МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК

В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

для самостійного вивчення теми

«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання
за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво»,
6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка
та електротехнології»)

Харків – ХНУМГ – 2013

Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Х.: ХНУМГ, 2013. – 77 с.

Укладачі: Г. А. Кузнецова,
С. М. Ламтюгова,
Ю. В. Ситникова

Навчальний довідник побудовано за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджено з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики.

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 2 від 25.09.2013 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

У довіднику викладено теоретичний матеріал щодо рівнянь ліній на площині та в просторі за темою «Аналітична геометрія», яка входить до курсу вищої математики для студентів 1, 2 курсів будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології».

Довідник «Аналітична геометрія» складається з 9 розділів:

1 розділ «Пряма лінія на площині»

2 розділ «Криві другого порядку»

3 розділ «Лінії в полярній системі координат»

4 розділ «Параметричні рівняння лінії»

5 розділ «Деякі важливі криві»

6 розділ «Площина у просторі»

7 розділ «Пряма у просторі»

8 розділ «Взаємне розташування прямої та площини в просторі»

9 розділ «Поверхні другого порядку»

та додатків.

Теоретичний матеріал представлено у вигляді опорних таблиць, які містять: види рівнянь ліній, коментарі, зауваження, рисунки, приклади розв'язку типових задач з застосуванням теоретичного матеріалу.

У додатках подано окремі визначення, теореми та задачі, розв'язок яких викликає труднощі, або є допоміжним матеріалом під час розв'язку більш складних задач.

З ІСТОРІЇ ПРЕДМЕТУ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Аналітична геометрія виникла в першій половині XVII ст. у зв'язку з назрілими потребами науки й техніки. Поява цієї галузі наук підготовлена працями давньогрецьких математиків (Менехм у IV ст. до н. е., Аполлоній у III-II ст. до н. е. та інші). Але її засновником вважають французького математика Рене Декарта (1596-1650), хоча її методами достатньо володів також і його сучасник П'єр Ферма (1601-1655).

Теорія Декарта заснована на двох ідеях: ідеї координат та ідеї геометричної інтерпретації невизначених рівнянь. Ці ідеї аналітичної геометрії широко застосовуються в усіх галузях вищої математики, де вивчається залежність між змінними величинами, зокрема у математичному аналізі.

Загалом, геометрія вивчає об'єкти, які можуть бути ототожнені у деякому сенсі з точками, і представлені як математична модель, відтворена у співвідношеннях між цими об'єктами. В аналітичній геометрії точка визначена системою чисел – координат x, y, z, отже, геометричні факти записуються у вигляді співвідношень між цими координатами.

Таким чином, будь-яку лінію слід розглядати як геометричне місце точок. У визначенні лінії як геометричного місця точок міститься властивість, загальна для всіх точок лінії. Якщо точка переміщується за лінією, її координати змінюються, залишаючись пов'язаними деякою умовою, яка характеризує точки лінії. Тож, ми отримуємо деяке співвідношення між x, y, z, яке виконується тільки тоді, коли точка рухається вздовж лінії.

Рівняння між змінними x, y, z, якому задовольняють координати будь-якої точки, що належить лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не належить їй, називають *рівнянням лінії.* Координати x, y, z довільної точки лінії називають *поточними координатами.*

В аналітичній геометрії всі геометричні факти виражаються мовою алгебри, тому при її вивчені треба особливу увагу приділяти точності означень основних понять та застосуванню геометричного змісту наведених формул та рівнянь. Завдяки методу координат основна роль у розв'язання задач відведена обчисленням, побудови стають допоміжними, а розв'язання задач методом аналітичної геометрії потребує меншої винахідливості.

Дві основні задачі аналітичної геометрії:

1. Дано лінію як геометричне місце точок, тобто відомі властивості лінії. Скласти рівняння цієї лінії.

Щоб скласти рівняння лінії, як деякого геометричного місця точок, необхідно:

1) вибрати довільну точку лінії з поточними координатами;

2) записати загальну властивість точок даного геометричного місця точок у вигляді рівності;

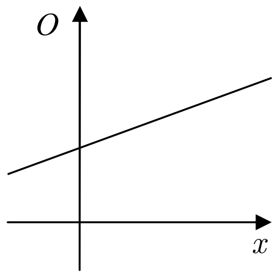
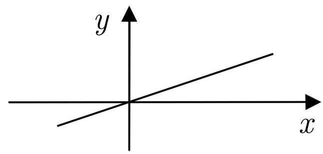
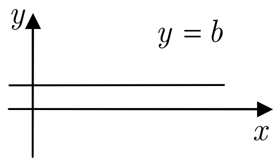
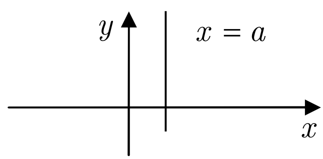
3) виразити величини цього рівняння за допомогою методу координат

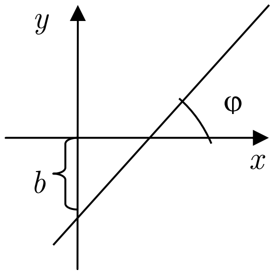
2. Дано рівняння лінії, як співвідношення між координатами. Побудувати лінію, визначену цим рівнянням.

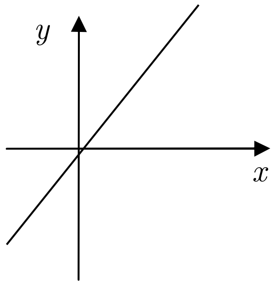
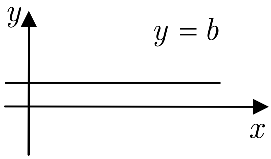
Для побудови лінії слід уважно вивчити її властивості за заданим рівнянням. Інколи, в задачах «побудувати» ототожнюється з завданням лише визначити конкретну її властивість.

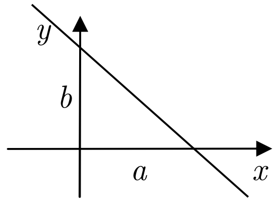
Деякі методичні рекомендації: представляючи кожну точку її координатами, а кожну лінію її рівнянням, ми приводимо геометричну задачу до «аналітичної». Розв'язання геометричної задачі зводимо до розв'язання (або складання) деякого рівняння (або системи рівнянь). Саме завдяки методам алгебри для розв'язання рівнянь ми маємо можливість розв'язувати геометричні задачі. Розв'язання більшості задач аналітичної геометрії не потребує рисунків, але, інколи, доцільно поєднати геометричні побудови з обчислювальними методами, що призводить до найкращих результатів.

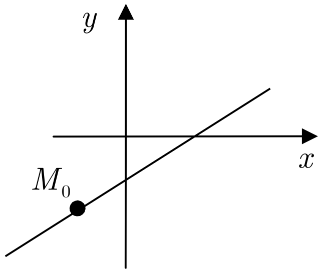
1. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

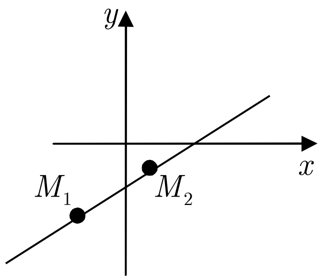
<table>
<tr><th>Назва</th><th>Вигляд</th><th>Рисунок</th><th>Зауваження</th></tr>
<tr><td>Загальне</td><td>$Ax+By+C=0$</td><td>
</td><td>Коефіцієнти A, B одночасно не дорівнюють нулю (тобто $A^2 + B^2 \neq 0$).</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Частинні випадки загального рівняння прямої:</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="2">1) $C = 0$,
$Ax+By=0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) $A = 0$,
$By+C=0$ або $y = b$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) $B = 0$,
$Ax+C=0$ або $x = a$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">4) $A = C = 0$, $By=0$ або $y = 0$ – рівняння осі Ox.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">5) $B = C = 0$, Ax=0 або $x = 0$ – рівняння осі Oy.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом</td><td>$y = kx + b$</td><td>
</td><td>Кутовим коефіцієнтом прямої називається тангенс кута φ, утвореного прямою з додатним напрямком осі Ox. (Додатний кут рахується у напрямку «проти годинникової стрілки» від осі Ox до прямої).
$$k = tg\varphi$$
Якщо кут φ тупий, то кутовий коефіцієнт k від’ємний,
b – це відрізок, який відтинає пряма на осі Oy.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД. Скласти рівняння прямої, яка утворює такий самий кут з віссю Ox, як і бісектриса першого координатного кута і відтинає на осі Oy відрізок у чотири одиниці.
<u>Розв’язання:</u> Як відомо, бісектриса першого координатного кута утворює з віссю Ox кут $\varphi = 45^0$, тому
$$k = tg45^0 = 1.$$
Підставимо у рівняння $y = kx + b$ значення $b = 4$, $k = 1$ та отримаємо шукане рівняння прямої
$$y = x + 4.$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Частинні випадки рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>$b = 0$
$y = kx$</td><td>
</td><td>Пряма проходить через початок координат. Якщо $k > 0$ – через перший та третій координатні кути. Якщо $k < 0$ – через другий та четвертий.</td></tr>
<tr><td>$k = 0$
$y = b$</td><td>
</td><td>Пряма паралельна осі Ox.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Записати рівняння прямої, яка паралельна осі абсцис та проходить через точку $A(-3;7)$.
<u>Розв'язання:</u> Оскільки шукана пряма паралельна осі абсцис, то її рівняння має вигляд $y = b$. Точка $A(-3;7)$ належить прямій, отже координати цієї точки задовольняють рівнянню шуканої прямої (Додаток 1). Підставимо координати заданої точки і отримаємо відповідь $y = 7$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Записати рівняння прямої, яка паралельна осі ординат та проходить через точку $A(-3;7)$.
<u>Розв'язання:</u> Оскільки шукана пряма паралельна осі ординат, то її рівняння має вигляд $x = a$. Аналогічно (дивись приклад 1) підставимо координати заданої точки і отримаємо відповідь: $x = -3$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Рівняння прямої у відрізках</td>
<td>$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$</td>
<td></td>
<td>a – це відрізок, який відтинає пряма на осі Ox;
b – це відрізок, який відтинає пряма на осі Oy.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння прямої, якщо вона відтинає на осях координат відрізки довжиною відповідно 5 і -3 одиниць.
<u>Розв'язання:</u> Скористаємось рівнянням прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, підставивши замість a і b задані величини відрізків відповідно 5 і -3. Отримаємо
$$\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1.$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Визначити величини відрізків, які відтинає пряма $4x-5y-8=0$ на осях координат.
Зауваження: Щоб визначити величини відрізків, необхідно задане рівняння привести до вигляду рівняння у відрізках, так, щоб у правій частині була одиниця, перший доданок у чисельнику містив тільки x, а другий – у чисельнику y.
<u>Розв'язання:</u> Поділимо рівняння на 8 і перенесемо вільні члени в праву частину. Порівнявши отримані рівняння з $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, знайдемо відповідність $\frac{x}{2}+\frac{y}{-8/5}=1$, $a=2$, $b=-8/5$.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Рівняння прямої, що проходить через точку у заданому напрямку</td>
<td>$y-y_0=k(x-x_0)$</td>
<td>
</td>
<td>Напрямок вважається заданим, якщо відомий кутовий коефіцієнт, або кут нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox.
$(x_0; y_0)$ – це координати точки M_0, яка належить прямій (або через яку проходить пряма).</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння прямої, якщо вона нахилена під кутом 135^0 до осі Ox, а точка $G(3;-5)$ належить їй.
<u>Розв'язання:</u> Оскільки шукана пряма нахилена під кутом 135^0 до осі абсцис, то кутовий коефіцієнт прямої дорівнює -1. Підставимо значення кутового коефіцієнта та координати точки $G(3;-5)$ у рівняння $y-y_0=k(x-x_0)$ і запишемо відповідь:
$$y+5=-(x-3).$$
Відкриємо дужки, перенесемо всі доданки у ліву частину та приведемо подібні, отримаємо рівняння загального вигляду:
$$x+y+2=0.$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Скласти рівняння прямої, якщо вона має такий же напрямок, як і у прямої $2x+3y-4=0$ та проходить через точку $N(-4;7)$.
<u>Розв'язання:</u> Знайдемо кутовий коефіцієнт заданої прямої: виразимо y із рівняння $2x+3y-4=0$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, тоді $k=-2/3$. Скористаємось рівнянням вигляду $y-y_0=k(x-x_0)$ і отримаємо $2x+3y-13=0$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Рівняння прямої, що проходить через дві точки</td><td>$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$</td><td></td><td>$(x_1;y_1)$ – координати першої точки M_1, яка належить прямій;
$(x_2;y_2)$ – координати другої точки M_2, яка належить прямій.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння прямої, якщо відомо, що точки $K(3;-2)$ та $E(-2;-1)$ належать прямій.
<u>Розв'язання:</u> Підставимо координати точок K і E
$$\frac{y-(-2)}{-1-(-2)}=\frac{x-3}{-2-3};\qquad \frac{y+2}{1}=\frac{x-3}{-5};$$
за властивістю пропорції: $-5(y+2)=x-3$.
Відповідь запишемо у загальному вигляді:
$$x+5y+7=0.$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $K(3;-2)$ та точку перетину</td></tr>
</table>

двох прямих: $2x+5y-7=0$ і $3x+8y-12=0$.

<u>*Розв'язання:*</u> Знайдемо точку перетину прямих, розв'язавши систему з двох рівнянь заданих прямих (Додаток 2):

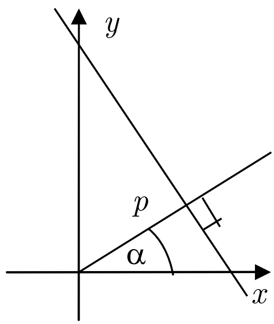
$$\begin{cases} 2x+5y-7=0 \\ 3x+8y-12=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x+5y=7 \\ 3x+8y=12 \end{cases}.$$

Координати точки перетину – $O(-4;3)$. Рівняння шуканої прямої знаходимо аналогічно прикладу 1, підставивши координати точок K та O, які належать прямій: $\dfrac{y-(-2)}{3-(-2)}=\dfrac{x-3}{-4-3}$; $\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{x-3}{-7}$; $-7(y+2)=5(x-3)$.

Відповідь: $5x+7y-1=0$.

Нормальне рівняння прямої

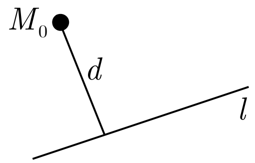
$$x\cos\alpha - y\sin\alpha - p = 0.$$



p – це довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат до прямої; α – це кут, який утворює перпендикуляр з додатним напрямком осі Ox.

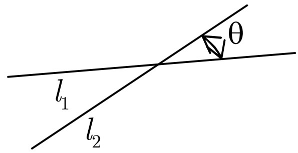
Загальне рівняння прямої можна привести до нормального вигляду, якщо помножити його на нормуючий множник $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $\pm$ – знак, протилежний знаку C.

ПРИКЛАД. Визначити довжину перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму $x-y+3=0$, та кут, який утворює цей перпендикуляр з віссю Ox.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2"><u>Розв’язання:</u> Щоб знайти довжину перпендикуляра та кут, який утворює цей перпендикуляр з віссю Ox, потрібно задане рівняння записати у вигляді нормального рівняння. Помножимо загальне рівняння на нормуючий множник $\mu = \frac{1}{-\sqrt{1+(-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ та отримаємо $-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$,
звідси $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
Отже $\alpha = 135^0$, а довжина перпендикуляра $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Відстань від точки до прямої</td><td>$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">де $M_0(x_0;y_0)$ – це координати точки, від якої обчислюється відстань, $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої l, до якої обчислюється відстань.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/4 - y/3 = 1$ і координати вершини $C(-2;-5)$. Знайти довжину висоти CN.
<u>Розв’язання:</u> Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду: $3x - 4y - 12 = 0$. Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB: $CN = \frac{\left|3\cdot(-2) - 4\cdot(-5) - 12\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$ (од.).</td></tr>
</table>

Гострий кут між двома прямими на площині

$$tg\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$



де k_1, k_2 – це кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2, які утворюють кут θ.

ПРИКЛАД. У тупокутному трикутнику ABC задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2;-6)$. Знайти $\angle A$.

Розв'язання: Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC: $k_1 = -3$, $k_2 = 2$,

$$tg\theta = \left|\frac{2-(-3)}{1+(-3)\cdot 2}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1.$$

Тоді $\angle A = \pi - \mathrm{arctg}\theta = \pi - \mathrm{arctg}1 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Умова паралельності прямих на площині

$$k_2 = k_1$$

отже, кутові коефіцієнти паралельних прямих рівні.

Умова перпендикулярності прямих на площині

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

k_2 – це кутовий коефіцієнт прямої, перпендикулярної до прямої з кутовим коефіцієнтом k_1.

ПРИКЛАД 1. У тупокутному трикутнику ABC задано рівняння сторін AB: $y=-3x+5$, AC: $y=2x-10$ і координати вершини $C(2;-6)$. Скласти рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, якщо M – середина AC.

<u>*Розв'язання:*</u> Знайдемо координати вершини A трикутника, розв'язавши систему, складену із рівнянь сторін AB і AC: $A(3;-4)$. M – середина сторони AC, тому

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2};\ y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-4-6}{2}=-5.$$

Отже, $M(5/2;-5)$. З умови паралельності двох прямих, маємо: $ML \,||\, AB$: $k_{ML}=k_{AB}=-3$.

Використаємо рівняння прямої, що проходить через точку $M(5/2;-5)$ в заданому напрямку $k=-3$:

$$y-y_0=k(x-x_0);\ y+5=-3(x-5/2);\ y=-3x+5/2.$$

ПРИКЛАД 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $K(3;-2)$ перпендикулярно до прямої $2x+5y-7=0$.

<u>*Розв'язання:*</u> Оскільки шукана пряма перпендикулярна до прямої $2x+5y-7=0$, то для кутових коефіцієнтів цих прямих справедлива рівність: $k_2=-1/k_1$. Знайдемо кутовий коефіцієнт заданої прямої і, підставивши його в цю рівність, визначимо кутовий коефіцієнт шуканої прямої:

$$2x+5y-7=0,\ 5y=-2x+7,\ y=-\frac{2}{5}x+\frac{7}{5},\ k_1=-\frac{2}{5}.$$

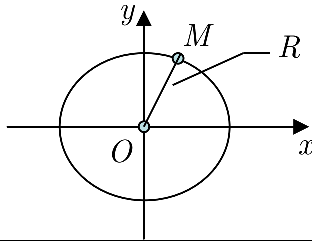
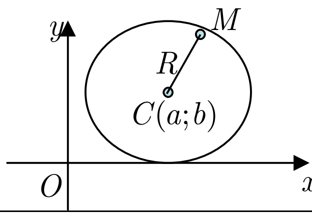
$$k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{-2/5}=\frac{5}{2}.$$

Ми знаємо кутовий коефіцієнт шуканої прямої, координати точки K, яка належить прямій, тож складемо рівняння:

$$y-y_0=k(x-x_0);\ y-(-2)=\frac{5}{2}(x-3),\ 2(y+2)=5(x-3),$$

$$-5x+2y+19=0.$$

2. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

<table>
<tr><th>Назва</th><th>Вигляд</th><th>Рисунок</th><th>Заува-
ження</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Коло</td><td colspan="3">Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (центра кола) дорівнює заданому сталому числу R (радіусу кола).</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 = R^2$</td><td></td><td>$O(0;0)$ – центр кола; MO – радіус</td></tr>
<tr><td>$(x-a)^2 +$
$+(y-b)^2 = R^2$</td><td></td><td>$C(a;b)$ – центр кола; MC – радіус</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться у точці $A(3;2)$, а точка $B(-1;0)$ належить йому.
<u>Розв'язання:</u> Рівняння кола має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Знайдемо радіус кола:
$R=|AB|=\sqrt{(-1-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{20}$, $R^2=20$, центр у точці $A(3;2)$. Отже рівняння кола має такий вигляд:
$$(x-3)^2+(y-2)^2=20.$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться на відстані від точки $A(3;2)$, втричі більшій, ніж до точки $B(-1;0)$.
<u>Розв'язання:</u> Нехай $O(x;y)$ – точка, яка належить шуканій</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">

лінії. За умовою задачі маємо: $|AO| = 3|BO|$. Оскільки

$$|AO| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}\,,\ |BO| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}\,,$$

то, підставивши, отримаємо:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\,.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і виділимо повні квадрати: $8x^2 + 24x + 8y^2 + y - 4 = 0 \Big| :8$,

$$x^2 + 3x + y^2 + \frac{1}{8}y - \frac{1}{2} = 0\,,$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y + \frac{1}{16}\right)^2 - \frac{1}{256} - \frac{1}{2} = 0\,,$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{16}\right)^2 = \frac{705}{256}\,.$$

Це є рівняння кола з центром в точці $C\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{16}\right)$ і радіусом $R = \frac{\sqrt{705}}{16}$.

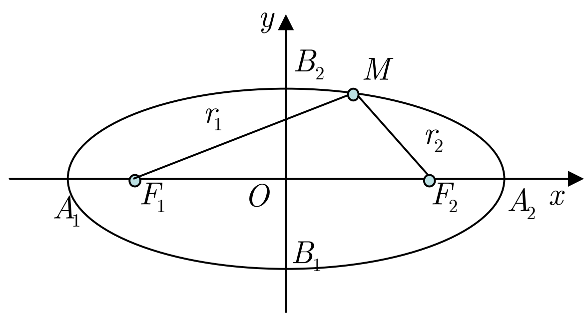
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Еліпс</td><td colspan="2">

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** еліпса) дорівнює заданому сталому числу $2a$, більшому за відстань між фокусами. Тобто, для довільної точки $M(x;y)$ еліпса $r_1 + r_2 = 2a$.

</td></tr>
<tr><td>

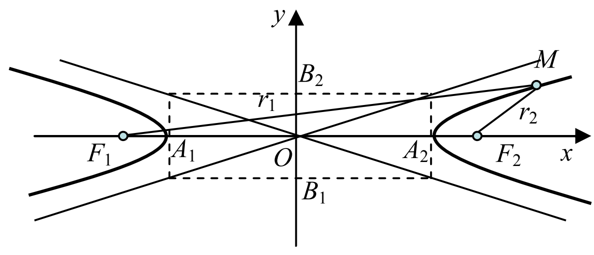
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

</td><td>



</td></tr>
</table>

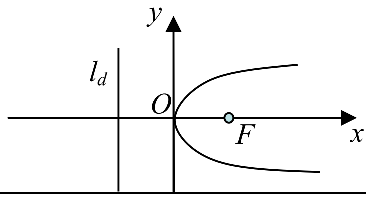
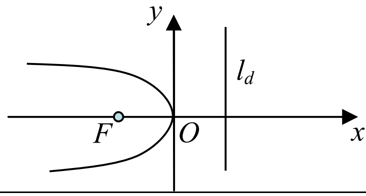
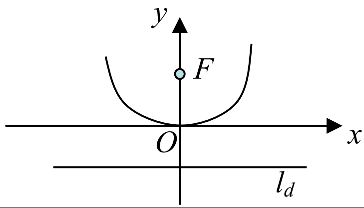
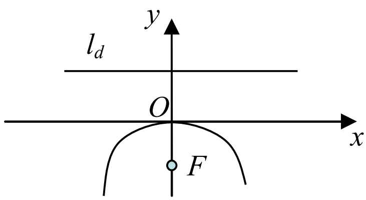
	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – вершини еліпса; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси еліпса; $b^2 = a^2 - c^2$ – основна тотожність для еліпса; $e = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса, характеризує форму еліпса, при цьому $0 \le e < 1$. Якщо $e = 0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a = b = R$. Чим більше значення e, тим сильніше витягнутий еліпс вздовж великої осі.
	ПРИКЛАД 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь дорівнює 3, а фокус міститься у точці $F(\sqrt{5};0)$. *<u>Розв'язання:</u>* Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. За умовою задачі $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Для еліпса виконується рівність: $b^2 = a^2 - c^2$. Підставимо значення a, c і знайдемо $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Маємо рівняння еліпса: $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$
	ПРИКЛАД 2. Записати канонічне рівняння кола, яке проходить через фокуси еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ і має центр у верхній вершині еліпса. *<u>Розв'язання:</u>* Для даного еліпса канонічне рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, відповідно $a = 2$, $b = 1$, верхня вершина має координати $A(0;1)$. Отже, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ і фокуси знаходяться у точках $F_1(-\sqrt{3};0)$, $F_2(\sqrt{3};0)$. Оскільки радіус кола – це відстань

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">від центра кола до точки, яка знаходиться на колі, обчислимо радіус R шуканого кола за формулою відстані між двома точками:
$$R=|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{\left(\pm\sqrt{3}-0\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{3+1}=2.$$
Відповідно до канонічного рівняння кола
$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$
запишемо шукане рівняння кола
$$(x-0)^2+(y-1)^2=2^2 \text{ або } x^2+(y-1)^2=4.$$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Гіпербола</td><td colspan="2">Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (фокусів гіперболи) дорівнює заданому сталому числу $2a$, меншому за відстань між фокусами. Тобто, для довільної точки $M(x;y)$ еліпса $|r_1-r_2|=2a$.</td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – дійсні вершини, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – уявні вершини гіперболи;
$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси гіперболи;
$b^2=c^2-a^2$ – основна тотожність для гіперболи;
$e=\dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет гіперболи, характеризує форму гіперболи, при цьому $e>1$. Чим більше значення e, тим сильніше витягнута гіпербола вздовж дійсної осі.
Асимптоти гіперболи: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.</td></tr>
</table>

	ПРИКЛАД 1. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її уявна піввісь дорівнює 2, а ексцентриситет $\sqrt{13}/3$. *Розв'язання:* За умовою задачі $b = 2$, $e = \sqrt{13}/3$. Для гіперболи справедлива рівність $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, тому маємо рівняння: $\frac{\sqrt{13}}{3} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}}$. Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння: $\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{a^2}$, $a^2 = 9$. Запишемо канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.
	ПРИКЛАД 2. Дано рівняння гіперболи $12x^2 - 24y^2 - 144 = 0$. Визначити величини півосей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та записати рівняння асимптот. *Розв'язання:* Приведемо рівняння до канонічного вигляду: $$12x^2 - 24y^2 = 144 \;\Big|: 144; \quad \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} = 1.$$ З отриманого рівняння маємо: $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$, а координати вершин такі: $A_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $A_2(2\sqrt{3}; 0)$, $B_1(0; -\sqrt{6})$, $B_2(0; \sqrt{6})$. Для знаходження координат фокусів, обчислимо c: $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 12 + 6 = 18$, $c = \pm 3\sqrt{2}$; $F_1(-3\sqrt{2}; 0)$ – це координати лівого фокусу, $F_2(3\sqrt{2}; 0)$ – правого фокусу. Знайдемо ексцентриситет за формулою $e = \frac{c}{a}$: $e = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{18}{12}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$. Рівняння асимптот мають вигляд $y = \pm \frac{b}{a} x$, отже, в нашому випадку це буде: $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$.

Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини F (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

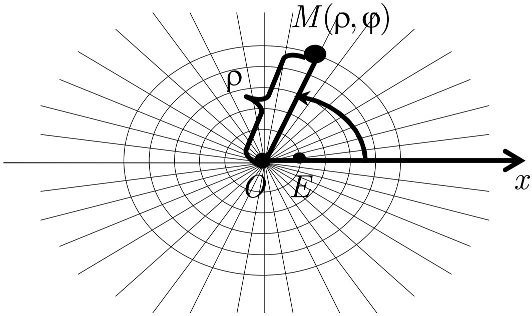
$y^2 = 2px$		$l_d : x = -\frac{p}{2}$, $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.
$y^2 = -2px$		$l_d : x = \frac{p}{2}$, $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$
$x^2 = 2py$		$l_d : y = -\frac{p}{2}$, $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$
$x^2 = -2py$		$l_d : y = \frac{p}{2}$, $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$

ПРИКЛАД. Скласти рівняння параболи, якщо рівняння її директриси $x = -5$.

<u>*Розв'язання:*</u> Канонічне рівняння параболи у даному випадку має вигляд $y^2 = 2px$, а рівняння її директриси $l_d : x = -\frac{p}{2}$. Отже, параметр параболи p дорівнює 10. А рівняння параболи таке: $y^2 = 20x$.

3. ЛІНІЇ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

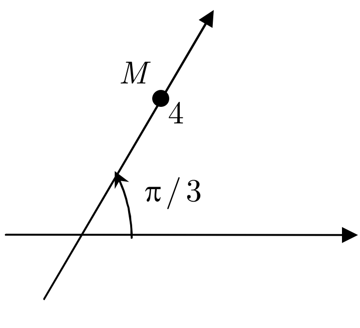
<table>
<tr><th>Назва</th><th>Вигляд</th><th>Рисунок</th><th>Зауваження</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Полярна система координат</td><td colspan="2">

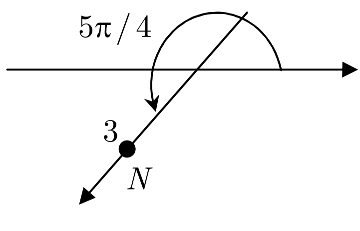


</td><td>$\rho = OM$ – полярний радіус (відстань від точки M до полюса O), φ – полярний кут $\angle xOM$, $OE = 1$ – заданий масштаб.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

ПРИКЛАД 1. Побудувати точки в полярній системі координат: а) $M(4;\pi/3)$; б) $N(3;5\pi/4)$.

<u>Розв'язання:</u>





</td></tr>
</table>

Полярна система координат

ПРИКЛАД 2. Побудувати задану дугу ***спіралі Архімеда*** $\rho = \dfrac{4}{\pi}\varphi$, $0 \le \varphi \le 3\pi$, надаючи аргументу φ значення з відрізка $[0;3\pi]$ через проміжок $\pi/4$, починаючи з $\varphi = 0$.

<u>Розв'язання:</u> $\varphi = 0,\ \rho = \dfrac{4}{\pi}\cdot 0 = 0;$

$$\varphi = \frac{\pi}{4},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = 1; \qquad \varphi = \frac{7\pi}{4},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{4} = 7;$$

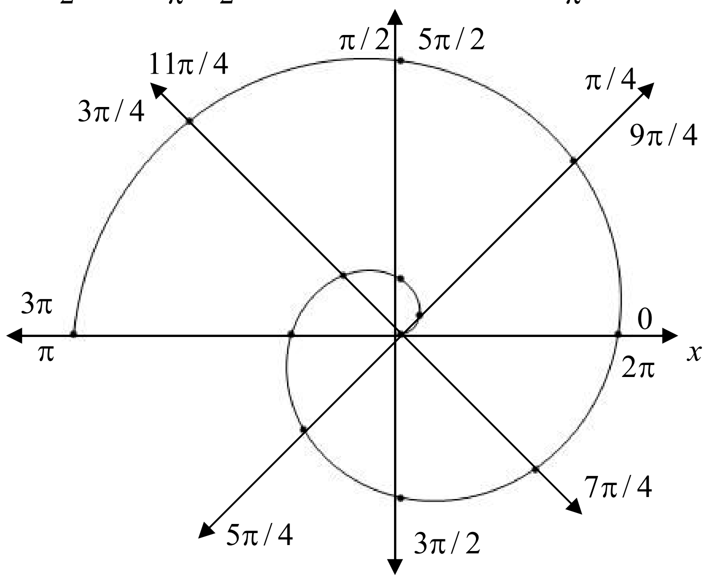
$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 2; \qquad \varphi = 2\pi,\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot 2\pi = 8;$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4} = 3; \qquad \varphi = \frac{9\pi}{4},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{9\pi}{4} = 9;$$

$$\varphi = \pi,\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot \pi = 4; \qquad \varphi = \frac{5\pi}{2},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{2} = 10;$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{4},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{4} = 5; \qquad \varphi = \frac{11\pi}{4},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{11\pi}{4} = 11;$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2},\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{2} = 6; \qquad \varphi = 3\pi,\ \rho = \frac{4}{\pi}\cdot 3\pi = 12.$$



Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Формули переходу від полярних до декартових координат

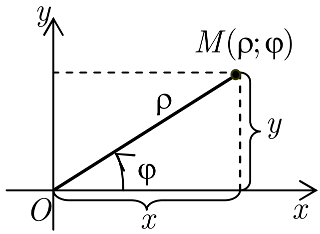
$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi.$$

Формули переходу від декартових до полярних координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



ПРИКЛАД. Використовуючи формули переходу, записати рівняння заданих ліній у полярній системі координат:

а) вертикальна пряма $x = a$;

б) коло $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

Розв'язання:

$$\textbf{а)}\ x = a;\ \rho\cos\varphi = a;\ \rho = \frac{a}{\cos\varphi};$$

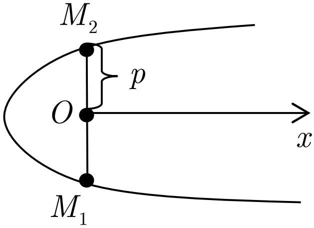
$$\textbf{б)}\ (x-a)^2 + y^2 = a^2;\ (\rho\cos\varphi - a)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = a^2;$$

$$\rho^2\cos^2\varphi - 2a\rho\cos\varphi + a^2 + \rho^2\sin^2\varphi = a^2;$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) - 2a\rho\cos\varphi = 0;$$

$$\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi = 0;\ \rho - 2a\cos\varphi = 0;\ \rho = 2a\cos\varphi.$$

Рівняння ліній другого порядку в полярній системі координат



Нехай $M_1M_2 = 2p$ – хорда, яка проходить через вибраний полюс і перпендикулярна до полярної осі. Число $p = M_1O = M_2O$ називається ***параметром*** лінії, $p > 0$.

Для параболи параметр p визначено раніше як відстань від фокусу до директриси. Для кола $p = R$, а для еліпса і гіперболи $p = \frac{b^2}{a}$.Тоді рівняння

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi}$$

визначає відповідно:

а) коло, якщо $e = 0$;
б) еліпс, якщо $0 < e < 1$;
в) параболу, якщо $e = 1$;
г) праву гілку гіперболи, якщо $e > 1$.

4. ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЇ

Параметричними рівняннями лінії на площині називаються рівняння вигляду

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

де t – допоміжна змінна (*параметр*), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази.

ПРИКЛАД 1. Показати, що система параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},$$

де $a, b = \text{const}$, причому $a > 0$, $b > 0$, визначає еліпс з півосями a і b.

<u>*Розв'язання:*</u> $\cos t = \frac{x}{a}$, $\sin t = \frac{y}{b}$,

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Зауваження. Якщо $a=b=R$, $R>0$, то маємо параметричні рівняння кола

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}.$$

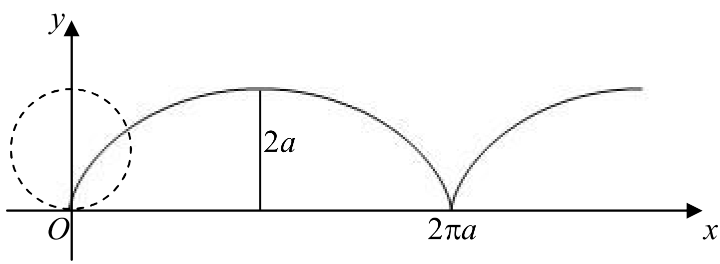
ПРИКЛАД 2. Побудувати ескіз дуги ***циклоїди***, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}, \quad t\in[0;4\pi], \quad a>0.$$

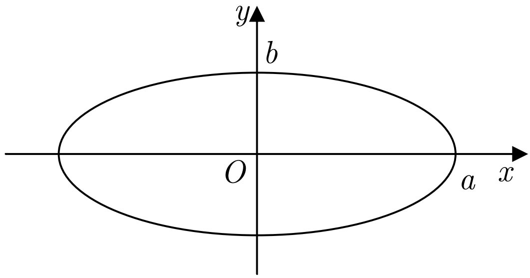
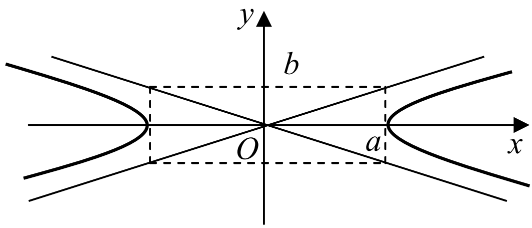
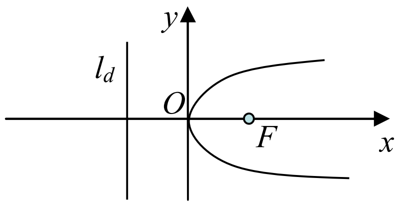
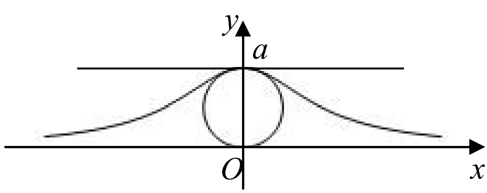
Розв'язання:

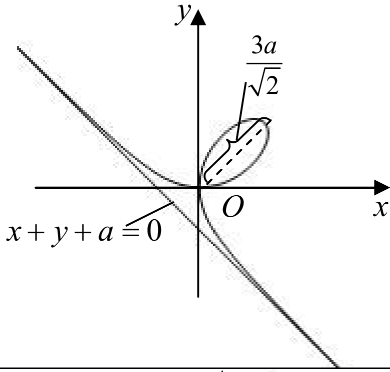
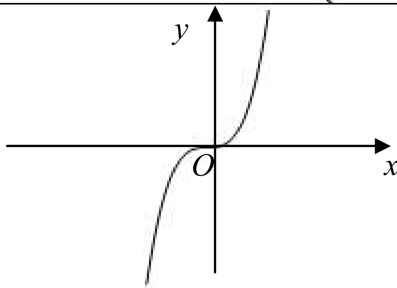
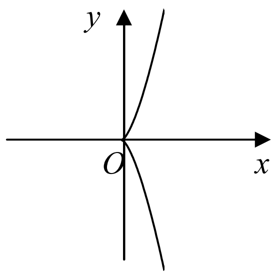
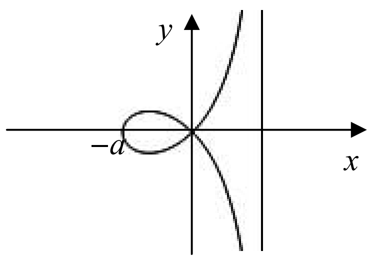
t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$a(\pi/2-1)$ $\approx 2,14a$	$a\pi$ $\approx 3,14a$	$a(3\pi/2+1)$ $\approx 5,71a$	$2a\pi$ $\approx 6,28a$
y	0	a	$2a$	a	0

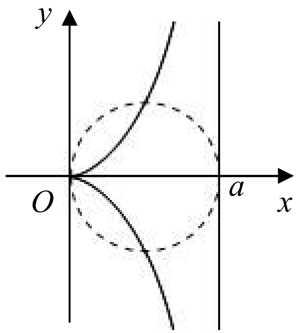
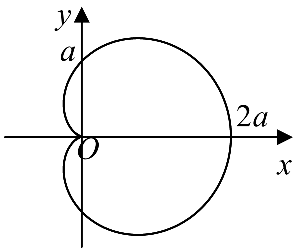
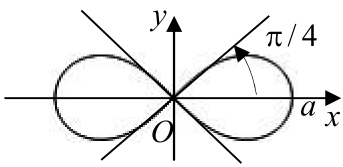
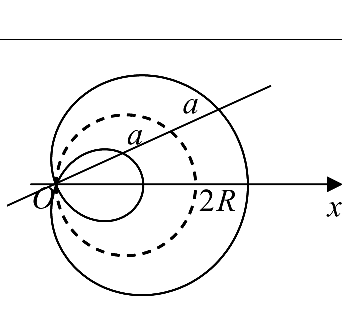
t	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π
x	$a(\pi/2-1)$ $\approx 2,14a$	$3a\pi$ $\approx 9,42a$	$a(7\pi/2+1)$ $\approx 12a$	$4a\pi$ $\approx 12,56a$
y	a	$2a$	a	0

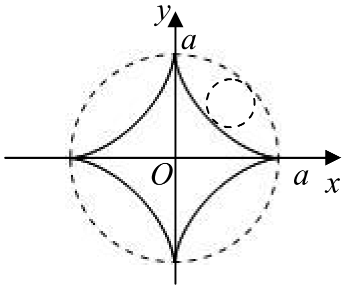
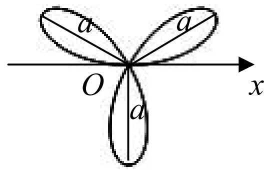
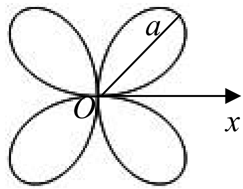
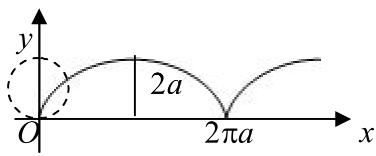
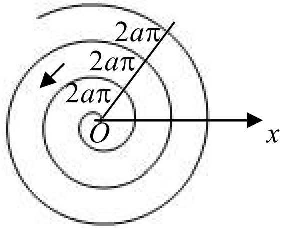


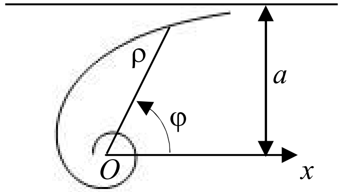
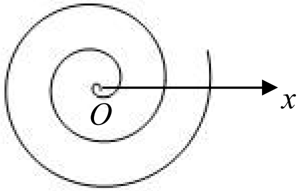
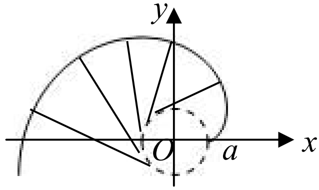
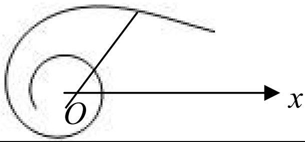
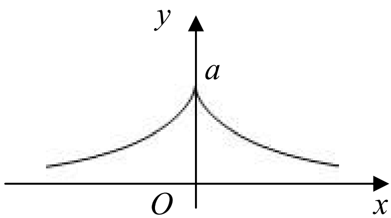
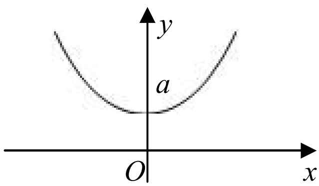
5. ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ КРИВІ

<table>
<tr><th></th><th>Назва, рівняння</th><th>Графік</th></tr>
<tr><td colspan="3">Алгебраїчні криві другого порядку</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Еліпс
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$
$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Гіпербола
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;$
$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$
(для правої гілки)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Парабола
$y^2 = 2px.$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Алгебраїчні криві третього порядку</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Локон Аньєзі (верзієра)
$y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}.$</td><td>
</td></tr>
</table>

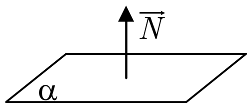
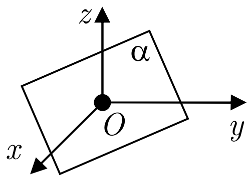
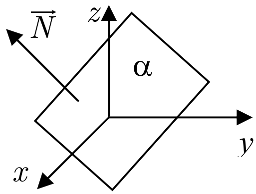
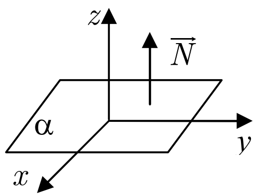
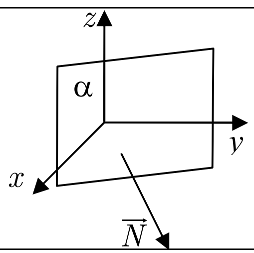
5	Декартів лист $x^3+y^3-3axy=0$ $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$	
6	Кубічна парабола $y=x^3$.	
7	Напівкубічна парабола $y=x^{\frac{3}{2}}$.	
8	Строфоїда $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$; $\rho=-\dfrac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$.	

9	Цисоїда Диоклеса $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$; $\begin{cases} x = \dfrac{a t^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{a t^3}{1+t^2}; \end{cases}$ $\rho = \dfrac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$.	
Алгебраїчні криві четвертого і вищих порядків		
10	Кардіоїда $(x^2+y^2-2ax)^2 =$ $= 4a(x^2+y^2)$; $\rho = a(1+\cos\varphi)$.	
11	Лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2 =$ $= a^2(x^2-y^2)$; $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.	
12	Завиток Паскаля $(x^2+y^2-2Rx)^2 =$ $= a^2(x^2+y^2)$; $\rho = 2R\cos\varphi + a$.	

13	Гіпоциклоїда (астроїда) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$.	
14	Трипелюсткова роза $\rho=a\sin 3\varphi$, $(\rho\geq 0)$.	
15	Чотирипелюст- кова роза $\rho=a\left\|\sin 2\varphi\right\|$.	
	Трансцендентні криві	
16	Циклоїда $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$	
17	Спіраль Архімеда $\rho=a\varphi \;\; (\rho\geq 0)$.	

18	Гіперболічна спіраль $\rho = \dfrac{a}{\varphi}\ (\rho > 0)$.	
19	Логарифмічна спіраль $\rho = e^{a\varphi}$.	
20	Евольвента (розгортка) кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$	
21	Жезл $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\varphi}}$.	
22	Трактриса $x = a\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} +$ $+\sqrt{a^2-y^2}$; $\begin{cases} x = a\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t\right), \\ y = a\sin t. \end{cases}$	
23	Ланцюгова лінія $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) =$ $= a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$.	

6. ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Назва	Вигляд	Рисунок	Зауваження
Загальне рівняння площини та його частинні випадки	$Ax+By+Cz+D=0$		$\overrightarrow{N}=(A;B;C)$ – вектор нормалі площини; $\overrightarrow{N}\perp\alpha$
	$Ax+By+Cz=0$		$D=0$ $\overrightarrow{N}=(A;B;C)$ т. $O(0;0;0)\in\alpha$
	$By+Cz+D=0$		$A=0, D\neq 0$ $\overrightarrow{N}=(0;B;C)$ $\overrightarrow{N}\perp Ox$ $\alpha \parallel Ox$
	$Ax+Cz+D=0$		$B=0, D\neq 0$ $\overrightarrow{N}=(A;0;C)$ $\overrightarrow{N}\perp Oy$ $\alpha \parallel Oy$
	$Ax+By+D=0$		$C=0, D\neq 0$ $\overrightarrow{N}=(A;B;0)$ $\overrightarrow{N}\perp Oz$ $\alpha \parallel Oz$

Загальне рівняння площини та його частинні випадки

ПРИКЛАД. Скласти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через дві точки $P(1;1;2)$ і $Q(5;3;-2)$.

<u>Розв'язання:</u> Рівняння площини, що паралельна Ox, має вигляд:

$$By+Cz+D=0.$$

Площина проходить через точки P і Q, тобто координати цих точок задовольняють рівнянню площини:

$$\begin{cases} B\cdot 1+C\cdot 2+D=0 \\ B\cdot 3+C\cdot(-2)+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-D-2C \\ 3(-D-2C)-2C+D=0 \end{cases} \Rightarrow$$

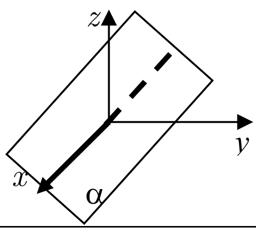
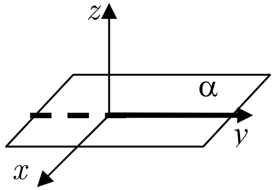
$$\begin{cases} B=-D-2C \\ -3D-6C-2C+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-D-2C \\ -8C=2D \end{cases} \Rightarrow$$

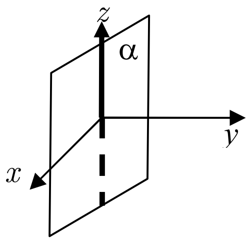
$$\begin{cases} C=-D/4 \\ B=-D-2(-D/4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-D/4 \\ B=-D+D/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-D/4 \\ B=-D/2 \end{cases}$$

Тоді рівняння площини приймає вигляд:

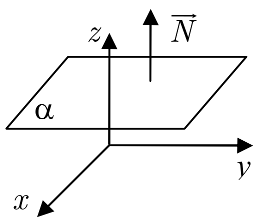
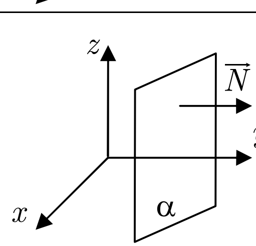
$$-\frac{D}{2}y-\frac{D}{4}z+D=0 \Rightarrow -\frac{y}{2}-\frac{z}{4}+1=0$$

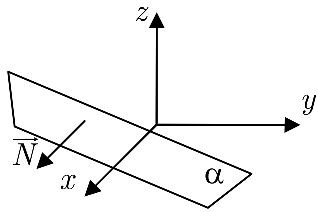
$$2y+z-4=0.$$

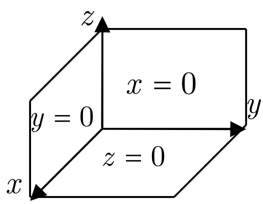
$By+Cz=0$		$A=D=0$ $\overrightarrow{N}=(0;B;C)$ $Ox\in\alpha$
$Ax+Cz=0$		$B=D=0$ $\overrightarrow{N}=(A;0;C)$ $Oy\in\alpha$

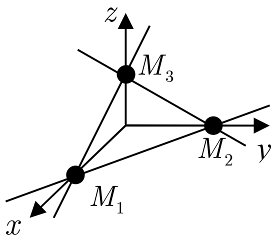
<table>
<tr>
<td rowspan="4">Загальне рівняння площини та його частинні випадки</td>
<td>$Ax+By=0$</td>
<td>
</td>
<td>$C=D=0$
$\overrightarrow{N}=(A;B;0)$
$Oz\in\alpha$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ПРИКЛАД. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Oy і точку $P(4;2;-5)$.

<u>Розв’язання:</u> Рівняння площини, що проходить через вісь Oy, має вигляд: $Ax+Cz=0$.

Площина проходить через точку P, тобто координати цієї точки задовольняють рівнянню площини:
$$A\cdot 4+C\cdot(-5)=0\;\Rightarrow\;4A=5C\;\Rightarrow\;A=\frac{5}{4}C.$$
Тоді, $\frac{5}{4}Cx+Cz=0$, або $\frac{5}{4}x+z=0$.
$$5x+4z=0.$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$Cz+D=0$</td>
<td>
</td>
<td>$A=B=0$
$\overrightarrow{N}=(0;0;C)$
$\overrightarrow{N}\parallel Oz$
$\alpha\perp Oz$</td>
</tr>
<tr>
<td>$By+D=0$</td>
<td>
</td>
<td>$A=C=0$
$\overrightarrow{N}=(0;B;0)$
$\overrightarrow{N}\parallel Oy$
$\alpha\perp Oy$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="5">Загальне рівняння площини та його частинні випадки</td>
<td>$Ax + D = 0$</td>
<td>
</td>
<td>$B = C = 0$
$\overrightarrow{N} = (A; 0; 0)$
$\overrightarrow{N} \parallel Ox$
$\alpha \perp Ox$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ПРИКЛАД. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна Oz і проходить через точку $P(1; -2; 3)$.

<u>Розв’язання:</u> Рівняння площини, що перпендикулярна Oz, має вигляд:
$$Cz + D = 0.$$
Площина проходить через точку P, тобто координати цієї точки задовольняють рівнянню площини:
$$C \cdot 3 + D = 0 \;\Rightarrow\; D = -3C.$$
Тоді, $Cz - 3C = 0$, або $z - 3 = 0$.
$$z = 3.$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$z = 0$</td>
<td rowspan="3">
</td>
<td>площина Oxy</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = 0$</td>
<td>площина Oxz</td>
</tr>
<tr>
<td>$x = 0$</td>
<td>площина Oyz</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Рівняння площини у відрізках</td>
<td>$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$</td>
<td>
</td>
<td>$a=-\frac{D}{A}$;
$b=-\frac{D}{B}$;
$c=-\frac{D}{C}$.
$M_1(a;0;0)$,
$M_2(0;b;0)$,
$M_3(0;0;c)$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

ПРИКЛАД. Визначити відрізки, що відсікає площина $2x-3y+8z-4=0$ на осях координат. Побудувати цю площину.

<u>*Розв'язання:*</u>

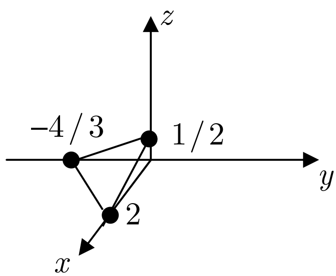
$$2x-3y+8z-4=0;$$

$$2x-3y+8z=4 \;\Big|\; :4;$$

$$\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}+2z=1;$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4/3}+\frac{z}{1/2}=1;$$

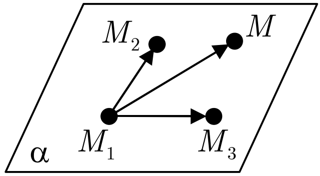
$$a=2,\; b=-4/3,\; c=1/2.$$



</td>
</tr>
</table>

Рівняння площини, що проходить через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$



$$M_1(x_1;y_1;z_1),\ M_2(x_2;y_2;z_2),\ M_3(x_3;y_3;z_3),\ M(x;y;z),$$
$$(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_3})=0$$

ПРИКЛАД. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;3;-2)$, $M_2(4;-5;6)$, $M_3(-3;1;2)$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-(-2) \\ 4-1 & -5-3 & 6-(-2) \\ -3-1 & 1-3 & 2-(-2) \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}+(z+2)\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)(-32-(-16))-(y-3)(12-(-32))+(z+2)(-6-32)=0;$$

$$-16(x-1)-44(y-3)-38(z+2)=0 \ \Big|:(-2);$$

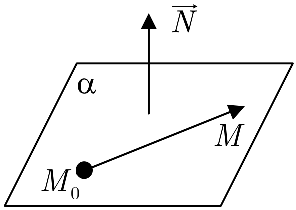
$$8(x-1)+22(y-3)+19(z+2)=0;$$

$$8x-8+22y-66+19z+38=0;$$

Отже, рівняння шуканої площини має вигляд:

$$8x+22y+19z-36=0.$$

Рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору

$A(x-x_0)+$ $+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$		$M_0(x_0;y_0;z_0)$, $\overrightarrow{N}=(A;B;C)$ $M(x;y;z)$: $\overrightarrow{MM_0}\perp\overrightarrow{N}$; $\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{N}=0$.

ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;-4)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}=(3;-6;1)$.

<u>*Розв'язання:*</u> $3(x-2)-6(y+1)+(z+4)=0$;

$$3x-6-6y-6+z+4=0;$$

$$3x-6y+z-8=0.$$

ПРИКЛАД 2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_2(4;-2;-1)$.

<u>*Розв'язання:*</u> Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(4-3;-2-(-1);-1-2)=(1;-1;-3).$$

Тобто, нормальний вектор шуканої площини

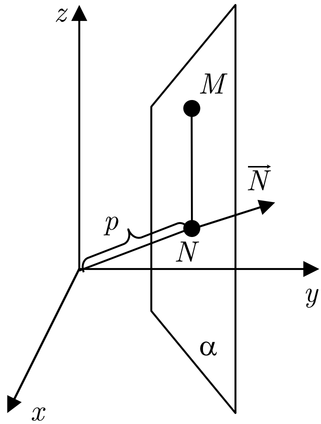
$$\overrightarrow{N}=(1;-1;-3).$$

Використаємо рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору

$$1(x-3)-1(y+1)-3(z-2)=0;$$

$$x-3-y-1-3z+6=0;$$

$$x-y-3z+2=0.$$

Нормальне рівняння площини		
	$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ $\overrightarrow{N} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ $\left\lvert\overrightarrow{N}\right\rvert = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси перпендикуляра, проведеного з початку координат на площину; p – довжина цього перпендикуляра.	
	Загальне рівняння площини можна привести до нормального вигляду, якщо помножити його на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, де $\pm$ – знак, протилежний знаку D.	

ПРИКЛАД. Знайти напрямні косинуси і довжину перпендикуляра, проведеного з початку координат на площину $10x - 2y - 11z + 45 = 0$.

<u>Розв'язання:</u> Рівняння площини приведемо до нормального виду:

$$A = 10,\ B = -2,\ C = -11,\ D = 45.$$

$$D > 0, \text{ тому } \mu = -\frac{1}{\sqrt{10^2 + (-2)^2 + (-11)^2}} = -\frac{1}{15}.$$

$$10x - 2y - 11z + 45 = 0 \ \left|\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)\right.$$

$$-\frac{10}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - \frac{45}{15} = 0,$$

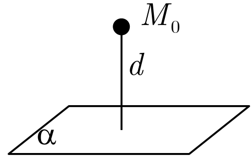
$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - 3 = 0.$$

Звідки, $\cos\alpha = -2/3$, $\cos\beta = 2/15$, $\cos\gamma = 11/15$, $p = 3$.

Відстань від точки до площини

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$



ПРИКЛАД 1. Обчислити відстань від точки $M_0(3;4;-7)$ до площини $2x-y+2z-9=0$.

Розв’язання: $A=2$, $B=-1$, $C=2$, $D=-9$, $x_0=3$, $y_0=4$, $z_0=-7$.

$$d=\frac{|2\cdot3-1\cdot4+2\cdot(-7)-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|-21|}{3}=7\text{ (од.)}.$$

ПРИКЛАД 2. Задана піраміда з вершинами $A(3;4;0)$, $B(4;-3;1)$, $C(-4;1;-1)$, $D(-1;-1;5)$. Знайти довжину висоти піраміди, проведеної з вершини D.

Розв’язання: Шукана висота – це відстань від точки D до площини ABC. Складемо рівняння площини ABC:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-0 \\ 4-3 & -3-4 & 1-0 \\ -4-3 & 1-4 & -1-0 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ 1 & -7 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$10(x-3)-6(y-4)-52z=0 \;\Big|:2;$$

$$5(x-3)-3(y-4)-26z=0;$$

$$5x-15-3y+12-26z=0;$$

$$5x-3y-26z-3=0.$$

Знайдемо довжину висоти як відстань від точки D до площини ABC:

$$d=\frac{|5\cdot(-1)-3\cdot(-1)-26\cdot5-3|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+(-26)^2}}=\frac{|-135|}{\sqrt{710}}=\frac{135}{\sqrt{710}}\text{ (од.)}.$$

Кут між двома площинами

Кут між площинами

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

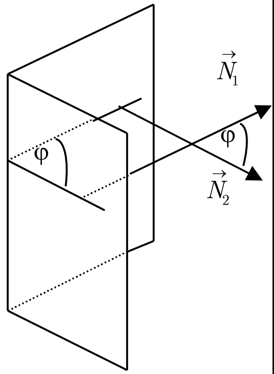
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Кут між двома площинами – це кут між нормальними векторами цих площин $\overrightarrow{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{N_2} = (A_2; B_2; C_2)$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$



ПРИКЛАД. Знайти кут між площинами

$$4x - 10y + z - 3 = 0,$$

$$-11x + 8y + 7z + 5 = 0.$$

Розв'язання:

$$A_1 = 4,\ B_1 = -10,\ C_1 = 1,\ A_2 = -11,\ B_2 = 8,\ C_2 = 7.$$

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot(-11) - 10\cdot 8 + 1\cdot 7}{\sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-11)^2 + 8^2 + 7^2}} =$$

$$= \frac{-44 - 80 + 7}{\sqrt{16 + 100 + 1} \cdot \sqrt{121 + 64 + 49}} = \frac{-117}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{234}} = -\sqrt{\frac{117}{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$.

Умови паралельності, перпендикулярності та збіжності площин

Розглянемо дві площини:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

1) Необхідна і достатня умови паралельності двох площин: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

2) Необхідна і достатня умови збіжності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

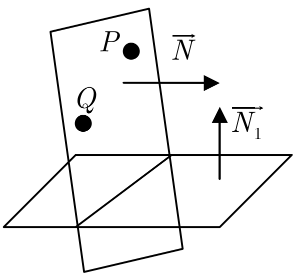
3) Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 .$$

ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $P(1;-1;2)$ і $Q(3;1;2)$, перпендикулярно до площини $4x - 5y + 3z - 2 = 0$.

<u>Розв'язання</u> (1 спосіб): За напрямний вектор $\overline{N}$ шуканої площини можна прийняти векторний добуток векторів $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{N_1}$ (Додаток 5). Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = (3-1; 1-(-1); 2-2) = (2;2;0)$$



$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{N}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 18\vec{k}$$

Звідки $\overline{N} = (6;-6;-18)$.

За рівнянням площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

маємо: $A = 6$, $B = -6$, $C = -18$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 2$

$$6(x-1) - 6(y+1) - 18(z-2) = 0;$$

$$6x - 6y - 18z + 24 = 0, \text{ тобто } x - y - 3z + 4 = 0 .$$

Розв'язання (2 спосіб):

Використаємо рівняння площини, що проходить через точку P перпендикулярно вектору:

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-2)=0 .$$

Також площина проходить через точку Q, тому її координати задовольняють рівнянню площини:

$$A(3-1)+B(1+1)+C(2-2)=0 ,$$

звідки: $2A+2B=0$ або $A+B=0$.

Використаємо умову перпендикулярності двох площин:

$$4A-5B+3C=0 .$$

Знайдемо A і B із системи рівнянь:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A-5B+3C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A-5B=-3C \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-5-4=-9 ,$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3C & -5 \end{vmatrix}=0-(-3C)=3C ,$$

$$\Delta_B=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3C \end{vmatrix}=-3C-0=-3C ,$$

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{3C}{-9}=-\frac{C}{3},\ B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=\frac{-3C}{-9}=\frac{C}{3} .$$

Позначимо $C=3t$, тоді $A=-t$, $B=t$.

Підставимо знайдені A, B, C в рівняння площини

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-2)=0 ,$$

$$-t(x-1)+t(y+1)+3t(z-2)=0 \ \Big| :(-t) ,$$

$$(x-1)-(y+1)-3(z-2)=0 \ \Big| :(-t) ,$$

$$x-1-y-1-3z+6=0 ,$$

$$x-y-3z+4=0 .$$

ПРИКЛАД 2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $K(1;5;2)$ паралельно площині, яка проходить через три точки $L(4;-3;1)$, $M(3;4;0)$, $N(-1;-1;5)$.

<u>*Розв'язання:*</u> Складемо рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ 3-4 & 4+3 & 0-1 \\ -1-4 & -1+3 & 5-1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ -1 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$30(x-4) + 9(y+3) + 33(z-1) = 0 \;\Big|\; : 3;$$

$$10(x-4) + 3(y+3) + 11(z-1) = 0;$$

$$10x - 40 + 3y + 9 + 11z - 11 = 0;$$

$$10x + 3y + 11z - 42 = 0.$$

За умовою паралельності:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

тобто, $\dfrac{A_1}{10} = \dfrac{B_1}{3} = \dfrac{C_1}{11} = t$, звідки $A_1 = 10t$, $B_1 = 3t$, $C_1 = 11t$.

Вектор нормалі шуканої площини $\overrightarrow{N} = (10t;3t;11t)$.

За рівнянням площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

маємо: $A = 10t$, $B = 3t$, $C = 11t$, $x_0 = 1$, $y_0 = 5$, $z_0 = 2$.

$$10t(x-1) + 3t(y-5) + 11t(z-2) = 0 \;\Big|\; : t;$$

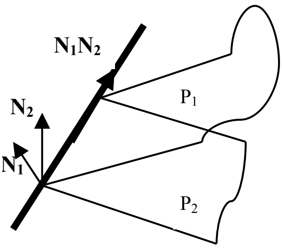
$$10(x-1) + 3(y-5) + 11(z-2) = 0;$$

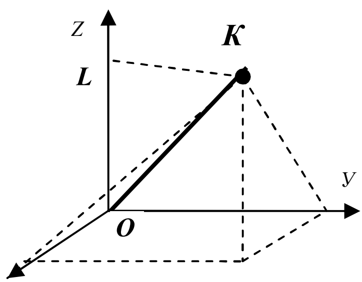
$$10x - 10 + 3y - 15 + 11z - 22 = 0;$$

$$10x + 3y + 11z - 47 = 0.$$

Умова перетину трьох площин в одній точці	Три площини $\alpha_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ $(i = 1,2,3)$ перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли квадратна система, складена з рівнянь цих площин, має єдиний розв'язок. Тобто, коли визначник системи відмінний від нуля: $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$
	ПРИКЛАД. Знайти точку перетину трьох площин: $2x - 4y + 3z - 1 = 0$, $3x - y + 5z - 2 = 0$, $4x + 3y + 4z = 0$. *Розв'язання:* Складемо систему з рівнянь площин і розв'яжемо її за допомогою методу Крамера: $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 27 - 80 + 12 + 48 - 30 = -31;$$ $$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 18 + 0 + 0 + 32 - 15 = 31;$$ $$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 20 - 24 - 12 - 0 = 0;$$ $$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 9 - 32 + 4 + 0 - 12 = -31.$$ $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{31}{-31} = -1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-31} = 0,\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-31}{-31} = 1.$$ Отже, точка перетину заданих площин – $M(-1;0;1)$.

7. ПРЯМА У ПРОСТОРІ

Назва	Вигляд	Рисунок	Зауваження
Загальне рівняння	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$		$\overrightarrow{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ – вектор нормалі площини P_1; $\overrightarrow{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ – вектор нормалі площини P_2;



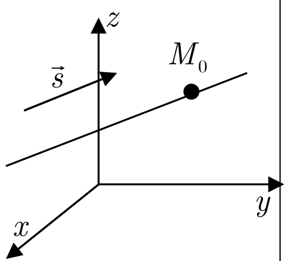
ПРИКЛАД 1. Записати рівняння прямої OK, яка проходить через початок координат та точку $K(4;3;2)$.

<u>Розв'язання:</u> Пряма OK є перетин двох площин KOz та KOy, тому її рівняння можна представити як систему рівнянь $\begin{cases} 3x-4y=0 \\ 2x-4z=0 \end{cases}$, кожне з яких є рівнянням площини. $3x-4y=0$ – рівняння площини KOz, $2x-4z=0$ – рівняння площини KOy (дивись Додаток 4). Також, рівняння прямої OK можна записати як систему $2y-3z=0$, $2x-4z=0$.

ПРИКЛАД 2. Скласти загальне рівняння прямої, утвореної перетином площини $2x+y-4z+5=0$ і площини, яка проходить через вісь Oz і точку $K(4;3;2)$.

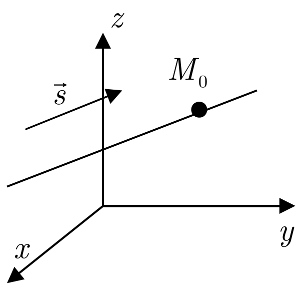
<u>Розв'язання:</u> Пряма є перетином двох площин, одна з яких відома: $2x+y-4z+5=0$. Складемо рівняння

<table>
<tr>
<td></td>
<td colspan="3">другої площини. Оскільки друга площина проходить через вісь Oz, то її рівняння має вигляд $Ax+By=0$, а координати точки K задовольняють цьому рівнянню. Підставивши координати точки K, отримаємо: $4A+3B=0$, звідси $A=-3B/4$. Рівняння площини має вигляд: $-\frac{3B}{4}x+By=0$, але $B\neq 0$, тож $-3x+4y=0$ – рівняння другої площини. А загальне рівняння прямої:

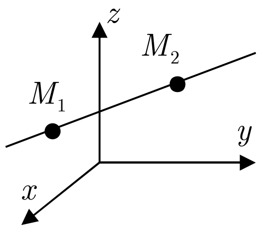
$$\begin{cases} 2x+y-4z+5 \\ -3x+4y=0 \end{cases}.$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Канонічні рівняння</td>
<td>$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$</td>
<td>
</td>
<td>Напрямним вектором прямої називають ненульовий вектор $\vec{s}$, що належить прямій або їй паралельний. Координати k, l, m називають напрямними координатами. (дивись Додаток 5) $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, що належить прямій.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $M(1;-2;-3)$ та $L(-2;-1;4)$.

<u>Розв'язання:</u> Виберемо в якості початкової точки – точку M, за напрямний вектор – вектор $\overrightarrow{ML}$. Знайдемо координати вектора: $\overrightarrow{ML}=(-2-1;-1+2;4+3)$; $\overrightarrow{ML}=(-3;1;7)$.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Тоді канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{7}.$$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $K(2;4;3)$ та $M(2;4;5)$.
<u>Розв'язання:</u> Шукані рівняння знайдемо як і у прикладі 1, і вони мають вигляд: $\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-3}{2}$. Їх можна записати також як систему: $x-2=0$, $y=4$. Отже, пряма KM паралельна осі Oz, тобто перпендикулярна як до осі Ox, так і до осі Oy. Тому, ні напрямному коефіцієнту k, ні напрямному коефіцієнту l не можна надати ніякі інші значення крім нульових.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Параметричні рівняння</td><td>$$\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + lt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$$</td><td>
</td><td>Дані рівняння виражають прямокутні координати точки M, довільно вибраної на прямій L, через координату t, яка визначає положення точки M на прямій L. t називають параметром, який є незмінним для будь-якої точки прямої.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Скласти параметричні рівняння прямої, якщо канонічні рівняння мають вигляд: $\frac{x+1}{5}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-3}{-3}$.</td></tr>
</table>

	Розв'язання: Кожне з відношень $\frac{x+1}{5}$, $\frac{y+4}{-2}$, $\frac{z-3}{-3}$ прирівняємо до t, яке залишається незмінним $\frac{x+1}{5}=t$, $\frac{y+4}{-2}=t$, $\frac{z-3}{-3}=t$, і виразимо x, y, z через параметр t: $x=5t-1$, $y=-2t-4$, $z=-3t+3$. Це і є параметричні рівняння.
	ПРИКЛАД 2. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $K(-2;7;-3)$ паралельно вектору $\vec{s}(-4;2;-3)$. *Розв'язання:* Виберемо за початкову точку $K(-2;7;-3)$, а напрямним вектором – вектор $\vec{s}(-4;2;-3)$ і запишемо параметричні рівняння: $x=-4t-2$, $y=2t+7$, $z=-3t-3$.
	Зауваження: Параметр t легко вилучити із системи параметричних рівнянь, і тоді пряма матиме канонічний вигляд. Та слід брати до уваги той факт, що використання параметричних рівнянь під час розв'язання деяких задач найбільш вигідне, тому що збільшення кількості рівнянь спрощує обчислення.
	ПРИКЛАД 3. Знайти точку перетину площини $2x+3y+z-1=0$ та прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$. *Розв'язання:* Необхідно розв'язати систему, складену з рівнянь площини та прямої. Доцільно рівняння прямої представити у параметричному вигляді, виразити змінні x, y, z через параметр t: $x=t+1$, $y=-2t-1$, $z=6t$, і, підставивши ці вирази у загальне рівняння площини $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0$, розв'язати рівняння відносно однієї змінної t: $2t=2$, $t=1$. Ми визначимо параметр точки перетину, підставимо його у

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">параметричні рівняння прямої і знайдемо координати точки: $x = 1+1 = 2,\ y = -2+1 = -1,\ z = 6$.
Отже, точка перетину має координати: $\left(2;-1;6\right)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Рівняння прямої, що проходить через дві точки</td><td>$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$</td><td></td><td>$\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\left(x_2;y_2;z_2\right)$ – це координати точок M_1 та M_2 відповідно, що належать прямій.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння прямої, якщо вона проходить через точки $K(-2;5;3)$ та $F(4;-1;3)$.
<u>Розв'язання:</u> Оскільки точки K і F належать прямій, то скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки. Виберемо за початкову точку K, а за другу точку F. Маємо: $\frac{x+2}{4+2}=\frac{y-5}{-1-5}=\frac{z-3}{3-3}$; $\frac{x+2}{6}=\frac{y-5}{-6}=\frac{z-3}{0}$.
Отже, отримані рівняння – це рівняння шуканої прямої.
Зауважимо, що оскільки апліката напрямного вектора прямої дорівнює 0, то пряма перпендикулярна до осі Oz.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРИКЛАД 2. Скласти рівняння прямої, якщо вона проходить через точку $K(-2;5;3)$ та точку, що належить прямій $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{-3}$.
<u>Розв'язання:</u> Визначимо координати другої точки F з канонічних рівнянь заданої прямої: $(-3;0;6)$. Складемо рівняння прямої, скориставшись рівнянням прямої, що проходить через дві точки. Першою точкою виберемо задану точку $K(-2;5;3)$, а другою – $F(-3;0;6)$, маємо:
$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-3}{3}$.</td></tr>
</table>

Кут між прямими

$$\cos\varphi = \frac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1^{\,2} + l_1^{\,2} + m_1^{\,2}}\sqrt{k_2^{\,2} + l_2^{\,2} + m_2^{\,2}}}$$

де $\left(k_1, l_1, m_1\right)$ – напрямний вектор однієї прямої,

$\left(k_2, l_2, m_2\right)$ – напрямний вектор другої прямої.

ПРИКЛАД. Знайти кут між прямими $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$ і $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-1}$.

<u>Розв'язання:</u> Випишемо з рівнянь прямих напрямні вектори цих прямих: $\vec{s_1} = (1;-4;1)$, $\vec{s_2} = (2;-2;-1)$.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + (-4)\cdot(-2) + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{2+8-1}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ Отже, $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

Умова паралельності прямих

$$\vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \;\Rightarrow\; \frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \lambda$$

ПРИКЛАД. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2;3)$ паралельно прямій

$$l:\begin{cases}2x + 3y + 5z - 7 = 0\\ 3x - 4y + z - 8 = 0\end{cases}.$$

<u>Розв'язання:</u> Оскільки шукана пряма паралельна прямій l, за напрямний вектор шуканої прямої можна взяти напрямний вектор прямої l

$$\vec{s} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix} = 23\vec{i} + 13\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Отже, рівняння шуканої прямої – $\dfrac{x-1}{23} = \dfrac{y-2}{13} = \dfrac{z-3}{-17}$.

<table>
<tr><td rowspan="2">Умова перпендикулярності прямих</td><td>

$$\overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2} \;\Rightarrow\; k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$$

Тобто, $\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0$

</td></tr>
<tr><td>

ПРИКЛАД. Перевірити, що прямі $l_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{0}$ і $l_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ перпендикулярні.

<u>*Розв'язання:*</u> Координати напрямного вектора прямої l_1: $\overrightarrow{s_1} = (2; -1; 0)$. Знайдемо координати напрямного вектора прямої l_2, виразивши параметр t із кожного рівняння:

$$t = \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{4}.$$

Тобто, $\overrightarrow{s_2} = (1; 2; 4)$.

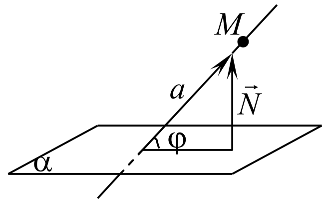
Перевіримо умову перпендикулярності:

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 2 - 2 = 0.$$

Отже, задані прямі перпендикулярні.

</td></tr>
</table>

8. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ

<table>
<tr><th>Назва</th><th>Вигляд</th><th>Рисунок,
Зауваження</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Перетин прямої і площини (гострий кут між прямою і площиною)</td><td>$\sin\varphi = \left| \dfrac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \right|$ –
синус кута φ між прямою a і площиною α</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">A, B, C – координати вектора нормалі $\overrightarrow{N}$ площини α, k, l, m – координати напрямного вектора $\vec{s}$ прямої a.
$\dfrac{x-x_0}{k} = \dfrac{y-y_0}{l} = \dfrac{z-z_0}{m}$ – рівняння прямої a в канонічному вигляді, де x_0, y_0, z_0 – координати точки M, яка належить прямій a.
$Ax + By + Cz + D = 0$ – загальне рівняння площини α.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 1. Знайти гострий кут між прямою $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ і площиною $2x + y - z + 4 = 0$.
<u>Розв'язання:</u> З рівняння площини визначаємо, що
$A = 2$, $\mathrm{B} = 1$, $\mathrm{C} = -1$;
з рівняння прямої визначаємо, що
$x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $z_0 = 2$, а $k = 2$, $l = 1$, $m = 2$.
Підставимо знайдені величини в формулу для визначення синуса кута між прямою і площиною і</td></tr>
</table>

	отримаємо: $$\sin\varphi=\left|\frac{2\cdot2+1\cdot1-1\cdot2}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}}\right|=\left|\frac{3}{\sqrt{6}\cdot3}\right|=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$ Знайдемо величину кута: $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.
	ПРИКЛАД 2. Знайти гострий кут між прямою $\begin{cases}2x+y+z-4=0\\ x-y+4z+5=0\end{cases}$ і площиною $x+2y+3z-1=0$. <u>*Розв'язання*</u>: Рівняння прямої не потрібно записувати у канонічному вигляді. Достатньо визначити координати k, l, m напрямного вектора прямої. Для цього складемо матрицю із коефіцієнтів рівняння прямої: $$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&4\end{pmatrix}.$$ Застосуємо формули (Додаток 9): $$k=\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix};\ l=\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix};\ m=\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}.$$ Отримаємо: $$k=\begin{vmatrix}1&1\\-1&4\end{vmatrix}=5;\ l=\begin{vmatrix}1&2\\4&1\end{vmatrix}=-7;\ m=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3.$$ З рівняння площини знаходимо $A=1$, $B=2$, $C=3$ і застосовуємо формулу для знаходження синуса кута між прямою і площиною: $$\sin\varphi=\frac{\lvert 5-14-9\rvert}{\sqrt{83}\cdot\sqrt{14}}=\frac{18}{\sqrt{1162}}\approx0{,}5281.$$ Отже, кут $\varphi\approx31^0 54'$.

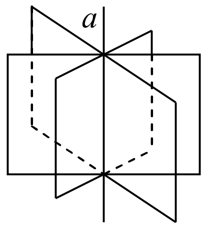
Рівняння в'язки площин, які проходять через задану пряму

$$Ax + By + Cz + D + \lambda \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

рівняння в'язки площин, де λ - будь-яке дійсне число;

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

рівняння даної прямої a.



ПРИКЛАД. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і точку $M(1;-1;2)$.

Розв'язання: Рівняння в'язки площин, які проходять через задану пряму, може бути записане так:

$$3x + y - 4z + 5 + \lambda \cdot (x - y + 2z - 1) = 0.$$

З цієї в'язки площин нам потрібно вибрати ту пряму, яка проходить через точку $M(1;-1;2)$. Якщо площина проходить через точку, то координати цієї точки повинні задовольняти рівнянню площини.

Підставляючи в рівняння

$$3 \cdot 1 - 1 - 4 \cdot 2 + 5 + \lambda(1 + 1 + 2 \cdot 2 - 1) = 0$$

координати точки M, отримаємо рівняння для визначення λ:

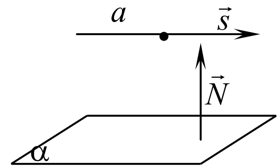
$$5\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/5.$$

Підставляючи це значення λ в рівняння в'язки прямих, отримаємо:

$$8x + 2y - 9z + 12 = 0.$$

Паралельність прямої і площини

$Ak + Bl + Cm = 0$ –
умова паралельності прямої a
і площини α
Тобто, $\vec{s} \perp \vec{N}$ і $\vec{s} \cdot \vec{N} = 0$.



A, B, C – координати вектора нормалі $\vec{N}$ площини α; k, l, m – координати напрямного вектора $\vec{s}$ прямої a.

ПРИКЛАД 1. Перевірити, що пряма $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$ паралельна до площини $2x + 2z - 1 = 0$.

<u>*Розв'язання*</u>: Визначимо з рівняння прямої координати її напрямного вектора $\vec{s}(2;-1;-2)$, а з рівняння площини – координати вектора нормалі $\vec{N}(2;0;2)$. Застосуємо умову паралельності прямої і площини:

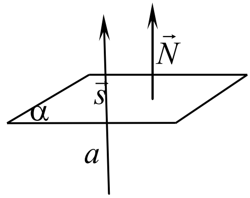
$$2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Отже, пряма і площина – паралельні.

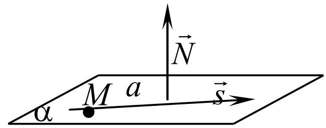
ПРИКЛАД 2. Через пряму $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ провести площину, яка паралельна до прямої $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$.

<u>*Розв'язання*</u>: Запишемо рівняння першої прямої за допомогою рівнянь двох площин, які проектують її відповідно на площини $x + 2y - 1 = 0$ і $3y + z - 5 = 0$.

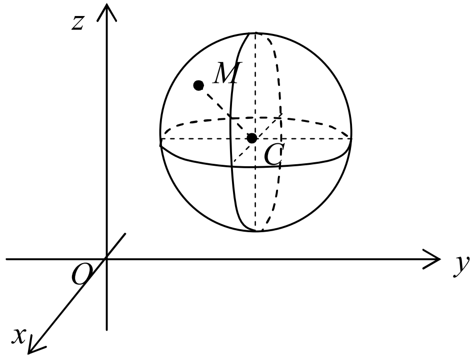
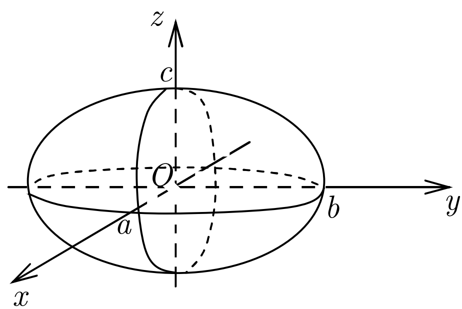
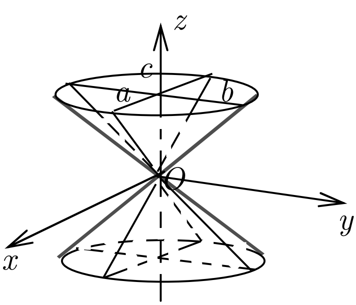
Рівняння в'язки площин, які проходять через цю пряму, має такий вид: $x + 2y - 1 + \lambda(3y + z - 5) = 0$, або $x + (2 + 3\lambda)y + \lambda z - (1 + 5\lambda) = 0$. Застосовуючи умову паралельності прямої і площини, визначимо λ так, щоб відповідна площина в'зки була паралельна до другої із заданих прямих. Маємо: $-1 \cdot 1 + 2 \cdot (2 + 3\lambda) - 3\lambda = 0$, або $3\lambda + 3 = 0$, звідки $\lambda = -1$. Таким чином, шукана площина визначається рівнянням $x - y - z + 4 = 0$.

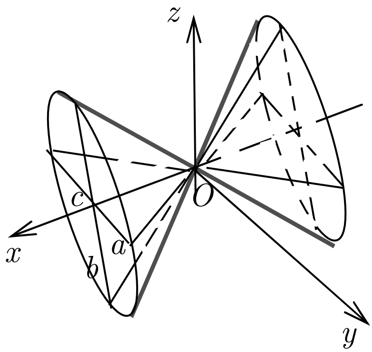
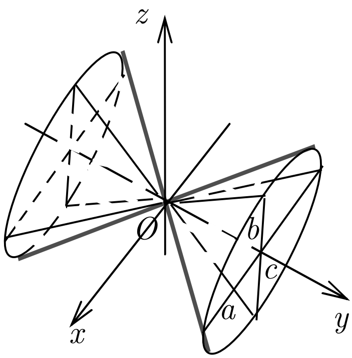
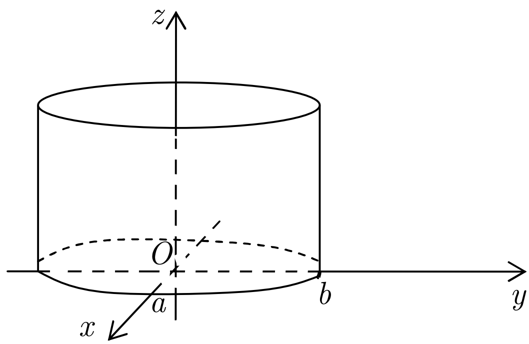
<table>
<tr>
<td rowspan="5">Умова перпендикулярності прямої і площині</td>
<td>$$\frac{A}{k}=\frac{B}{l}=\frac{C}{m} -$$
умова перпендикулярності прямої a і площини α
Тобто, $\vec{s}\parallel\vec{N}$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">A,B,C – координати вектора нормалі площини α ;
k,l,m – координати напрямного вектора прямої a .</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">ПРИКЛАД 1. Знайти рівняння перпендикуляра до площини $3x-y-5z-8=0$, який проходить через точку $(1;-1;2)$.
<u>Розв’язання</u>: Шукана пряма є перпендикулярною до даної площини, тому застосуємо умову перпендикулярності прямої і площини:
$$\frac{3}{k}=\frac{-1}{l}=\frac{-5}{m},$$
нормальний вектор площини можна вважати напрямним вектором прямої, тобто $l=3$; $m=-1$; $n=-5$. Знаючи, що пряма проходить через точку $(1;-1;2)$, маємо шукане рівняння прямої:
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-5}.$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">ПРИКЛАД 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;2;-1)$ перпендикулярно до прямої
$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}.$$
<u>Розв’язання</u>: Запишемо рівняння шуканої площини, застосувавши рівняння площини, що проходить через задану точку: $A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0$.
Застосувавши умову перпендикулярності прямої і площини, заміняємо величини A,B,C на пропорційні їм</td>
</tr>
</table>

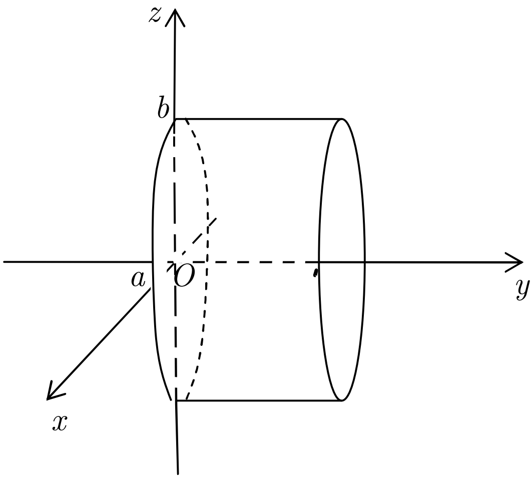
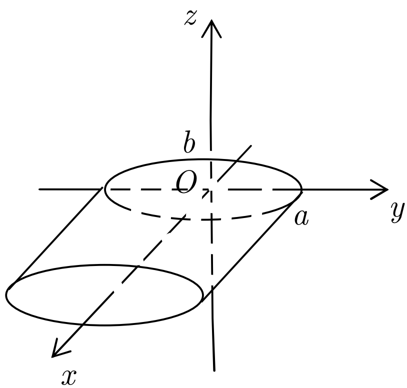
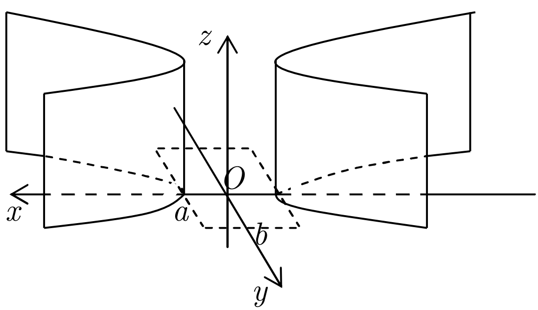
	величини k, l, m з рівняння прямої: $$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4},$$ і одержимо: $1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0$. Після спрощення маємо: $x-3y+4z+9=0$ – рівняння шуканої площини.
	ПРИКЛАД 3. Знайти рівняння проекції прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на площину $x+y+2z-5=0$. <u>*Розв'язання*</u>: Запишемо рівняння заданої прямої у вигляді рівнянь двох площин, які проектують її відповідно на площини xOy і xOz: $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}, \text{ або } 2x-y-3=0;$$ $$\frac{x-1}{1}=\frac{z}{3}, \text{ або } 3x-z-3=0.$$ Рівняння в'язки площин, які проходять через цю пряму, має такий вид: $2x-y-3+\lambda(3x-z-3)=0$, або $(2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0$. Застосовуючи умову перпендикулярності площин, виберемо з цієї в'язки площину, яка проектує дану пряму на задану площину. Маємо: $1\cdot(2+3\lambda)+1\cdot(-1)+2\cdot(-\lambda)=0$, або $\lambda+1=0$, звідки $\lambda=-1$. Таким чином, рівняння проектної площини має вид: $2x-y-3+(-1)\cdot(3x-z-3)=0$, або $x+y-z=0$. Шукану проекцію можна визначити як лінію перетину двох площин – заданої і проектної: $\begin{cases} x+y+2z-5=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$ Приведемо ці рівняння прямої до канонічного вигляду, в кінці отримаємо: $\frac{x}{1}=\frac{y-5/3}{-1}=\frac{z-5/3}{0}$.

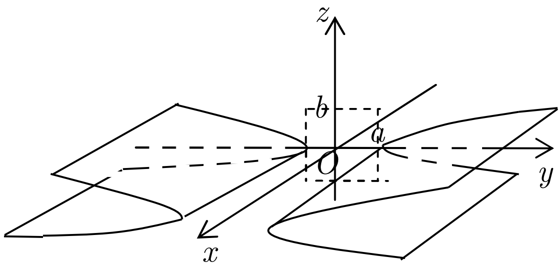
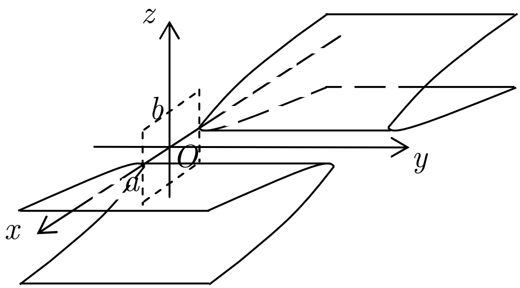
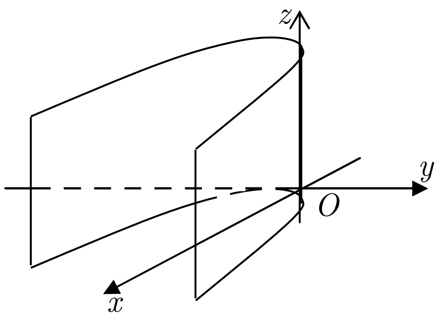
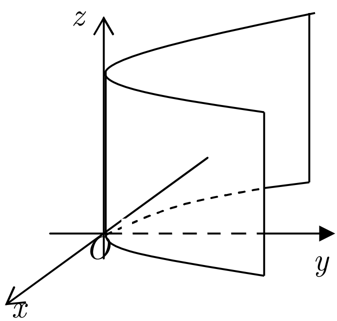
<table>
<tr><td rowspan="3">Умова, за якої пряма належить площині</td><td>$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ak + Bl + Cm = 0 \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">A, B, C, D – коефіцієнти з рівняння площини α;
k, l, m – координати напрямного вектора $\vec{s}$ прямої a;
x_0, y_0, z_0 – координати точки M, яка належить прямій a.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД. Перевірити, що пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ належить площині $x + y - z - 6 = 0$.
<u>Розв'язання</u>: Застосуємо умову належності прямої до площини: $\begin{cases} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) - 6 = 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 0 \end{cases}$. Вона виконується, отже, дана пряма належить площині.</td></tr>
</table>

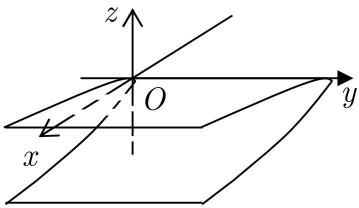
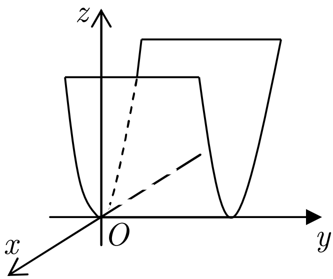
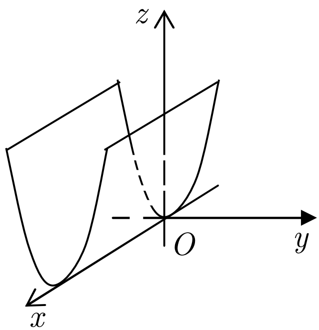
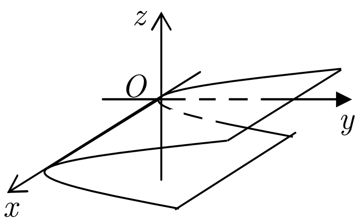
9. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

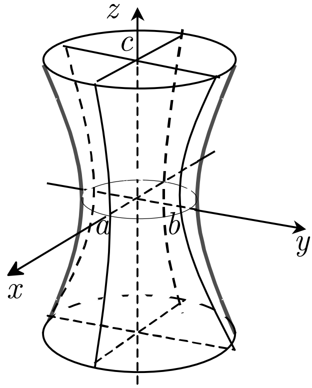
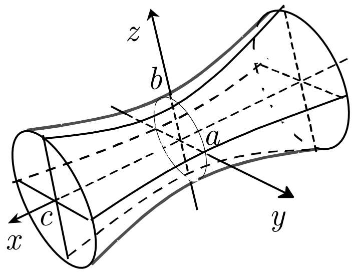
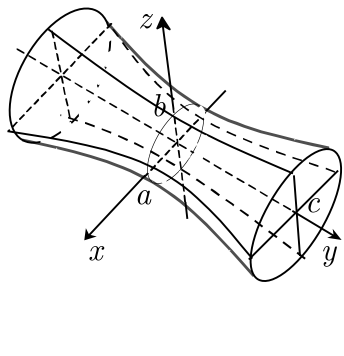
Назва	Вигляд	Рисунок, Зауваження
Сфера	$(x-x_0)^2+$ $+(y-y_0)^2+$ $+(z-z_0)^2=$ $=R^2$	
Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	

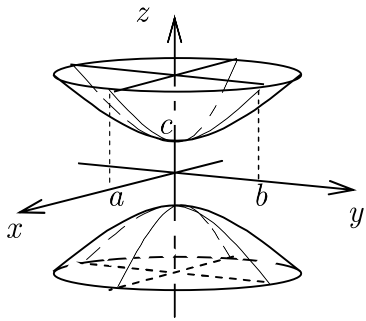
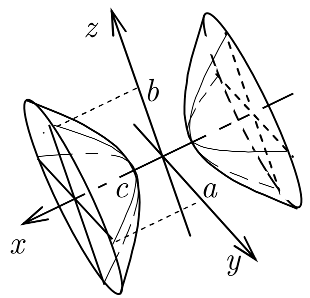
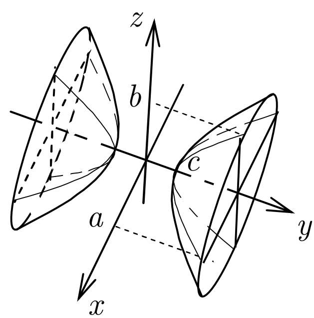
<table>
<tr>
<td rowspan="2">Конус</td>
<td>$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=0$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=0$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Еліптичний циліндр</td>
<td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

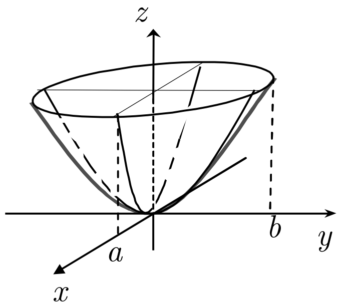
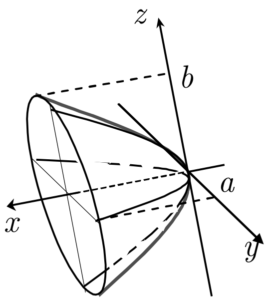
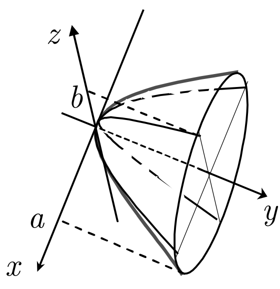
Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$	
	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$	
Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

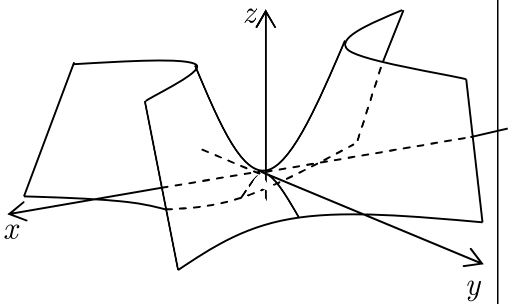
<table>
<tr><td rowspan="2">Гіперболічний циліндр</td><td>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Параболічний циліндр</td><td>$y^2=2px$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x^2=2py$</td><td>
</td></tr>
</table>

Параболічний циліндр	$z^2 = 2px$	
	$x^2 = 2pz$	
	$y^2 = 2pz$	
	$z^2 = 2py$	

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Однопорожнинний гіперболоїд</td>
<td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=1$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Двопорожнинний гіперболоїд</td><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=-1$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=-1$$</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Еліптичний параболоїд</td><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=x$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=y$$</td><td>
</td></tr>
</table>

Гіперболічний параболоїд	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$	

ДОДАТКИ

Додаток 1. Точка, яка належить лінії.

Якщо точка належить лінії, то її координати задовольняють рівнянню лінії. Отже, якщо координати цієї точки підставити у рівняння, воно перетвориться на тотожність.

Додаток 2. Точка перетину ліній.

Якщо існує точка перетину ліній, то вона належить двом лініям, які перетинаються. Тому координати її повинні задовольняти кожному з даних рівнянь, і навпаки, будь-яка точка, координати якої задовольняють цим двом рівнянням, належить двом лініям. Звідси, якщо необхідно знайти точку перетину двох ліній, треба розв'язати систему з цих рівнянь (розв'язати рівняння сумісно).

Додаток 3. Взаємне розташування прямої та пари точок

Взаємне розташування точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ та прямої $Ax + By + C = 0$ можна визначити за наступними ознаками:

1) точки M_1 і M_2 лежать з однієї сторони від прямої, якщо числа $Ax_1 + By_1 + C_1$, $Ax_2 + By_2 + C_2$ мають однакові знаки;

2) M_1 і M_2 лежать по різні сторони від прямої, якщо ці числа мають протилежні знаки;

3) одна з точок M_1 і M_2 (або обидві) лежать на прямій, якщо одне (або обидва) з цих чисел дорівнює нулю;

Додаток 4. Коментар до задачі на стор. 47.

Рівняння площин KOy та KOz складаємо за рівнянням площини, що проходить через три точки. Наприклад, площини KOz проходить через такі точки $O(0,0,0)$, $K(4,3,2)$ та точку $L(0,0,1)$, яка належить осі Oz.

Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{тобто} \quad 3x - 4y = 0.$$

Аналогічно знаходимо рівняння площини KOy.

Додаток 5. Напрямний вектор прямої.

<u>*Теорема.*</u> За напрямний вектор прямої можна вважати векторний добуток $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ нормальних векторів $\vec{N}_1 = \left(A_1; B_1; C_1\right)$ та $\vec{N}_2 = \left(A_2; B_2; C_2\right)$ двох площин, які перетинаються по цій прямій.

За визначенням векторного добутку маємо

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

<u>Приклад.</u> Знайти напрямний вектор прямої

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Пряма задана як перетин двох площин, вектори нормалей яких мають координати $\vec{N}_1 = \left(2; 3; -1\right)$ та $\vec{N}_2 = \left(1; 2; 3\right)$. За напрямний вектор шуканої прямої приймемо вектор $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Знайдемо його:

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} - 3\vec{k} - 6\vec{j} + 2\vec{i} = 11\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Отже, напрямні коефіцієнти будуть такі: $\vec{s} = (11; -7; 1)$.

Додаток 6. Кут між прямою та осями координат.

Означення. Під кутом між прямою L і віссю Ox розуміють кут α, між напрямним вектором $\vec{s}=(k;l;m)$ прямої L та ортом $\vec{i}=(1;0;0)$ осі Ox. Аналогічно визначають кути β, γ між прямою L та осями Oy, Oz. Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами прямої* L та обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}};\quad \cos\beta=\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}};\quad \cos\gamma=\frac{m}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}.$$

Для них справедлива рівність: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Приклад. Знайти кути, утворені прямою $\frac{x+2}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-3}{2}$ із осями координат.

Розв'язання. За напрямні коефіцієнти заданої прямої вважатимемо $k=2$, $l=1$, $m=2$. Знайдемо

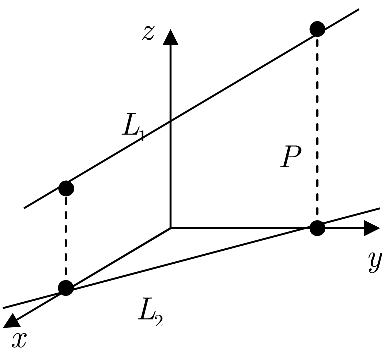
$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2}{3},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3},$$

звідси $\alpha\approx 48^0 11'$, $\beta\approx 78^0 32'$, $\gamma\approx 48^0 11'$.

Додаток 7. Проекції прямої на координатні площини.

Зауваження: під час розв'язання таких задач треба розрізняти два випадки.

Задано пряму $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$.



Випадок 1 (загальний). Якщо пряма L_1 непаралельна осі Oz, то проекція цієї прямої – пряма L – є перетином площини xOy та площини P, проведеної через L_2, паралельно осі Oz.

Розв'язання. У цьому випадку коефіцієнти C_1 та

C_2 не дорівнюють 0. Отже, загальне рівняння площини *P* не містить аплікату *z*.

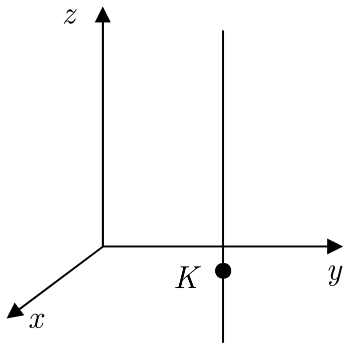
Правило. Щоб знайти проекцію прямої (рівняння в загальному вигляді) на координатну площину *xOy,* достатньо вилучити з загального рівняння координату z. Отримане рівняння сумісно з рівнянням $z = 0$ і є рівнянням шуканої проекції.

Випадок 2 (особливий). Пряма *L* паралельна осі *Oz,* тоді вона проектується у точку *K*.

Розв'язання. У цьому випадку пряма *L* має вигляд

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ тобто } C_1 = 0,\ C_2 = 0.$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо координати x_0, y_0 точки *K*, а координата $z = 0$. Аналогічно знаходять проекції прямої *L* на координатні площини *xOy* та *xOz*.



Приклад. Знайти проекцію прямої

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z - 12 = 0 \\ x - 2y + 4z - 10 = 0 \end{cases}$$

на координатні площини.

Розв'язання. Щоб знайти проекцію даної прямої на площину *xOy*, вилучимо *z* із заданого рівняння. Для цього помножимо перше рівняння на 4, а друге – на 3 і додамо отримані рівняння:

$$4(2x + 4y - 3z - 12) + 3(x - 2y + 4z - 10) = 0$$

або

$$11x + 10y - 78 = 0.$$

Отже, це рівняння разом з рівнянням $z = 0$ і є проекцією прямої на площину *xOy.* Вилучивши *x* із заданого рівняння, знайдемо $8y-11z+8=0$. Це рівняння разом з $x=0$ є проекцією прямої на площину *zOy*.

Вилучивши y, знайдемо $4x+5z-32=0$. Це рівняння разом з $y=0$ є проекцією прямої на площину *zOx*.

Додаток 8. Рівняння прямої, проведеної через точку перпендикулярно до прямої.

Перпендикуляр, проведений з точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на пряму L_1, що записана у канонічному вигляді $\frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1}$, і не проходить через точку M_0, має вигляд:

$$\begin{cases} k_1\left(x-x_0\right)+l_1\left(y-y_0\right)+m_1\left(z-z_0\right)=0; \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ k_1 & l_1 & m_1 \end{vmatrix}=0. \end{cases}$$

<u>*Зауваження:*</u> Якщо пряма L_1 проходить через точку M_0, то це рівняння перетворюється, згідно ознаки компланарності векторів, у тотожність (через точку, що належить прямій L_1, можна провести нескінченну множину перпендикулярів до L_1).

<u>Приклад.</u> Знайти рівняння перпендикуляра, проведеного з точки $K\left(1;0;1\right)$ до прямої $\begin{cases} x=3z+2 \\ y=2z \end{cases}$. Знайти основу перпендикуляра.

Розв'язання. Рівняння заданої прямої запишемо у канонічному вигляді:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}.$$

Рівняння перпендикуляра має вигляд:

$$\begin{cases} 3(x-1)+2(y-0)+1(z-1)=0; \\ \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0. \end{cases}$$

Після спрощення рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} 3x+2y+z-4=0 \\ x-2y+z-2=0 \end{cases}.$$

Координати основи перпендикуляра знайдемо, розв'язавши систему трьох рівнянь: $\begin{cases} 3x+2y+z-4=0 \\ x-2y+z-2=0 \\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$.

Отримаємо $K_0\left(\dfrac{11}{7};-\dfrac{2}{7};-\dfrac{1}{7}\right)$.

Додаток 9. Перехід від загальних рівнянь прямої до канонічних.

Загальні рівняння прямої мають вигляд $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, а канонічні – $\dfrac{x-x_0}{k}=\dfrac{y-y_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{m}$.

Отже, для того щоб записати канонічні рівняння прямої, потрібно знати: координати точки, що належить прямій $(x_0;y_0;z_0)$; координати напрямного вектора $\vec{s}=(k;l;m)$. Координати вектора $\vec{s}$ знайдемо згідно додатку 3, за формулами:

$$k=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\ l=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix};\ m=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Щоб знайти координати точки, треба розв'язати систему $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ методом Гауса, та, надавши одній із змінних, наприклад, z, будь-яке значення, знайти відповідний розв'язок.

Приклад. Записати канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x-4y+5z-10=0 \\ 6x-5y+z-17=0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Скористаємось формулами, поданими у додатку 5 для знаходження координат напрямного вектора $\vec{s}$, матимемо: $k=21$, $l=27$, $m=9$. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 3x-4y+5z-10=0 \\ 6x-5y+z-17=0 \end{cases}$. Надамо змінній z нульового значення, отримаємо систему з двох рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} 3x-4y=10 \\ 6x-5y=17 \end{cases}$, помножимо перше рівняння на -2 і додамо друге рівняння: $3y=-3$, $y=-1$. Підставимо значення $y=-1$ у перше рівняння і знайдемо $x=2$. Тобто, точка $K_0(2;-1;0)$ це фіксована точка на прямій. Запишемо канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{21}=\frac{y+1}{27}=\frac{z}{9} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{7}=\frac{y+1}{9}=\frac{z}{3}.$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Булдигін В. В., Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник. – К.: ТВіМС, 2011. – 224 с.
2. Выгодский М. Я. Основы высшей математики. Ч 1: Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1963. – 528 с.
3. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 872 с.
4. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
5. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1986. – Ч. 1. – 303 с., Ч. 2 – 415 с.
6. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.
7. Колосов А. І., Якунін А. В., Наземцева Л. В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина перша. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 144 с.
8. Колосов А. І., Якунін А. В., Наземцева Л. В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина друга. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 110 с.
9. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
10. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

Навчальне видання

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК
В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ
для самостійного вивчення теми
«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»
З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання
за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво»,
6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка
та електротехнології»)

Укладачі: **Кузнецова** Ганна Анатоліївна,
Ламтюгова Світлана Миколаївна,
Ситникова Юлія Валеріївна

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *Ю. В. Ситникова*

План 2013 р., поз. 117М

Підп. до друку 02.12.2013 р.	Формат 60*84/16
Друк на ризографі.	Ум. друк. арк. 4,5
Тираж 50 пр.	Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса:rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.