона

3.5. Прямая, параллельная плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача. Через точку ***K(K₂, K₁)*** провести прямую ***m(m₁)***, параллельную плоскости ***Σ (a ∩ b)*** (рис. 3.31).

Алгоритм.

1. В плоскости ***Σ*** (рис. 3.32) проведём прямую ***n***, параллельную ***m***. Для этого сначала проведём $1_1 2_1 \parallel m_1$, затем найдём $1_2 2_2$ в плоскости. Это будет n_2.

2. Через $1_2 2_2$ проведем n_2.Через точку K_2 проведём m_2 параллельно n_2.

3. Согласно пятому свойству параллельного проецирования, прямая ***m*** параллельна прямой ***n***, но $n \subset \Sigma$, следовательно, $m \parallel \Sigma$.

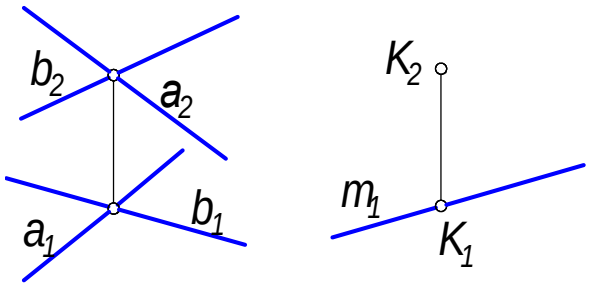


Рис. 3.31 – Графическое условие задачи

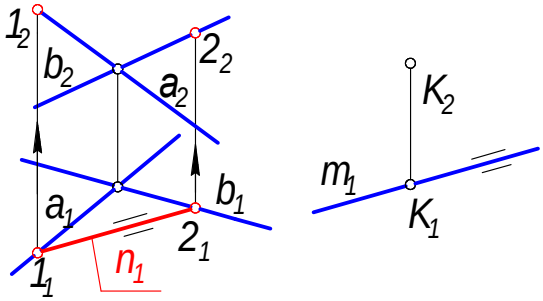


Рис. 3.32 – Выполнение пункта 1 алгоритма решения

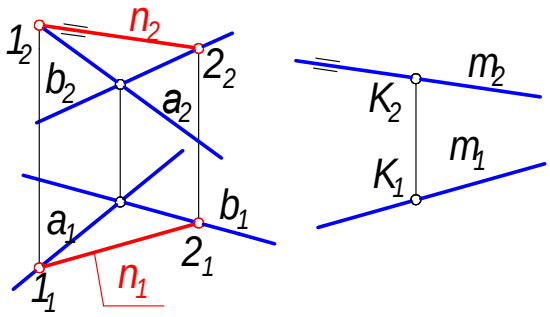


Рис. 3.33 – Выполнение пункта 2 алгоритма решения

3.6. Взаимная параллельность плоскостей

Построение двух взаимно параллельных плоскостей основано на известном положении, что ***две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости***.

Задача. Через точку ***К(К₁, К₂)*** (рис. 3.34) провести плоскость ***Δ***, параллельную плоскости ***Г(АВС)***. Плоскость ***Δ*** задать пересекающимися прямыми.

Алгоритм.

1. Плоскость ***Δ*** зададим прямыми $m \cap n = K$ (рис. 3.35).

2. Прямую ***m*** возьмём параллельно стороне ***СВ*** треугольника. Если $m \parallel CB$, то $m_1 \parallel C_1B_1$, а $m_2 \parallel C_2B_2$.

3. Прямую ***n*** возьмём параллельно стороне ***АВ*** треугольника. Если $n \parallel AB$, то $n_1 \parallel A_1B_1$, а $n_2 \parallel A_2B_2$.

4. Таким образом, плоскости $\Sigma(ABC)$ и $\Delta(m \cap n)$ параллельны.

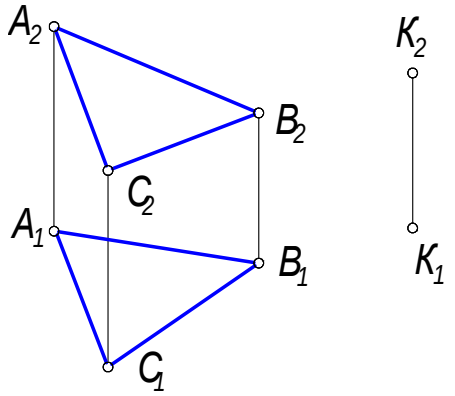


Рис. 3.34 – Графическое условие задачи

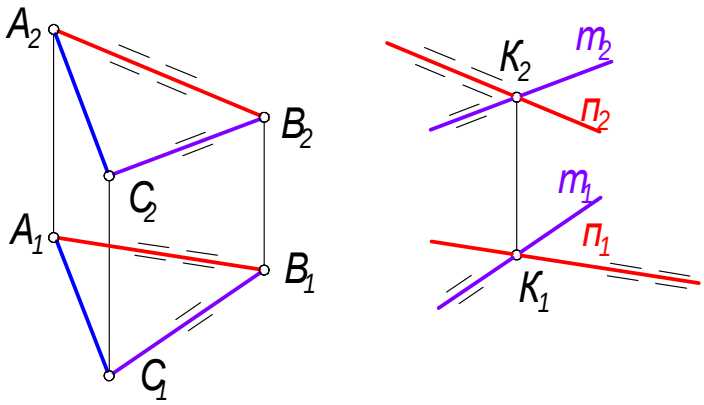


Рис. 3.35 – Выполнение пунктов 1 – 3 алгоритма решения задачи

Как вы думаете?

1. Сколько решений может иметь задача, представленная на рис. 3.34?
2. Чем можно ещё задать плоскость ***Δ***, кроме решения, приведённого на рис. 3.35?
3. Сколько ответов может быть у задачи, представленной на рис. 3.33? Почему?

Выводы.

1. В общем случае плоскость определяют три точки.
2. Общий признак плоскостей частного положения – одна из проекций вырождается в прямую линию.
3. Точку в плоскости находят по принадлежности какой-нибудь прямой этой плоскости.
4. В любой плоскости можно построить прямые уровня и линии наибольшего наклона плоскости к каждой из плоскостей проекций.
5. Через точку, лежащую вне плоскости, можно провести сколько угодно прямых, параллельных данной плоскости, но только одну плоскость, параллельную заданной.

3.7. Справочный материал

Примеры изображения плоскостей общего и частного положения, заданные геометрическими фигурами.

Плоскости общего положения

Графический признак плоскости общего положения – ни одна из проекций не является прямой линией (рис. 3.36).

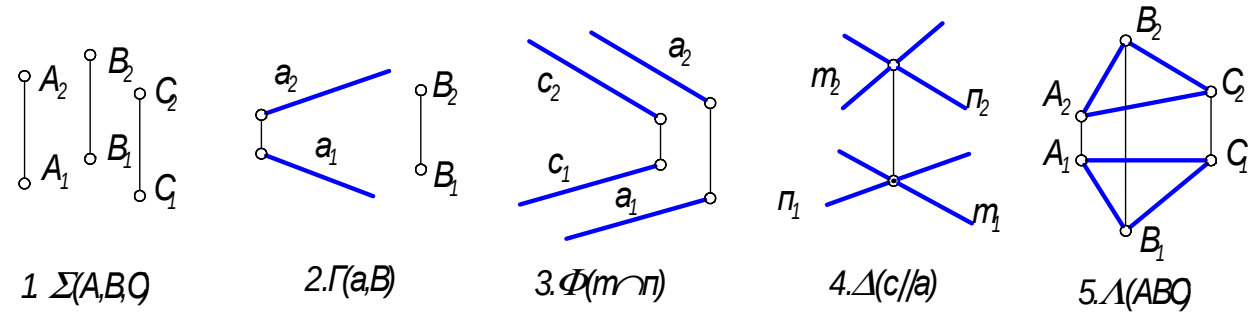


Рис. 3.36

Горизонтально проецирующие плоскости

Горизонтально проецирующие плоскости – это плоскости, горизонтальными проекциями которых являются прямые линии, не параллельные и не перпендикулярные линиям связи (рис. 3.37).

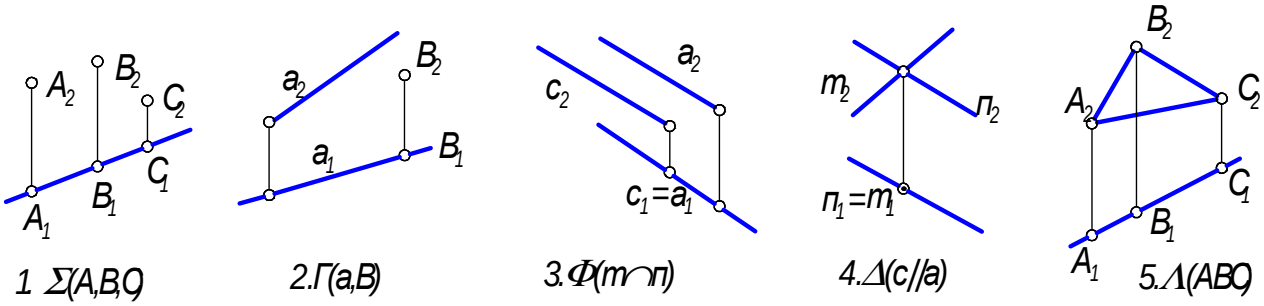


Рис. 3.37

Фронтально проецирующие плоскости

Фронтально проецирующие плоскости – это плоскости, фронтальными проекциями которых являются прямые линии, не параллельные и не перпендикулярные линиям связи (рис. 3.38).

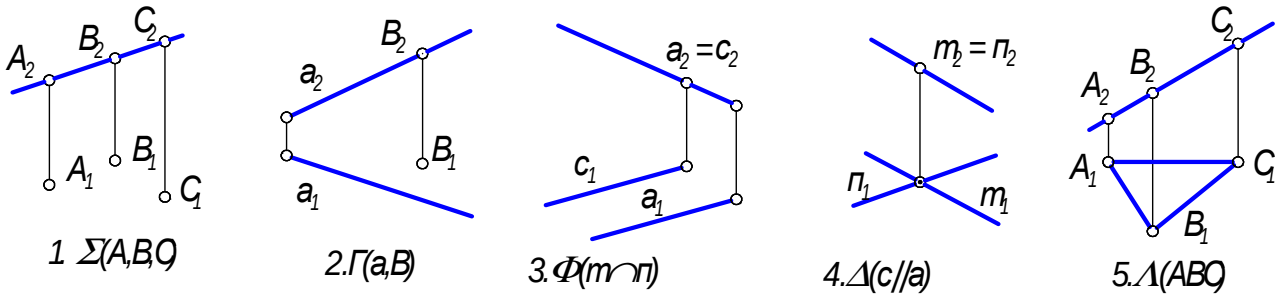


Рис. 3.38

Горизонтальные плоскости уровня

Горизонтальные плоскости уровня – это плоскости, фронтальными проекциями которых являются прямые линии перпендикулярные линиям связи (рис. 3.39).

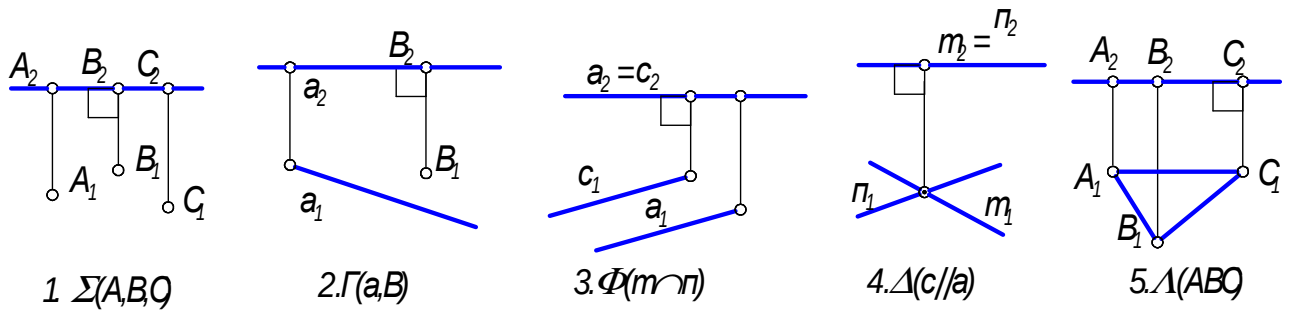


Рис. 3.39

Фронтальные плоскости уровня

Фронтальные плоскости уровня – это плоскости, горизонтальными проекциями которых являются прямые линии перпендикулярные линиям связи (рис. 3.40).

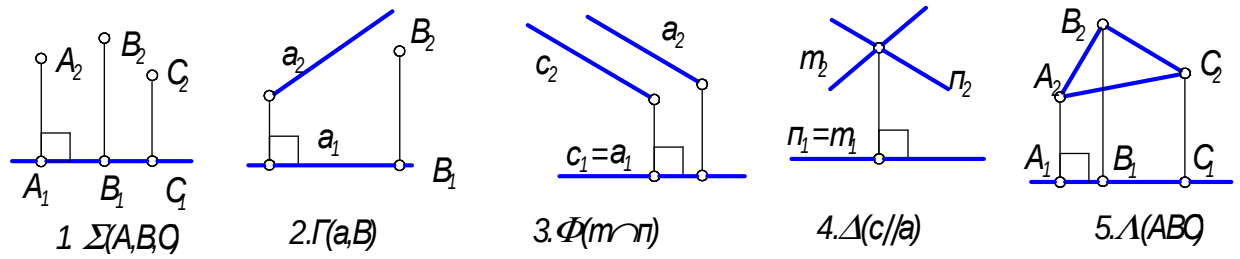
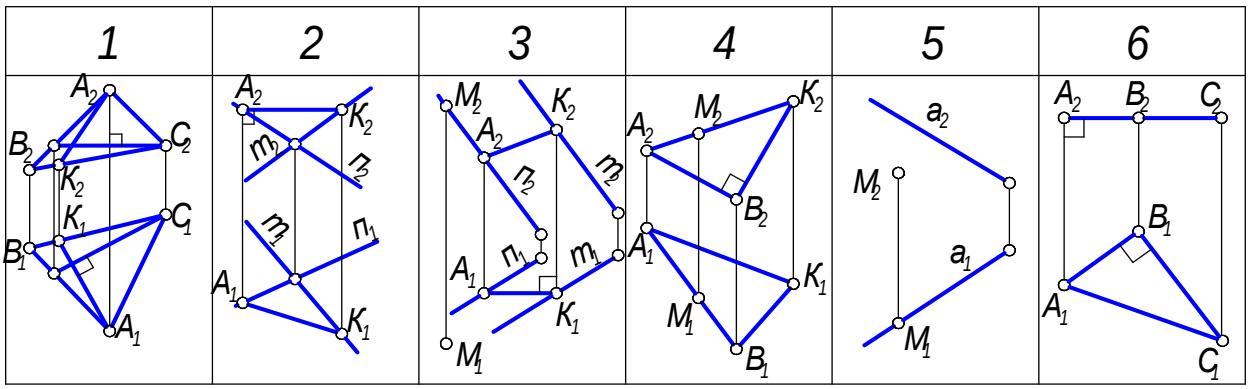


Рис. 3.40

Контрольные вопросы

1. Чем может быть задана плоскость на чертеже?
2. Как могут располагаться плоскости относительно плоскостей проекций, и как они называются?
3. Сформулируйте условие взаимной принадлежности точки и прямой плоскости.
4. Какие прямые называются особыми линиями плоскости?
5. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей.

Тест № 4



1. На каком чертеже точка ***M*** принадлежит плоскости?
2. В каком случае ***AK*** является фронталью плоскости?
3. На каком чертеже показан прямоугольный треугольник?
4. На каком чертеже ***AK*** – горизонталь плоскости?
5. Укажите чертёж плоскости уровня.
6. На каком чертеже ***AK*** является линией ската плоскости?
7. Укажите чертёж горизонтально проецирующей плоскости.
8. На каком чертеже имеется натуральная величина треугольника?

4. МЕТРИЧЕСКИЕ И ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Модуль №1 предполагает знакомство с задачами, связанными с различными измерениями: натуральных величин отрезков, углов, плоских фигур, расстояний между фигурами и т. д. Вы научитесь решать сложные инженерные конструктивные задачи.

4.1. Метрические задачи

Ведь между двух соседних точек
Прямая – самый краткий путь,
Иначе слишком много кочек
Необходимо обогнуть.

Л. Н.Мартынов

Как Вы думаете?

1. Что является кратчайшим расстоянием от точки до прямой, до плоскости?

2. Что является кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми, между двумя параллельными плоскостями?

3. На чертеже рис. 4.1 показан угол *ABC*. Присутствует ли на какой-нибудь плоскости проекций натуральная величина угла?

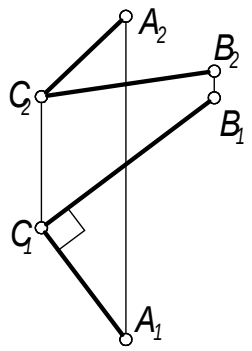


Рис. 4.1 – Условие задачи

Метрическими называются такие задачи, в условии или решении которых используютьсягеометрические фигуры или понятия, связанные с численной характеристикой.

Наиболее часто встречаются такие метрические задачи: на взаимную перпендикулярность геометрических фигур, на определение натуральной величины заданных отрезка или угла, на построение натурального вида плоской фигуры и т. п.

Из всего многообразия метрических задач выделяются две основные:

1. ***Первая основная метрическая задача – на перпендикулярность прямой и плоскости***.

2. ***Вторая основная метрическая задача – на определение натуральной длины отрезка***. Эта задача решается методом прямоугольного треугольника, который рассматривался в этом модуле.

Рассмотрим подробнее первую основную метрическую задачу.

4.1.1. Взаимная перпендикулярность прямой и плоскости

Из элементарной геометрии известно, что ***прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.***

Задача. Через точку $K \in \Sigma$ построить прямую ***n***, перпендикулярную плоскости $\Sigma(a \parallel b)$. Анализ решения задачи, проведём на примере пространственного чертежа (рис. 4.2).

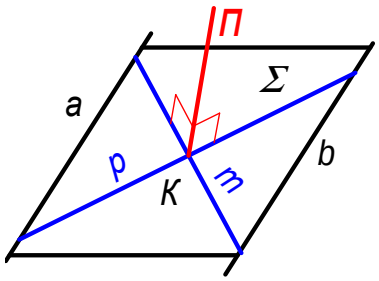


Рис. 4.2 – Пространственная модель задачи

Чтобы провести прямую $n \perp \Sigma$, нужно в этой плоскости выбрать две пересекающиеся прямые (на рис. 4.2 это $p \cap m = K$). Прямую n нужно строить перпендикулярно одновременно двум этим прямым.

Однако, если прямые p и m будут прямыми общего положения, то прямой угол к ним ни на одной плоскости проекций не спроецируется в натуральную величину. Согласно теореме о проецировании прямого угла (см. свойство **2** ортогонального проецирования), прямой угол спроецируется в натуральную величину на какую–нибудь плоскость проекций, если одна сторона прямого угла будет параллельной этой плоскости проекций. Поэтому в качестве прямых p и m выгодно взять горизонталь h и фронталь f (рис. 4.3). Тогда прямой угол между n и h спроецируется в натуральную величину на Π_1, а прямой угол между n и f – на Π_2.

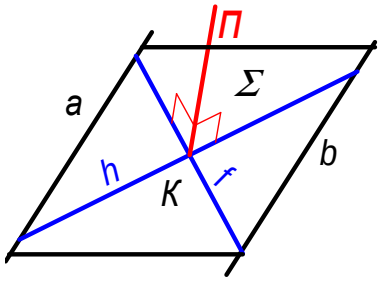


Рис. 4.3 – Пространственная модель, где плоскость задана линиями уровня

Плоский чертёж. На рис. 4.4 плоскость Σ задана параллельными прямыми a и b. Точка $K(K_2)$ принадлежит этой плоскости. Нужно построить $n \perp \Sigma$, $n \in K$.

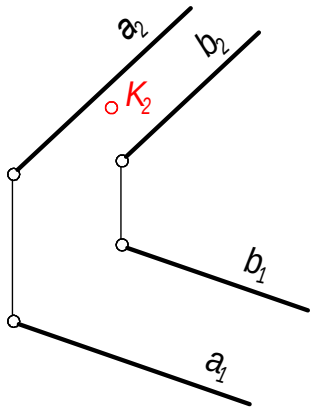


Рис. 4.4 – Условие задачи

Согласно приведённым выше рассуждениям, в плоскости необходимо выбрать **горизонталь** и **фронталь**, затем перпендикулярно каждой из них строить **n**. Построение начинаем с горизонтали (рис. 4.5).

Через точку K_2 проводим h_2 перпендикулярно линиям связи, находим h_1, а на ней, с помощью линии связи, K_1. Так как $n \perp h$, то $n_1 \perp h_1$, поэтому проводим $n_1 \perp h_1$ через точку K_1.

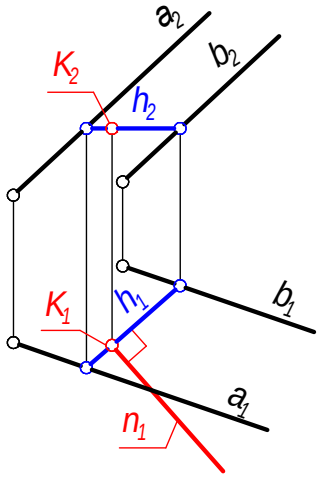


Рис. 4.5 – Построение перпендикуляра к горизонтали плоскости

Аналогично находим n_2 (рис. 4.6). Через точку K_1 проводим f_1 перпендикулярно линиям связи, находим f_2. Так как $n \perp f$, то $n_2 \perp f_2$, поэтому проводим $n_2 \perp f_2$ через точку K_2.

Полностью решение задачи представлено на рис. 4.7. Видимость прямой n не учитывалась.

Алгоритмическая запись решения

1. $h \subset \Sigma$, $f \subset \Sigma$, $h \cap f = K$.
2. $K \in n \Rightarrow K_1 \in n_1$, $K_2 \in n_2$.
3. $n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1$.
4. $n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2$.

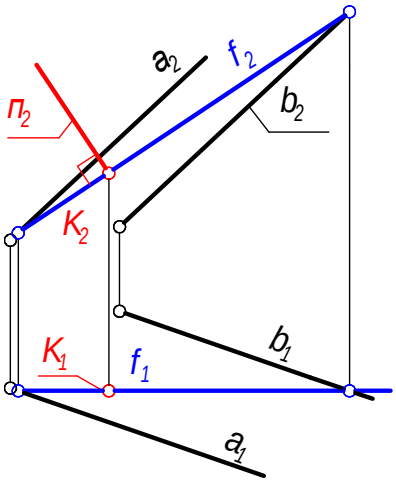


Рис. 4.6 – Построение перпендикуляра к фронтали плоскости

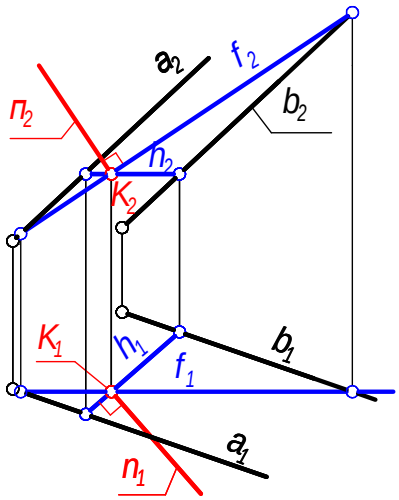


Рис. 4.7 – Полное решение задачи на комплексном чертеже

Итак, чтобы задать на комплексном чертеже прямую ***n***, перпендикулярную данной плоскости ***Σ***, достаточно построить $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$, расположив их в любом месте чертежа, чтобы $\boldsymbol{n_1 \perp h_1}$, $\boldsymbol{n_2 \perp f_2}$, где ***h*** и ***f*** – горизонталь и фронталь плоскости, при условии, что $\boldsymbol{h \cap f}$.

Если плоскость ***Σ*** занимает проецирующее положение, то прямая, перпендикулярная ей, является линией уровня (рис. 4.8, 4.9).

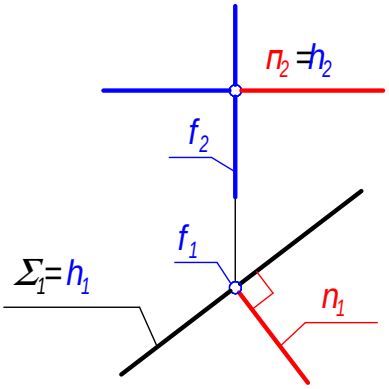


Рис. 4.8 – Построение перпендикуляра к горизонтально проецирующей плоскости

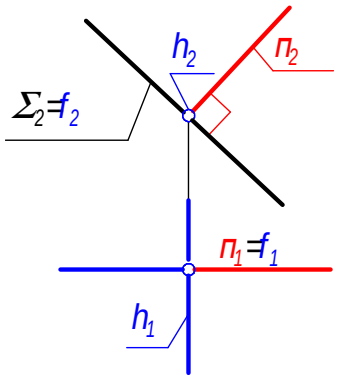


Рис. 4.9 – Построение перпендикуляра к фронтально проецирующей плоскости

Если ***Σ*** – горизонтально проецирующая, то $\boldsymbol{\Sigma \perp \Pi_1 \Rightarrow h_1 = \Sigma_1}$, $\boldsymbol{f \perp \Pi_1}$; $\boldsymbol{n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1}$; $\boldsymbol{n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2 \Rightarrow n}$ – горизонталь.

Если ***Σ*** – фронтально проецирующая, то $\boldsymbol{\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow f_2 = \Sigma_2}$, $\boldsymbol{h \perp \Pi_2}$, $\boldsymbol{n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1}$; $\boldsymbol{n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2}$; $\boldsymbol{\Rightarrow n}$ – фронталь.

Чтобы лучше понять данное утверждение, нужно вспомнить, какие прямые являются линиями уровня в проецирующих плоскостях.

4.1.2. Взаимная перпендикулярность двух плоскостей общего положения

Известно, что ***две плоскости взаимно перпендикулярны, если в одной из них лежит прямая, перпендикулярная другой плоскости***. Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

Задача. Через точку ***K***, взятую вне плоскости ***Г(ABC),*** провести плоскость $\boldsymbol{\Sigma \perp \Gamma}$ (рис. 4.10).

Алгоритм.

1. Плоскость Σ (рис. 4.11) задаём пересекающимися прямыми $m \cap n = K$. Согласно вышесказанному, одна из них должна быть перпендикулярна плоскости Γ. Пусть это будет n.

2. В плоскости Γ выбираем горизонталь и фронталь.

3. Через точку K_1 проводим $n_1 \perp h_1$, а через K_2 проводим $n_2 \perp f_2$, следовательно, $n \perp \Gamma$.

4. Прямую m, проходящую через точку K, задаём произвольно.

Таким образом, $\Sigma(n \cap m) \perp \Gamma(ABC)$.

Алгоритмическая запись решения.

1. $h \subset \Gamma \Rightarrow h_2 \Rightarrow h_1, f \subset \Gamma \Rightarrow f_1 \Rightarrow f_2$.

2. $\Sigma = m \cap n = K, n \perp \Gamma \Rightarrow n_1 \perp h_1, n_2 \perp f_2$.

3. $\Sigma \perp \Gamma$.

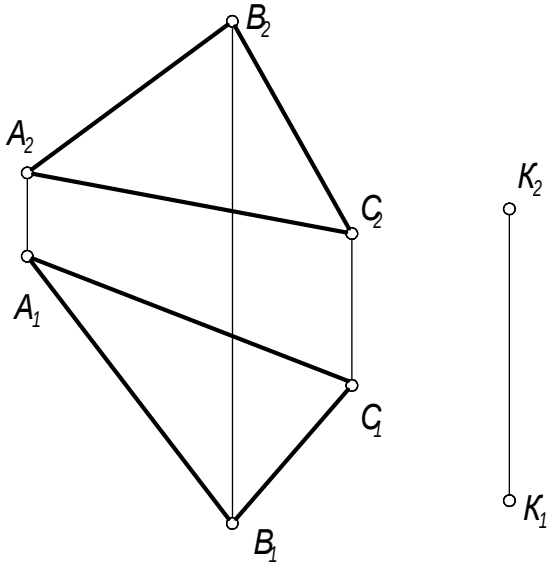


Рис. 4.10 – Условие задачи

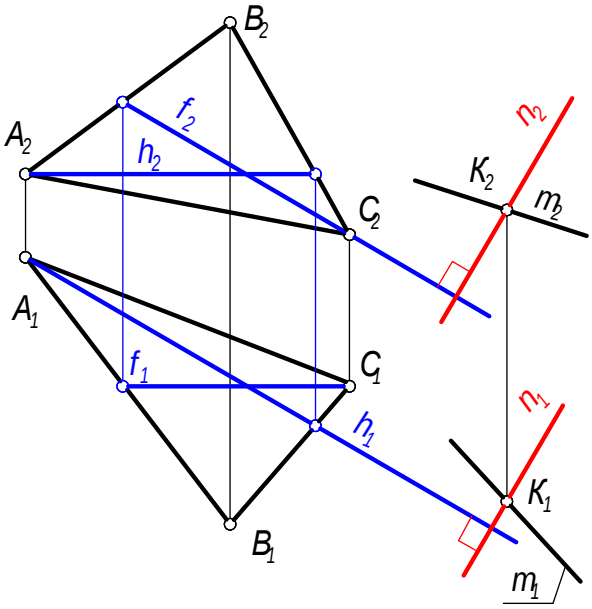


Рис. 4.11 – Решение задачи

4.1.3. Задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами

К таким задачам относятся: задачи на определение расстояний от точки до прямой, до плоскости, до поверхности; между параллельными и скрещивающимися прямыми; между параллельными плоскостями и т. п.

Все эти задачи объединяют три обстоятельства:

во-первых, поскольку кратчайшим расстоянием между такими фигурами является перпендикуляр, то все они сводятся к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости;

во-вторых, в каждой из этих задач необходимо определять натуральную длину отрезка, то есть решать вторую основную метрическую задачу;

в-третьих, это сложные по составу задачи, они решаются в несколько этапов, и на каждом этапе решается отдельная, небольшая конкретная задача.

Рассмотрим решение одной из таких задач.

Задача. Определить расстояние от точки M до прямой общего положения a (рис. 4.12.).

Алгоритм.

1 этап. Расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр. Поскольку прямая a – общего положения, то для построения перпендикуляра к ней необходимо: вначале через точку M провести плоскость Σ, перпендикулярную a. Задаём эту плоскость, как обычно, $h \cap f$, при этом $h_1 \perp a_1$, а $f_2 \perp a_2$, (рис. 4.13)

2 этап. Для построения перпендикуляра необходимо найти для него вторую точку. Это будет точка ***К***, принадлежащая прямой ***а***. Для её нахождения нужно решить позиционную задачу, то есть найти точку пересечения прямой ***а*** с плоскостью ***Σ***. Решаем ***первую главную позиционную задачу по третьему алгоритму*** (рис. 4.14):

– вводим плоскость–посредник $\boldsymbol{Г, Г \perp П_1, Г \supset a \Rightarrow Г_1 = a_1}$;

– $\boldsymbol{Г \cap Σ = b, Г \perp П_1 \Rightarrow b_1(1_1 2_1) = Г_1, b \subset Σ \Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset Σ_2}$.

– $\boldsymbol{b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1}$.

3 этап. Находим натуральную величину ***МК*** методом прямоугольного треугольника, (рис. 4.15).

Полное решение задачи показано на рис. 4.16.

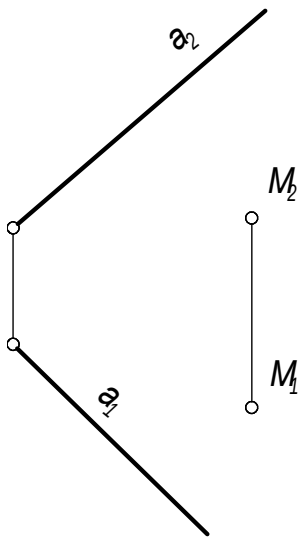


Рис. 4.12 – Условие задачи

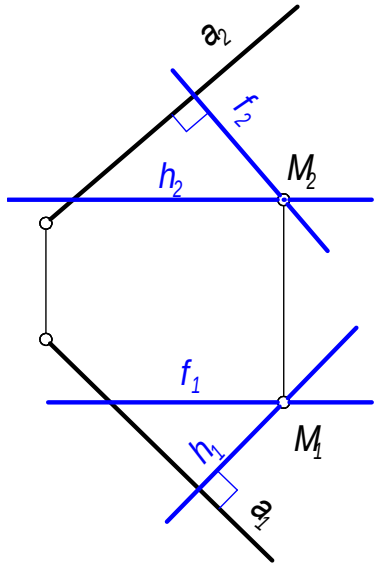


Рис. 4.13 – Решение 1 этапа задачи

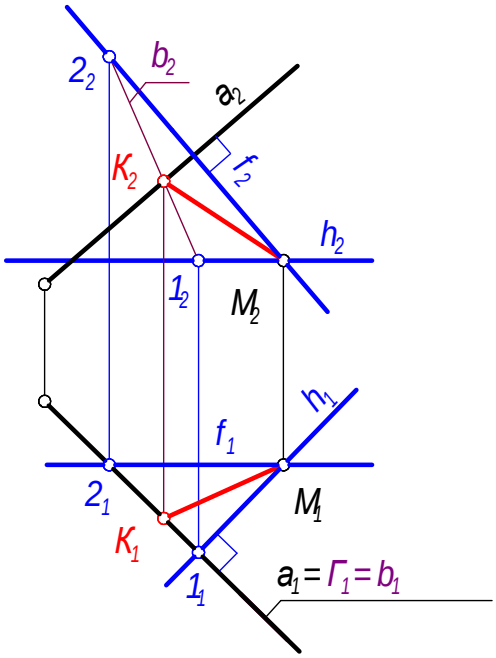


Рис. 4.14 – Решение 2 этапа задачи

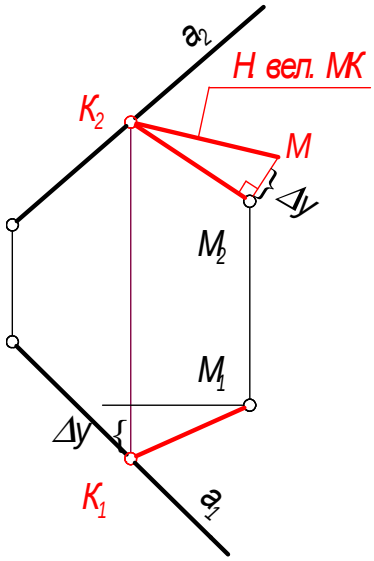


Рис. 4.15 – Решение 3 этапа задачи

Алгоритмическая запись решения:

1. $\Sigma \perp a$, $\Sigma = h \cap f = M$, $h_1 \perp a_1$, $f_2 \perp a_2$.

2. Вводим плоскость – посредник Γ,

– $\Gamma \perp \Pi_1$, $\Gamma \supset a \Rightarrow \Gamma_1 = a_1$;

– $\Gamma \cap \Sigma = b$, $\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow b_1(1_1 2_1) = \Gamma_1$, $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset \Sigma_2$.

– $b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1$.

3. Находим натуральную величину MK.

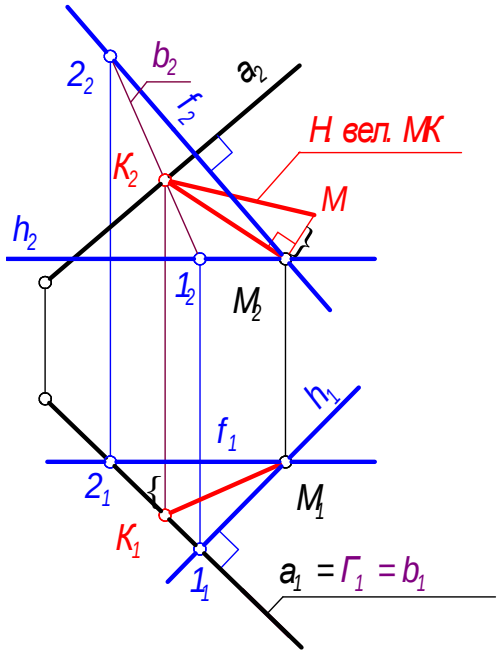


Рис. 4.16 – Полное решение задачи

Выводы:

1. Решение всех метрических задач сводится к решению первой основной метрической задачи – на взаимную перпендикулярность прямой и плоскости.

2. При определении расстояний между геометрическими фигурами всегда используется вторая основная метрическая задача – на определение натуральной величины отрезка.

3. Плоскость, касательную к поверхности в одной точке, можно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых является касательной к данной поверхности.

4.2. Позиционные задачи

В данном модуле вы научитесь находить общий элемент пересекающихся геометрических фигур в пространстве, овладеете алгоритмом построения проекций элементов пересечения геометрических фигур, занимающих различное положение относительно плоскостей проекций.

В технике детали большинства изделий имеют форму, представляющую собой поверхность, пересечённую либо плоскостями, либо другими поверхностями. Для того, чтобы проектировать и изготавливать такие изделия, необходимо научиться строить линии пересечения различных геометрических фигур. В этом вам поможет данный раздел начертательной геометрии.

Позиционными называют такие задачи, в которых определяется взаимное расположение геометрических фигур в пространстве.

Существует три типа позиционных задач:

1. Взаимный порядок геометрических фигур.
2. Взаимная принадлежность геометрических фигур.
3. Взаимное пересечение геометрических фигур.

Первые две задачи были рассмотрены в предыдущих разделах.

Взаимный порядок геометрических фигур – это расположение геометрических фигур относительно плоскостей проекций и наблюдателя: «ближе – дальше», «выше – ниже», «левее – правее» и т.д.

Взаимная принадлежность геометрических фигур определяется понятиями «точка принадлежит ...», «прямая принадлежит ...» и т. д.

4.2.1. Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры непроецирующие

В данном случае задача усложняется тем, что на чертеже нет ***главной проекции*** ни у одной из пересекающихся фигур. Поэтому для решения таких задач специально вводят ***вспомогательную секущую поверхность-посредник***, которая пересекает обе фигуры, выявляя общие точки. Эта *поверхность-посредник* может быть ***проецирующей***, и тогда решение задачи можно свести ко второму алгоритму. Решение первой и второй главной позиционной задачи рассмотрим отдельно.

4.2.1.1. Решение первой главной позиционной задачи

Для нахождения точек пересечения прямой с поверхностью в качестве поверхности-посредника чаще всего берут проецирующую плоскость, которую проводят через данную прямую. Далее находят линию пересечения этой плоскости с поверхностью, используя 2 алгоритм, и определяют точки пересечения полученной линии с данной прямой. Эти точки и будут являться точками пересечения поверхности с прямой (рис. 4.17).

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере.

Задача. Найти точку пересечения плоскости ***Г(АВС)*** с прямой **а**. Определить видимость прямой (рис. 4.18).

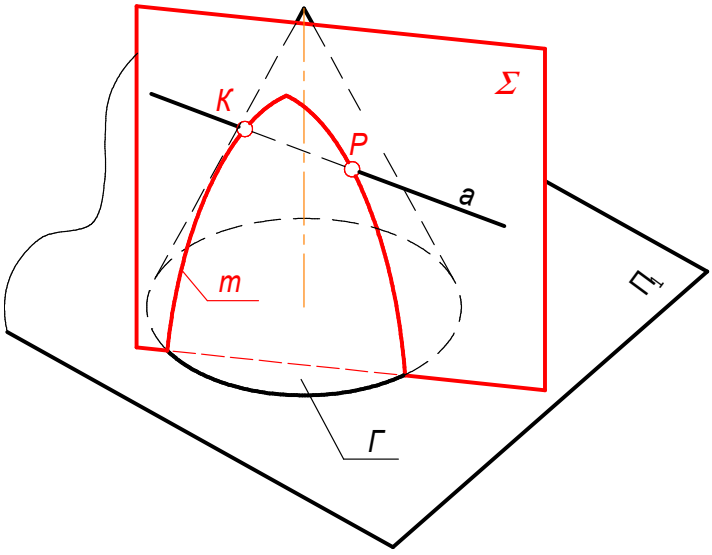


Рис. 4.17 – Пространственная модель решения задачи

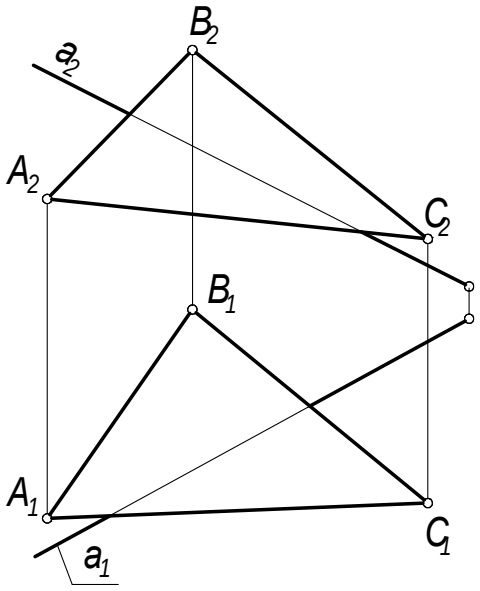


Рис. 4.18 – Условие задачи

Алгоритм.

1. Выберем плоскость-посредник Σ так, чтобы она включала в себя прямую ***а*** и была бы проецирующей, например, относительно $П_1$. Тогда Σ_1 совпадёт с a_1 (рис. 4.19 а, б).

2. Результатом пересечения проецирующей плоскости Σ с плоскостью общего положения ***АВС***, будет прямая ***m***. Задачу решаем по ***второму алгоритму***: проекция m_2 совпадает с Σ_2, проекцию m_1 находим по принадлежности плоскости ***АВС***; $m = 12 \Rightarrow m_2 = 1_2 2_2$.

3. Проекция m_2, пересекаясь с a_2, даёт нам точку $K_2 \Rightarrow K_1$.

4. Видимость прямой ***а*** определяем методом ***конкурирующих точек*** (рис. 4.19 в):

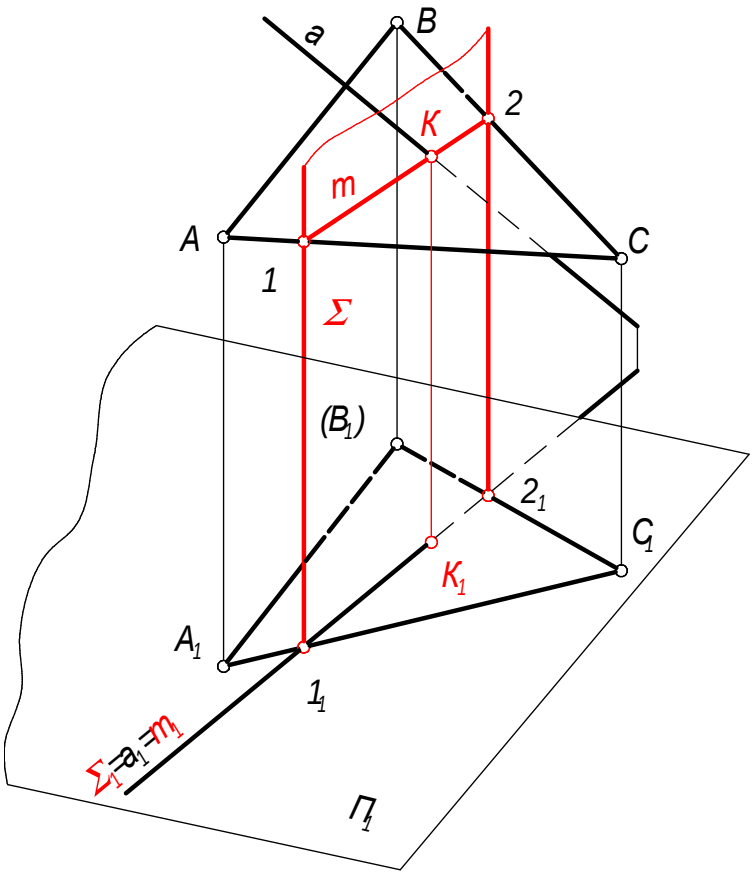


Рис. 4.19 а – Выбор плоскости посредника

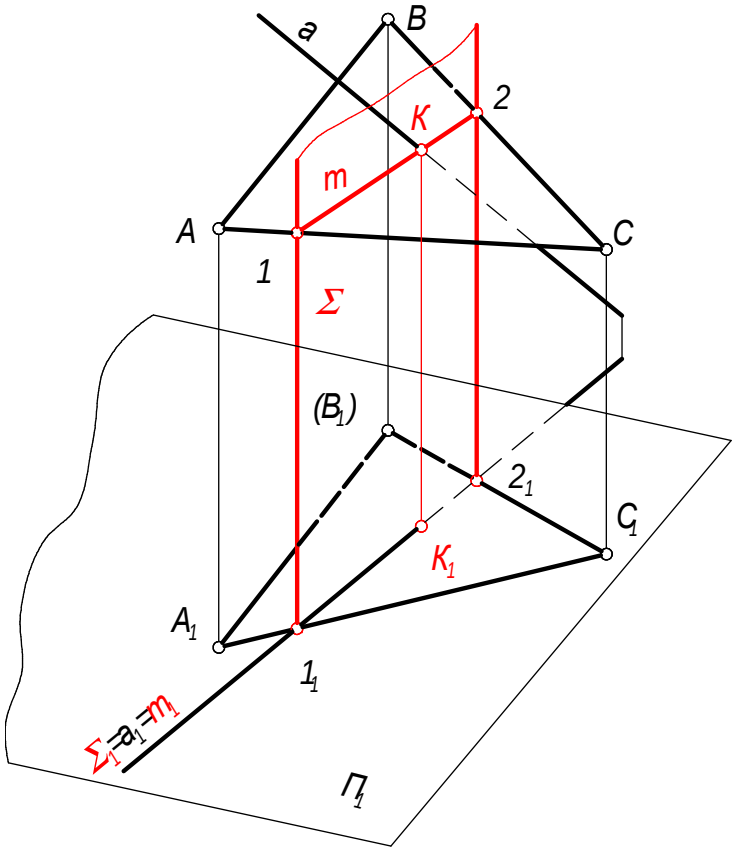


Рис. 4.19 б – Построение линии пересечения плоскостей

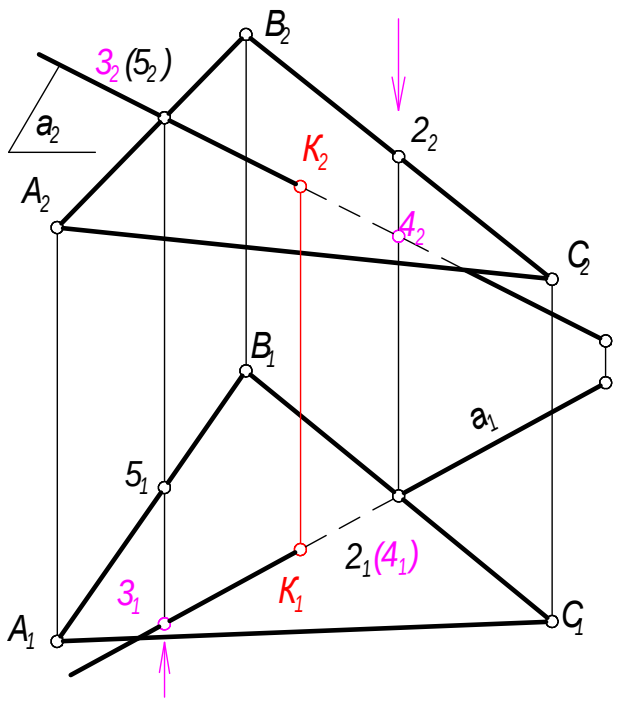


Рис. 4.19 в. – Определение видимости прямой

Видимость относительно $П_2$:

Точка 5∈ АВ, точка 3∈ а – фронтально конкурирующие. На $П_2$ видна точка **3** ⇒ участок прямой ***а*** слева от точки K_2 – видимый.

Видимость относительно $П_1$:

Точка 2 ∈ ВС, точка 4 ∈ а – горизонтально конкурирующие. На $П_1$ видна точка ***2*** ⇒ участок прямой ***а*** справа от точки K_1 до точки 4_1 – невидимый.

Выполним краткую алгоритмическую запись решения задачи:

Г(АВС) ∩ а = К. 1 ГПЗ, 3 алгоритм.

1. Σ– плоскость–посредник, Σ ⊃ а, Σ // $П_1$ ⇒ $Σ_1$= a_1;

2. Σ ∩ Г = m. 2 ГПЗ, 2 алгоритм. Σ ⊥ $П_1$ ⇒ m_1 = $Σ_1$; m_2 ⊂ Г

3. m_2 ∩ a_2 = K_2 ⇒ K_1.

Такой алгоритм решения приемлем для нахождения точек пересечения любой поверхности с прямой линией. Разница заключается в форме линии ***m***, которая является результатом пересечения плоскости-посредника с заданной поверхностью и зависит от вида поверхности. В рассмотренном примере ***m*** – это прямая линия.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются метрическими?
2. Какие две основные метрические задачи Вы знаете?
3. Чем выгоднее задать плоскость, перпендикулярную прямой общего положения?
4. Как называется плоскость, перпендикулярная одной из линий уровня?
5. Как называется плоскость, перпендикулярная одной из проецирующих прямых?
6. Какие задачи называются позиционными?
7. От чего зависит выбор алгоритма решения главных позиционных задач?

Источники

1. Бубенников А. В. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985 – 288с.: ил.
2. Бубенников А. В. Начертательная геометрия: Задачи для упражнений: Учебн. пособие. – М.: Высш. шк., 1981 – 296 с.: ил.
3. Виницкий И. Г. Начертательная геометрия. Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1975. – 280 с.
4. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие / Под ред. Ю. Б. Иванова. – 23-е изд. перераб. – М.: Наука. 1988. –272 с.
5. Королев Ю. И. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1987. – 319 с.: ил.
6. Королев Ю. И. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов / Ю.И. Королев. – СПб.: Питер. 2006. – 252 с.
7. Климухин А. Г. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стойиздат, 1978 – 334с.
8. Крылов Н. Н., Иконникова Г. С., Николаев В. Л., Васильев В. Е.: под ред. Крылова Н. Н. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов – 7–е изд. перераб. и доп. – М.: Высшая школа. 2001
9. Лагерь А. И., Колесникова Э. А. Инженерная графика / Учеб. для инж.–техн. спец. вузов.– М.: Высш. шк., 1985 – 176 с.
10. Михайленко В. Є., Ванін В. В., Ковальов С. М. Інженерна та комп'ютерна графіка. Підручник. За ред. В. Є. Михайленка. – К.: Каравела, 2010. – 360 с.
11. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, Н. М. Лаврухина; Под ред. Н. Н. Крылова. – 6 изд., пепераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. –240 с. ил.
12. Павлова А. А. Начертательная геометрия: Учебник для студентов педагогических институтов по специальности №03.02 (2120) «Труд» («Общетехнические дисциплины и труд»). – М.: Прометей 1993. – 280 с.: ил.
13. Современный курс начертательной геометрии: [Учеб. для вузов по направлению «Авиа- и ракетостроение» по всем инж. спец.] /Л. Г. Нартова, А. М. Тевлин, В. С. Полозов, В. И. Якунин;] Под ред. Нартовой Л. Г., Тевлина А.М.. – М.: МАИ, 1996.– 253 с.: ил. – ISBN 5–7035–1367–7
14. Фролов С. А. Начертательная геометрия: Учебник для вузов / С. А. Фролов. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА–М. 2007. – 286 с.

Навчальне видання

ЛУСЬ Володимир Іванович

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

МОДУЛЬ 1

(Змістовий модуль № 1 – точка, лінія, площина)

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *Т. Є. Киркач*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

Підп. до друку 03.09.2013 р.
Друк на ризографі
Тираж 500 пр.

Формат 210×297 1/8
Ум. друк. арк. 2,1
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4064 від 12.05.2011 р.