

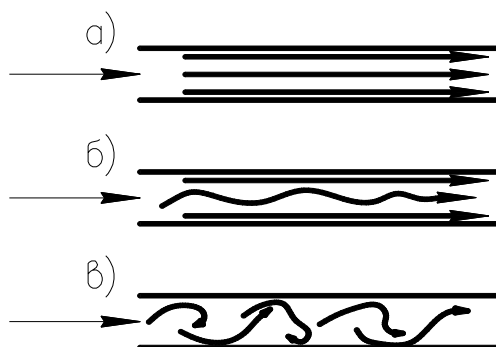
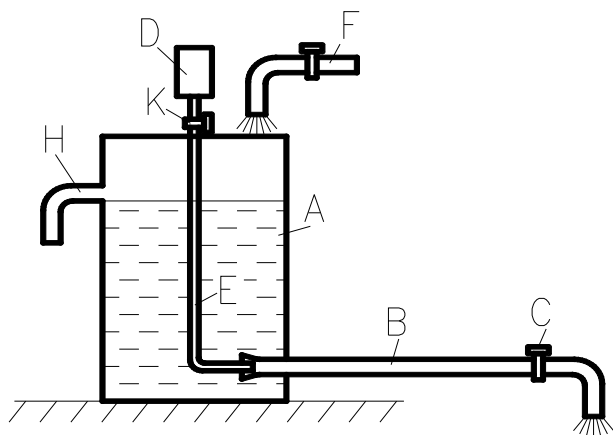
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА имени А. Н. БЕКЕТОВА

Д. А. ШУШЛЯКОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

(для студентов специальностей по направлению подготовки
6.060101 «Строительство» и 6.170202 "Охрана труда"
высших учебных заведений)



$$Re = Vd / \nu$$

УДК 533.6 (075)
ББК 22.253.3я7

Ш 98

Автор:

Шушляков Д. А. к.т.н., доц. кафедры теплохладоснабжения (Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А. Н. Бекетова)

Шушляков Д. А.

Ш 98 Техническая механика жидкостей и газов: консп. лекций / Д.А. Шушляков;
Харьк. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Х: ХНУГХ, 2013. – 64 с.

В рассматриваются основные физические свойства, законы равновесия и движения жидкостей и газов, применительно к технике, инженерным сетям и безопасности жизнедеятельности.

Предназначен для студентов направления подготовки 6.060101 «Строительство» и 6.170202 "Охрана труда".

УДК 533.6 (075)

ББК 22.253.3я7

© Д.А. Шушляков, 2013
© ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2013

Оглавление

1. Предмет технической механики жидкости и газов.....	4
2. Основные физические свойства жидкости.....	4
2.1. Плотность жидкости. Вязкость жидкостей. Капиллярные явления. Аномальные жидкости. Идеальная жидкость.....	4
3. Равновесие капельных жидкостей.....	13
3.1. Равновесное состояние жидкости и действующие силы.....	13
3.2. Гидростатическое давление в точке.....	15
3.3. Общие дифференциальные уравнения равновесия жидкости.....	16
3.4. Равновесие капельной жидкости в поле земного тяготения.....	21
3.5. Абсолютное и избыточное давление. Вакуум.....	23
3.6. Давление жидкости на плоские стенки. Центр давления.....	24
3.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности. Закон Архимеда.....	26
4. Уравнение энергии и теорема импульсов.....	30
4.1. Основные понятия и определения движения жидкости.....	30
4.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки несжимаемой жидкости.....	34
4.3. Уравнение неразрывности.....	39
5. Общие сведения о гидравлических сопротивлениях.....	42
5.1. Виды гидравлических сопротивлений.....	42
5.2. Общая формула для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах.....	44
5.3. Ламинарное и турбулентное движение жидкости.....	46
5.4. Число Рейнольдса.....	47
5.5. Особенности ламинарного и турбулентного движения жидкости в трубах.....	49
5.6. Потери напора на трение в круглой трубе.....	50
5.7. Опытные данные о распределении скоростей и потерях напора.....	52
5.8. Местные гидравлические сопротивления. Общие сведения.....	54
6. Задачи.....	56
Список литературы.....	57

1. ПРЕДМЕТ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗОВ

Механика жидкости и газов – наука, рассматривающая основные законы движения и равновесия жидкостей (как капельных, так и газообразных), а также их силовое взаимодействие с твердыми телами.

Механику жидкости можно разделить на две части:

- 1) теоретическая механика жидкости, где излагаются основные положения теории равновесия и движения капельных жидкостей и газов;
- 2) прикладная (техническая) механика жидкости, в которой рассматривается приложение этих законов к ряду практических случаев.

Знание механики жидкости необходимо для решения целого ряда инженерных задач – расчета, трубопроводов, воздухопроводов, конструирование гидравлических и воздуходушных машин (компрессоры, насосы, вентиляторы и др.), проектирование котельных агрегатов, а также решения множества других вопросов [1-7].

2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

2.1. Плотность жидкости. Вязкость жидкостей.

Капиллярные явления. Аномальные жидкости. Идеальная жидкость

Жидкости с точки зрения механических свойств разделяются на два класса – малосжимаемые (капельные) и сжимаемые (газообразные). С позиций физики капельные жидкости значительно отличаются от газообразных. А в механике жидкости часто законы, которые справедливы для капельных жидкостей, справедливы и для газообразных, и наоборот.

Для большинства случаев рассматриваемых в данном пособии не будет иметь принципиального значения, о какой жидкости будет идти речь – капельной или газообразной. Если же возникнет необходимость – это будет оговариваться отдельно.

Капельные жидкости обладают вполне определенным объемом, величина которого практически не изменяется под действием внешних сил. Газы занимают весь предоставляемый им объем и могут значительно изменять свой объем в зависимости от прилагаемых внешних сил.

Основные свойства жидкости, которые существенно влияют на многие законы их движения – это плотность и вязкость. В некоторых ситуациях также большое значение может иметь сила поверхностного натяжения.

Плотность жидкостей – плотностью жидкости ρ называется ее масса, заключенная в единице объема:

$$\rho = M / W \quad (1)$$

где M – масса жидкости в объеме W .

Плотность воды при 4°C $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ($102 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$).

Если жидкость неоднородна, то формула (1) определяет лишь среднюю плотность жидкости. Для определения плотности в данной точке следует пользоваться формулой:

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W} \quad (2)$$

В практических приложениях о массе жидкости судят по ее весу. Вес жидкости, приходящийся на единицу объема, называется удельным весом:

$$\gamma = G/W, \quad (3)$$

где G — вес жидкости в объеме W .

Удельный вес воды при 4°C $\gamma = 9810 \text{ Н/м}^3$ (1000 кгс/м^3).

Если жидкость неоднородна, то формула (3) определяет лишь средний удельный вес жидкости. Для определения удельного веса жидкости в данной точке следует пользоваться формулой

$$\gamma = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta W} \quad (4)$$

где ΔG — вес жидкости в объеме ΔW .

Плотность и удельный вес связаны между собой известным соотношением

$$\gamma = \rho g \quad (5)$$

где g — ускорение свободного падения.

Относительным удельным весом жидкости (или относительным весом) δ называется отношение удельного веса данной жидкости к удельному весу воды при 4°C

$$\delta = \gamma_{\text{ж}} / \gamma_{\text{в}}^4 \quad (6)$$

В отличие от удельного относительный удельный вес представляет собой отвлеченную (безразмерную) величину, численное значение которой не зависит от выбранной системы единиц измерения. Так, для пресной воды при 4°C имеем

$$\delta_{\text{в}}^4 = 1 \quad (7)$$

В таблице 1 в качестве примера приведены значения удельного веса и плотности некоторых капельных, а в таблице 2 — сжимаемых жидкостей (газов).

Плотность, а, следовательно, удельный и относительный удельный вес жидкостей меняются с изменением давления и температуры. Эта зависимость различна для капельных жидкостей и газов.

Сжимаемость капельных жидкостей под действием давления характеризуется коэффициентом объемного сжатия β_{ω} , который представляет собой относительное изменение объема жидкости на единицу изменения давления

$$\beta_{\omega} = -\frac{1}{W_0} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta p} \quad (8)$$

где W_0 — первоначальный объем жидкости;

ΔW — изменение этого объема при увеличении давления на величину Δp .

Коэффициент объемного сжатия в системе СИ имеет размерность Па^{-1} .

Знак минус в формуле (8) обусловлен тем, что положительному приращению давления p соответствует отрицательное приращение (т. е. уменьшение) объема жидкости.

Таблица 1 – Плотность ρ и удельный вес γ капельных жидкостей при 20°C

Жидкость	γ , Н/м ³	ρ , кг/м ³
Анилин	9270	1040
Бензол	8590—8630	876—880
Бензин авиационный	7250—7370	739—751
Вода пресная	9790	998,2
» морская	10010—10090	1002—1029
Глицерин безводный	12260	1250
Керосин	7770—8450	792—840
Масло касторовое	9520	970
» минеральное	8000—8750	877—892
Нефть	8340—9320	850—950
Ртуть	132900	13547
Спирт этиловый безводный	7440	789,3
Хлористый натрий (раствор)	10690	1200
Эфир этиловый	7010—7050	715—719

Таблица 2 – Приближенные значения плотности ρ и удельного веса γ газов при давлении 740 мм рт. ст. и $t = 15^\circ\text{C}$

Газ	γ , Н/м ³	ρ , кг/м ³
Водород	0,81	0,08
Водяной пар	7,25	0,74
Окись углерода	11,3	1,15
Азот	11,3	1,15
Воздух	11,6	1,2
Кислород	12,8	1,3
Углекислота	17,6	1,8

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем упругости жидкости

$$E_o = 1/\beta_o \quad (9)$$

Коэффициент объемного сжатия капельных жидкостей мало меняется при изменении температуры и давления (таблица 4).

Таблица 3 – Значения коэффициента объемного сжатия воды при разных температурах и давлениях

t 0C	β_o , Па ⁻¹ при давлениях в Па				
	500000	1000000	2000000	3900000	7800000
0	0,054	0,0537	0,0531	0,0523	0,0515
5	0,0529	0,0523	0,0518	0,0508	0,0493
10	0,0523	0,0518	0,0508	0,0498	0,0481
15	0,0518	0,051	0,0503	0,0488	0,047
20	0,0515	0,0505	0,0495	0,0481	0,046

Таким образом, при повышении давления на $9,8 \cdot 10^4$ Па (1 ат) объем воды уменьшается на 1/20000 часть первоначальной величины. Коэффициент объемного сжатия для других капельных жидкостей имеет примерно тот же порядок. В подавляющем большинстве случаев, встречающихся в практиче-

ской деятельности инженера-сантехника, изменения давления не достигают больших величин, и поэтому сжимаемостью воды можно пренебрегать, считая удельный вес и ее плотность не зависящими от давления.

Прочность жидкости на разрыв при решении практических задач не учитывается.

Температурное расширение капельных жидкостей характеризуется коэффициентом температурного расширения β_t , выражающим относительное увеличение объема жидкости при увеличении температуры на 1°C , т. е.

$$\beta_t = \frac{1}{W_0} \frac{\Delta W}{\Delta T} \quad (10)$$

где W_0 — первоначальный объем жидкости;

ΔW — изменение этого объема при повышении температуры на величину ΔT .

Коэффициент температурного расширения капельных жидкостей, как это видно из таблицы 4, незначителен. Так, для воды при температуре от 10 до 20°C и давлении 10^5Па — $\beta_t = 0,00015$ $1/\text{град}$.

Таблица 4 – Коэффициент температурного расширения воды

Давление, Па	β_t , $1/\text{град}$ при температуре, $^\circ\text{C}$				
	1-10	10-20	40-50	60-70	90-100
100000	0,000014	0,00015	0,000422	0,000556	0,000719
9800000	0,000043	0,000165	0,000422	0,000548	0,000714
19600000	0,000072	0,000183	0,000426	0,000539	—
49000000	0,000149	0,000236	0,000429	0,000523	0,000661
88300000	0,000229	0,000294	0,000437	0,000514	0,000621

Однако влияние температуры на удельный вес в ряде случаев (при значительных разностях температур) приходится учитывать.

Плотность и удельный вес капельных жидкостей, как это следует из предыдущих рассуждений, мало изменяются с изменением давления и температуры. Можно приближенно считать, что плотность не зависит от давления, а определяется только температурой. Из выражений (1) и (10) можно найти приближенное соотношение для расчета изменения плотности капельных жидкостей с изменением температуры:

$$\rho_t = \rho_{t^0} \frac{1}{1 + \beta_t (T - T_0)} \quad (11)$$

Значения коэффициента β_t в (11) находятся из таблиц в пределах заданного интервала температур (таблица 4).

Способность жидкостей менять плотность (удельный вес) при изменении температуры широко используется для создания естественной циркуляции в котлах, отопительных системах, для удаления продуктов сгорания и т. д.

В таблице 5 приведены значения плотности воды при разных температурах.

В отличие от капельных жидкостей газы характеризуются значительной сжимаемостью и высокими значениями коэффициента температурного расширения. Зависимость плотности газов от давления и температуры устанавливается уравнением состояния.

Наиболее простыми свойствами обладает газ, разреженный настолько,

что взаимодействие между его молекулами может не учитываться – так называемый идеальный газ.

Таблица 5 – Зависимость плотности ρ , кинематической ν и динамической μ вязкости воды от температуры

Температура, °C	ρ , кг/м ³	ν , м ² /с	μ , Па·с
0	999,9	0,00000179	0,00179
4	1000	0,00000152	0,00157
20	998	0,00000101	0,00101
40	992	0,00000066	0,00065
60	983	0,00000048	0,00048
80	972	0,00000037	0,00036
90	965	0,00000033	0,00031
99	959	0,00000028	0,00027

Для идеальных газов справедливо уравнение Клапейрона, позволяющее определять плотность газа при известных давлении и температуре, т.е.

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (12)$$

где p - абсолютное давление; R - удельная газовая постоянная, различная для разных газов, но не зависящая от температуры и давления (для воздуха $R = 287$ Дж/(кг·К)); T - абсолютная температура.

Поведение реальных газов в условиях, далеких от сжижения, лишь незначительно отличается от поведения идеальных газов, и для них в широких пределах можно пользоваться уравнениями состояния идеальных газов.

В технических расчетах плотность газа обычно приводят к нормальным физическим условиям ($t=0^\circ$; $p = 101\,325$ Па) или к стандартным условиям ($t=20^\circ\text{C}$; $p=101325$ Па), иногда к нормальным техническим условиям ($t=15^\circ$; $p=98000$ Па).

Плотность воздуха при $R = 287$ Дж/(кг·К) в стандартных условиях по формуле (12) будет равна $\rho=1,2$ кг/м³.

Плотность воздуха при других условиях определяется по формуле

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \quad (13)$$

Так как объем газа в большой мере зависит от температуры и давления, выводы, полученные при изучении капельных жидкостей, можно распространять на газы лишь в том случае, если в пределах рассматриваемого явления изменения давления и температуры незначительны. Значительные разности давлений, вызывающие существенное изменение плотности газов, могут возникнуть при их движении с большими скоростями. Соотношение между скоростью движения жидкости и скоростью звука в ней позволяет судить о необходимости учета сжимаемости в каждом конкретном случае. Практически газ можно принимать несжимаемым при скоростях движения, не превышающих 100 м/с.

Вязкость жидкостей. Вязкостью называется свойство жидкостей оказывать сопротивление сдвигу. Все реальные жидкости обладают определенной вязкостью, которая проявляется в виде внутреннего трения при относительном перемещении смежных частиц жидкости. Наряду с легко подвижными жидко-

стями (например, водой, воздухом) существуют очень вязкие жидкости, сопротивление которых сдвигу весьма значительно (глицерин, тяжелые масла и др.). Таким образом, вязкость характеризует степень текучести жидкости или подвижности ее частиц.

Пусть жидкость течет вдоль плоской стенки параллельными ей слоями (рис. 1), как это наблюдается при ламинарном движении. Вследствие тормозящего влияния стенки слои жидкости будут двигаться с разными скоростями, значения которых возрастают по мере отдаления от стенки.

Рассмотрим два слоя жидкости,двигающиеся на расстоянии Δy друг от друга. Слой A движется со скоростью u , а слой B — со скоростью $u + \Delta u$. Вследствие разности скоростей слой B сдвигается относительно слоя A на величину Δu (за единицу времени). Величина Δu является абсолютным сдвигом слоя B по слою A , а $\Delta u / \Delta y$ есть градиент скорости (относительный сдвиг). Появляющееся при этом движении касательное напряжение (силу трения на единицу площади) обозначим через τ . Тогда аналогично явлению сдвига в твердых телах мы получим следующую зависимость между напряжением и деформацией:

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (14)$$

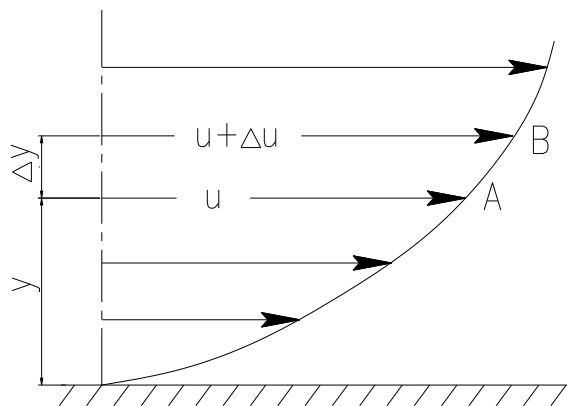


Рис. 1 – Распределение скоростей при течении жидкости вдоль твердой стенки

или, если слои будут находиться бесконечно близко друг к другу,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (15)$$

Величина μ , аналогичная коэффициенту сдвига в твердых телах и характеризующая сопротивляемость жидкости сдвигу, называется динамической или абсолютной вязкостью. На существование соотношения (15) первое указание имеется у Ньютона, и потому оно называется законом трения Ньютона. Сила внутреннего трения в жидкости

$$T = \tau \omega = \mu \omega \frac{du}{dy} \quad (16)$$

т. е. прямо пропорциональна градиенту скорости, площади трущихся слоев ω и динамической вязкости (тем самым трение в жидкости отличается от тре-

ния в твердых телах, где сила трения зависит от нормального давления и не зависит от площади трущихся поверхностей) [1,4].

В международной системе единиц динамическая вязкость выражается в $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ или $\text{Па}\cdot\text{с}$.

В технической системе единиц динамическая вязкость имеет размерность $\text{кгс}\cdot\text{с}/\text{м}^2$. В системе CGS за единицу динамической вязкости принимается пуаз (П) в память французского врача Пуазейля, исследовавшего законы движения крови в сосудах человеческого тела, равный $1 \text{ г}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$: $1 \text{ Па}\cdot\text{с}=0,102 \text{ кгс}\cdot\text{с}/\text{м}^2$.

Вязкость жидкостей в сильной степени зависит от температуры; при этом вязкость капельных жидкостей при увеличении температуры уменьшается, а вязкость газов возрастает.

Наряду с понятием абсолютной или динамической вязкости в гидравлике находит применение понятие кинематической вязкости, представляющей собой отношение абсолютной вязкости к плотности жидкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (17)$$

Таблица 6 - Кинематическая и динамическая вязкость капельных жидкостей (при $t=20^\circ\text{C}$)

Жидкость	μ , Па·с	ν , $\text{м}^2/\text{с}$
Вода пресная	0,00101	0,000001012
Глицерин безводный	0,512	0,00041
Керосин (при 15°C)	0,0016-0,0025	0,000002-0,000003
Бензин (при 15°C)	0,0006-0,00065	0,00000083-0,00000093
Масло касторовое	0,972	0,01002
» минеральное	0,0275-1,29	0,0000313-0,0145
Нефть при 15°C ($\delta_4^{15}=0,86$)	0,007-0,008	0,0000081-0,0000093
Ртуть	0,0015	0,001000011
Спирт этиловый безводный	0,00119	0,00000151

В международной системе единиц кинематическая вязкость измеряется в $\text{м}^2/\text{с}$; единицей для измерения кинематической вязкости в системе CGS служит стокс (в честь английского физика Стокса): $1 \text{ Ст}=1 \text{ см}^2/\text{с}=10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

Кинематическая вязкость газов зависит как от температуры, так и от давления, возрастая с увеличением температуры и уменьшаясь с увеличением давления (таблица 7).

Таблица 7 – Значения кинематической вязкости ν и удельной газовой постоянной R для некоторых газов

Газ	ν , $\text{м}^2/\text{с}$ при температуре в $^\circ\text{C}$				R , Дж/(кг·К)
	0	20	50	100	
Воздух	0,0000133	0,0000151	0,0000178	0,0000232	287
Метан	0,0000145	0,0000165	0,0000197	0,0000256	520
Этилен	0,0000075	0,0000086	0,0000104	0,00000138	296

Экспериментально вязкость жидкостей определяют вискозиметрами.

Капиллярные явления. Молекулы жидкости, расположенные у поверхности контакта с другой жидкостью, газом или твердым телом, находят-

ся в условиях, отличных от условий внутри некоторого объема жидкости. Внутри объема жидкости молекулы окружены со всех сторон такими же молекулами, вблизи поверхности — лишь с одной стороны. Поэтому энергия поверхностных молекул отличается от энергии молекул в объеме на некоторую величину, называемую поверхностной энергией. Эта энергия пропорциональна площади поверхности раздела s :

$$\mathcal{E}_n = \sigma s \quad (18)$$

Коэффициент пропорциональности σ , называемый коэффициентом поверхностного натяжения, зависит от природы соприкасающихся сред. Этот коэффициент можно представить в виде

$$\sigma = -F/l \quad (19)$$

где F — сила поверхностного натяжения;

l — длина линии, ограничивающей поверхность раздела.

Исходя из определения, σ имеет размерность энергии на единицу площади или силы на единицу длины. Для границы раздела вода — воздух при $t=20^\circ\text{C}$ коэффициент поверхностного натяжения $\sigma=0,073 \text{ Дж/м}^2$, для границы раздела ртуть — воздух коэффициент $\sigma=0,48 \text{ Дж/м}^2$.

Поверхностное натяжение жидкости чувствительно к ее чистоте и температуре. Вещества, способные в значительной степени снизить силы поверхностного натяжения, называются поверхностно-активными веществами (ПАВ). При повышении температуры величина поверхностного натяжения уменьшается, а в критической точке перехода жидкости в пар обращается в нуль.

На поверхности раздела трех фаз, например, твердой стенки 1, жидкости 2 и газа 3 между поверхностью жидкости и твердой стенкой образуется так называемый краевой угол θ (рис. 2). Величина краевого угла зависит от природы соприкасающихся сред (от поверхностных натяжений на их границах) и не зависит ни от формы сосуда, ни от действия силы тяжести. Если край жидкости приподнят, ее поверхность имеет вогнутую форму (рис. 2 а) — краевой угол острый. В этом случае жидкость смачивает твердую поверхность. Чем хуже смачивающая способность жидкости, тем больше краевой угол. При $\theta > 90^\circ$ жидкость считается несмачивающей, при полном несмачивании $\theta=180^\circ$. Капли такой жидкости как бы поджимаются, стараясь уменьшить площадь контакта с твердой поверхностью.

От явления смачивания зависит поведение жидкости в тонких (капиллярных) трубках, погруженных в эту жидкость. В случае смачивания жидкость в трубке поднимается над уровнем свободной поверхности, в случае несмачивания — опускается. Высота капиллярного поднятия (опускания) жидкости находится по формуле

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{\gamma r} \cos \theta \quad (20)$$

где γ — удельный вес жидкости;

r — радиус трубки.

Во всех явлениях, происходящих при совместном действии сил поверхностного натяжения и сил тяжести, значительную роль играет капиллярная

постоянная $\sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma}}$, входящая в выражение (20) и имеющая линейную размерность; для воды при 20° С капиллярная постоянная равна 0,0039 м.

Аномальные жидкости. К жидкостям, не подчиняющимся закону вязкости Ньютона (15), так называемым "неньютоновским" (или аномальным) жидкостям, можно отнести, например, литой бетон, глинистый раствор, употребляемый при бурении скважин, нефтепродукты при температуре, близкой к температуре застывания, коллоиды и др.

Опытами установлено, что движение неньютоновских жидкостей начинается только после того, как касательные напряжения достигнут некоторого предельного минимального значения (так называемое начальное напряжение сдвига); при меньших напряжениях эти жидкости не текут, а испытывают только упругие деформации.

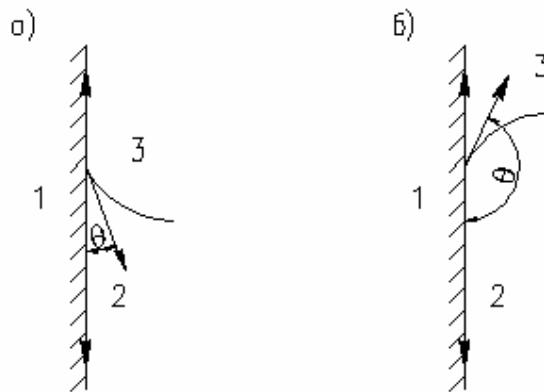


Рис. 2 – Определение краевого угла

В аномальных жидкостях касательное напряжение определяется по формуле Бингема

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dy} \quad (21)$$

где τ_0 — начальное напряжение сдвига.

Таким образом, в аномальных жидкостях сила трения возникает еще в покоящихся жидкостях, но при стремлении этих жидкостей прийти в движение. На рис. 3 показана зависимость между касательным напряжением и градиентом скорости для нормальных 1 и аномальных 2 жидкостей.

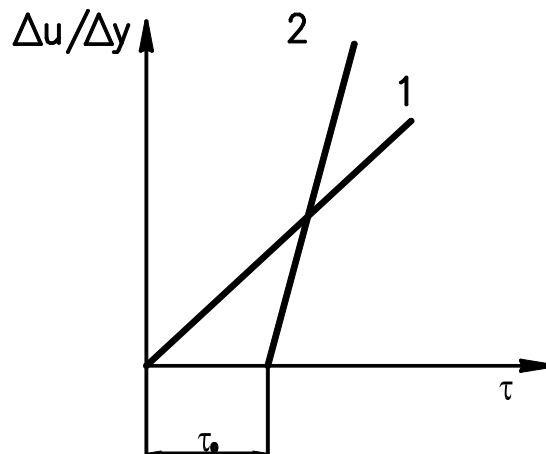


Рис. 3 – Зависимость касательного напряжения от градиента скорости

Вязкость аномальных жидкостей (так называемая структурная вязкость) в отличие от вязкости ньютоновских жидкостей при заданной температуре и давлении непостоянна и изменяется в функции от градиента скорости $\frac{du}{dy}$.

Поведение различных аномальных жидкостей под нагрузкой и их динамические свойства излагаются в реологии, выводы которой имеют одинаковое значение, как для механики жидкости, так и для теории пластичности.

Идеальная жидкость. В механике жидкости для облегчения решения некоторых задач используется понятие об идеальной жидкости.

Под идеальной жидкостью понимают воображаемую жидкость, лишенную вязкости, абсолютно несжимаемую, не расширяющуюся с изменением температуры, абсолютно неспособную сопротивляться разрыву. Таким образом, идеальная жидкость представляет собой некоторую модель реальной жидкости. Выводы, полученные исходя из свойств идеальной жидкости, приходится, как правило, корректировать, вводя поправочные коэффициенты.

3. РАВНОВЕСИЕ КАПЕЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

3.1. Равновесное состояние жидкости и действующие силы

Равновесное состояние. Если на некоторую массу жидкости не действуют и не действуют внешние силы, то каждая частица этой массы или остается неподвижной относительно данной системы координат, или движется прямолинейно с одинаковой для всех частиц скоростью, так что взаимное расположение частиц этой массы жидкости остается неизменным. Такое механическое состояние массы жидкости называется *равновесным*.

При действии внешних сил рассматриваемая масса жидкости может или сохранить равновесное положение, или перейти в состояние движения. Для равновесия необходимо, чтобы эти силы удовлетворяли некоторым условиям, которые будут рассмотрены далее.

Внешние силы могут быть поверхностными и объемными (массовыми).

Поверхностные силы – это силы, действующие в точках граничной поверхности данной массы. Они пропорциональны размеру площадки $\Delta\omega$, взятой на этой поверхности, для которой можно написать равенство:

$$\Delta P = p \Delta\omega \quad (22)$$

где ΔP – действующая поверхностная сила, а p – коэффициент пропорциональности, физический смысл которого очевиден из отношения $p = \Delta P / \Delta\omega$, то есть этот коэффициент представляет собой так называемое "напряжение".

Объемные (или массовые) силы – это внешние силы, пропорциональные объему жидкости (если данная масса однородна, т. е. плотность ее одинакова во всем объеме). Для объемных сил справедлива зависимость

$$\Delta R = k \Delta W \quad (23)$$

где k – коэффициент пропорциональности, физический смысл которого заключается в условии $k = \rho j$ (здесь ρ – плотность, а j – ускорение данной объемной силы).

Условия действия поверхностных сил при равновесии жидкости. Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять поверхностные силы при равновесии жидкости.

Представим некоторую массу жидкости, находящуюся в равновесном состоянии (рис. 4). Пусть в некоторой точке M ее граничной поверхности действует сила R . При этом силу R можно рассматривать как равнодействующую всех сил, которые действуют в этой точке [1,4]. Разлагая эту силу по направлению нормали и касательной к граничной поверхности в этой точке, мы найдем две силы: силу N — нормальную к указанной поверхности и силу T — касательную к той же поверхности.

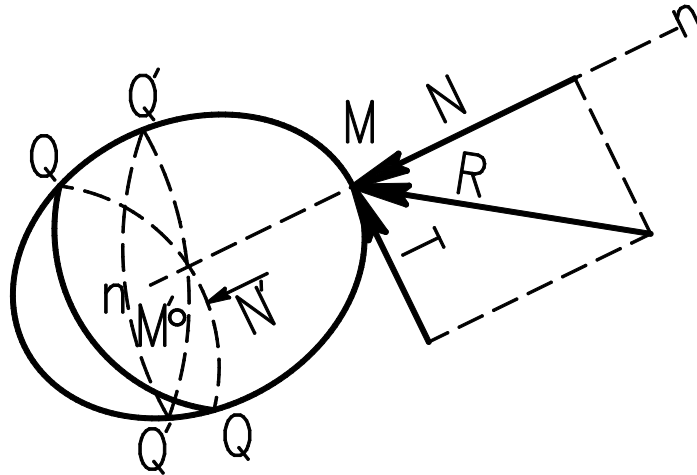


Рис. 4 – Действие поверхностных сил при равновесии жидкости

Сила N сжимает частицу M , и, поскольку жидкость сопротивляется сжатию, в этой точке (где расположена частица) может возникнуть реакция, которая уравновесит силу N — следовательно, частица M останется в равновесии. Сила T — касательная сила — стремится сдвинуть частицу M . Чтобы сдвига не произошло и равновесное состояние не нарушалось, необходимо соблюдение условия $T=0$, или, иначе, для равновесия частицы M необходимо, чтобы равнодействующая сила R , действующая на частицу M , была направлена (по внутренней нормали n) к граничной поверхности, т. е. была сжимающей, а не растягивающей силой.

Отсюда следует вывод — для сохранения равновесия массы жидкости необходимо, чтобы внешние силы, действующие в точках ее граничной поверхности, были направлены только по внутренним нормальям к этой поверхности.

Взаимодействие между частицами покоящейся жидкости. Рассмотрим силовое взаимодействие между частицами внутри массы жидкости. С этой целью пересечем пространство, занятое покоящейся жидкостью, произвольной поверхностью Q (рис. 4), которая разделит массу жидкости на две части — верхнюю и нижнюю. Рассмотрим затем равновесие, например, нижней части.

Поверхность Q в пределах сечения является граничной поверхностью этой части. Поэтому на частицу M' , лежащую на этой поверхности, окружающие ее частицы верхней части действуют с некоторой сжимающей силой N' . Ввиду произвольности выбора секущей поверхности Q можем (проводя через точку M' произвольные поверхности Q_1 , Q_2 и т. д.) сделать вывод, что все частицы внутри покоящейся массы жидкости испытывают всестороннее сжатие.

3.2. Гидростатическое давление в точке

Рассмотрим площадку $\Delta\omega$, на которую действует сила ΔP (рис. 5). Отношение $p = \Delta P / \Delta\omega$, очевидно, представляет собой "напряжение", т. е. силу, приходящуюся на единицу площади.

Так как при равновесии жидкости ΔP является сжимающей силой, то p представляет собой среднее для данной площадки напряжение сжатия, которое называют *средним гидростатическим давлением* на площадке. Для получения точного значения p в данной точке надо определить предел этого отношения при $\Delta\omega \rightarrow 0$, что и определит гидростатическое давление в данной точке:

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega} \quad (24)$$

Размерность $[p]$ равна размерности напряжения, т. е., $[p] = [\text{Па}]$ или $[\text{кгс/м}^2]$.

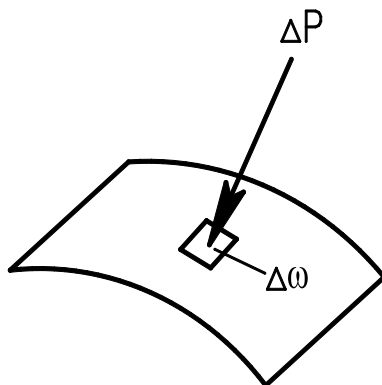


Рис. 5 – Сила, действующая на единицу площади

Основная теорема гидростатики. Величина гидростатического давления в данной точке не зависит от ориентации в пространстве площадки, на которой она расположена, т. е.

$$p_x = p_y = p_z = p_n \quad (25)$$

где p_x, p_y, p_z — гидростатические давления по направлению координатных осей, а p_n — то же, по произвольному направлению n .

Для доказательства выберем внутри массы жидкости, находящейся в равновесии, объем в форме тетраэдра (рис. 6) и, полагая его отвердевшим, напишем для него (как для твердого тела) условия равновесия в виде трех уравнений проекций действующих сил и трех уравнений моментов:

$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma M_x = 0 \quad (26)$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ и } \Sigma M_y = 0 \quad (27)$$

$$\Sigma Z = 0 \text{ и } \Sigma M_z = 0 \quad (28)$$

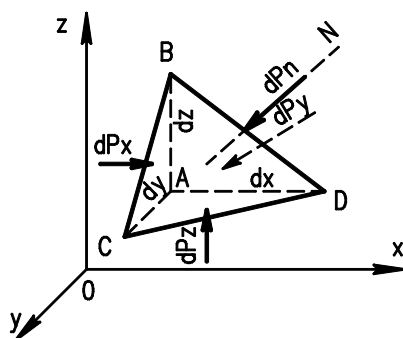


Рис. 6 – К теореме о независимости гидростатического давления от направления

При уменьшении объема тетраэдра в пределе до нуля система действующих сил преобразуется в систему сил, проходящих через одну и ту же точку, и, таким образом, уравнения моментов теряют смысл.

Составим уравнение проекций сил на ось Ox .

На рассматриваемый тетраэдр действуют четыре поверхностные силы (по числу граней тетраэдра), направленные по нормальям к соответствующим граням, и объемная сила dF . Проектируя эти силы на ось Ox , получим

$$dP_x - dP_n \cos(N, 0x) + dF \cos \alpha = 0 \quad (29)$$

где $dP_x = p_x \frac{dy dz}{2}$, $dP_n \cos(N, 0x) = p_n d\omega \cos(N, 0x) = p_n \frac{dy dz}{2}$, так как $d\omega \cos \alpha$ представляет собой проекцию площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную оси Ox .

Объемная сила $dF = dmj$, где dm — масса тетраэдра, равная $\rho/6 dx dy dz$, а j — ускорение, создаваемое этой силой.

Тогда $dF \cos \alpha = dmj \cos \alpha$.

Введем обозначение $j \cdot \cos \alpha = X$, $j \cdot \cos \beta = Y$, $j \cdot \cos \gamma = Z$, где X , Y и Z — проекции ускорения внешней объемной силы (эти обозначения будут использоваться и далее).

После соответствующих подстановок получим уравнение

$$p_x \frac{dy dz}{2} - p_n \frac{dy dz}{2} + \frac{1}{6} \rho dx dy dz X = 0 \quad (30)$$

- сокращая которое на $dy dz$, найдем

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} \rho dx X = 0 \quad (31)$$

Опуская третье слагаемое как величину высшего порядка малости по сравнению с двумя первыми, получим

$$p_x - p_n = 0 \quad (32)$$

Очевидно, по аналогии можем написать

$$p_y - p_n = 0 \text{ и } p_z - p_n = 0 \quad (33)$$

или, наконец,

$$p_x = p_y = p_z = p_n \quad (34)$$

что доказывает теорему.

Гидростатическое давление в точке, будучи одинаковым по любому направлению, неодинаково в различных точках пространства, т. е. p есть функция координат: $p = f(x, y, z)$.

3.3. Общие дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Уравнение Эйлера. Выберем внутри покоящейся жидкости параллелепипед с ребрами, расположенными параллельно координатным осям Ox , Oy и Oz (рис. 7) и равными соответственно dx , dy и dz . Составим уравнения равновесия этого параллелепипеда в виде уравнений проекций сил (согласно предыдущим рассуждениям уравнения моментов теряют смысл): $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$.

Проектируя силы на ось Ox , согласно рис. 7, имеем

$$\Sigma X = dP - dP_1 + dF \cdot \cos \alpha = 0 \quad (35)$$

Определим каждое из слагаемых. Поверхностные силы равны: $dP = p dy dz$ и $dP_I = p' dy dz$, где p и p' — средние гидростатические давления соответственно на площадки $ABCD$ и $A'B'C'D'A'$.

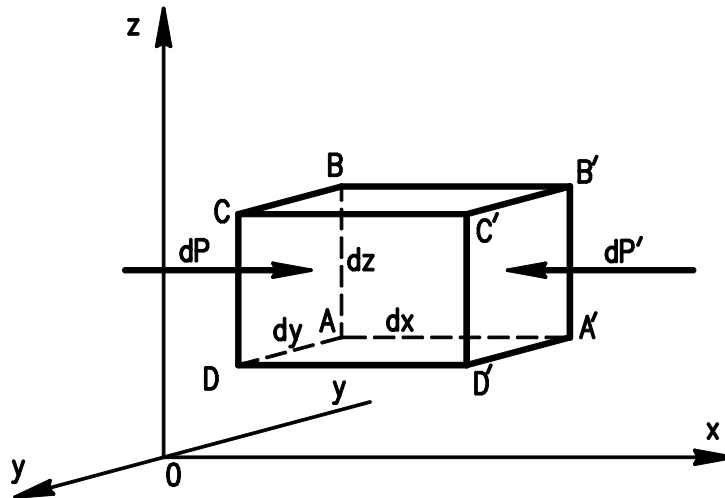


Рис. 7 – К выводу уравнений равновесия жидкости

Так как гидростатическое давление является функцией координат, среднее гидростатическое давление на площадке $A'B'C'D'A'$ будет равно:

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (36)$$

потому что при переходе от площадки $ABCD$ к площадке $A'B'C'D'A'$ изменяется только координата x . Следовательно, объемная сила для массы $dm = \rho dx dy dz$ равна:

$$dF \cos \alpha = dm j \cos \alpha = dm X = \rho dx dy dz X.$$

Подставляя в (35) значения слагаемых, запишем

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho X dx dy dz = 0 \quad (37)$$

Раскрывая скобки и (после приведения подобных членов) сокращая на $dx dy dz$, получим уравнение проекций сил на ось Ox в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0 \quad (38)$$

Аналогично можно получить и уравнения проекций сил на оси Oy и Oz , в результате чего система трех уравнений равновесия жидкости (уравнения Эйлера) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Основное дифференциальное уравнение гидростатики. Перепишем уравнения Эйлера в несколько другом порядке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho Z \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

умножив каждое из этих уравнений соответственно на dx , dy и dz и произведя сложение правых и левых частей уравнений, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz \quad (41)$$

Так как гидростатическое давление p зависит только от трех независимых переменных координат x , y и z , левая часть этого равенства представляет собой полный дифференциал функции $p=f(x,y,z)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (42)$$

Делая подстановку, находим окончательно

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz) \quad (43)$$

Уравнение (43) называется основным дифференциальным уравнением гидростатики, так как его использование позволяет решать основные задачи гидростатики.

Рассмотрим это уравнение более подробно.

Прежде всего, отметим, что, так как dp есть полный дифференциал, то выражение в скобках правой части будет также полным дифференциалом некоторой функции координат, т. е.

$$X dx + Y dy + Z dz = dU(x, y, z) \quad (44)$$

Следовательно, с

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Здесь величины X , Y и Z , т. е. проекции ускорения объемной силы, можно рассматривать как проекции самой объемной силы, отнесенной к единице массы данной жидкости, так как

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{dF \cos \alpha}{\rho dW} = \frac{dF}{dm} \cos \alpha \\ Y &= \frac{dF}{dm} \cos \beta \\ Z &= \frac{dF}{dm} \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

поэтому функция $U(x, y, z)$ является потенциалом сил или так называемой

"силовой функцией". Таким образом, равновесие жидкости возможно, если объемные силы имеют потенциал.

Правую часть уравнения (43) можно рассматривать и как уравнение элементарной работы dT , т. е. можем написать

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = dT \quad (47)$$

Действительно, работа силы $\frac{dF}{dW}$ (силы, отнесенной к единице объема) на пути ds (рис. 8) равна:

$$dT = \frac{dF}{dW} ds \cos A \quad (48)$$

где A — угол между направлением действия силы dF/dW и линией перемещения ds .

Но из (48) следует:

$$\begin{aligned} \rho X &= \frac{dF}{dW} \cos \alpha; \\ \rho Y &= \frac{dF}{dW} \cos \beta; \\ \rho Z &= \frac{dF}{dW} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (49)$$

и кроме того $dx = ds \cos a$; $dy = ds \cos b$; $dz = ds \cos c$.

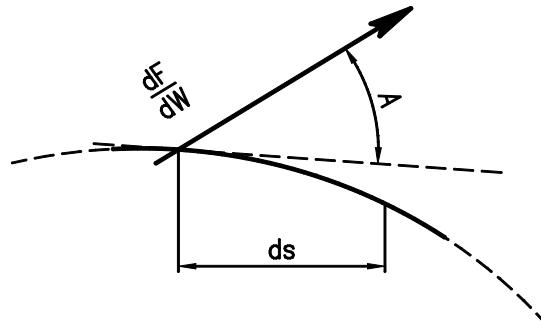


Рис 8 – Работа силы dF/dW на пути ds

С учетом последнего слагаемые левой части уравнения (47) равны по отдельности:

$$\begin{aligned} \rho X dx &= \frac{dF}{dW} \cos \alpha ds \cos a; \\ \rho Y dy &= \frac{dF}{dW} \cos \beta ds \cos b; \\ \rho Z dz &= \frac{dF}{dW} \cos \gamma ds \cos c. \end{aligned} \quad (50)$$

в сумме $\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = \frac{dF}{dW} ds (\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c)$.

Если учесть, что $\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c = \cos A$, приходим к равенству:

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = \frac{dF}{dW} ds \cos A = dT \quad (51)$$

Это и доказывает справедливость уравнения (47).

Отсюда заключаем, что изменение гидростатического давления dp рав-

но работе внешних объемных сил, совершаемой на пути изменения давления от p_1 до p_2 (при $p_2 - p_1 = dp$).

Характеристическое уравнение. В основном дифференциальном уравнении гидростатики (42) неизвестны две величины: p и ρ (значения X , Y и Z , а также координаты точки обычно заданы.) Таким образом, для определенности решения необходимо иметь еще одно независимое уравнение, в качестве которого используется так называемое характеристическое уравнение, определяющее собой особенности данной жидкости.

Например, рассматривая равновесие капельной жидкости и считая ее абсолютно несжимаемой, характеристическим уравнением будет условие

$$\rho = \text{const}, \quad (52)$$

а для газа – уравнение Бойля-Мариотта $p\rho = RT$, или $p/\rho = RT$.

В общем виде условия равновесия можно записать в виде функции, характеризующей особенности сжатия данной жидкости:

$$\rho = \varphi(P, t^\circ) \quad (53)$$

Поверхность уровня. Поверхностью уровня называется такая поверхность, все точки *которой* имеют одно и то же значение рассматриваемой функции: например, поверхность равной температуры (изотермическая поверхность), поверхность равного потенциала и т. д.

Для рассмотрения задач гидравлики важное значение имеет поверхность равного давления. Имея в виду в дальнейшем изложении именно поверхность равного давления, будем условно называть ее кратко поверхностью уровня.

Уравнение поверхности уровня и свойства этой поверхности. Так как во всех точках поверхности уровня гидростатическое давление одинаково, т. е. $p = \text{const}$, то $dp=0$ и из основного дифференциального уравнения гидростатики получим

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0 \quad (54)$$

Так как плотность $\rho \neq 0$, то

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (55)$$

где X , Y и Z — функции координат.

Уравнение (55) представляет собой дифференциальное уравнение поверхности, для которой $p = \text{const}$, т. е. уравнение поверхности уровня.

Рассмотрим **свойства поверхности уровня**:

1. Две поверхности уровня не пересекаются между собой. Действительно, допустим, что поверхность давления p_1 пересекается с поверхностью давления p_2 , тогда в точках линии пересечения этих поверхностей давление было бы одновременно равным и p_1 и p_2 , что невозможно, так как $p_1 \neq p_2$. Следовательно, пересечение этих поверхностей невозможно.

2. Внешние объемные силы направлены нормально к поверхности уровня. Подтвердить это положение можно так. Работа силы F на элементарном пути ds согласно (47) равна:

$$dT = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (56)$$

Но для поверхности уровня трехчлен в скобках равен нулю поэтому работа силы F на пути ds вдоль поверхности уровня равна нулю ($dT=0$).

С другой стороны, согласно рис. 8 работа силы $F=dT=F \cos A \, ds$, и поскольку $dT=0$, а $F \neq 0$ и $ds \neq 0$, то $\cos A$ должен быть равен нулю, т. е. угол $A=\pi/2$.

3.4. Равновесие капельной жидкости в поле земного тяготения

Поверхность уровня. Рассмотрим равновесие жидкости в поле земного тяготения в пределах небольшой ограниченной области. Тогда ускорения свободного падения в различных точках этого пространства будут параллельны и направлены вертикально. Расположим координатную ось Oz вертикально; при этом ускорение свободного падения $g=9,81 \, \text{м/с}^2$ будет направлено параллельно оси Oz .

Составим уравнение поверхности уровня, учитывая, что для данного случая равновесия жидкости величины X , Y и Z , входящие в общее дифференциальное уравнение поверхности уровня (55), будут равны соответственно: $X=g_x=0$; $Y=g_y=0$; $Z=g_z=-g$, при этом g_x , g_y , g_z — проекции ускорения g по координатным осям. Подставляя эти значения в уравнение (55), получим дифференциальное уравнение поверхности уровня для рассматриваемых условий $-g dz=0$, или $dz=0$. Интегрируя это уравнение, находим

$$-gz=\text{const или } z=\text{const}=C \quad (57)$$

Так как $C=\text{const}$ — произвольная постоянная, то это уравнение будет уравнением семейства горизонтальных плоскостей (параллельных осям Ox и Oy).

Итак, **поверхность уровня есть горизонтальная плоскость.**

Распределение гидростатического давления. Воспользуемся основным дифференциальным уравнением гидростатики $dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$

В случае равновесия жидкости в поле земного тяготения $X=0$, $Y=0$, а $Z=-g$. Поэтому основное уравнение получим в виде

$$dp=-\rho g dz \quad (58)$$

Но произведение $\rho g=\gamma$, где γ — удельный вес данной жидкости.

Деля подстановку и деля обе части уравнения (58) на γ , перепишем его в следующем виде:

$$\frac{dp}{\gamma} + dz = 0 \quad (59)$$

интегрируя, найдем (при $\gamma=\text{const}$)

$$\frac{p}{\gamma} + z = C = \text{const} \quad (60)$$

Чтобы определить постоянную интегрирования C , рассмотрим резервуар, наполненный водой (рис. 9), со свободной поверхностью (атмосферное давление). Тогда для точки A , лежащей на поверхности, $p = p_0$ и $z=z_0$ подставив эти значения в (60), находим, что произвольная постоянная интегрирования

$$C = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 \quad (61)$$

и уравнение (60) запишется в виде

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 \quad (62)$$

Или

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z) \quad (63)$$

Последнее уравнение называют **основным уравнением гидростатики**.

Рассмотрим уравнение (62) более подробно. Все слагаемые, входящие в него, имеют линейную размерность; z и z_0 – координаты свободной поверхности и произвольной точки M , т. е. высоты расположения свободной поверхности и точки M ; p_0/γ и p/γ – высоты, соответствующие гидростатическому давлению на поверхности p_0 и p в точке M .

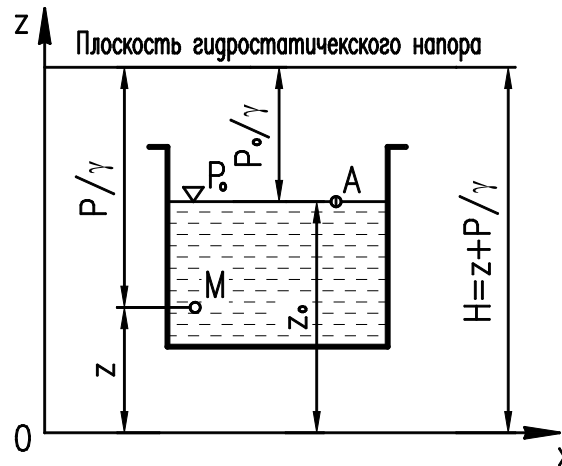


Рис. 9 – К определению постоянной интегрирования

Очевидно, что постоянная интегрирования C имеет также линейную размерность; обозначим ее через H .

Величины z и p/γ часто называют в гидравлике *геометрической и пьезометрической высотами*, тогда H как сумма двух высот будет также высотой – ее называют *гидростатическим напором*. Согласно рис. 9, величина H представляет собой ординату горизонтальной плоскости, именуемой плоскостью гидростатического напора. Эта плоскость расположена выше плоскости свободной поверхности на высоту p_0/γ .

Уравнение (60) можно рассматривать и как уравнение энергии.

Действительно, все слагаемые в этом уравнении имеют линейную размерность.

Умножим это уравнение на размерную величину 1 Н (силу); тогда (не записывая единицы) все слагаемые приобретут размерность работы или энергии [Дж]. Очевидно, что уравнение это будет определять потенциальную энергию, подсчитанную для массы жидкости весом 1 Н . Назовем ее удельной энергией. В этом случае уравнение (60) можно прочесть так: сумма удельной потенциальной энергии положения z и удельной потенциальной энергии давления p/γ есть величина постоянная во всех точках данной покоящейся массы жидкости.

Измерение давления в данной точке. Гидростатическое давление более удобно вычислять по формуле (63). Так как разность $(z_0 - z)$ представляет собой глубину h погружения данной точки под уровень свободной поверхности,

то можно написать уравнение (63) в виде

$$p = p_0 + \gamma h \quad (64)$$

Именно в такой записи и используют это уравнение для вычисления гидростатического давления.

Итак, давление можно измерить двумя способами: по уравнению (64) в единицах напряжения сжатия p или по уравнению (63) в линейных единицах высоты столба данной жидкости p/γ .

Закон Паскаля. Из уравнения (64) видно, что в любой точке жидкости (на любой глубине h) гидростатическое давление зависит от величины внешнего давления p_0 на свободной поверхности. При увеличении внешнего давления точно на ту же величину увеличится и давление в данной точке. Таким образом, жидкость обладает свойством передавать внешнее давление всем расположенным внутри ее частицам жидкости без изменения. В этом заключается закон Паскаля.

3.5. Абсолютное и избыточное давление. Вакуум

Абсолютным давлением p называется гидростатическое давление, определяемое по формуле (64).

Из этой формулы следует, что абсолютное давление складывается из двух составляющих: внешнего давления p_0 , передаваемого жидкостью по закону Паскаля, и давления, определяемого величиной γh . Последнее называют относительным или, если на свободной поверхности жидкости действует атмосферное давление, *избыточным давлением*. Исходя из принятой формулировки формулу (64) можно переписать в следующем виде:

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{вн}} + p_{\text{изб}} \quad \text{или} \quad \frac{p_{\text{абс}}}{\gamma} = \frac{p_{\text{вн}}}{\gamma} + \frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} \quad (65)$$

где избыточное давление

$$p_{\text{изб}} = \gamma h \quad (66)$$

Из последнего равенства следует, что избыточное давление изменяется с глубиной по линейному закону

$$\frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} = h \quad (67)$$

и в координатах p/γ и h изобразится в виде биссектрисы координатного угла [1].

Абсолютное давление не может быть отрицательным, так как жидкость не сопротивляется растяжению. Избыточное давление как разность $(p_{\text{абс}} - p_{\text{вн}})$ может быть и больше, и меньше нуля, т. е. отрицательное избыточное давление называют *вакуумметрическим давлением*, т. е.

$$-p_{\text{изб}} = p_{\text{вак}} \quad \text{или} \quad -\frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} = h_{\text{вак}}$$

(здесь $h_{\text{вак}}$ называется *вакуумметрической высотой*). Можно написать

$$h_{\text{вак}} = -\frac{p_{\text{изб}}}{\gamma} = -\left(\frac{p_{\text{абс}}}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma}\right) = \frac{p_0 - p_{\text{абс}}}{\gamma};$$

тогда вакуумметрическая высота выразится формулой

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_0 - p}{\gamma}. \quad (68)$$

Вакуумметрическая высота $h_{\text{вак}}$ возрастает по величине с уменьшением абсолютного давления и в пределе, когда $p_{\text{абс}} = 0$ (отрицательным абсолютное давление быть не может), достигает максимума $h_{\text{вак.макс}} = \frac{p_0}{\gamma}$, т. е. величины атмосферного давления.

3.6. Давление жидкости на плоские стенки. Центр давления

Определение силы давления. Предположим, что плоская стенка, ограждающая некоторую массу неподвижной жидкости, наклонена к горизонту под углом α . Определим силу P , с которой жидкость действует на выбранную в пределах этой стенки площадку ω (рис. 10).

В каждой точке на этой площади гидростатическое давление равно p и отвечает формуле $p = \frac{dP}{d\omega}$, где dP — элементарная сила, а $d\omega$ — элементарная площадка.

Следовательно, сила, с которой жидкость действует на элементарную площадку $d\omega$, будет равна $dP = p d\omega$. Эта сила направлена по нормали к плоскости стенки. Аналогично будет определяться сила давления жидкости на любую другую элементарную площадку $d\omega$. Поэтому искомую силу P , с которой покоящаяся жидкость действует на площадь ω , можно найти как равнодействующую системы параллельных сил dP , равную их алгебраической сумме.

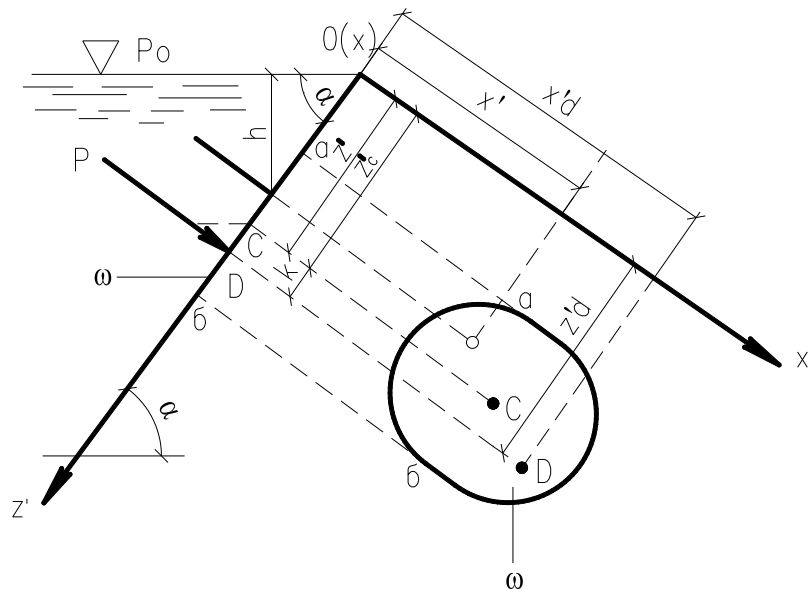


Рис. 10 – К определению силы давления на плоскую стенку
Итак, искомая сила

$$P = \int_{\omega} dP = \int_{\omega} p d\omega.$$

Но в любой точке гидростатическое давление $p = p_0 + \gamma h$, откуда

$$P = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega \quad (69)$$

Ориентируем данную площадь относительно соответственно расположенных координат осей. Примем за ось Ox линию пересечения свободной поверхности воды с плоскостью стенки и направим координатную ось Oz'^* вниз вдоль стенки (рис. 10).

В этой координатной системе все точки определяются координатами x' и z' , поэтому глубину h выразим через z' , а именно: $h = z' \sin \alpha$.

Итак, силу P можно определить по формуле

$$P = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega = \int_{\omega} (p_0 + \gamma z' \sin \alpha) d\omega,$$

или

$$P = p_0 \omega + \gamma \sin \alpha \int_{\omega} z' d\omega \quad (70)$$

Для определения интеграла $\int_{\omega} z' d\omega$ обратим внимание на то, что подынтегральное выражение можно рассматривать как статический момент площадки $d\omega$ относительно координатной оси Ox (или оси Ox'). Тогда этот интеграл представит собой сумму статических моментов элементов площади ω , т. е. статический момент самой площади ω относительно той же оси Ox .

Известно, что статический момент площади относительно любой оси, лежащей в той же плоскости, равен произведению этой площади на расстояние от центра ее тяжести до оси моментов.

Таким образом,

$$\int_{\omega} z' d\omega = z'_c \omega,$$

где z'_c – расстояние от точки c (центра тяжести площади ω) до оси Ox' (оси моментов).

Делая соответствующие подстановки в формулу (70), получим

$$P = p_0 \omega + \gamma \sin \alpha z'_c \omega. \quad (71)$$

Здесь первое слагаемое $p_0 \omega$ представляет собой атмосферное давление на свободную поверхность, передаваемое жидкостью по закону Паскаля, а второе — давление, оказываемое на стенку уже самой жидкостью (можно сказать — избыточное давление).

Перепишем формулу (71) в более удобном для практических расчетов виде. Заметим, что произведение $z'_c \sin \alpha$ равно глубине погружения центра тяжести площади ω под уровень свободной поверхности h_c , поэтому

$$P = p_0 \omega + \gamma h_c \omega, \quad (72)$$

или, за вычетом атмосферного давления,

$$P = \gamma h_c \omega. \quad (73)$$

Произведение $h_c \omega$ представляет собой объем цилиндра с площадью основания, равной ω , и высотой, равной h_c , с учетом чего формулу (73) можно прочитать так: **сила, с которой жидкость действует на плоскую стенку, равна весу жидкости в объеме цилиндра с основанием, равным площади данной стенки, и высотой, равной глубине погружения центра тяжести этой площади под уровень свободной поверхности.**

Формулу (73) можно еще упростить.

Так как γh_c представляет собой гидростатическое давление в центре тяжести площади ω , то справедливо равенство

$$P = p_c \omega. \quad (74)$$

3.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности. Закон Архимеда

Расположим оси координат Ox и Oy в плоскости свободной поверхности жидкости, а ось Oz направим вертикально вниз (рис. 11). Допустим, что внутри жидкости расположена жесткая, непроницаемая криволинейная пластинка, не имеющая толшины (толщина $\delta = 0$) и к тому же невесомая. Очевидно, такая пластинка будет неподвижной. Требуется определить, с какой силой жидкость давит на эту пластинку.

Пусть на верхнюю сторону пластинки жидкость оказывает давление с силой R , а на нижнюю — силой R' . Эти силы по величине равны между собой, действуют по одной прямой и противоположно одна другой по направлению, так что безразлично, какую из них мы будем определять. Найдем, например, силу R , равнодействующую элементарных сил dP .

Так как поверхность пластинки криволинейна, то силы dP образуют систему непараллельных сил. Такая система в общем случае приводится к главному вектору и одной паре сил. Разложим каждую элементарную силу dP на три составляющие по координатным осям, т. е. на dP_x , dP_y и dP_z . Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} dP_x &= pd\omega \cos \alpha \\ dP_y &= pd\omega \cos \beta \\ dP_z &= pd\omega \cos \gamma \end{aligned} \right\}; \quad (75)$$

где α , β , и γ — углы наклона элементарных сил dp к координатным осям, различные для разных площадок $d\omega$.

Суммируя проекции элементарных сил, найдем соответствующие проекции равнодействующей силы R :

$$\begin{aligned} R_x &= \sum pd\omega \cos \alpha; \\ R_y &= \sum pd\omega \cos \beta; \\ R_z &= \sum pd\omega \cos \gamma. \end{aligned}$$

Сила R по величине будет равна:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

а направление линии ее действия найдем по направляющим косинусам:

$$\cos \alpha = R_x/R, \quad \cos \beta = R_y/R, \quad \cos \gamma = R_z/R.$$

Понятно, что указанный здесь способ решения осложняется или даже становится невозможным, если поверхность S не может быть выражена алгебраически в виде функции $S(x, y, z)$. Упростим это решение.

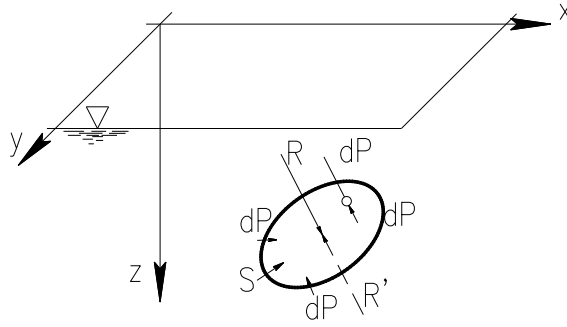


Рис. 11 – Давление жидкости на криволинейную стенку

Систему уравнений (75) можно записать так:

$$dR_x = p d\omega \cos \alpha = p d\omega_x;$$

$$dR_y = p d\omega \cos \beta = p d\omega_y;$$

$$dR_z = p d\omega \cos \gamma = p d\omega_z,$$

где $d\omega_x$ – проекция площадки $d\omega$ на любую вертикальную плоскость, перпендикулярную оси Ox (в частности, например, на плоскость yOz); аналогично $d\omega_y$ и $d\omega_z$ – суть проекции площадки $d\omega$ на плоскости, перпендикулярные осям Oy и Oz .

Выражение $p d\omega_x$ представляет собой силу давления жидкости на элементарную площадку $d\omega_x$ (рис. 12).

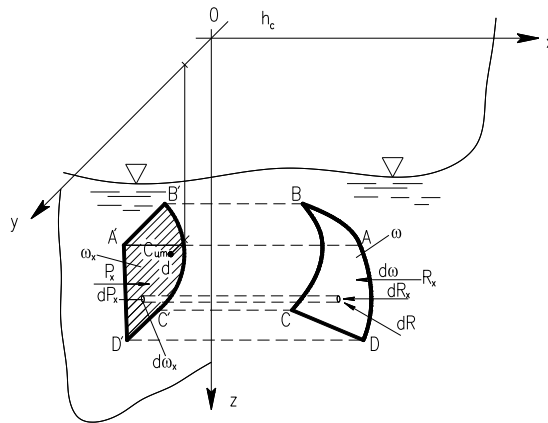


Рис. 12 – Давление жидкости на криволинейную поверхность по горизонтальному направлению

Интегрируя, получим

$$R_x = \int_{\omega_x} dR_x = \int_{\omega_x} p d\omega_x.$$

Но интеграл $\int_{\omega_x} p d\omega_x$ представляет собой силу давления жидкости на всю плоскую площадку ω_x (см. рис. 12), поэтому $\int_{\omega_x} p d\omega_x = \gamma h'_c \omega_x$, где h'_c – глубина погружения центра тяжести площади ω_x под уровень свободной поверхности. Итак, получим силу

$$R_x = P_x = \gamma h'_c \omega_x$$

По аналогии

$$R_y = P_y = \gamma h''_c \omega_y$$

Таким образом, проекции на горизонтальные оси силы давления жидкости R на криволинейную поверхность ($ABCD$ на рис. 12) равны силам давления на проекции ω_x ($A'B'D'C'$ на рис. 12) и ω_y этой поверхности на вертикальные плоскости, соответственно перпендикулярные осям. Определим теперь вертикальную проекцию силы R , т. е. силу R_z . Последняя, очевидно, равна:

$$R_z = \int_{\omega_z} p d\omega_z = \int_{\omega_z} \gamma h d\omega_z .$$

где h – глубина погружения площадки $d\omega$ под уровень свободной поверхности (рис. 13).

Произведение $h d\omega_z$ можно рассматривать как элементарный объем dW . Поэтому силу R_z можно выразить как

$$R_z = \int_{\omega_z} \gamma dW = \gamma \int_{\omega_z} dW = \gamma W ,$$

где W – объем вертикального цилиндра ($ABCD A'B'C'D'$).

Следовательно, **сила R_z равна весу жидкости в объеме вертикального столба, опирающегося на заданную криволинейную поверхность и ограниченного плоскостью свободной поверхности.**

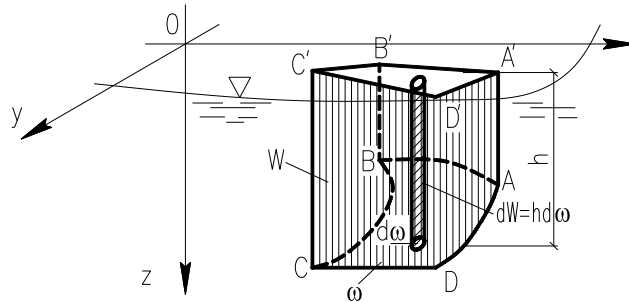


Рис. 13 – Давление жидкости на криволинейную стенку по вертикальному направлению

Пусть цилиндрический напорный резервуар снабжен съемной цилиндрической крышкой AB , длина которой вдоль образующей резервуара равна единице (рис. 14). Определить силу R давления жидкости на эту крышку.

Из предыдущего

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} .$$

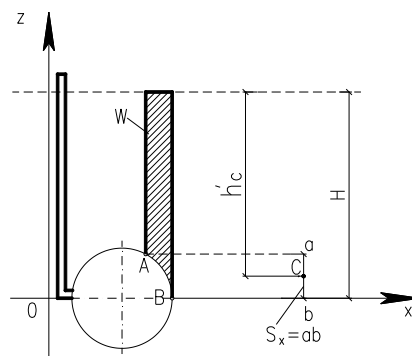


Рис. 14 – К определению силы давления

При указанном на рис. 14 расположении осей сила $R_y = 0$, а сила $R_x = \gamma h_c S_x$ (где S_x — проекция крышки AB на плоскость zo имеет форму прямоугольника).

Глубина погружения центра тяжести этой площади (точки c)

$$h'_c = H - \frac{ab}{2},$$

Откуда

$$R_x = \gamma \left(H - \frac{ab}{2} \right) S_x.$$

Вертикальная составляющая R_z находится по формуле

$$R_z = \gamma W,$$

где объем W показан штриховкой на рис. 14 (этот объем всегда можно вычислить с той или иной степенью точности).

Линия действия полной силы давления R пересекает ось цилиндра под углом наклона к горизонту α , величина которого определяется из условия $\operatorname{tg} \alpha = R_z / R_x$.

Закон Архимеда. Определим давление жидкости на погруженное в него тело (рис. 15).

При изображенном на рис. 15 расположении координатных осей компоненты R_x и R_y равны нулю и сила давления на всю поверхность погруженного тела

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{R_z^2} = R_z$$

Определим значение R_z . Проведя контурную линию AB (смотря на тело сверху), разделим поверхность тела на две части — верхнюю и нижнюю. На верхнюю часть поверхности жидкость давит с силой R'_z , а на нижнюю — с силой R''_z , причем

$$R_z = R'_z - R''_z$$

где

$$R'_z = \gamma W(AA' B' BCA), \text{ а } R''_z = \gamma W(AA' B' BDA),$$

Тогда

$$R_z = R'_z - R''_z = \gamma [W(AA' B' BCA) - W(AA' B' BDA)] = -\gamma W(AC BDA),$$

или короче

$$R = -\gamma W \quad (76)$$

где W —объем тела.

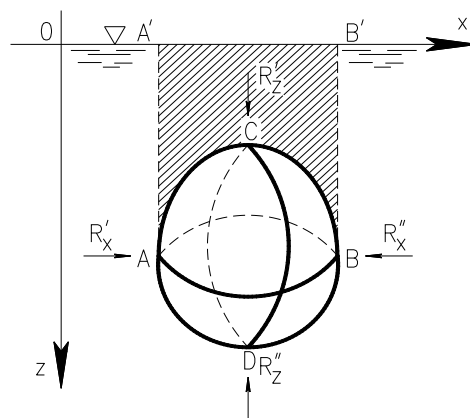


Рис. 15 — К закону Архимеда

Таким образом, по закону Архимеда сила, с которой жидкость действует на погруженное в нее тело, равна весу жидкости в объеме погруженного тела. Эта сила называется Архимедовой подъемной силой.

4. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ И ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ

4.1. Основные понятия и определения движения жидкости

Движение жидкостей может быть разделено на установившееся и неуставившееся.

Движение называется *установившимся*, если все характеристики движения в одной и той же точке пространства (в том числе их скорость) не меняются во времени.

Движение, не удовлетворяющее этому определению, называется *неустановившимся*.

Примером установившегося движения может служить истечение жидкости из отверстия в стенке резервуара под постоянным напором ($H=\text{const}$) или истечение газа из отверстия замкнутого резервуара, давление и температура в котором поддерживаются неизменными.

Примером неустановившегося движения является опорожнение резервуара при переменных значениях напора или давления.

В настоящей главе мы рассмотрим законы только установившегося движения. Но и в этом случае движение жидкости как сплошной, легко деформируемой среды представляет собой сложный физический процесс, точное математическое описание которого связано с чрезвычайными трудностями. Поэтому для облегчения теоретических решений обычно вводятся различные схемы и модели, заменяющие реальный поток жидкости. Важным является понятие о струйчатой структуре течения жидкости, в соответствии с которым поток представляется как совокупность элементарных струек, вплотную прилегающих друг к другу и образующих сплошную массу движущейся жидкости.

Изучив законы движения элементарной струйки, легче установить основные законы движения всего потока в целом.

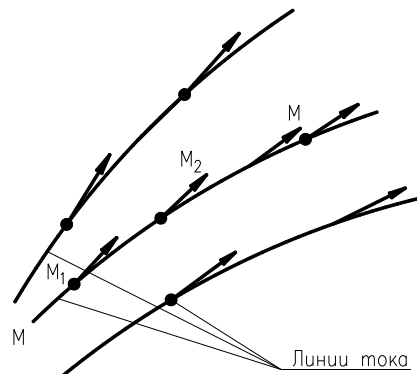


Рис. 16 – Линии тока

Линия тока и элементарная струйка. Линией тока называется линия, проходящая через последовательно движущиеся одна за другой частицы жидкости, векторы скоростей которых направлены по касательным к этой линии $M-M$ (рис. 16). Линия тока и траектория движения частицы в общем случае (т. е. при неустановившемся движении) не совпадают одна с другой, но совпадают при установившемся движении. Это положение удобно иллюстрировать на примере, изображенном на рис. 17. Здесь при истечении жидкости из отверстия резервуара вытекающая струя непрерывно меняет свое положение.

ние во времени. На рисунке даны три положения струи соответственно для трех моментов времени t_1 , t_2 и t_3 для которых условно изображены три линии тока l , и, кроме того, отмечены три положения частицы M для тех же моментов времени и пунктиром указана траектория 2 этой частицы.

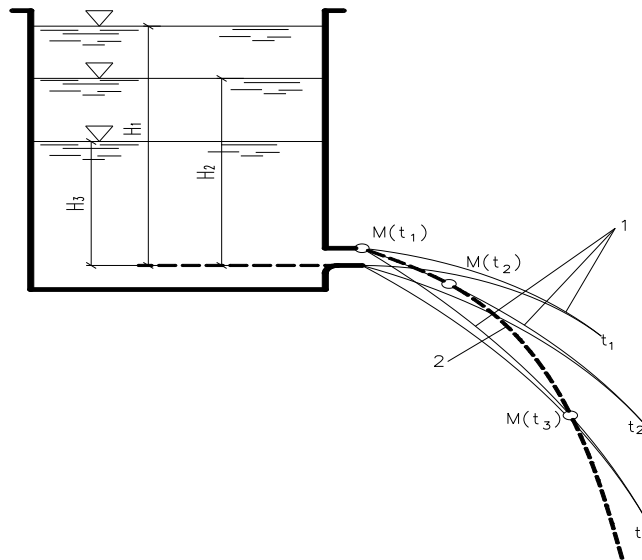


Рис. 17 – Линии тока, не совпадающие с траекториями при неустановившемся движении

Две различные линии тока не пересекаются между собой.

Элементарной струйкой называется струйка, боковая поверхность которой образована линиями тока, проходящими через точки очень малого (в пределе – бесконечно малого) замкнутого контура. Таким образом, эта струйка оказывается изолированной от окружающей ее массы жидкости и имеет малую площадь поперечного сечения $\Delta\omega$ (в пределе $d\omega$), которая может меняться по длине. Длина этой струйки неограниченна. Боковая поверхность струйки непроницаема для жидкости, т. е. ее можно представить в виде трубки, внутри которой течет жидкость.

Основные виды движения. Расход жидкости. Движение может быть равномерным и неравномерным, сплошным и прерывистым. При равномерном движении величина скорости не меняется по длине струйки, в противном случае движение называется *неравномерным*.

Обратимся к понятию о расходе жидкости.

Пусть в некотором поперечном сечении элементарной струйки скорость равна u . За время dt частицы жидкости переместятся на расстояние $ds = udt$. Следующие за ними частицы жидкости заполнят все освобождаемое пространство, и поэтому за указанное время dt через поперечное сечение пройдет объем жидкости

$$dW = ds d\omega = u d\omega dt$$

Объем жидкости, протекающей через сечение за единицу времени, называют *объемным расходом жидкости*. Обозначая расход элементарной струйки через dQ , получим для него выражение

$$dQ = u d\omega \quad (77)$$

Рассмотрим такое движение жидкости, при котором в потоке не возни-

кает пустот (т. е. текущая жидкость представляется сплошной средой). В этом случае для двух соседних сечений элементарной струйки несжимаемой жидкости I и II (на рис. 18) можем написать

$$dQ_1 = u_1 d\omega_1$$

и аналогично

$$dQ_2 = u_2 d\omega_2$$

По условию сплошности течения dQ_1 не может быть меньше dQ_2 , иначе между сечениями I и II образовалась бы пустота, так как в этом случае из сечения II выходило бы большее количество жидкости, чем входит через сечение I. Точно так же dQ_1 не может быть больше dQ_2 . Следовательно, единственно возможное условие: $dQ_1 = dQ_2$. Повторяя эти рассуждения применительно к другим сечениям струйки, можем написать

$$dQ_1 = dQ_2 = \dots = dQ_n = dQ, \quad (78)$$

или

$$dQ = u d\omega = \text{const.} \quad (79)$$

Таким образом, объемный расход жидкости остается неизменным на всем протяжении данной элементарной струйки. В случае сжимаемой (газообразной) жидкости требование сплошности приводит к установлению равенства между собой количества массы жидкости, протекающей через соседние сечения (массового расхода), или равенства весового расхода, т. е.

$$dQ_p = \rho u d\omega$$

или

$$dQ_\gamma = \gamma u d\omega$$

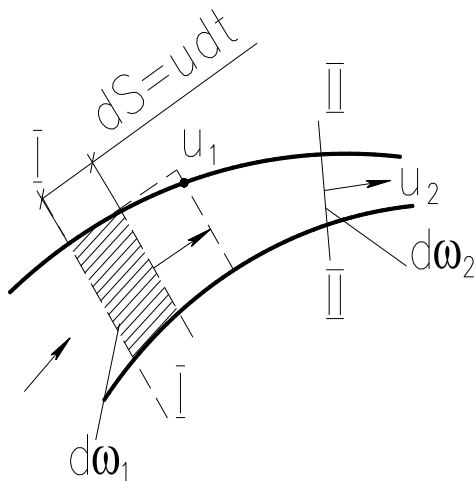


Рис. 18 – Элементарная струйка тока

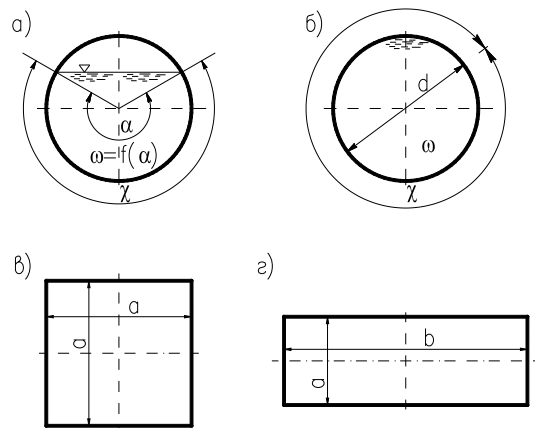


Рис. 19 – К определению площади поперечного сечения

Расход потока жидкости равен алгебраической сумме расходов элементарных струек, составляющих данный поток.

Скорость жидкости в различных точках поперечного сечения потока, так называемая местная скорость, очевидно, может быть неодинаковой, поэтому для характеристики движения всего потока вводится в рассмотрение средняя по всему сечению скорость потока. Средняя скорость определяется выражением

$$v = \frac{\int u d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega}, \quad (80)$$

из которого следует, что расход потока жидкости равен средней скорости, умноженной на площадь его поперечного сечения:

$$Q = v \omega.$$

В связи с этим условие сплошности потока (или неразрывности течения) для несжимаемой жидкости можно записать в виде

$$Q = v \omega = \text{const}. \quad (81)$$

Для газообразной жидкости, обозначая через Q_p массовый и через Q_γ весовой расходы, имеем

$$Q_p = \rho v \omega \quad \text{и} \quad Q_\gamma = \gamma v \omega, \quad (82)$$

и тогда условие сплошности приобретает следующий вид:

$$Q_p = \rho v \omega = \text{const} \quad \text{и} \quad Q_\gamma = \gamma v \omega = \text{const}.$$

В гидравлических расчетах для характеристики размеров и формы поперечного сечения потока вводятся понятия о живом сечении и его элементах: смоченном периметре и гидравлическом радиусе.

Живым сечением называют часть поперечного сечения канала, заполненную жидкостью. Так, в круглой трубе диаметром d (рис.19, а) живое сечение потока меньше площади круга, если не все сечение трубы заполнено жидкостью, тогда как для случая, когда все поперечное сечение занято жидкостью, живым сечением является площадь круга $\pi d^2/4$ (рис. 19, б).

Смоченным периметром называют ту часть периметра живого сечения, по которой жидкость соприкасается со стенками канала (трубы). Смоченный периметр обозначают обычно греческой буквой χ . Если, например, все сечение трубы занято жидкостью (т. е. живое сечение $\omega = \pi d^2/4$), то смоченный периметр равен длине окружности: $\chi = \pi d$

Гидравлическим радиусом называют отношение живого сечения к смоченному периметру, т. е. величину

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

В частности, для круглых труб, заполненных жидкостью, гидравлический радиус равен четверти диаметра. Действительно

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4}.$$

В отопительной и вентиляционной практике широко пользуются понятием об «эквивалентном диаметре», который определяют по формуле

$$d_{\text{экв}} = 4R = 4 \frac{\omega}{\chi}.$$

Очевидно, что эквивалентный диаметр, равный четырем гидравлическим радиусам, для круглого сечения (рис. 19, б) равен диаметру трубы:

$$d_{\text{экв}} = 4 \frac{\omega}{\chi} = 4 \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = d.$$

для квадратного сечения (рис. 19, в)

$$d_{\text{экв}} = 4 \frac{a^2}{4a} = a,$$

т. е. равен стороне квадрата, а для прямоугольного сечения (рис. 19, г)

$$d_{\text{экв}} = 4 \frac{ab}{2(a+b)} = 2 \frac{ab}{a+b}.$$

Приведенные здесь основные понятия позволяют решать различные практические задачи.

4.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки несжимаемой жидкости

Выделим в элементарной струйке (рис. 20) сечениями I и II некоторую массу жидкости и составим уравнение кинетической энергии для этой массы. (Как известно, приращение кинетической энергии выделенной массы равно работе внешних сил на данном перемещении).

За время dt выделенная масса, переместившись, займет положение, ограниченное сечениями I'—II'. Область между этими сечениями можно разделить на три объема: a , b и c ; при этом по условию сплошности масса объема a равняется массе объема b .

Приращение кинетической энергии $\Delta mv^2/2$ при перемещении выделенной массы жидкости из положения I—II в положение I'—II'

$$\Delta \frac{mv^2}{2} = [K.э(c) + K.э(b)]_{t+dt} - [K.э(a) + K.э(c)]_t. \quad (83)$$

Так как движение установившееся, то кинетическая энергия жидкости объема c в моменты t и $t+dt$ будет неизменной,

Поэтому для всей выделенной массы

$$\Delta \frac{mv^2}{2} = K.э(b) - K.э(a). \quad (84)$$

Определим величину кинетической энергии жидкости в объеме b

$$K.э(b) = \frac{dm u_2^2}{2}.$$

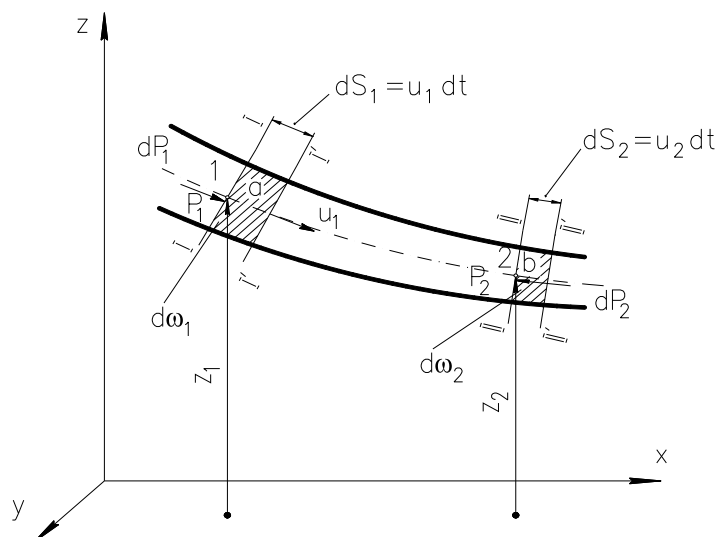


Рис. 20 – К выводу уравнения Бернулли

Но

$$dm = \rho d\omega_2 ds_2 = \rho d\omega_2 u_2 dt ,$$

откуда

$$K.э (b) = \rho d\omega_2 u_2 dt \frac{u_2^2}{2} ,$$

и аналогично

$$K.э (a) = \rho d\omega_1 u_1 dt \frac{u_1^2}{2} .$$

Приращение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости

$$\Delta \frac{mv^2}{2} = \rho d\omega_2 u_2 dt \frac{u_2^2}{2} - \rho d\omega_1 u_1 dt \frac{u_1^2}{2} = dQ dt \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} , \quad (85)$$

где dQ – массовый расход, одинаковый независимо от рассматриваемого сечения.

В случае невязкой жидкости к выделенному объему приложены силы тяжести, сила давления жидкости на боковую поверхность и силы давления на торцовые площадки объема.

Поскольку жидкость несжимаема, внутренняя энергия рассматриваемого объема не меняется при его перемещении, и в уравнение кинетической энергии входит только работа внешних сил. При перемещении выделенной массы жидкости из положения I – II в положение I' – II' вес жидкости в объеме с работу не совершает, и, следовательно, работа сил тяжести может быть вычислена как работа при перемещении жидкости, заключенной в объеме а, в положение жидкости, заключенной в объеме b:

$$G(z_1 - z_2) = \gamma d\omega_1 u_1 dt (z_1 - z_2),$$

где z_1 и z_2 — расстояния до центров тяжести объемов а и b от некоторой горизонтальной плоскости или, иначе, ордината этих центров тяжести. Можно также рассматривать z_1 и z_2 с точностью до малых высшего порядка как ординаты центров сечений I и II.

Работа сил давления на боковую поверхность выделенного объема равняется нулю, так как эти силы нормальны к этой поверхности. Работа сил давления на торцы равна разности

$$p_1 d\omega_1 u_1 dt - p_2 d\omega_2 u_2 dt .$$

Уравнение кинетической энергии имеет, таким образом, следующий вид:

$$\rho d\omega_2 u_2 \frac{u_2^2}{2} dt - \rho d\omega_1 u_1 \frac{u_1^2}{2} dt = \rho g d\omega_1 u_1 (z_1 - z_2) dt + p_1 d\omega_1 u_1 dt - p_2 d\omega_2 u_2 dt .$$

Разделим на dt и сгруппируем члены этого уравнения, помещая члены, относящиеся к сечению I, в левую часть, а относящиеся к сечению I – в правую часть равенства. В результате получим:

$$\rho g d\omega_1 u_1 z_1 + p_1 d\omega_1 u_1 + \rho d\omega_1 u_1 \frac{u_1^2}{2} = \rho g d\omega_2 u_2 z_2 + p_2 d\omega_2 u_2 + \rho d\omega_2 u_2 \frac{u_2^2}{2} .$$

Заменив $u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2 = dQ$, и разделив затем левую и правую части на величину $\rho g dQ$, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} , \quad (86)$$

где $\rho g = \gamma$

Это и есть *уравнение Бернулли*, написанное для участка элементарной струйки между сечениями I и II. Его можно представить также в разностной форме:

$$(z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0,$$

или, обозначая разности между величинами в скобках в виде приращений,

$$\Delta z + \Delta \frac{p}{\gamma} + \Delta \frac{v^2}{2g} = 0, \quad (87)$$

Если неограниченно сближать между собой сечения I и II, то уравнение (87) можно представить в дифференциальной форме:

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d \frac{v^2}{2g} = 0, \quad (88)$$

Так как сечения I и II взяты произвольно, то уравнение Бернулли можно записать также в виде

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}, \quad (89)$$

Геометрическое и энергетическое истолкование уравнения Бернулли. Рассмотрим сначала геометрическое истолкование.

Отнесем струйку к системе координат xuz (рис. 21) и напишем уравнение Бернулли для трех произвольных сечений струйки:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{u_3^2}{2g} = \dots = H = \text{const}.$$

Здесь z - геометрическая высота центра тяжести сечения над плоскостью xOy ;

$\frac{p}{\gamma}$ - пьезометрическая высота; $\frac{u^2}{2g}$ - скоростная высота или скоростной напор.

Все эти величины имеют линейную размерность, следовательно, их сумма, обозначаемая через H , имеет также размерность длины. Величину H называют *полным напором* в данном сечении струйки.

Для каждого поперечного сечения элементарной струйки величина H может быть представлена совокупностью отрезков z , $\frac{p}{\gamma}$ и $\frac{u^2}{2g}$ как это изображено на рис. 21.

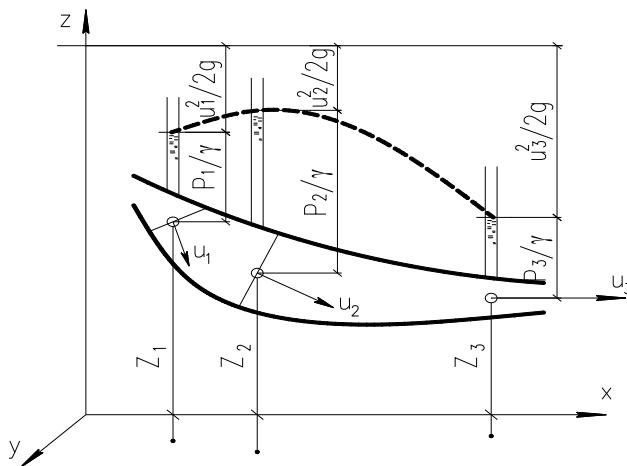


Рис. 21 – Пьезометрическая кривая

Соединив между собой концы отрезков H , получим кривую, расположенную в горизонтальной плоскости; эту плоскость и кривую на ней называют *плоскостью и линией полного напора*.

Соединив кривой концы отрезков $\frac{p}{\gamma}$, получим линию, которую называют *пъезометрической линией или пъезометрической кривой*.

Итак, рис. 21 дает геометрическое истолкование уравнения Бернулли. Можно видеть, как по длине струйки меняются слагаемые этого уравнения. Если сечение расширяется и, следовательно, скорость уменьшается, то уменьшается скоростной напор, но возрастает сумма $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$.

Если рассматривать уравнение Бернулли как уравнение энергии, то каждое слагаемое этого уравнения надо расценивать как некоторую составляющую полной энергии (потенциальную или кинетическую), и каждое из этих слагаемых должно измеряться в единицах работы. Уравнение (89) представлено в линейных единицах, поэтому, чтобы перевести его в уравнение работы, надо помножить его на единицу силы; если помножить его, например, на 1 Н, то уравнение не изменится, но размерность каждого слагаемого будет выражена в Н·м (Дж) и, следовательно, представит собой некоторую энергию, отнесенную к 1 Н жидкости, проходящей через данное сечение в 1 с. Такую энергию называют *удельной*. В соответствии с этим z будет удельной потенциальной энергией, обусловленной тем, что данный 1 Н жидкости находится на высоте z (относительно плоскости uOx) и может совершать работу, равную z , Дж.

Аналогично $\frac{p}{\gamma}$ будет удельной потенциальной энергией, зависящей от давления p . Таким образом, тот же 1 Н жидкости, находящейся на высоте z , обладает еще энергией давления, равной $\frac{p}{\gamma}$ Дж. Итак, $\frac{p}{\gamma}$ - потенциальная удельная энергия давления.

Величина $\frac{u^2}{2g}$ зависит от скорости, следовательно, это будет удельная кинетическая энергия.

Пъезометрическая линия отделяет область изменения потенциальной энергии от области изменения кинетической энергии.

Легко видеть, что с энергетической точки зрения уравнение Бернулли показывает, что сумма потенциальной энергии (положения и давления) и кинетической энергии есть величина постоянная, т. е. одинаковая по пути данной элементарной струйки невязкой жидкости. Полная удельная энергия остается неизменной. Таким образом, уравнение Бернулли представляет закон сохранения механической энергии при движении идеальной жидкости.

Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости. Вязкая жидкость испытывает сопротивление при движении, и ее удельная энергия не может сохраняться неизменной вдоль струйки.

В соответствии с этим при движении вязкой жидкости в уравнение Бернулли

ли надо ввести поправку на потери напора при ходе от некоторого сечения струйки к сечению, расположенному ниже по течению. Обозначая потери напора через Δh_{ω} , получим следующую запись уравнения Бернулли применительно к некоторым двум произвольным сечениям струйки жидкости:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_{\omega} \quad (90)$$

или

$$E_1 = E_2 + \Delta h_{\omega}$$

Линия, проведенная через концы отрезков E (см. рис. 22), называется и в этом случае линией полного напора, но теперь не располагается в горизонтальной плоскости, а понижается в направлении течения; чем больше наклон этой линии, тем интенсивнее расходуется энергия по пути. Отметим, что пьезометрическая линия по-прежнему может, как снижаться, так и повышаться в зависимости от изменения скорости при изменении площади сечения струйки.

Отношение $\frac{\Delta h_{\omega}}{\Delta l}$ потерь напора на длине участка струйки Δl к самой длине называют *средним гидравлическим уклоном* для этого участка.

Гидравлический уклон — величина безразмерная и в общем случае переменная. Обычно его обозначают буквой i . Уклон в сечении выражается, очевидно, величиной

$$i = \frac{dh_{\omega}}{dl} \quad (91)$$

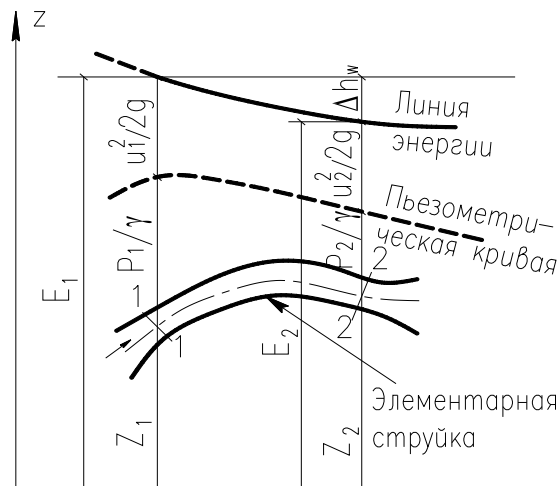


Рис. 22 — К выводу уравнения Бернулли для элементарной струи вязкой жидкости

Понятие об уклоне можно ввести и для пьезометрической линии. Средний пьезометрический уклон тогда определится по формуле

$$i_{\text{ср. пьез}} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)}{l_2 - l_1} = - \frac{\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right)}{l_2 - l_1}. \quad (92)$$

Пьезометрический уклон может быть положительным, равным нулю и отрицательным.

$$i_{\text{пьез}} \geq \leq 0.$$

Пьезометрический уклон в данном сечении определяется по формуле

$$i_{\text{пье}} = - \frac{d \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{dl}.$$

4.3. Уравнение неразрывности

Пусть гранями параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$ на рис. 23 ограничивается некоторое неподвижное относительно координатных осей пространство, через которое протекает жидкость.

За время dt через грань $ABCD$ внутрь параллелепипеда втекает масса жидкости $\rho u dt dy dz = \delta M'_x$, а вытекает масса $\rho' u' dt dy dz = \delta M''_x$.

Плотность ρ и скорость u на входе (в плоскости грани $ABCD$) в общем случае сжимаемой жидкости не равны плотности ρ' и скорости u' на выходе (в плоскости грани $A'B'C'D'$). При этом изменения ρ и u обуславливаются только тем, что при переходе от одной грани к другой для сходственных точек этих граней изменяется лишь координата x независимо от времени, так как втекание и вытекание жидкости происходят одновременно. Поэтому:

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx;$$

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx;$$

$$\delta M'_x = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt dy dz = \left(\rho u + u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt dy dz.$$

Но

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx ,$$

последнее слагаемое

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} dx \frac{\partial u}{\partial x} dx -$$

бесконечно малая величина высшего порядка относительно других слагаемых, и ею можно пренебречь. Потому

$$\delta M'_x = \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dt dy dz .$$

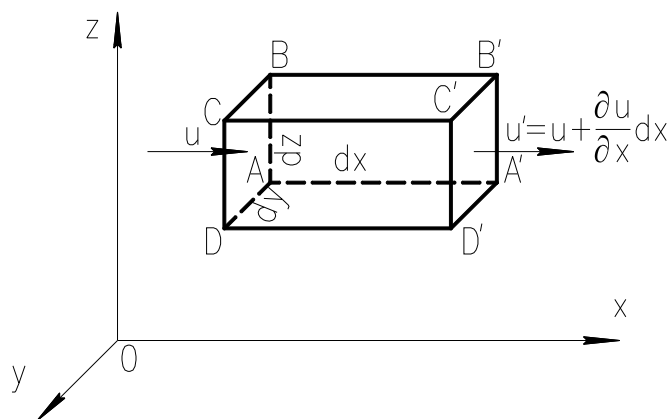


Рис. 23 – К выводу уравнений движения невязкой жидкости

Если за время dt масса жидкости внутри параллелепипеда увеличилась за счет притока на величину $\delta M'_x$, а уменьшилась за счет вытекания на величину $\delta M''_x$, то результирующее изменение массы в этом движении вдоль координатной оси Ox равняется:

$$\delta M_x = \delta M'_x - \delta M''_x = \rho u dt dy dz - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dt dy dz = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt .$$

Аналогично найдем, что изменения массы в итоге движения вдоль осей Oy и Oz равняются соответственно:

$$\delta M_y = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt ;$$

$$\delta M_z = - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt ,$$

а следовательно, общее изменение массы за время dt равно

$$\delta M = \delta M_x + \delta M_y + \delta M_z = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt .$$

Это изменение массы δM в условиях сплошности потока должно равняться изменению массы, обусловленному изменением плотности.

Плотность ρ есть функция $F(x, y, z, t)$. Определим величину δM в зависимости от изменения плотности ρ .

В начальный момент t масса внутри параллелепипеда $\delta m' = \rho dx dy dz$. По прошествии промежутка времени dt , т. е. в конечный момент $t_1 = t + dt$, средняя для объема плотность ρ изменится и будет равна ρ' . Это изменение происходит независимо от координат x, y и z , так как параллелепипед неподвижен, а потому

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt .$$

Следовательно, в конечный момент t_1 масса жидкости в объеме параллелепипеда

$$\delta m'' = \rho' dx dy dz = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz .$$

Таким образом, приращение массы за время dt будет равно:

$$\delta m = \delta m'' - \delta m' = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt .$$

Так как $\delta M = \delta m$, то

$$- \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt ,$$

что дает после сокращения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 . \quad (93)$$

Это и есть искомое уравнение неразрывности.

В частном случае установившегося движения плотность (как и все остальные параметры движения) от времени не зависит и, следовательно, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Поэтому уравнение неразрывности получает в этом случае вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial z} = 0. \quad (94)$$

И, наконец, для несжимаемой жидкости как при установившемся, так и при неустановившемся движении уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (95)$$

Отметим здесь, что уравнение неразрывности (95) может быть записано и в другой форме.

Рассмотрим входящие в это уравнение производные, каждая из которых представляет собой частную производную произведения плотности ρ на соответствующие компоненты скорости u , v и ω . Так как все эти величины являются функциями координат и времени, то, следовательно:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y};$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial z} = \rho \frac{\partial \omega}{\partial z} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Деля подстановку в уравнение (93) и группируя слагаемые, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (96)$$

Но

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{dz}{dt}$$

(если dx , dy и dz рассматриваются как соответствующие проекции элементарного перемещения ds). Тогда, вводя эти обозначения в (96), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right) = 0$$

или, умножая на dt ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \rho dt \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0.$$

Так первые четыре члена представляют собой полный дифференциал функции $\rho = F(x, y, z, t)$, то, деля на ρdt , получим окончательно

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (97)$$

5. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЯХ

5.1. Виды гидравлических сопротивлений

Для определения давлений и средних скоростей в различных сечениях потока выше были выведены два уравнения: уравнение сохранения энергии или полного напора (уравнение Бернулли) и уравнение сохранения массы (уравнение постоянства расхода), которые для несжимаемой жидкости записываются в виде

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_w = \text{const};$$

$$v\omega = Q = \text{const}.$$

Обычно при решении практических задач полный напор H и расход Q бывают заданы или могут быть определены из известных величин в одном из сечений рассматриваемого потока. Высотное положение центра тяжести сечения z , а также площадь его ω , как правило, известны. Таким образом, в этих уравнениях остаются три неизвестных: v , p и h_w . Для их определения необходимо составить третье уравнение, связывающее между собой неизвестные величины, например, уравнение, дающее зависимость h_w от v . С помощью двух уравнений гидравлики удастся решать лишь некоторые практические задачи, пренебрегая потерями напора (т. е. принимая $h_w=0$). Именно так обстояло дело с рассмотренной выше задачей о трубе Вентури.

Рассмотрим участок трубы, заполненный жидкостью (рис. 24). Если жидкость в трубе не движется, то ее взаимодействие со стенками приводится к одной равнодействующей, направленной вниз (вес жидкости).

При движении жидкости между нею и стенками трубы возникают дополнительные силы сопротивления, в результате чего частицы жидкости, прилегающие к поверхности трубы, тормозятся. Это торможение благодаря вязкости жидкости передается следующим слоям, причем скорость движения частиц по мере удаления их от оси трубы постепенно уменьшается. Равнодействующая сил сопротивления T направлена в сторону, противоположную движению, и параллельна направлению движения (см. рис. 24). Это и есть силы гидравлического трения (сопротивления гидравлического трения).

Для преодоления сопротивления трения и поддержания равномерного поступательного движения жидкости необходимо, чтобы на жидкость действовала сила, направленная в сторону ее движения и равная силе сопротивления, т. е. необходимо затрачивать энергию. Энергию или напор, необходимые для преодоления сил сопротивления, называют потерянными энергией или потерянными напором.

Потери напора, затрачиваемые на преодоление сопротивления трения, носят название потерь напора на трение или потерь напора по длине потока (линейные потери напора) и обозначаются через $h_{\text{тр}}$.

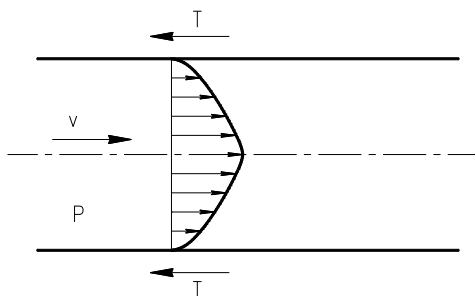


Рис. 24 – К понятию о потерях напора на гидравлическое трение

Однако потери напора, возникающие при движении жидкости, зависят не только от трения о стенки. Рассмотрим следующий опыт (рис. 25).

Бак W наполнен водой при постоянном уровне H и питает горизонтальную трубу AB длиной l одинакового по всей длине диаметра d . Пусть расход воды равен Q . Если трубу AB заменить трубой CD той же длины l , но образованной из последовательно расположенных участков диаметром соответственно d и $2d$, то расход изменится. Пусть новый расход равен Q' . Оказывается, что $Q' < Q$ (иногда $Q' = 0,5 Q$ и даже еще меньше).

Таким образом, трение является не единственной возможной причиной, вызывающей потери напора; резкие изменения сечения также оказывают сопротивление движению жидкости (так называемое сопротивление формы) и вызывают потери энергии. Существуют и другие причины, вызывающие потери напора, например, внезапное изменение направления движения жидкости. Потери напора, вызываемые резким изменением конфигурации границ потока (затрачиваемые на преодоление сопротивления формы), называют местными потерями напора или потерями напора на местные сопротивления и обозначают через h_m .

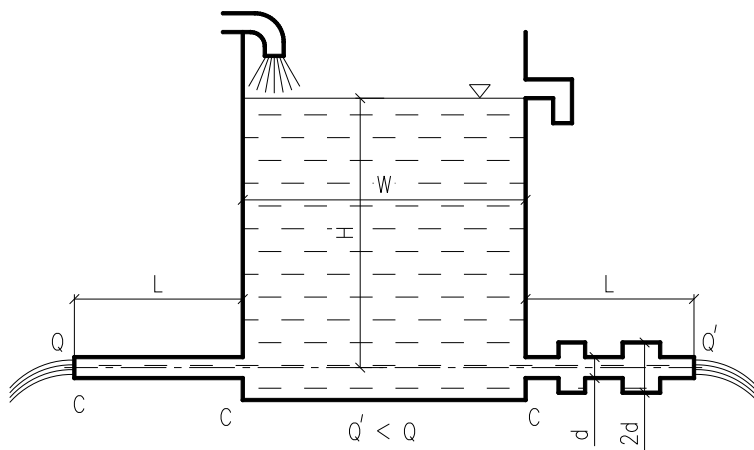


Рис. 25 – К понятию о местных потерях напора

Таким образом, потери напора при движении жидкости складываются из потерь напора на трение и потерь на местные сопротивления, т. е.

$$h_w = h_{тр} + h_m. \quad (98)$$

5.2. Общая формула для потерь напора на трение при равномерном движении жидкости в трубах

Используем метод размерности для определения потерь напора на трение, возникающих при равномерном напорном движении жидкости в трубах.

Опыты показывают, что величина потерь напора на трение $h_{тр}$ при движении жидкости в трубах может зависеть от следующих факторов:

- ✦ диаметра трубы d и ее длины l ;
- ✦ физических свойств жидкости (плотности ρ и вязкости μ);
- ✦ средней скорости движения в трубе v ;
- ✦ средней высоты выступов шероховатости k на стенках трубы.

Напишем интересующую нас функциональную зависимость в виде

$$\Delta p_{тр} = f(v, d, \mu, \rho, k, l), \quad (99)$$

где $\Delta p_{тр}$ — потери давления на длине потока, равной l , связанные с потерей напора формулой

$$\Delta p_{тр} = \rho g h_{тр} \quad (100)$$

Вид функции f в уравнении (99) неизвестен.

Перепишем уравнение (99) в виде

$$f_1 \left(\frac{\Delta p_{тр}}{\ell}, \mu, \rho, d, v, k \right) = 0 \quad (101)$$

учитывая, что потеря на трение всегда прямо пропорциональна длине рассматриваемого участка.

Для измерения входящих в формулу (101) $n = 6$ величин требуются $m=3$ основные единицы: масса, время и длина.

Уравнение (101) может быть представлено в форме, содержащей $n-m=3$ безразмерных отношений (чисел ПИ в соответствии с ПИ-теоремой [1, 3, 4]), т. е. вместо (101) можно записать

$$f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0, \quad (102)$$

где π_1, π_2, π_3 — безразмерные комплексы.

Для определения чисел π_1, π_2, π_3 выберем из всех переменных три (по числу основных единиц измерения), включающие все основные единицы измерения, например v, d и ρ . Составим теперь уравнения размерностей, объединяющие выбранные переменные с каждой из других переменных по очереди, т. е.:

$$\pi_1 = d^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \mu; \quad (103)$$

$$\pi_2 = d^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \frac{\Delta p_{тр}}{l}; \quad (104)$$

$$\pi_3 = d^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3} k. \quad (105)$$

В выражениях для π_1, π_2, π_3 нужно подобрать показатели при d, v и ρ таким образом, чтобы числа π не имели размерности.

Нетрудно показать (проверив размерности), что

$$\pi_1 = \frac{v d \rho}{\mu}; \quad (106)$$

$$\pi_2 = \frac{d \frac{\Delta p_{\text{тр}}}{1}}{v^2 \rho}; \quad (107)$$

$$\pi_3 = \frac{k}{d}. \quad (108)$$

Так, для числа π_3 из условия однородности размерностей

$$L^{x_3} (LT^{-1})^{y_3} (ML^{-3})^{z_3} L = L^0 T^0 M^0.$$

Отсюда вытекают следующие уравнения:

при L: $x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0$

при T: $-y_3 = 0$,

при M: $z_3 = 0$, т.е. $x_3 = -1$ и $\pi_3 = k/d$.

Подставляя (106) - (108) в (102), имеем

$$f_2 \left(\frac{vd\rho}{\mu}; \frac{\frac{\Delta p_{\text{тр}}}{1} d}{v^2 \rho}; \frac{k}{d} \right) = 0.$$

Так как нас интересует потеря напора, то разрешаем это уравнение относительно π_2 :

$$\frac{d \frac{\Delta p_{\text{тр}}}{1}}{v^2 \rho} = \varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu}; \frac{k}{d} \right)$$

Или

$$\Delta p_{\text{тр}} = \frac{v^2 \rho l}{d} \varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu}; \frac{k}{d} \right). \quad (109)$$

Учитывая формулу (100), имеем,

$$h_{\text{тр}} = \frac{\Delta p_{\text{тр}}}{\rho g} = \frac{v^2 l}{gd} \varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu}; \frac{k}{d} \right)$$

или, обозначая

$$\varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu}; \frac{k}{d} \right) = \frac{\lambda}{2}. \quad (110)$$

где λ – безразмерное число, речь о котором будет идти ниже, окончательно получим

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (111)$$

Из формулы (111) следует, что потеря напора на трение при движении жидкости в трубе возрастает с увеличением средней скорости потока и длины рассматриваемого участка трубы и обратно пропорциональна ее диаметру [6, 7]. Кроме того, в формулу (111) входит неизвестный безразмерный коэффициент λ – так называемый коэффициент гидравлического трения. Эта формула была получена в XIX в. эмпирическим путем и называется *формулой Дарси-Вейсбаха*.

Приведенный метод можно использовать также для определения вида формулы потерь напора на местные сопротивления. В этом случае, учитывая, что местные потери практически не зависят ни от длины участка трубы, ни от ее диаметра, нетрудно получить формулу

$$h_m = \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \quad (112)$$

где ζ - безразмерный коэффициент, так называемый коэффициент местных потерь; v_2 - скорость потока после прохода через местное сопротивление.

Формулу (112), полученную в XIX в. эмпирическим путем, называют *формулой Вейсбаха*.

Таким образом, ПИ-теорема, не позволяя получить полного решения вопроса о потерях напора (ибо смысл коэффициентов λ и ζ остался невыясненным), дает возможность ближе подойти к его выяснению. Дальнейшие сведения о коэффициентах λ и ζ будут получены после ознакомления с некоторыми особенностями движения жидкости, рассмотрению которых посвящен следующий параграф.

5.3. Ламинарное и турбулентное движение жидкости

Наблюдения показывают, что в природе существуют два различных вида движения жидкости: во-первых, слоистое, упорядоченное или ламинарное движение, при котором отдельные слои жидкости скользят друг относительно друга, не смешиваясь между собой, и, во-вторых, неупорядоченное, так называемое турбулентное движение, когда частицы жидкости движутся по сложным, все время изменяющимся траекториям и в жидкости происходит интенсивное перемешивание.

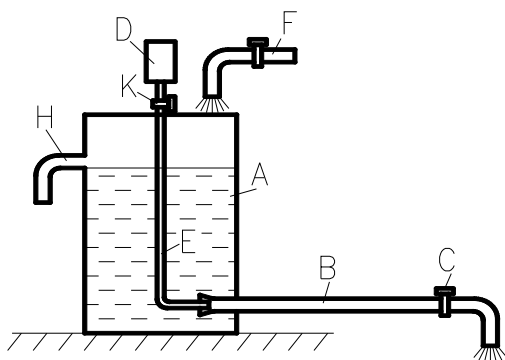


Рис. 26 – Установка Рейнольдса

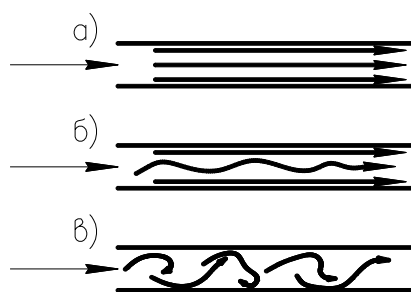


Рис. 27 – Режимы движения жидкости

Уже давно было известно, что вязкие жидкости (масла) движутся большей частью упорядоченно, а маловязкие жидкости (вода, воздух) почти всегда неупорядоченно. Ясность в вопрос о том, как именно будет происходить движение жидкости в тех или иных условиях, была внесена в 1883 г. в результате опытов английского физика Рейнольдса.

Опытная установка Рейнольдса представлена на рис. 26. К баку А с водой присоединена стеклянная труба В. Открывая частично вентиль С, можно заставить течь воду по трубе с различными скоростями. Из сосуда Д по трубке

E в устье трубы B поступает краска. При малых скоростях движения воды в трубе окрашенная струйка не размывается окружающей ее водой и имеет вид натянутой нити (рис. 27, а). Поток в этом случае называют ламинарным. При увеличении скорости движения воды окрашенные струйки получают вначале волнистое очертание (рис. 27, б), а затем почти внезапно исчезают, размываясь по всему сечению трубы и окрашивая всю жидкость. Движение жидкости становится неупорядоченным, отдельные частицы окрашенной жидкости разлетаются во все стороны, сталкиваются друг с другом, ударяются о стенки и т. д. (рис. 27, в). Такое движение жидкости называют турбулентным. Основная особенность турбулентного движения заключается в наличии поперечных к направлению движения составляющих скорости, накладывающихся на основную скорость в продольном направлении.

Опыты Рейнольдса показали, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при определенной скорости (так называемая *критическая скорость*), которая, однако, для труб разных диаметров оказалась различной, возрастающей с увеличением вязкости и уменьшающейся с уменьшением диаметра трубы.

5.4. Число Рейнольдса

Основываясь на некоторых теоретических соображениях [1, 4], а также на результатах опытов, Рейнольдс установил общие условия, при которых возможны существование ламинарного и турбулентного режима движения жидкости и переход от одного режима к другому. Оказалось, что состояние (режим) потока жидкости в трубе зависит от величины безразмерного числа, которое учитывает основные факторы, определяющие это движение: среднюю скорость v , диаметр трубы d , плотность жидкости ρ и ее абсолютную вязкость μ . Это число (позже ему было присвоено название числа Рейнольдса) имеет вид:

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu}.$$

Величина d в числе Рейнольдса может быть заменена любым линейным параметром, связанным с условиями течения или обтекания (диаметр трубы, диаметр падающего в жидкости шара, длина обтекаемой жидкостью пластинки и др.)

Значение числа Рейнольдса, при котором происходит переход от ламинарного движения к турбулентному, называют критическим числом Рейнольдса и обозначают $Re_{кр}$.

При $Re > Re_{кр}$ режим движения является турбулентным, при $Re < Re_{кр}$ — ламинарным. Величина критического числа Рейнольдса зависит от условий входа в трубу, шероховатости ее стенок, отсутствия или наличия первоначальных возмущений в жидкости, конвекционных токов и др.

Вопрос о неустойчивости ламинарного движения и его переходе в турбулентное, а также о величине критического числа Рейнольдса подвергся тщательному теоретическому и экспериментальному изучению, но до сих пор не

получил еще достаточно полного решения.

Наиболее часто в расчетах принимают для критического числа Рейнольдса значение

$$Re_{кр} = 2300, \quad (113)$$

отвечающее переходу движения жидкости из турбулентного в ламинарное; при переходе движения из ламинарного в турбулентное критическое число Рейнольдса имеет большую величину (для хорошо закругленного плавного входа оно может быть доведено до 20000).

Проведенные исследования показывают также, что критическое значение числа Рейнольдса увеличивается в сужающихся трубах и уменьшается в расширяющихся. Это можно объяснить тем, что при ускорении движения частиц жидкости в сужающихся трубах их тенденция к поперечному перемешиванию уменьшается, а при замедленном течении в расширяющихся трубах усиливается.

По критическому значению числа Рейнольдса легко можно найти также критическую скорость, т. е. скорость, ниже которой всегда будет иметь место ламинарное движение жидкости:

$$v_{кр} = \frac{Re_{кр} \nu}{d} = \frac{2300 \nu}{d}. \quad (114)$$

В трубопроводах систем отопления, вентиляции, газоснабжения, теплоснабжения, водоснабжения и др. движение, как правило, является турбулентным, так как движущаяся среда (вода, воздух, газ, пар) имеет малую вязкость. Так, для газопроводов сети домового потребления числа Рейнольдса бывают обычно не ниже 3000, в городских сетях - не ниже 200 000, в вентиляционных сетях - не ниже 150 000, сетях сжатого воздуха - не ниже 400 000, в паропроводах центрального отопления - не ниже 30 000, а в паропроводах ТЭЦ достигают $3 \cdot 10^6$ - $5 \cdot 10^6$. Ламинарный режим для воды и воздуха возможен лишь при их движении в трубах очень малого диаметра. Более вязкие жидкости, например масла, могут двигаться ламинарно даже в трубах значительного диаметра.

Число Рейнольдса имеет большое значение при моделировании гидроаэродинамических явлений.

Числу Рейнольдса можно придать весьма простой смысл. Оно может рассматриваться как мера отношения кинетической энергии рассматриваемого элемента жидкости к работе сил вязкого трения.

Действительно, кинетическая энергия элемента жидкости зависит от его объема и пропорциональна $\rho v^2 l^3$, где l — линейные размеры элемента жидкости.

Работа сил вязкого трения зависит от размеров поверхности рассматриваемого элемента жидкости и пропорциональна $\mu l^2 v$.

Отношение кинетической энергии элемента жидкости к работе сил вязкости будет равно:

$$\frac{\rho l^3 v^2}{\mu l^2 v} = \frac{v \rho l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} = Re.$$

Таким образом, число Рейнольдса характеризует относительную роль сил вязкости. Чем меньше число Рейнольдса, тем большую роль играют си-

лы вязкости в движении жидкости. Чем больше число Рейнольдса, тем больше влияние сил инерции в потоке по сравнению с силами вязкости.

5.5. Особенности ламинарного и турбулентного движения жидкости в трубах

Опыты показывают, что одновременно с переходом ламинарного движения в турбулентное изменяется характер распределения скоростей по сечению трубы, а также характер гидравлических сопротивлений. При ламинарном движении распределение скоростей по сечению имеет параболический характер: непосредственно у стенок скорости равны нулю, а при удалении от них непрерывно и плавно возрастают, достигая максимума на оси трубы (рис. 28).

При турбулентном движении закон распределения скоростей сложнее: в пределах большей части поперечного сечения скорости лишь незначительно меньше максимального значения (на оси), но зато вблизи стенок (пограничный слой [5]) величина скорости резко падает (рис. 29).

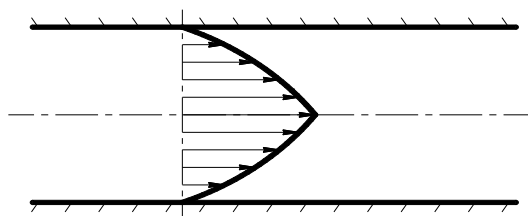


Рис. 28 – Эпюра скоростей при ламинарном движении жидкости в трубопроводе

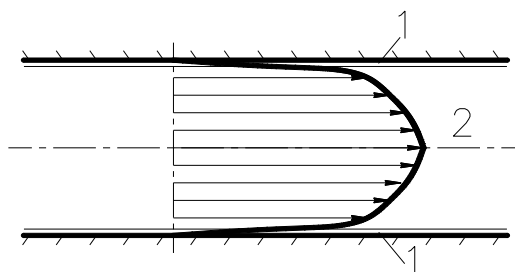


Рис. 29 – Эпюра скоростей при турбулентном движении жидкости в трубопроводе

1 – пограничный слой; 2 – ядро потока

Более равномерное распределение скоростей по сечению при турбулентном движении объясняется наличием турбулентного перемешивания, осуществляемого поперечными составляющими скоростей. Благодаря этому перемешиванию частицы с большими скоростями в центре потока и с меньшими скоростями на его периферии, непрерывно сталкиваясь, выравнивают свои скорости. У самой стенки турбулентное перемешивание парализуется наличием твердых границ, и поэтому там наблюдается значительно более быстрое падение скорости.

Измеряя разность уровней в двух пьезометрах, присоединенных к сечениям 1 и 2 трубы постоянного диаметра (рис. 30), можно определить потерю напора между этими сечениями из уравнения Бернулли, составленного для сечений 1 и 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_{тр},$$

откуда

$$h_{тр} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right). \quad (115)$$

Таким образом, при равномерном движении уменьшение напора по

длине трубы измеряется разностью пьезометрических высот, отсчитываемых от одной и той же горизонтальной плоскости, и, следовательно, не зависит от расположения трубы в вертикальной плоскости.

Если пропускать воду по трубе с различной скоростью и, замерив при этом потери напора, построить график $h_{тр} = f(v)$, то он будет иметь вид, представленный на рис. 31. До какого-то значения скорости потери напора изменяются прямо пропорционально скорости, а затем вид кривой внезапно меняется, и потери напора становятся пропорциональными более высокой степени скорости (примерно ее квадрату).

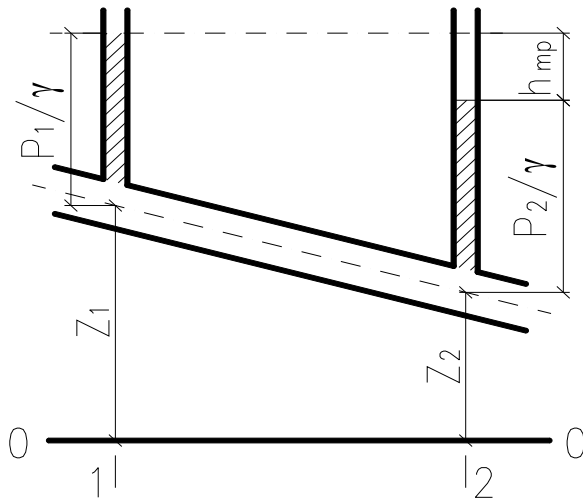


Рис. 30 – К определению потерь напора на трение в трубах

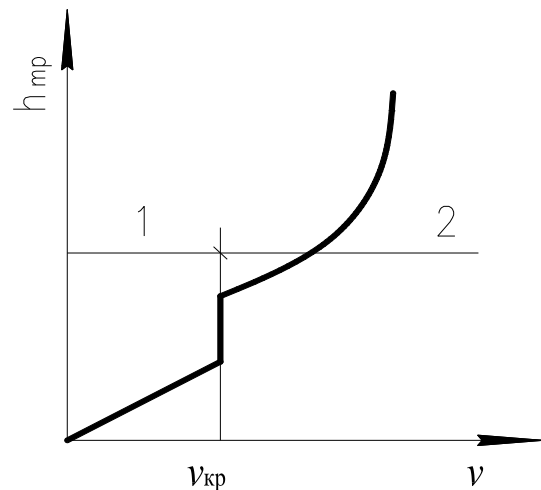


Рис. 31 – Зависимость потерь напора на трение от скорости движения жидкости
1 – ламинарный режим;
2 – турбулентный режим

Как и следовало ожидать, переход от одного закона к другому происходит при значении скорости, равном критическому, т. е. в момент перехода от ламинарного движения к турбулентному. Отсюда можно сделать важный вывод о том, что при ламинарном движении потери напора пропорциональны скорости в первой степени, а при турбулентном – скорости в степени, большей единицы.

Таким образом, ламинарный и турбулентный режим по существу отличаются не только характером движения частиц (наличием поперечных скоростей при турбулентном движении), но также особенностями распределения скоростей по сечению и характером зависимости между потерями напора и скоростью.

5.6. Потери напора на трение в круглой трубе

Найдем потери напора на трение при ламинарном движении жидкости в круглой трубе.

С учетом $v_{ср} = \frac{Q}{\omega} = \frac{\pi \gamma i r^4}{8 \mu \pi r^2} = \frac{\gamma i}{8 \mu} r^2$ можно получить выражение для гидравлического уклона в виде

$$i = \frac{8 \mu v_{ср}}{\gamma r^2} = \frac{32 \mu}{\gamma d^2} v_{ср}$$

или

$$h_{\text{тр}} = i l = \frac{32\mu l v_{\text{ср}}}{\gamma d^2}. \quad (116)$$

Заменяя абсолютную вязкость μ через кинематическую ν , получаем формулу, называемую *формулой Пуазейля - Гагена*, для потерь напора при ламинарном движении:

$$h_{\text{тр}} = \frac{32\nu l v_{\text{ср}}}{g d^2}. \quad (117)$$

Эта формула показывает, что потери напора на трение при ламинарном режиме пропорциональны средней скорости движения. Эти потери не зависят от состояния внутренней поверхности стенок трубы, так как характеристика состояния стенок в формулу (117) не входит. Отсутствие влияния стенок на сопротивление можно объяснить тем, что жидкость прилипает к стенкам, в результате чего происходит трение жидкости о жидкость, а не жидкости о стенку.

Сопоставляя формулу (117) с общей зависимостью для потерь напора на трение, имеющей вид

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

найдем

$$\lambda = \frac{64\nu}{vd} = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (118)$$

Отсюда следует, что при ламинарном режиме коэффициент гидравлического трения обратно пропорционален числу Рейнольдса.

Полученные зависимости с большой точностью подтверждаются многочисленными опытами над движением различных жидкостей в условиях ламинарного режима. Тем самым находят подтверждение и сделанные в процессе выводов этих зависимостей допущения о применимости закона Ньютона для ламинарного движения и о том, что скорость у стенки равна нулю. В инженерной практике с ламинарным режимом часто приходится сталкиваться при движении в трубах жидкостей с повышенной вязкостью (нефть, керосин, смазочные масла и пр.).

Из формулы (117) видно, что потери напора при ламинарном режиме прямо пропорциональны вязкости жидкости. Поэтому иногда для повышения пропускной способности нефтепроводов нефть в холодную погоду подогревают, благодаря чему уменьшается ее вязкость, а, следовательно, и потери напора. Полученные зависимости требуют внесения в них поправок при движениях со значительным теплообменом, т. е. в случаях, если движение жидкости сопровождается ее нагреванием или охлаждением;

Часто вместо гидравлического радиуса используют так называемый эквивалентный (или гидравлический) диаметр

$$d_{\text{экв}} = 4R = 4 \frac{\omega}{\chi}.$$

Напомним, что для круглых труб эквивалентный диаметр равен их гео-

метрическому диаметру: $d_{\text{экв}} = d$.

Заменяя в формуле Дарси для потери напора диаметр гидравлическим радиусом или эквивалентным диаметром, получаем выражение

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{1}{d_{\text{экв}}} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (119)$$

которое принципиально пригодно для расчета труб любого поперечного сечения.

Однако в формуле (119) коэффициент λ зависит уже не только от числа Рейнольдса, но и от формы сечения трубы.

При ламинарном движении коэффициент λ в трубах некругового сечения значительно возрастает по сравнению с движением в круглой трубе (при одном и том же числе Рейнольдса) и может быть выражен формулой

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}_{\Pi}}, \quad (120)$$

где Re_{Π} - число Рейнольдса, вычисленное по эквивалентному диаметру; A - коэффициент формы, численные значения которого зависят от формы сечения.

$$\text{Re}_{\Pi} = \frac{4vR}{\nu} = \frac{vd_{\text{экв}}}{\nu};$$

5.7. Опытные данные о распределении скоростей и потерях напора

Два основных вопроса, которые интересуют инженера при рассмотрении турбулентного движения жидкости в трубах, — это определение потерь напора и распределения скоростей по поперечному сечению трубы. Опыты показывают, что как распределение скоростей, так и потери напора могут сильно меняться в зависимости от диаметра трубы, скорости движения, вязкости жидкости и шероховатости стенок труб. При этом шероховатость стенок в свою очередь определяется рядом факторов: материалом стенок; характером механической обработки внутренней поверхности трубы, от чего зависят высота выступов шероховатости, их форма, густота и характер их размещения на поверхности; наличием или отсутствием в трубе ржавчины, коррозии, отложения осадков, защитных покрытий и т. д.

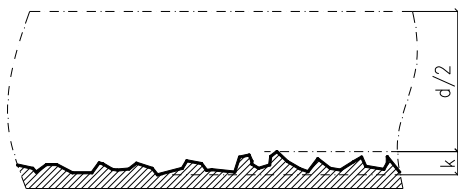


Рис. 32 – К понятию об абсолютной шероховатости

Для грубой количественной оценки шероховатости вводится понятие о средней высоте выступов (бугорков) шероховатости. Эту высоту, измеряемую в линейных единицах (рис. 32), называют *абсолютной шероховатостью* и обозначают буквой k . Опыты показали, что при одной и той же величине абсолютной шероховатости влияние ее на величину гидравлических сопротивлений и распределение скоростей различно в зависимости от диаметра трубы. Поэтому вводится понятие об *относительной шерохова-*

тости, измеряемой отношением абсолютной шероховатости к диаметру трубы, т. е. величиной k/d .

С помощью анализа размерностей было установлено что коэффициент гидравлического трения λ в формуле Дарси-Вейсбаха $h_{тр} = \lambda \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ может зависеть от двух безразмерных параметров: $vd\rho/\mu$ и k/d . Первый из этих параметров представляет собой число Рейнольдса, а второй относительную шероховатость, а, следовательно,

$$\lambda = f\left(\text{Re}; \frac{k}{d}\right). \quad (121)$$

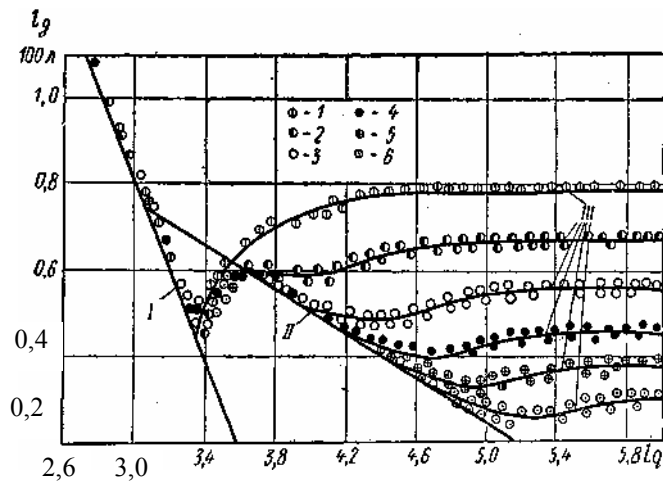


Рис. 33 – График Никурадзе (I – линия ламинарного движения; II – линия гидравлически гладких труб; III – линия вполне шероховатых труб; 1 – $r/k=15$; 2 – $r/k=30,6$; 3 – $r/k=60$; 4 – $r/k=126$; 5 – $r/k=252$; 6 – $r/k=507$)

Первые систематические опыты для выявления характера зависимости λ от Re и k/d были проведены в 1933 г. И. Никурадзе в гладких латунных трубах и трубах с искусственной равномерно-зернистой шероховатостью из кварцевого песка. Песок с различной высотой бугорков шероховатости k наносился сплошным слоем на внутреннюю поверхность труб разного диаметра; при этом были получены различные значения относительно шероховатости (от $k/d=0,00197$ до $k/d=0,066$). В изготовленных таким образом трубах при разных расходах измеряли потерю напора и вычисляли коэффициент λ , по формуле Дарси-Вейсбаха.

Результаты опытов Никурадзе представлены в виде графика; показанного на рис. 33, где по горизонтальной оси отложены величины $\lg \text{Re}$, а по вертикальной – величины $\lg(100\lambda)$. Из рассмотрения этого графика можно сделать следующие выводы.

При ламинарном движении ($\text{Re} < 2300$ или $\lg \text{Re} < 3,6$) все опытные точки, независимо от шероховатости стенок, ложатся на прямую линию I; эта линия изображает зависимость (121) для ламинарного режима. Таким образом подтверждается, что при ламинарном движении шероховатость не оказывает влияния на сопротивление.

При турбулентном режиме ($\text{Re} > 2300$; $\lg \text{Re} > 3,6$) опытные точки до не-

которых чисел Рейнольдса совпадают с линией II, полученной при испытании гладких труб без искусственной шероховатости, а затем отклоняются от нее в сторону больших значений λ ; чем меньше шероховатость, тем при больших числах Рейнольдса начинается это отклонение; таким образом, при некоторых условиях (малые числа Re, малые значения k/d или большие r/k , где r — радиус трубы) шероховатость не оказывает влияния на сопротивление также и при турбулентном движении.

При больших числах Рейнольдса коэффициент гидравлического трения перестает зависеть от этого числа (т. е. от вязкости жидкости) и для заданного значения k/d сохраняет постоянную величину.

Трубы, в которых коэффициент гидравлического трения λ вовсе не зависит от вязкости жидкости (числа Рейнольдса), а только от относительной шероховатости, называют *вполне шероховатыми*. Трубы же, в которых коэффициент λ , вовсе не зависит от шероховатости стенок, а только от числа Рейнольдса, называют *гидравлически гладкими*. Из графика Никурадзе видно, что одна и та же труба в одних условиях может быть гидравлически гладкой, а в других вполне шероховатой. Область движения, в которой λ зависит и от Re, и от k/d , называют *переходной* (область смешанного трения).

Полученным результатам можно дать следующее физическое истолкование. При малых числах Рейнольдса жидкость обтекает выступы шероховатости без образования и отрыва вихрей благодаря значительному влиянию вязкости жидкости; свойства поверхности стенок труб не оказывают при этом влияния на сопротивление и кривые $\lambda=f(Re)$ совпадают с прямой II (для гладких труб). Когда же с увеличением скорости (т. е. числа Рейнольдса) от бугорков шероховатости начинают отрываться вихри, то свойства поверхности уже оказывают влияние на сопротивление и кривые $\lambda=f(Re)$ отклоняются от линии гладкого трения.

В результате опытов Никурадзе и других исследований над сопротивлением трубопроводов были предложены различные эмпирические формулы для определения коэффициента гидравлического трения λ .

Для гидравлически гладких труб широкое распространение получила формула Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (122)$$

а для вполне шероховатых труб — формула Б. Л. Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k}{d} \right)^{0,25}. \quad (123)$$

5.8. Местные гидравлические сопротивления. Общие сведения

Местные сопротивления вызываются фасонными частями, арматурой и другим оборудованием трубопроводных сетей, которые приводят к изменению величины или направления скорости движения жидкости на отдельных участках трубопровода (при расширении или сужении потока, в результате его поворота, при протекании потока через диафрагмы, задвижки и т. д.), что всегда связано с появлением дополнительных потерь напора.

В водопроводных магистральных трубах потери напора на местные сопротивления обычно весьма невелики (не более 10-20% потерь напора на тре-

ние). В воздухопроводах вентиляционных и пневмотранспортных установок, в дутьевых установках котельных потери на преодоление местных сопротивлений часто значительно больше потерь напора на трение. Местные сопротивления являются весьма существенными и при расчете паропроводов.

Потери напора, затраченного на преодоление какого-либо местного сопротивления, принято оценивать в долях скоростного напора, соответствующего скорости непосредственно за рассматриваемым местным сопротивлением, т. е. определять их из формулы Вейсбаха

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

где ζ — так называемый коэффициент местного сопротивления.

Коэффициенты разных местных сопротивлений находят, как правило, опытным путем; таблицы значений этих коэффициентов (или эмпирические кривые и формулы для них) содержатся во всех инженерных справочниках и руководствах по гидравлике [3, 6, 7]. Для некоторых практически важных случаев значения коэффициентов местных сопротивлений удалось получить также теоретическим путем.

Иногда местные потери напора выражают в виде эквивалентной длины l_3 прямого участка трубопровода, сопротивление трения которого по величине равно рассматриваемым местным потерям напора, т. е. из условия

$$\lambda \frac{l_3}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

или

$$\frac{l_3}{d} = \frac{\zeta}{\lambda}. \quad (124)$$

Коэффициент гидравлического трения λ как уже было выяснено, зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости, поэтому одному и тому же значению коэффициента местного сопротивления ζ в общем случае соответствует разная эквивалентная длина. Лишь в квадратичной области сопротивления, когда $\lambda \neq f(Re)$, эквивалентная длина заданного местного сопротивления постоянна.

Основные виды местных потерь напора можно условно разделить на следующие группы:

- потери, связанные с изменением сечения потока (или, что то же, его средней скорости). Сюда относятся случаи внезапного расширения, сужения, а также постепенного расширения и сужения потока;
- потери, вызванные изменением направления потока. Сюда относятся различного рода колена, угольники, отводы, используемые на трубопроводах;
- потери, связанные с протеканием жидкости через арматуру различного типа (вентили, краны, обратные клапаны, сетки, отборы, дроссель-клапаны и т. д.);
- потери, связанные с отделением одной части потока от другой или слиянием двух потоков в один общий. Сюда относятся, например, тройники, крестовины и отверстия в боковых стенках трубопроводов при наличии транзитного расхода.

6. ЗАДАЧИ

Задача 1.

Определить коэффициент объемного сжатия β_w , если известно, что начальный объем капельной жидкости $W_0=5 \text{ м}^3$, возрастание давления в процессе составляет $\Delta p=12 \text{ кПа}$, а изменение объема составляет $\Delta W=0,05 \text{ м}^3$.

Решение:

Используем формулу (8), тогда:

$$\beta_w = -\frac{1}{W_0} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta p} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(-0,05)}{12000} = 8,33 \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}.$$

Задача 2.

Определить число Рейнольдса для холодной воды ($t=20^\circ\text{C}$), которая движется в трубопроводе диаметром 200 мм, если расход воды составляет $12 \text{ м}^3/\text{час}$.

Решение:

Приводим все величины в систему СИ, для этого необходимо $\text{м}^3/\text{час}$ перевести в $\text{м}^3/\text{с}$: $12/3600=0,0033 \text{ м}^3/\text{с}$; переводим мм в м – $200 \text{ мм}=0,2 \text{ м}$.

Рассчитываем площадь трубы $F=(\pi \cdot 0,2^2/4)=0,0314 \text{ м}^2$.

Рассчитываем скорость воды в трубопроводе $v=0,0033/0,0314=0,105 \text{ м/с}$.

Из таблицы 5 определяем, что при $t=20^\circ\text{C}$ $\nu=1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Используя формулу $Re = \frac{vd}{\nu} = 0,105 \cdot 0,2 / 1,006 \cdot 10^{-6} = 19811 > 10000$ – режим турбулентный.

Задача 3.

Определить потери давления в трубопроводе диаметром $d=0,9 \text{ м}$, при расходе холодной воды ($t=20^\circ\text{C}$) $G=0,001 \text{ м}^3/\text{с}$. Трубы стальные новые (рис. 34).

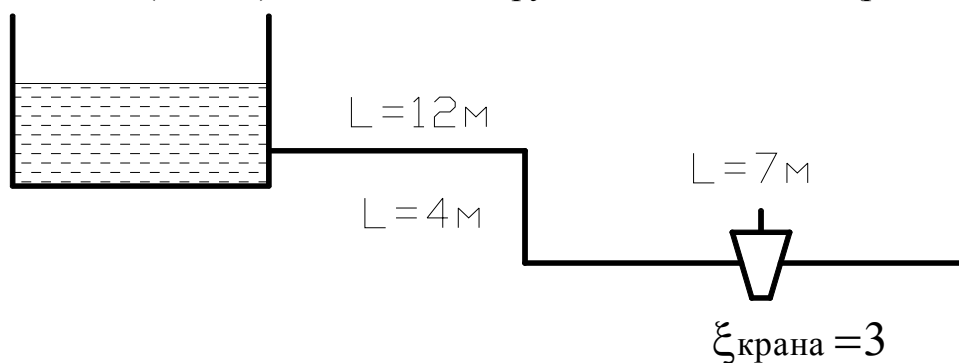


Рис. 34 – Расчетная схема

Решение:

Рассчитываем скорость потока жидкости $v=G/F$, м/с .
 $v=0,001/(\pi \cdot 0,9^2/4)=0,0016 \text{ м/с}$.

Используя формулу $Re = \frac{vd}{\nu} = 0,0016 \cdot 0,9 / 1,006 \cdot 10^{-6} = 1431 < 2300$ – режим ламинарный. Тогда для определения коэффициента гидравлического трения

используем формулу (118): $\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1431} = 0,045$; потери давления на трение

$$h_{тр} = \lambda \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,045 \cdot \frac{23}{0,9} \cdot \frac{0,0016^2}{2 \cdot 9,81} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ кгс/м}^2.$$

Для определения потерь давления на местных сопротивлениях определяем, какие сопротивления есть на схеме – кран пробковый ($\zeta=3$), колено под 90° – 2 шт. ($\zeta=1,1 \cdot 2=2,2$), вход в трубопровод ($\zeta=0,5$).

$$h_i = \sum \zeta \left(\frac{v^2}{2g} \right) = (3 + 2,2 + 0,5) \cdot \frac{0,0016^2}{2 \cdot 9,81} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ кгс/м}^2.$$

Общие потери давления $\Delta P = (1,5 + 7,4) \cdot 10^{-7} = 8,9 \cdot 10^{-7} \text{ кгс/м}^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика (Основы механики жидкости). Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. Стройиздат, 1975, 323 с.
2. Тихомиров К.В., Сергеенко Э.С. Теплотехника, теплогазоснабжение и вентиляция: Учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1991. – 480 с.
3. Альтшуль А.Д., Калицун В.И. Гидравлические сопротивления трубопроводов. – М.: Изд-во лит-ры по стр-ву. 1964. 285 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: "Наука". 1973. – 848 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: "Наука". 1974. – 712 с.
6. Шушляков А.В., Паламарчук О.Ю., Шушляков Д.А. Вентиляция гражданского здания. – Х.: ФОП Костинский А.В., 2011. – 326 с.
7. Інженерне обладнання будівель : навч. посібник / М. О. Шульга, Д. О. Шушляков, Г. А. Усик; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х : ХНАМГ, 2011. – 352 с.

Навчальне видання

Шушляков Дмитро Олександрович

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА РІДИН І ГАЗІВ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для студентів напрямку підготовки 6.060101 – Будівництво
та 6.170202 – Охорона праці)*

(рос. мовою)

Відповідальний за випуск *В. І. Абелешев*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2013, поз. 173 Л

Підп. до друку 28.10.2013р.

Друк на різнографі

Зам. №

Формат 60×84/16

Ум. друк. арк. 3,4

Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського
господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.