МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ

МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для самостійної роботи студентів
1 курсу заочної форми навчання

Частина 2

Харків – ХНАМГ – 2013

Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу заочної форми навчання . Частина 2. / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Л.П Вороновська., Є.С. Пахомова, С.С. Шульгіна– Х.: ХНАМГ, 2013. – 82 с.

Укладачі: Л.П. Вороновська

Є.С. Пахомова

С.С. Шульгіна

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Коваленко Л.Б.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.

протокол №7 від 23.03.2013 р.

РОЗДІЛ 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференційного числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною ж задачею інтегрального числення є обернена задача: знаходження функції за похідною або диференціалом. Ця дія називається інтегруванням.

Шукану функцію називають первісною функцією $F(x)$, по відношенню до даної функції $f(x)$.

За означенням, первісною функцією для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називають функцію $F(x)$, яка визначена на тому самому проміжку і задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Сукупність всіх первісних функції $f(x)$, де $x\epsilon(a;b)$, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Таким чином, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

З визначення прямує, що результат інтегрування можна перевірити диференціюванням.

1.2. Властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$,
2. $d(\int f(x)dx) \quad = f(x)dx$,
3. $\int dF(x) = F(x) + C$,
4. $\int Cf(x) = C\int f(x)dx$, де C - $const \neq 0$,
5. $\int(f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,
6. $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$ - диференційовна функція від незалежної змінної x.
7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

1.3 Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int du = u + C$

2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1,\ \alpha \epsilon R)$, $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$, $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$,

3. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$,

4. $\int a^u = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1$, $\int e^u du = e^u + C$,

5. $\int sinu\, du = -cosu + C$,

6. $\int cosu\, du = sinu + C$,

7. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$,

8. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$,

9. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C, a \epsilon R, a \neq 0$,

10. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a \epsilon R, a \neq 0$,

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0$,

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C$,

Зауважимо, що тут $\alpha, A\ i\ a$ - сталі, u - незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Є три основні методи інтегрування функцій: безпосерднє інтегрування, метод заміни змінної, метод інтегрування частинами.

1.4. Безпосереднє інтегрування.

Під безпосереднім інтегруванням мають на увазі пряме використання таблиці інтегралів.

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати:

$$\int(8x^7-3x^2+3x+10)dx=\int 8x^7dx-\int 3x^2dx+\int 3xdx+\int 10dx=$$

$$=8\int x^7dx-3\int x^2dx+3\int xdx+10\int dx.$$

Далі, застосувавши до одержаних інтегралів формулу (1) таблиці знаходимо:

$$\int(8x^7-3x^2+3x+10)dx=8\frac{x^8}{8}+3\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+10x+\ C=$$

$$=x^8-x^3+\frac{3x^2}{2}+10x+C.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int\left(1-\sqrt{x}-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

Розв'язання. Спростимо підінтегральний вираз:

$\left(1-\sqrt{x}-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)=1+\sqrt{x}-\sqrt{x}-x-x-x^{\frac{3}{2}}=1-2x-x^{\frac{3}{2}}$, тоді

$$\int\left(1-\sqrt{x}-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)dx=\int\left(1-2x-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=$$

$$=\int dx-2\int xdx-\int x^{\frac{3}{2}}dx=x-2\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=x-x^2-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\quad+C.$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивість 7 та формулу 2 маємо,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}=\int\frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}}=\int(2-5x)^{-\frac{1}{5}}dx=\frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}\cdot(-5)}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{4}+C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{3x^2+12}$.

Розв'язання. За формулою 9 маємо,

$$\int\frac{dx}{3x^2+12}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C=\frac{1}{6}arctg\frac{x}{2}+C.$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} dx$.

Розв'язання. За формулою 11 маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5(3-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

1.5. Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Метод заміни змінної застосовують в тих випадках, коли безпосереднє інтегрування не можливо. В таких випадках спробуємо підібрати таку нову змінну, підстановка якої зводить інтеграл до табличного.

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2} dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{arctg2x} \cdot \frac{2}{1+4x^2} dx = \left| \begin{array}{c} u = arctg2x \\ du = \frac{2}{1+4x^2} dx \\ \frac{du}{2} = \frac{1}{1+4x^2} dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int e^u \cdot du = \frac{1}{2} e^{arctg2x} + C.$$

Заміну змінної розміщуємо після інтеграла у вертикальних дужках.

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6} \int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \left| \begin{array}{c} t = x^6 \\ dt = 6x^5 dx \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} =$$

$$= \frac{1}{6} ln \left| t + \sqrt{t^2+7} \right| + C = \frac{1}{6} ln \left| x^6 + \sqrt{x^{12}+7} \right| + C.$$

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл: а) $\int 7sin^3 xcosxdx$,

б) $\int ctgxdx$, в) $\int \frac{dx}{sinx}$.

Розв'язання. а) $\int 4sin^3xcosxdx = 4\int (sinx)^3cosxdx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix} \right| = 4\int u^3du = 4\cdot\frac{u^4}{4} + C = (sinx)^4 + C;$$

б) $\int ctgx\,dx = \int \frac{cosx\,dx}{sinx} = \left| \begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C = ln|sinx| + C,$

в) $\int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{sinx\,dx}{sin^2x} = \int \frac{sinx\,dx}{1-cos^2x} = \left| \begin{matrix} u = cosx \\ -du = sinxdx \end{matrix} \right| = \int \frac{-du}{1-u^2} =$

$$= \frac{1}{2}ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}ln\left|\frac{cosx-1}{cosx+1}\right| + C.$$

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1 = t^2 \\ x = t^2-1 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{t+1}dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 2ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C.$$

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{matrix} e^x + 1 = t^2 \\ e^xdx = 2tdt \\ dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

1.6. Метод інтегрування частинами

Як вже відзначалося раніше, цей метод, як і метод підстановки, який був щойно розібраний, належить до числа основних методів інтегрування.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовні функції від x, то має місце формула

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

яка називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що грунтується на застосуванні цієї формули, методом інтегрування частинами.

Вкажемо деякі види інтегралів, для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

1. $\int P(x)e^{ax}dx$, де $P(x)$- многочлен, $u = P(x),\ dv = e^{ax}dx.$
2. $\int P(x)cosbxdx,\ \ u = P(x),\ dv = cosbxdx.$
3. $\int P(x)sinbxdx,\ \ u = P(x),\ dv = sinbxdx.$
4. $\int P(x)lnxdx,\ \ u = lnx,\ \ dv = P(x)dx.$
5. $\int P(x)\log_a x\,dx,\ u = \log_a x,\ dv = P(x)dx.$
6. $\int P(x)arctgxdx,\ u = arctgx,\ dv = P(x)dx.$
7. $\int P(x)arcctgxdx,\ u = arcctgx,\ dv = P(x)dx.$
8. $\int P(x)arcsinxdx,\ u = arcsinx,\ dv = P(x)dx.$
9. $\int P(x)arcccosxdx,\ u = arccosx,\ dv = P(x)dx.$
10. $\int e^{ax}cosbxdx$
11. $\int e^{ax}sinbxdx$

$\Big\}$ за u вибирають або показникову функцію, або тригонометричну і двічі інтегрують частинами. Потім розв'язують лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу.

Визначемо також, що за допомогою методу інтегрування частинами можна отримати так звані рекурентні формули, які дають змогу повернутися до інтегралів того самого виду, але з іншими коефіцієнтами.

Приклад 11. Знайти невизначений інтеграл $\int (x-3)e^{2x}dx.$

Розв'язання.

$$\int (x-3)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x-3, & du = dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = (x-3)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{x-3}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Приклад 12. Знайти невизначений інтеграл $\int x^2 sin3xdx.$

Розв'язання.

$$\int x^2 sin3xdx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sin3xdx, & v = \int sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right) 2xdx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3xdx.$$

До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3xdx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos3xdx, & v = \int cos3xdx = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3xdx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$\int x^2 sin3xdx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C.$$

Приклад 13. Знайти невизначений інтеграл $\int x^3 lnxdx$.

Розв'язання.

$$\int x^3 lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, & v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4} lnx - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

Приклад 14. Знайти невизначений інтеграл $\int x \cdot arctgxdx$.

Розв'язання.

$$\int x \cdot arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx\right) =$$

Отриманий інтеграл – це інтеграл від раціонального дробу, який має степінь чисельника яка дорівнює степені знаменника, тому необхідно виділити цілу частину.

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

1.7. Інтегрування раціональних функцій

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - алгербаїчні многочлени ступеня n та m з дійсними коефіцієнтами, які не мають спільних коренів, причому $Q_m(x) \neq 0$.

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто якщо $n < m$ і неправильним раціональним дробом в протилежному випадку, тобто якщо $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n \geq m)$ можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де $T(x)$ - ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$ - правильний раціональний дріб.

Як інтегрується ціла раціональна функція відомо. Тепер розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$.

Правила інтегрування раціонального дробу

Покажемо, як інтегруються елементарні раціональні дроби (їх називають найпростішими) наступних трьох типів:

перший: $\frac{A}{x-a}$;

другий: $\frac{A}{(x-a)^k}$, де k – ціле число, $k > 1$;

третій: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де $b^2 - 4ac < 0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

У всіх трьох випадках вважаємо, що *A, B, a, b, c* – дійсні числа.

Інтеграли від перших двох найпростіших дробів обчислюємо безпосередньо:

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = A ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\, dx = A\, \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \text{ де } k \neq 1.$$

Інтеграл від елементарного дробу третього типу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\, dx$ розглянемо далі на прикладах.

Приклад 15. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{4x^2+4x+10}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де $A = 0$, $B = 1$, $b^2 - 4ac = -146 < 0$. Виділивши повний квадрат $(a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2)$ із квадратного тричлена $4x^2 + 4x + 10 =$

$$= \left| \begin{array}{c} a^2 = 4x^2, a = 2x \\ 2ab = 4x,\ \ b = \dfrac{4x}{2a} = \dfrac{4x}{4x} = 1 \end{array} \right| =$$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 1 + 10 = (2x+1)^2 + 9$, одержимо табличний інтеграл (9).

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+9} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{2x+1}{3} + C = \frac{1}{6} arctg \frac{2x+1}{3} + C.$$

Приклад 16. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{3x-4}{4x^2-3x+1} dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де $A = 3$, $B = -4$, $b^2 - 4ac = -7 < 0$.

Спочатку виділимо $8x-3$, похідну знаменника, у чисельнику дробу. Для цього чисельник $3x-4$ подамо у вигляді

$$3x-4=\frac{3}{8}\left(8x-3+3-\frac{32}{3}\right)=\frac{3}{8}(8x-3)-\frac{23}{24}, \qquad \text{тоді}$$

$$\int\frac{3x-4}{4x^2-3x+1}dx=\int\frac{\frac{3}{8}(8x-3)-\frac{23}{24}}{4x^2-3x+1}dx=\frac{3}{8}\int\frac{8x-3}{4x^2-3x+1}dx-$$

$$-\frac{23}{24}\int\frac{dx}{4x^2-3x+1}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-$$

$$-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{7}{64}}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\cdot\frac{1}{2\frac{\sqrt{7}}{8}}ln\left|\frac{x-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{7}}{8}}{x-\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{7}}{8}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{24\sqrt{7}}ln\left|\frac{8x-3-\sqrt{7}}{8x-3+\sqrt{7}}\right|+C.$$

Приклад 17. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx$.

Розв'язання. За схемою, розглянутою у попередньому прикладі маємо,

$$\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x-6}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-6}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-$$

$$-\frac{3}{10}ln\left|\frac{2x+1-5}{2x+1+5}\right|=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-\frac{3}{10}ln\left|\frac{2x-4}{2x+6}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-\frac{3}{10}ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C=\frac{1}{2}ln|(x-2)(x+3)|-$$

$$-\frac{3}{10}ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C=\frac{1}{2}ln|x-2|+\frac{1}{2}ln|x+3|-\frac{3}{10}ln|x-2|+\frac{3}{10}ln|x+3|+C$$

$$=ln|x-2|\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)+ln|x+3|\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}ln|x-2|+\frac{4}{5}ln|x+3|+C.$$

Тепер розглянемо метод інтегрування інших типів раціональних дробів, а саме **метод невідомих коефіцієнтів**. За допомогою цього метода навчимося інтегрувати раціональні дроби трьох типів (класифікація проводиться за коренями знаменника):

І тип. Корені знаменника дійсні і різні.

Приклад 18. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{r|l} -\,x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \underline{x^5-4x^3\qquad\quad} & \overline{x^2+x+4} \text{ (ціла частина)} \\ -\,x^4+4x^3-8 & \\ \underline{4x^3-16x\qquad} & \\ -\,4x^3-4x^2-8 & \\ \underline{4x^3-16x\qquad} & \\ 4x^2+16x-8 \text{ (залишок).} & \end{array}$$

Далі подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x},\qquad \text{тоді}$$

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені: $x=0, x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів першого типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Приведемо дроби до спільного знаменника, прирівнюємо чисельники:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Коефіцієнти A, B і C знайдемо способом підстановки в тотожність частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

Звідки $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{4}$, $C=-\frac{3}{4}$. Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}$$, а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2ln|x|+5ln|x-2|-3ln|x+2|+C.$$

II тип. Корені знаменника дійсні, але серед них є кратні.

Приклад 19. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$.

Розв'язання. Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що многочлен

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=$$

$$=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x = 0$ і $x = 3$ є простими, а $x = 1$ – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2 - 2x + 3 = A(x-3)(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-3) + Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом (підстановкою коренів знаменника в отриману тотожність та порівняння коефіцієнтів, які знаходяться біля однакового степеню змінної)

$$\begin{array}{r|l} x = 0 & 3 = -3A, \\ x = 3 & 6 = 12B, \\ x = 1 & 2 = -2C, \\ x^3 & 0 = A + B + D. \end{array}$$

Звідси: $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = -1, D = \frac{1}{2}$, отже,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1},$$

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2} ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} ln|x-1| + C\ .$$

Ш тип. Серед коренів знаменника є комплексні.

Приклад 20. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$.

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що $x^2 - 2x + 10 = 0$, $D = 4 - 40 = -36 < 0$, маємо

$$\frac{4x - 10}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C:

$$4x-10=A(x^2-2x+10)+(Bx+C)(x+2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{c|c} x=-2 & -18=18A, \\ x^2 & 0=A+B, \\ x^0 & -10=10A+2C, \end{array}$$

звідки: $A=-1, B=1, C=0,$ отже,

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}=-\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x^2-2x+10}.$$

Маємо,

$$\int\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx=\int\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x^2-2x+10}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-2x+10}dx=-ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{2x-2+2}{x^2-2x+10}dx=$$

$$=-ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx+\int\frac{dx}{x^2-2x+10}=$$

$$=-ln|x|+\frac{1}{2}ln|x^2-2x+10|+\int\frac{dx}{(x-1)^2+9}=$$

$$=-ln|x|+\frac{1}{2}ln|x^2-2x+10|+\frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3}+C.$$

1.8. Інтегрування ірраціональних функцій

1. **Інтеграли виду** $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx$, де $R-$раціональна функція, m_i і n_i-натуральні числа $(i=1,2,\dots,p)$. Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x=t^k$, де $k-$найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i=1,2,\dots,p)$;

2. **Інтеграли виду** $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx$, де $R-$раціональна функція, m_i і n_i-натуральні числа $(i=1,2,\dots,p)$ і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

$(a, b, c, d -$ сталі дійсні числа). Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де $k -$ найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

Приклад 21. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого виду від ірраціональної функції. Тут $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, тому $k = 12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Тобто

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \\ dx = 12 \cdot t^{11}dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12 \cdot t^{11}dt = 12 \int \frac{t^{17}}{t^3(t^5-1)} dt =$$

$$12 \int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1} = I$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Вилучаємо цілу частину і остачу діленням многочленів за допомогою кута:

$$\begin{array}{r|l} -\ t^{14} & t^5 - 1 \\ \underline{t^{14} - t^9} & \overline{t^9 + t^4} \\ -\ t^9 & \\ \underline{t^9 - t^4} & \\ t^4 & \end{array}$$

Отже, $$I = 12 \int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \int \frac{5t^4 dt}{t^5 - 1} \right) =$$

$$= \frac{6}{5} \left(t^{10} + 2t^5 + \frac{2}{5} ln|t^5 - 1| \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5} \left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + \frac{2}{5} ln \left| \sqrt[12]{x^5} - 1 \right| \right) + C.$$

Приклад 22. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}-\sqrt{5x+1}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл другого виду від ірраціональної функції. Тут: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, тому $k = 6$. Зробимо підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}-\sqrt{5x+1}} = \left| \begin{array}{c} 5x+1 = t^6 \\ x = \frac{1}{5}(t^6-1) \\ dx = \frac{6}{5}t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{6}{5}t^5 dt}{t^4-t^3} = \frac{6}{5}\int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = I$$

Скоротивши дріб і поділивши чисельник на знаменник, отримаємо

$$I = \frac{6}{5}\int \frac{t^2 dt}{t-1} = \frac{6}{5}\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{6}{5}\left(\frac{t^2}{2}+t+ln|t-1|\right)+C.$$

Оскільки $t = \sqrt[6]{5x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}-\sqrt{5x+1}} = \frac{6}{5}\left(\frac{\sqrt[3]{5x+1}}{2}+\sqrt[6]{5x+1}+ln\left|\sqrt[6]{5x+1}-1\right|\right)+C.$$

1.9. Тригонометричні підстановки

Інтеграли виду

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

зводяться до інтегралів від раціональної відносно $sinx$ і $cosx$ функції за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

1. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = a \cdot sint$ (або $x = a \cdot cost$).

2. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = a \cdot tgt$ (або $x = a \cdot ctgt$).

3. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = \frac{a}{cost}$ $\left(\text{або } x = \frac{a}{sint}\right)$.

Приклад 23. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл першого типу, тому:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 4sint \\ dx = 4costdt \\ t = acrsin\frac{x}{4} \end{matrix} \right| = \int \frac{16sin^2t \cdot 4costdt}{\sqrt{16-16sin^2t}} = \int \frac{64sin^2tcostdt}{4\sqrt{1-sin^2t}} =$$

$$= 16\int \frac{sin^2tcostdt}{\sqrt{cos^2x}} = 16\int \frac{sin^2tcostdt}{cost} = 16\int sin^2tdt = 8\int (1-cos2t)dt =$$

$$= 8t - 4sin2t + C.$$

Враховуючи, що

$$sin2t = 2sint \cdot cost = 2sint \cdot \sqrt{1-sin^2t} = 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{16}} = \frac{x}{8}\sqrt{16-x^2},$$

остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = 8acrsin\frac{x}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C.$$

Приклад 24. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл другого типу, тому:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \left| \begin{matrix} x = 3tgt \\ dx = \frac{3dt}{cos^2t} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{3dt}{cos^2t}}{\sqrt{(9+9tg^2t)^3}} = \int \frac{\frac{dt}{cos^2t}}{\sqrt{\left(1+\frac{sin^2t}{cos^2t}\right)^3}} =$$

$$= \int \frac{dt}{cos^2t\sqrt{\left(\frac{cos^2t+sin^2t}{cos^2t}\right)^3}} = \int \frac{cos^3tdt}{cos^2t} = \int costdt = sint + C.$$

Оскільки $sint = tgt \cdot cost = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$, то остаточно отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + \text{C}.$$

1.10. Інтегрування тригонометричних функцій

I. Інтеграли виду $\int sin^m x \cdot cos^n x dx$.

1) Якщо m і n - цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад $m = 2k + 1$, то

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k+1} x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k} x \cdot sinx \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int (sin^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx = \int (1 - cos^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinx dx \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p + 1 > 0$, то треба застосувати підстановку $t = sinx$.

2) Якщо обидва показники m і n - парні невід'ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x).$$

3) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них від'ємний, то потрібно виконати заміну $tgx = t$ або $ctgx = t$. Тоді: $x = arctgt$ ($x = arcctgt$), $dx = \frac{dt}{t^2+1}$ $\left(dx = -\frac{dt}{t^2+1}\right)$.

II. Інтеграли виду $\int sinax \cdot cosbx dx$, $\int cosax \cdot cosbx dx$, $\int sinax \cdot sinbx dx$.

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a + b)\, x + \sin(a - b)\, x),$$
$$cosax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\cos(a + b)\, x + \cos(a - b)\, x),$$
$$sinax \cdot sinbx = \frac{1}{2}(\cos(a - b)\, x - \cos(a + b)\, x).$$

III. Інтеграли виду $\int R(sinx, cosx) dx$, де $R -$ раціональна функція від $sinx$ і $cosx$. За допомогою так званої універсальної тригонометричної

підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ $(-\pi < x < \pi)$ інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \ x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ зручніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t$.

Слід також визначити, що в силу своєї універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто приводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $cosx = t$.

2) Якщо виконується рівність

$$R(sinx, -cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $sinx = t$.

3) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, -cosx) \equiv R(sinx, cosx),$$

то застосовуємо підстановку $tgx = t$, при цьому,

$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad x = arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад 25. Знайти невизначений інтеграл $\int cos^4x \cdot sin^5xdx$.

Розв'язання. Тут $m = 5, n = 4$. Враховуючи, що m непарне, виконаємо перетворення:

$$\int cos^4x \cdot sin^5xdx = \int cos^4x \cdot sin^4x \cdot sinxdx = \int cos^4x \cdot (sin^2x)^2 \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (1-cos^2x)^2 \cdot sinxdx = \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix} \right| = -\int t^4(1-t^2)^2\, dt =$$

$$= -\int t^4(1-2t^2+t^4)dt = \int (2t^6 - t^4 - t^8)dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

Приклад 26. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$.

Розв'язання. Тут $m = 2, n = -4 < 0$ і парне, тому

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ sin^2x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3x}{3} + C.$$

Приклад 27. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx$.

Розв'язання. Тут $m = -\frac{4}{3}, n = 3 > 0$ і непарне, тому

$$\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx = \int \frac{cos^2x}{\sqrt[3]{sin^4x}} \cdot cosxdx = \int \frac{1-sin^2x}{\sqrt[3]{sin^2x}} \cdot cosxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^{2/3}} \cdot dt = \int t^{-2/3}\,dt - \int t^{4/3}\,dt = 3t^{1/3} - \frac{3t^{7/3}}{7} + C =$$

$$= 3t^{1/3}\left(1 - \frac{t^2}{7}\right) + C = 3sin^{1/3}x\left(1 - \frac{sin^2x}{7}\right) + C.$$

Приклад 28. Знайти невизначений інтеграл $\int sin^4x \cdot cos^2xdx$.

Розв'язання. В нашому прикладі $m = 4, n = 2$ обидва додатні і парні, тобто маємо

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot sin^2x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot (sinx \cdot cosx)^2dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - cos2x) \cdot \frac{1}{4}sin^2 2xdx = \frac{1}{8}\int sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int cos2x \cdot sin^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - cos4x)\,dx - \frac{1}{16}\int sin^2 2x \cdot d(sin2x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{1}{16} \cdot \frac{sin^3 2x}{3} + C = \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{sin^3 2x}{48} + C.$$

Приклад 29. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{sinxsin2x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2 x \cdot cosx}$.

Якщо в виразі $\frac{1}{2sin^2 x \cdot cosx}$ замінити $cosx$ на $-cosx$, то дріб змінить знак на протилежний, тому тут треба застосувати підстановку $sinx = t$.

$$\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2 x \cdot cosx} = \left| \begin{matrix} t = sinx, & x = arcsint \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & cosx = \sqrt{1-t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2t} - \frac{1}{4} ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{1}{2sinx} - \frac{1}{4} ln \left| \frac{sinx-1}{sinx+1} \right| + C.$$

Приклад 30. Знайти невизначений інтеграл $\int sin4x \cdot cos3xdx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу $sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x + \sin a{-}bx$, одержимо

$$\int sin4x \cdot cos3xdx = \frac{1}{2} \int (sin7x + sinx)\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{cos7x}{7} - \frac{1}{2} \cdot cosx + C =$$

$$= -\frac{cos7x}{14} - \frac{cosx}{2} + C.$$

РОЗДІЛ 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ $(a < b)$ вісі Ox дана неперервна функція $f(x)$. Відрізок $[a, b]$ розіб'ємо на n частин, довжини яких можуть буми довільними. Кожний такий відрізок будемо називати частковим. Абсциси точок розбиття позначимо через

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Довжину часткового відрізка, рівну різниці $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,2, \dots, n)$, позначимо через Δx_k:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \ .$$

На кожному частковому відрізку оберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через θ_k $(k = 1,2, \dots, n)$, обчислимо $f(\theta_k)$ – значення заданої функції $f(x)$ в цій точці. Знайдемо добуток числа $f(\theta_k)$ на довжину Δx_k відрізка, на якому взято точку θ_k, тобто $f(\theta_k)\Delta x_k$. Складемо суму таких добутків:

$$f(\theta_1)\Delta x_1 + f(\theta_2)\Delta x_2 + \dots + f(\theta_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\Delta x_k.$$

Така сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. За означенням, границя інтегральної суми, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на часткові, ні від вибору на них точок θ_k, називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$

$$\lim_{\substack{max\Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Число a називають нижньою межею інтегрування, число b – верхньою межею інтегрування.

2.2. Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ - будь-яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула має назву формули Ньютона-Лейбніца. Вона є основною формулою інтегрального числення. Для зручності її записують у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2.3. Властивості визначеного інтеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

5. Якщо $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[a, b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x\epsilon[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ - інтегровні функції на відрізку $[a, b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x\epsilon[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$ і $a < c < b$, то ця функція інтегровна і на відрізках $[a, c]$ і $[c, b]$, причому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4}$.

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4} = \int\limits_{-1}^{1} (10+2x)^{-4}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10+2x)^{-3}}{-3}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(10+2x)^3}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{(10+2)^3}-\frac{1}{(10-2)^3}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{8-27}{13824} = \frac{19}{82944}.$$

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$.

Розв'язання. Спростимо підінтегральний вираз за формулами скороченого множення:

$$\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 \frac{(\sqrt{y}+1)(\sqrt{y}-1)}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 (\sqrt{y}-1)dy =$$

$$= \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}-y\right)\Bigg|_4^9 = \frac{2\cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3}-9-\frac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3}+4 = 18-9-\frac{16}{3}+4 = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

Розв'язання. Доповнимо підкореневий вираз до повного квадрату:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = arcsin\frac{x-2}{3}\Big|_2^5 =$$

$$= arcsin\frac{5-3}{3} - arcsin\frac{2-2}{3} = arcsin1 - arcsin0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2.4. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $x=\varphi(t)-$ функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha,\beta]$, причому $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b$ для $\alpha\le t\le\beta$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Цю формулу називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Із поданого випливає, що функція $x = \varphi(t)$ на відрізку $[a, b]$ повинна бути монотонною або іншими словами всі значення функції $\varphi(t)$ повинні знаходитися на відрізку $[a, b]$.

Зауважимо, що заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності і обов'язкового виконання усіх перерахованих умов, накладених на функцію $x = \varphi(t)$.

Відзначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності повертатися до початкової змінної, досить лише знайти межі інтегрування для нової змінної. Для цього до рівності $x = \varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню межу a і верхню межу b інтегрування і розв'язуємо рівняння $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β межами для нової змінної інтегрування. Якщо кожне з рівнянь $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$ задовольняє не одно, а декілька значень t, то за α і β можна прийняти будь-яке з них. Однак вільність вибору обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ не виходили із відрізка $[a, b]$, на якому визначена и неперервна підінтегральна функція $f(x)$.

Приклад 4. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}} = \left| \begin{array}{c} t = 1 + lnx, dt = \dfrac{dx}{x} \\ t_{\text{в}} = 1 + lne^3 = 1 + 3 = 4 \\ t_{\text{н}} = 1 + ln1 = 1 + 0 = 1 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 =$$

$$= 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 2(2 - 1) = 2.$$

Приклад 5. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \left| \begin{array}{c} x^2 - 1 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ xdx = tdt \\ 1 - 1 = t^2, t_{\text{н}} = 0 \\ 4 - 1 = t^2, t_{\text{в}} = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \cdot xdx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2+1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = (t - arctgt)|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} - arctg\sqrt{3} + arctg0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$.

Розв'язання. Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2}, & x = 2arctgt \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_н = tg0 = 0, & t_в = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2.5. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежемося розв'язанням кількох прикладів.

Приклад 7. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cosxdx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,cosxdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} = (x\,sinx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot sin\frac{\pi}{2} - 0 + cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2} - cos0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Приклад 8. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{lnxdx}{x^5}$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{lnxdx}{x^5} = \begin{vmatrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^5}, & v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{vmatrix} = \left(-\frac{lnx}{4x^4}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right) \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{ln2}{64} + \frac{1}{4} \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Big|_1^2 = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{16} = \frac{15 - 2ln2}{256}.$$

2.6. Невласні інтеграли

Невласними інтегралами називають інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування (інтеграли з нескінченними межами інтегрування) і інтеграли від необмежених функцій (інтеграли від функцій, які мають нескінченний розрив).

2.6.1. Невласні інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a, +\infty)$ і інтегровна на відрізку $[a, b]$ при всякому $b > a$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує при всякому $b \geq a$ і, отже, він є деякою функцією від b, визначеною на проміжку $(a, +\infty)$, тобто

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо функція $I(b)$ при $b \to +\infty$ має скінченну границю A, то цю границю називають невласним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $(a, +\infty)$ і позначають як:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

При цьому вважають, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається (до числа A).

Якщо ж функція $I(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не має скінченної границі, то в такому разі вважають, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Аналогічно визначається невласний інтеграл вигляду $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, b)$ і інтегровна на відрізку $[a, b]$ при всякому $a < b$, то за означенням

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ називають збіжним, якщо існує скінченна границя, що стоїть у правій частині рівності і розбіжним, якщо такої скінченної границі не існує.

Нарешті, якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, +\infty)$, то за означенням,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx,$$

де $c-$ будь-яке стале число, причому невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають збіжним, якщо ябігаються обидва невласних інтеграли, які стоять у правій частині рівності . Якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають розбіжним.

Приклад 9. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{xln^4x}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{xln^4x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_e^b \frac{dx}{xln^4x} = \left| \begin{array}{c} t = lnx \\ dt = \frac{dx}{x} \\ t_н = 1, t_в = lnb \end{array} \right| \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{3t^3}\Big|_1^{lnb} \right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{3ln^3b} + \frac{1}{3ln^31} \right) = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Отже, за означеняням, даний інтеграл збігається.

Приклад 10. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2}\Big|_a^b \right) = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} arctg \frac{b+1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} arctg \frac{a+1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg(+\infty) - \frac{1}{2} arctg(-\infty) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, за означенням, цей інтеграл також збігається.

Приклад 11. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^b \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)} = \left| \begin{array}{c} t = \ln(x+3), dt = \frac{dx}{x+3} \\ t_в = \ln(b+3) \\ t_н = ln5 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{ln5}^{\ln(b+3)} \frac{dt}{t} = \lim_{b\to+\infty} lnt\Big|_{ln5}^{\ln(b+3)} = \lim_{b\to+\infty} (\ln(\ln(b+3)) - lnln5) =$$

$$= \infty - ln5 = \infty.$$

Отже, за означенням, даний інтеграл розбігається.

2.6.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій

Якщо функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі точки c відрізка $[a, b]$ і неперервна при $a \leq x < c$ і $c < x \leq b$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,$$

де $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$ змінюються незалежно одне від одного. У випадку $c = b$ або $c = a$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \text{або} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

Якщо границі, які стоять у правих частинах рівностей вище наведених рівностей, існують і скінченні, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають збіжним.

Якщо ж границі не існують або дорівнюють нескінченності, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Підкреслимо, що невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ виражений першою рівністю, називають збіжним лише в тому випадку, коли обидві границі правої частини існують и скінченні.

Якщо ж принаймні одна з цих границь не існує або дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Зауважимо, що позначення невласного інтеграла нічим не відрізняється від позначення визначеного інтеграла. Тому, щоб розрізнити, яким буде інтеграл $\int_a^b f(x)dx$: визначеним чи невласним, треба перевірити, чи буде функція $f(x)$ інтегровною на відрізку $[a, b]$.

Якщо $f(x)$ необмежена на проміжку $[a,b)$ або на проміжку $(a,b]$, або в будь-якому околі точки c відрізка $[a, b]$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде невласним.

Відзначимо також, що коли функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі точки c відрізка $[a,b]$ й існує неперервна на $[a,b]$ функція $F(x)$ така, що $F'(x) = f(x)$ при $x \neq c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Приклад 12. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не визначена в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$, причому при $x_1 \to -1$ і $x_2 \to 1$ функція $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ необмежено зростає. Таким чином, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції. За означенням,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-1+\varepsilon_1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{0}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} arcsinx|_{-1+\varepsilon_1}^{0} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} arcsinx|_{0}^{1-\varepsilon_2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (arcsin0 - \arcsin(-1+\varepsilon_1)) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} (arcsin(1-\varepsilon_2) - arcsin0) =$$

$$= arcsin1 + arcsin1 = 2arcsin1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Приклад 13. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність $\int_{1}^{2} \frac{dx}{xlnx}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{xlnx}$ не визначена в точці $x = 1$, яка є нижньою межею інтегрування, причому при $x \to 1$ функція $f(x) = \frac{1}{xlnx}$ необмежено зростає. Тому, за означенням,

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{xlnx} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{xlnx} = \lim_{\varepsilon \to +0} lnlnx|_{1+\varepsilon}^{2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \big(lnln2 - lnln(1+\varepsilon)\big) =$$

$$= lnln2 - ln0 = \infty.$$

Таким чином, даний інтеграл розбігається.

РОЗДІЛ 3. ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

3.1. Обчислення площі плоскої фігури

1) Випадок прямокутних координат

Нагадаємо, що плоска фігура, обмежена прямими $y = 0, x = a, x = b$ і графіком неперервної і невід'мної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ (рис. 1), називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі *Ox,* обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

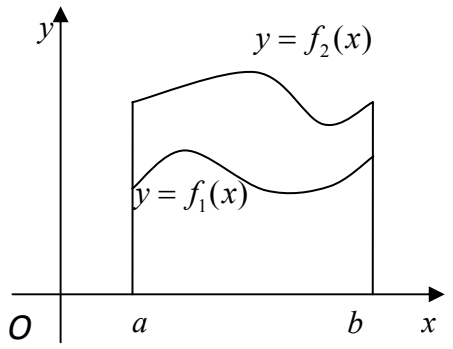


Рис.1

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, причому на відрізку $[a; b]$ $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рис.1), то її площу визначають за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y = x^2$ і $y = 4$.

Розв'язання. Фігура має вигляд , зображений на (Рис.2), де $y = x^2 -$ парабола, а $y = 4 -$ пряма лінія:

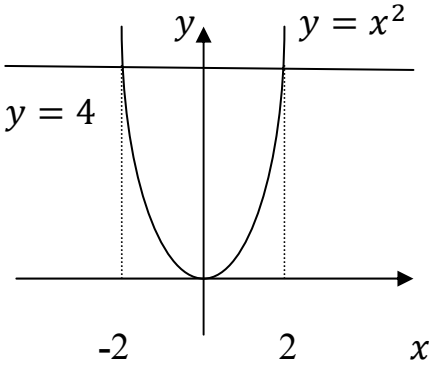


Рис. 2

Знайдемо її площу:

$$S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ (од}^2\text{)}$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$.

Розв'язання. Рівняння $y^2 = 2x + 1$ визначає параболу, а рівняння $x - y - 1 = 0$ – пряму лінію (рис. 3).

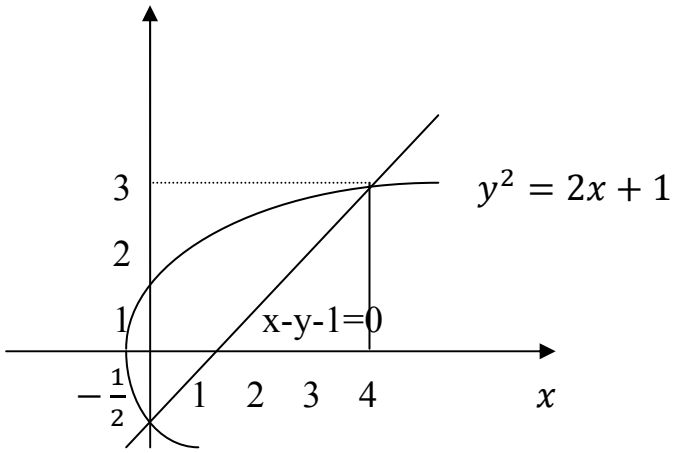


Рис. 3

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

Знайдемо точки перетину прямої і параболи: $A(0; -1)$ і $B(4; 3)$.

Обчислимо площу фігури, скориставшись формулою:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\, dy$$

де $x_2 = y + 1$ - лінія, що обмежує фігуру справа, $x_1 = \frac{y^2-1}{2}$ - лінія, що обмежує фігуру зліва і $-1 \le y \le 3$, одержимо:

$$S = \int_{-1}^{3} (y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2})\, dx = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{16}{3} \text{ (од}^2\text{)}.$$

2) Випадок параметричного задання функції

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t\epsilon[\alpha; \beta]$$

(де $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$) і ці параметричні рівняння визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Отже,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Приклад 3. Обчислити площу першої арки циклоїди:

$$\begin{cases} x = 3(t - sint), \\ y = 3(1 - cost). \end{cases}$$

Розв'язання. При $t\epsilon[0; 2\pi]$ визначається траєкторія руху точки першої арки циклоїди, отже:

$$S = \int_{0}^{2\pi} 9\,(1 - cost)(1 - cost)dt = 9\int_{0}^{2\pi} (1 - 2cost + cos^2 t)\,dt =$$

$$= 9\left(\frac{3}{2}t - 2sint + \frac{1}{4}sin2t\right)\Big|_{0}^{2\pi} = 27\pi \ \ (\text{од}^2).$$

3) Випадок полярної системи координат

Визначимо площу криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $r = r(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ (рис.4).

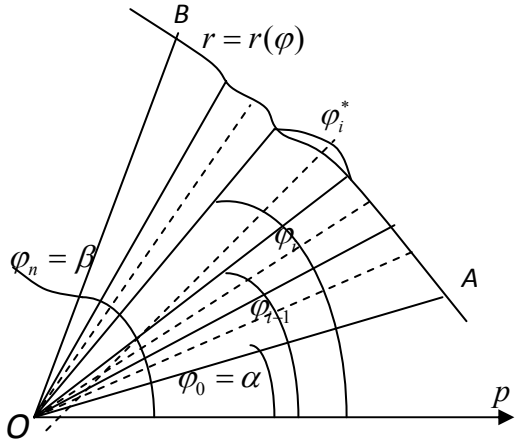


Рис.4

Розіб'ємо криволінійній сектор *OAB* радіус – векторами $\varphi = \alpha = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi = \varphi_n$ на n частин довільним чином. Площу сектора ΔS_i $(i = 1,2, \dots, n)$, що відповідає проміжку кутів $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, визначимо як площу сектора круга з радіусом $r(\varphi^*)$, де $\varphi^*\epsilon[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, тобто

$\Delta S_i = \frac{1}{2}r^2(\varphi^*)\Delta\varphi_i \ \ (\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1})$

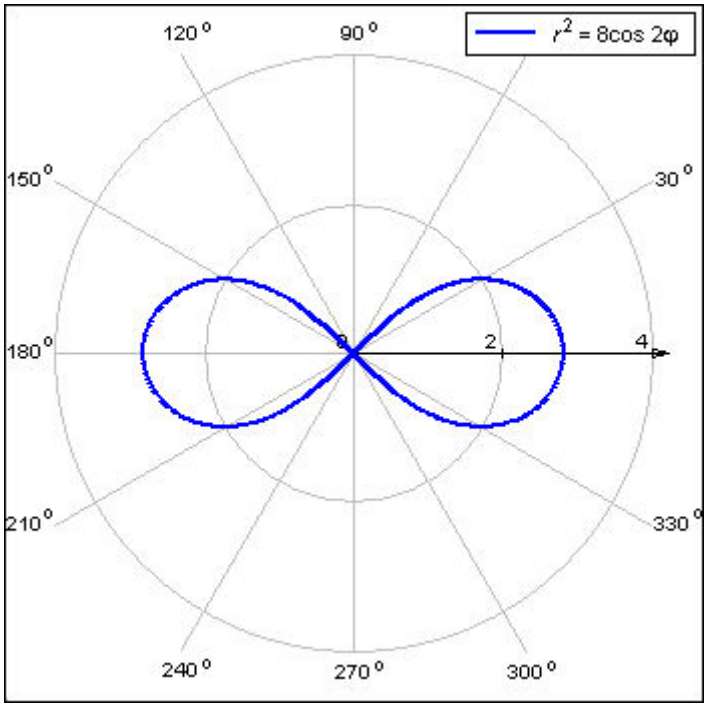
Отже, формула площі криволінійного сектора має вигляд

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі $r = 2\sqrt{2cos2\varphi}$.

Розв'язання. Якщо полярний кут змінюється від 0 до $\pi/4$, то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 8cos2\varphi \, d\varphi = 16 \cdot \frac{1}{2} sin2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 8 \text{ (од}^2\text{)}.$$



3.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1) Випадок прямокутних координат

Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива AB, рівняння якої $y = f(x)$, де $a \le x \le b$ (рис.5).

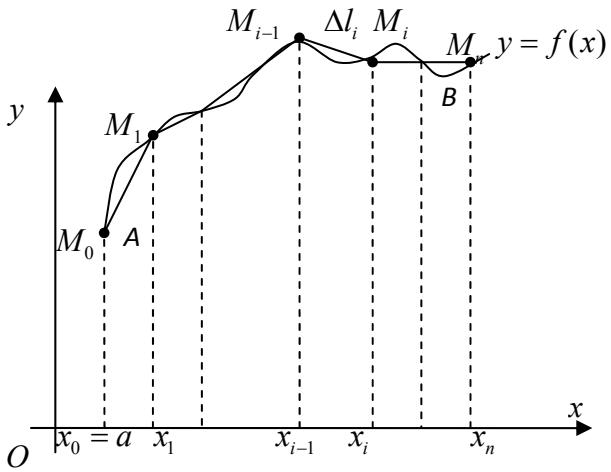


Рис.5

Під довжиною дуги кривої AB розуміють границю, до якої прямує довжина ламаної, що вписана в цю дугу, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай функція $y = f(x)$ та її похідна неперервні на відрізку $[a, b]$. Тоді довжина дуги кривої $y = f(x)$ дорівнює:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Приклад 5. Обчислити довжину дуги кривої $y = ln\left(\frac{5x}{2}\right)$, якщо $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

Розв'язання. Довжина дуги:

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5x} \cdot \frac{5}{2}\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \left| \begin{array}{c} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{cos^2 t} \\ t_{\text{в}} = arctg\sqrt{8} \\ t_{\text{н}} = \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{cost}{cost \cdot sint} \cdot \frac{dt}{cos^2 t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{sintdt}{sin^2 t cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{d(cost)dt}{(cos^2 t - 1)cos^2 t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \left(\frac{1}{cos^2 t - 1} - \frac{1}{cos^2 t}\right) d(cost)dt = \left(\frac{1}{2} ln\left|\frac{cost - 1}{cost + 1}\right| + \frac{1}{cost}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}$$

Звернемо увагу на те, що $cost = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}}$, тобто $\cos(arctg\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(arctg\sqrt{8})}} = \frac{1}{3}$, одержимо:

$$l = \frac{1}{2} ln\left|\frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1}\right| + 3 - \frac{1}{2} ln\left|\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1}\right| - 2 = \frac{1}{2} ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} ln\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{2} ln\frac{3}{2} + 1 \text{ (од.)}.$$

2) Випадок параметричного задання кривої

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \epsilon [\alpha; \beta],$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді довжина l кривої AB визначається за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Приклад 6. Обчислити длину дуги лінії $x = 3cost,\ y = 3sint,\ t\epsilon[0; 2\pi]$.

Розв'язання. $x' = -3sint, y' = 3cost$, отже:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9sin^2t + 9cos^2t}\, dt = 3\int_0^{2\pi} dt = 3t|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

3) Випадок полярної системи координат

Нехай крива AB задана рівнянням $r = r(\varphi)$ у полярних координатах, де функції $r(\varphi)$ і $r'(\varphi)$ неперервні при $\alpha \le \varphi \le \beta$. Отже, формула довжини дуги кривої має вигляд:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги кардіоїди$r = a(cos\varphi + 1),\ \varphi\epsilon[0, 2\pi]$.

Розв'язання. За формулою довжини дуги кривої у полярній системі координат маємо:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(a(cos\varphi + 1)\right)^2 + (a(-sin\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2cos\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2cos^2\frac{\varphi}{2}}\ d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 4a\, sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функція однієї незалежної змінної не охоплює всі залежності, які є в природі. Тому вводять поняття функції декількох змінних.

Більшу увагу будемо приділяти функції двох змінних, бо всі важливі факти теорії функцій декількох змінних можна проілюструвати на прикладі функції двох змінних. Крім того, для функцій двох змінних можна надати наглядну геометричну інтерпретацію.

4.1. Область визначення функції двох змінних

Зміна z називається функцією двох незалежних змінних x і y, визначеною на множині D, якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом ставиться у відповідність одне і тільки одне значення змінної z і позначають: $z = f(x, y)$.

Множина впорядкованих пар чисел (x, y), для яких функція z визначена, називається областю визначення функції.

Приклад 1. Побудувати область визначення функцій:

$$a)\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

$$б)\ z = \ln(x^2 - y^2 - R^2), \qquad R > 0;$$

Розв'язання: а) добування квадратного кореня можливе за умовою: $1 - x2 - y2 \geq 0$; маємо $x2 + y2 \geq 1$ – це замкнений круг, радіус якого дорівнює 1 з центром в початку координат (0,0).

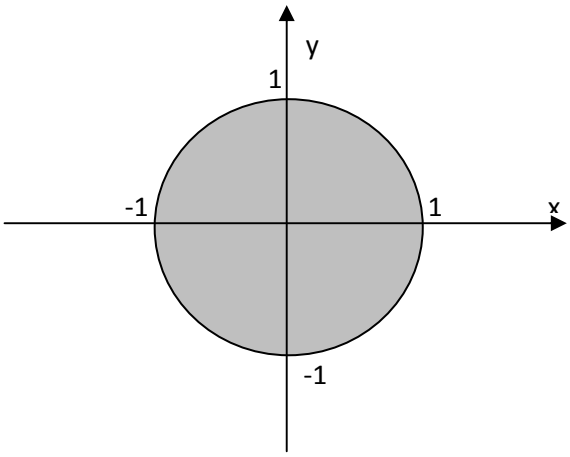


Рис.1

Область визначення функції зображена на рис.1.

б) за властивістю логарифмічної функції маємо:

$$x^2 - y^2 - R^2 > 0, \quad x^2 - y^2 > R^2, \quad \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} > 1.$$

Відомо, що $\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$ – це рівняння гіперболи. У даному випадку піввісі гіперболи: $a = R$, $b = R$. Асимптоти гіперболи $y = \pm x$.

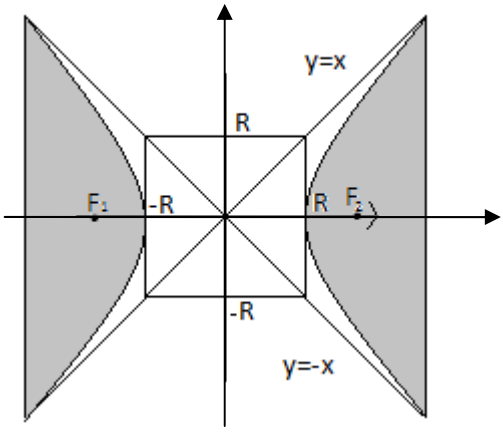


Рис.2

Таким чином область визначення внутрішня частина гіперболи (це заштрихована частина площини на рис.2).

4.2. Похідні і диференціали функції двох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$, визначена і неперервна в деякій області *D*. Вважаємо, що точки з координатами $(x, y), (x + \Delta x, y), (x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, де Δx і Δy – приріст аргументів, теж належать області *D*.

Частинними приростами функції $z = f(x, y)$ по незалежним змінним x і y називають:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) ;$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ називаєть:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) .$$

Частинними похідними функції $z = f(x, y)$ по змінним x і y називають границі відношення частинних приростів $\Delta_x z$ та $\Delta_y z$ до приросту відповідної змінної при умові, що остання прямує до нуля:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}; \; z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Прийнятні ще такі позначення частинних похідних: $z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Частинна похідна є звичайною похідною, припускаючи, що змінюється одна змінна, по якій йде диференціювання, а інша змінна залишається сталою.

Приклад 2. Знайти частинні похідні функцій:

$$\text{а) } z = x^{lgy}, \text{б) } z = 3x^2y + 6y - x^9.$$

Розв'язання: а) при знаходженні частинної похідної по змінній x вважаємо y постійною і навпаки, при знаходженні частинної похідної по змінній y вважаємо x постійною:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = lgy \cdot x^{lgy-1}$; (диференціюємо як степеневу функцію);

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{lgy} \cdot lnx \cdot \frac{1}{x \cdot ln10}$; (диференціюємо як показникову функцію).

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 9x^8$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 6$.

Повний диференціал функції має вигляд:

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні, частинні диференціали та повний диференціал функції:

$$z = cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right).$$

Розв'язання. Частинні похідні знаходимо від складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x(x^3 + y^3) - 3x^2 \cdot (x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2y(x^3 + y^3) - 3y^2(x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2}.$$

Частинні диференціали функції:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dx;$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dy.$$

Повний диференціал функції:

$$dz = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \left(\frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dx + \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dy\right).$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції

$$U(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Розв'язання. Маємо функцію трьох змінних. При диференціюванні по одній змінній дві другі змінні вважаємо сталими величинами. Отже:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}};\ \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{-x}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot 2y=\frac{-xy}{(y^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{-x}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot 2z=\frac{-xz}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Повний диференціал:

$$dz=\frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{x(ydy+zdz)}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Приклад 5. Обчислити значення частинних похідних від даної функції у заданій точці $M_0(2,1,1)$.

$$U\ =\ f(x,y\,,z)=\ arcctg\,\frac{xz}{y^2}.$$

Розв'язання. Тут $U=f(x,y,z)$. Отже:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-1}{1+\frac{x^2z^2}{y^4}}\cdot\frac{z}{y^2}=\frac{-y^4z}{(y^4+x^2z^2)y^2}=\frac{-y^2z}{y^4+x^2z^2};\qquad f'_x(M_0)=\frac{-1}{5}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{-1}{1+\frac{x^2z^2}{y^4}}\cdot\frac{(-xz)}{y^4}\cdot 2y=\frac{2xyz}{y^4+x^2z^2};\qquad f'_y(M_0)=\frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{-1}{1+\frac{x^2z^2}{y^4}}\cdot\frac{x}{y^2}=\frac{-xy^4}{(y^4+x^2z^2)y^2}=\frac{-xy^2}{y^4+x^2z^2};\qquad f'_z(M_0)=\frac{-2}{5}.$$

4.3. Диференціювання складної та неявної функцій

4.3.1. Випадок однієї незалежної змінної

Нехай $z=f(x,y)$ – диференційована функція двох змінних $x,y\in D$, і аргументи x,y є диференційованими функціями деякої змінної t:

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$$

Тоді $z=f\big(x(t),y(t)\big)=\varphi(t)$ – функція однієї змінної.

Похідна дорівнює:

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $z = e^{x^2+y^2}$, якщо $x = acost$; $y = a\sin t$.

Розв'язання. Підставимо в функцію значення x, y:

$$z = e^{a^2cos^2t+a^2sin^2t} = e^{a^2(cos^2t+sin^2t)} = e^{a^2},$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = \left(e^{a^2}\right)'_t = 0.$$

Приклад 7. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^5 + 2xy - y^3$ і, де:

$$x = cos2t;\ \ y = arctg\ t.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка значень x, y в функцію спрощення не дає, тому:

$$\frac{dz}{dx} = 5x^4 + 2y; \quad \frac{dz}{dy} = 2x - 3y^2; \ \frac{\partial x}{\partial t} = -2cos2t; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Маємо:

$$\frac{dz}{dt} = (5x^4 + 2y)\cdot(-2cos2t) + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

Підставимо замість x та y відомі вирази, отримаємо:

$$\frac{dz}{dt} = (5(cos2t)^4 + 2arctg\ t)\cdot(-2cos2t) + (2cos2t - 3(arctg\ t)^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

4.3.2. Диференціал складної функції

Нехай $z = f(x, y)$ - складна функція, де $x = x(U, V), y = y(U, V)$.

Диференціал складної функції можна одержати за формулами:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad \text{де}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U}dU + \frac{\partial x}{\partial V}dV;\ \ dy = \frac{\partial y}{\partial U}dU + \frac{\partial y}{\partial V}dV.$$

В результаті підстановки і перегрупування, одержуємо формулу:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial U}dU + \frac{\partial z}{\partial V}dV.$$

Приклад 8. Знайти диференціал функції

$$z = \frac{x^2}{y}, \text{якщо } x = U - 2V \text{ і } y = 2U + V.$$

Розв'язання. Обчислимо всі частинні похідні та диференціали по відповідним змінним:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2};\ \frac{\partial x}{\partial U} = 1;\ \frac{\partial x}{\partial V} = -2;\ \frac{\partial y}{\partial U} = 2;\ \frac{\partial y}{\partial V} = 1;$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U}dU + \frac{\partial x}{\partial V}dV;\ \ dx = dU - 2dV;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial U}dU + \frac{\partial y}{\partial V}dV;\ \ dy = 2dU + dV.$$

Отже, диференціал даної функції матиме вигляд:

$$dz = \frac{2x}{y}(dU - 2dV) - \frac{x^2}{y^2}(2dU + dV) = \left(\frac{2x}{y} - \frac{2x^2}{y^2}\right)dU -$$

$$-\left(\frac{4x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dV = \frac{x}{y}\left[2\left(1 - \frac{x}{y}\right)dU - \left(4 + \frac{x}{y}\right)dV\right] =$$

Переходимо до змінних U, V:

$$dz = \frac{U - 2V}{2U + V}\left[2\left(1 - \frac{U - 2V}{2U + V}\right)dU - \left(4 + \frac{U - 2V}{2U + V}\right)dV\right] =$$

$$= \frac{U - 2V}{(2U + V)^2}[2(U + 3V)dU - (9U + 2V)dV].$$

4.4. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Досі ми розглядали частинні похідні першого порядку функції $z = f(x, y)$. Їх можна розглядати як нові функції від x, y і вони теж можуть мати частинні похідні, які називаються частинними похідними другого порядку і позначають так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогічно визначають частинні похідні 3-го, 4-го і більш високого порядку порядку.

Частинні похідні другого або більш високого порядку, знайдені за різними змінними називаються мішаними. Такими є, наприклад, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ $f''_{xy}(x, y)$.

Приклад 9. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 8.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2y^2 + 5y^4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12x^2y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Як виявилось

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Це не випадково. За теоремою Шварца, якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні одного порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.

Приклад 10. Довести, що функція $z = ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо перші і другі частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2(x - x_0)}{2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} =$$

$$= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (x-x_0)\cdot 2(x-x_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} =$$

$$= \frac{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \cdot \frac{1\cdot 2(y-y_0)}{2\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} =$$

$$= \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (y-y_0)\cdot 2(y-y_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} = \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2}.$$

Підставимо отримані частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} + \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} = 0;$$

$$\frac{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2 + (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} = 0;$$

$$0 = 0.$$

Що і потрібно було довести.

4.5. Екстремуми функції двох змінних

Поняття локального максимуму, мінімуму − екстремумів функції $z = f(x, y)$ − аналогічні поняттям що до функції однієї змінної.

Нехай $z = f(x, y)$ визначена в області D . Точка $N_0(x_0, y_0) \in D$. Точка $N_0(x_0, y_0)$ називається точкою локального максимуму функції $z = f(x, y)$, якщо існує ε – окіл точки (x_0, y_0), що для любої точки (x, y), яка задовольняє нерівність $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2$ та відмінна від (x_0, y_0), виконується нерівність $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Аналогічно визначається точка локального мінімуму функції, але за тих же умов виконується нерівність $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Відзначимо, що максимум і мінімум мають локальний (місцевий) характер. В області D функція може мати декілька екстремумів, або не мати їх взагалі.

Необхідною умовою існування екстремуму функції є вимога, щоб вона була диференційована в точці (x_0, y_0) і її частинні похідні дорівнювали нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$; $f'_y(x_0, y_0) = 0$, що означає, що дотичні площини в точці (x_0, y_0) до поверхні паралельні площині Oxy . Точки, в яких виконуються вимоги $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ називаються стаціонарними.

Достатньою умовою існування екстремуму функції є вимога, щоб в стаціонарній точці (x_0, y_0) і її ε – околі вона мала неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Нехай $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$; $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$; $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$;

Обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A\,C - B^2$, розглянемо наступні випадки:

1) $\Delta > 0$ – функція $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум:

   а) $A > 0$ – мінімум;

   б) $A < 0$ – максимум.

2) $\Delta < 0$ –функція $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) екстремуму не має.

3) $\Delta = 0$ – в точці (x_0, y_0) може бути, а може і не бути екстремуму. Потрібні додаткові дослідження.

Приклад 11. Знайти екстремум функції $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції: $x \epsilon R$, $y \epsilon R$.

Знаходимо стаціонарні точки (необхідна умова існування екстремуму)

$f'_x = 6xy - 3x^2$; $f'_y = 3x^2 - 4y^3$.

Виконаємо умову: $f'_x = 0$, $f'_y = 0$.

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Звідси одержуємо $M_1(6,3)$, $M_2(0,0)$ – дві стаціонарні точки

2. Достатня умова існування екстремуму:

$f''_{xx} = 6y - 6x$; $f''_{xy} = 6x$; $f''_{yy} = -12y^2$.

Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках: $M_1(6,3)$: $A = f''_{xx} = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 6 = -18$; $B = f''_{xy} = 6 \cdot 6 = 36$;

$C = f''_{yy} = -12 \cdot 9 = -108$.

$\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 20$, $\Delta > 0$; $A < 0 \Rightarrow M_1(6,3)$ – точка максимуму

$z_{max}(6,3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$

Аналогічно в точці $M_2(0,0)$: $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$. Отже $\Delta = 0$.

Проведемо додаткові дослідження:

а) $z(0,0) = 0$.

б) якщо $x=0$, то функція набуває вигляду: $z = -y^4$; $z < 0$, коли $y \in R$; якщо $y=0$, то функція набуває вигляду: $z = -x^3$; $z > 0$, коли $x < 0$ та $z < 0$, коли $x > 0$. Тобто в ε – околі точки (0,0) функція приймає значення різних знаків.

Отже в точці $M_2(0,0)$ екстремуму немає.

4.6. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$. Тоді вона досягає в цій області найбільшого M і найменшого m значень (так званий глобальний екстремум). Ці точки розташовані всередині області, або на її межі.

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$ полягає у наступних діях:

1. Знаходження всіх критичних точок, які належать внутрішній частині області $\overline{D}$ і обчислення значень функції в цих точках;

2. Знаходження всіх критичних точок, які належать межі області $\overline{D}$ і обчислення значень функції в цих точках;

3. Порівняння всіх знайдених значень функції з метою вибору найбільшого та найменшого значень функції.

Приклад 12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ в замкненій області $\overline{D}$: $\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \leq 1$.

Розв'язання. Область визначення функції: $x \epsilon R,\ y \epsilon R$.

1. Досліджуємо функцію на локальний екстремум всередині області $\overline{D}$.

$$\begin{cases} f'_x = -10y^2 + 2x + 10 \\ f'_y = -20xy \end{cases}; \begin{cases} -10y^2 + 2x + 10 = 0 \\ -20xy = 0 \end{cases}.$$

Одержали точки: $M_1(0,1)$, $M_2(0,-1)$, $M_3(-5,0)$, які всі належать області $\overline{D}$. Обчислимо: $z_1(0,1)=1$; $z_2(0,-1)=1$, $z_3(-5,0)=-24$.

2. Досліджуємо функцію на межі області $\overline{D}$:

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} = 1.$$

Межа – це ромб *ABCD* (рис.7).

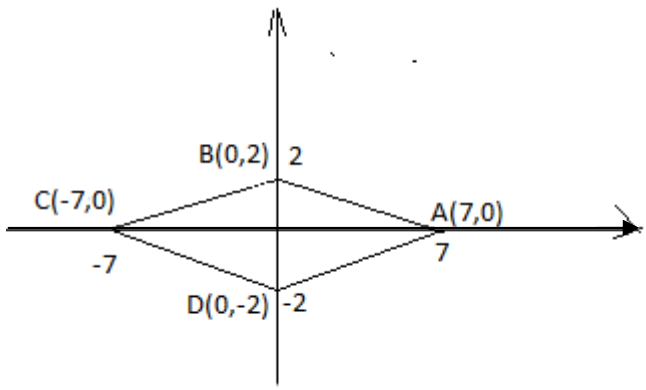


Рис.7.

Обчислимо значення функції у вершинах ромба:

$z_4(A) = -10 \cdot 7 \cdot 0 + 7^2 + 10 \cdot 7 + 1 = 120$;

$z_5(B) = -10 \cdot 0 \cdot 2^2 + 0 + 10 \cdot 2 + 1 = 1$;

$z_6(C) = z(-7,0) = -10 \cdot (-7) \cdot 0 + (-7)^2 - 10 \cdot 7 + 1 = -20$;

$z_7(D) = z(0,-2) = -10 \cdot 0 \cdot (-2)^2 + 0 + 0 + 1 = 1$.

$z(B) = z(D)$,тобто симетрія відносно осі *Ox*. Отже, достатньо дослідити $\Delta\ ABC$: рівняння *AB*

$$\frac{x-7}{0-7} = \frac{y-0}{2-0};\ \frac{x-7}{-7} = \frac{y}{2};\ -7y = 2x - 14;\ \ y = -\frac{2}{7}x + 2, x \in [0,7];$$

Функція: $z = -10x \cdot \left(-\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{87}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30.$$

$$z'_x = 0; \quad -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30 = 0; \quad x_1 = \frac{7}{5} \in [0,7]; \quad y = \frac{8}{5}.$$

$$x_2 = \frac{35}{4} \in [0,7]; \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

$Z_8\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) = -10 \cdot \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + 10 \cdot \frac{7}{5} + 1 = -18{,}88$

Рівняння BC :

$$\frac{x+7}{0+7} = \frac{y-0}{2-0}; \quad \frac{x+7}{7} = \frac{y}{2}; \quad y = \frac{2}{7}x + 2, \quad x\epsilon[-7;0];$$

Функція: $z = -10x \cdot \left(\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{73}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{146}{7}x - 30 = 0; \; -120x^2 + 1022x - 1470 = 0;$$

$$60x^2 - 511x + 735 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{11}{6}; \quad y = \frac{3}{2}; \quad M_4\left(-\frac{11}{6}; \frac{3}{2}\right); \; z_9(M_4) = -25{,}9.$$

$$x_2 = -6{,}65; \quad y_2 = 0{,}1; \quad M_5(-6{,}65; 0{,}1); \; z_{10}(M_5) = -22{,}9.$$

Порівняємо z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 , z_6 , z_7 , z_8 , z_9, z_{10}

Найбільше значення функція приймає в точці $A(7,0)$; $max_{(x,y)\epsilon\bar{D}} z(A) = 120.$

Найменше значення – в точці $M_4\left(-\frac{11}{6}, \frac{3}{2}\right)$; $min_{(x,y)\epsilon\bar{D}} z(M_4) = -25{,}9.$

РОЗДІЛ 5. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Диференційним рівнянням називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

Порядком диференційного рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння. Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференційне рівняння *звичайне*. Загальний вигляд такого рівняння n – го порядку

$$f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1)$$

5.1. Диференційні рівняння першого порядку

Звичайне диференційне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0, \qquad (2)$$

а якщо вдається знайти рішення відносно похідної, то воно має такий вид

$$y' = F(x, y). \qquad (3)$$

Задача полягає у знаходженні невідомої функції, а процес визначення цієї функції називається розв'язанням, або інтегруванням диференційного рівняння.

Розв'язком, або інтегралом диференційного рівняння (3) називається будь-яка диференційована на деякому інтервалі $x \in (a, b)$ функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє цьому рівняння, тобто така, що після підстановки її у рівняння (3) воно перетворюється у тотожність:

$$\varphi'(x) = F[x, \varphi(x)].$$

Загальним розв'язком диференційного рівняння (2) або (3) називаються відношення виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{або } \Phi(x, y) = C, \qquad \text{де } C = const \qquad (4)$$

Частинним розв'язком диференційного рівняння (2) або (3) називається такий розв'язок, який одержуємо з загального розв'язку (4) при деякому значенні довільної сталої C. Довільна стала C визначається з початкових умов. Число довільних сталих повинно відповідати порядку диференційного рівняння.

Задача пошуку розв'язку рівняння (2) або (3), що задовольняє початковим умовам $y = y_0$ при $x = x_0$ називається *задачею Коші.*

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку.

5.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Це найпростіший тип диференційних рівнянь першого порядку, але дуже важливий.

Нехай маємо диференційне рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$, яке після розв'язання його відносно похідної y' набуває виду

$$f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0$$

Згадаємо, що $y' = \frac{dy}{dx}$, тому це рівняння можна записати у вигляді:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0.$$

Якщо $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, а $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, то маємо

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) називається диференційним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Відокремлення змінних виконується шляхом ділення рівняння (5) на добуток $\varphi_1(x)\, f_2(y) \neq 0$. Рівняння (5)приймає вигляд:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \qquad (6)$$

а його загальний інтеграл записується так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Слід розглядати випадок, коли рішення рівняння $\varphi_1(x)f_2(y) = 0$ не належить до загального розв'язку. Ці рішення називаються особливими.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xyy' = 1 - x^2$$

Розв'язок. Представимо y' як $y' = \frac{dy}{dx}$.

Маємо: $xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2$, $xy\frac{dy}{dx} - (1 - x^2) = 0$

Приведемо рівняння до виду (6). Для цього помножимо рівняння на дріб $\frac{dx}{x}$, де $x \neq 0$ та отримаємо

$$ydy - \frac{1-x^2}{x}dx = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл: $\int ydy - \int \frac{1-x^2}{x}dx = C.$

Маємо: $\frac{y^2}{2} - \ln x + \frac{x^2}{2} = C$ або $y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2C -$ загальний розв′язок диференційного рівняння. Зауважимо, що цей розв'язок має сенс, коли $x > 0$.

Приклад 2.Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

Розв'язок. Приведемо рівняння до виду (6). Поділимо його на $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq 0$. Отримаємо:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = C.$$

Після виконання інтегрування загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$arcsinx - \sqrt{1-y^2} = C \text{ або } \sqrt{1-y^2} = arcsinx + C.$$

5.1.2. Однорідні диференційні рівняння першого порядку

Якщо рівняння виду $y' = F(x,y)$ або $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не змінюються при заміні x на kx, y на ky і відповідно dx на kdy, а dy на kdy, y' на y' то вони називаються *однорідними.* Для рішення використовують *підстановку*:

$$y = U \cdot x \qquad (7)$$

де $U(x)$ – нова функція, яка перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціюємо підстановку:

$$y' = U'x + U, \qquad (8)$$

Після того, як нове рівняння буде проінтегроване, необхідно U замінити на $\frac{y}{x}$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Розв'язок. Спочатку зробимо перевірку на однорідність. Зробимо заміну x на kx, y на ky, а $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{kdy}{kdx} = y'$, маємо:

$$kxy' - ky = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2};$$

$$k(xy' - y) = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)};$$

$$k(xy' - y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Після ділення обох частин рівняння на k ми отримаємо початкове рівняння, саме це і вказує, що дане рівняння – однорідне, тому використаємо наведену вище підстановку (7) та її похідну (8) і отримуємо рівняння:

$$x(U'x + U) - Ux = \sqrt{x^2 + x^2U^2};$$

$$x(U'x + U - U) = x\sqrt{1 + U^2},$$

розділимо обидві частини рівняння на $x \neq 0$, маємо: $U'x = \sqrt{1 + U^2}$ - це рівняння з відокремлюваними змінними; оскільки $U' = \frac{dU}{dx}$, то отримаємо рівняння виду:

$$\frac{dU}{dx}x = \sqrt{1 + U^2}; \quad xdU - \sqrt{1 + U^2}dx = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на вираз $x\sqrt{1 + U^2} \neq 0$:

$$\frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримуємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \int \frac{dx}{x} = C, \qquad \ln\left|U + \sqrt{1 + U^2}\right| - \ln x = \ln C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$U + \sqrt{1 + U^2} = Cx.$$

Так, як $U = \frac{y}{x}$, то маємо: $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$. Після тотожних перетворень отримуємо загальний розв'язок: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

Розв'язок. Виконаємо перевірку на однорідність, використовуючи заміни: x на kx, y на ky і відповідно dx на kdy, а dy на kdy. Маємо:

$$(k^{\mathbf{2}}y^2 - 3k^2x^2)kdy + 2kxkykdx = 0,$$

$$k^3(y^2 - 3x^2)dy + 2k^3xydx = 0.$$

Поділимо весь вираз на k^3 і отримаємо початкове рівняння, отже це рівняння однорідне. Для використання підстановки необхідно розділити рівняння на dx, в результаті отримаємо:

$$(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0.$$

Після відповідних підстановок матимемо:

$$(U^2x^2 - 3x^2)(U'x + U) + 2x^2U = 0,$$

$$U'x + U = \frac{-2U}{U^2 - 3}; \quad U'x = \frac{-2U}{U^2 - 3} - U; \quad U'x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3} \ .$$

Заміною $U' = \frac{dU}{dx}$, отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dU}{dx}x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3}; \quad \frac{U^2 - 3}{U - U^3}dU = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{U^2 - 3}{U - U^3}dU - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Виконавши інтегрування, маємо загальне рішення:

$$-3\ln U + \ln(1 + U) - \ln(1 - U) = \ln C + \ln x.$$

Використовуючи властивості логарифмічних функцій отримаємо:

$$\frac{U + 1}{U^3(1 - U)} = Cx.$$

Виконаємо зворотну підстановку $U = \frac{y}{x}$ і рішення буде мати вигляд:

$$\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y^3}{x^3}\left(1-\frac{y}{x}\right)} = Cx \quad \text{або} \quad \frac{(y+x)x^2}{y^3(x-y)} = C.$$

5.1.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференційне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{9}$$

де $p(x)$ і $g(x)$ - задані функції, шукана функція y і її похідна y' входять в рівняння в першій степені.

Функції $p(x)$ і $g(x)$ вважаються неперервними в проміжку (a, b), в якому шукається рішення рівняння (9).

Загальний розв'язок лінійного рівняння (9) шукають підстановкою за методом Бернуллі, яка має вигляд добутку двох функцій:

$$y = U \cdot V, \tag{10}$$

де $U(x), V(x) -$ нові невідомі функції, причому $U(x) \neq 0$ довільна, $V(x) -$ підбирають такою, щоб виконувалась умова $V' + p(x)V = 0$.

Похідна від добутку двох функцій:

$$y' = U'V + UV' \tag{11}$$

Алгоритм розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо на прикладах.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язок. Використовуючи підстановку (10) та її похідну (11), рівняння запишемо у вигляді:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

За умовою знаходження функції $V(x)$, другий доданок останнього рівняння дорівнює нулю, тобто:

$$V' + 2xV = 0\,,$$

а перший доданок буде дорівнювати функції $g(x)$, яка стоїть праворуч, тобто:

$$U'V = xe^{-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' + 2xV = 0$;

$$V' = -2xV;\quad \frac{dV}{dx} = -2xV;\quad \frac{dV}{V} = -2xdx;\quad \ln V = -x^2;\quad V = e^{-x^2}.$$

Вважаємо, що довільна стала тут дорівнює нулю.

Тепер розв'яжемо друге рівняння, але спочатку підставимо в нього знайдену функцію $V = e^{-x^2}$:

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2};\quad U' = x;\quad \frac{dU}{dx} = x;\quad dU = xdx;\quad U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Знайдені функції записуємо у вигляді добутку і отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші для рівняння:

$$y' - ytgx = secx;\quad y|_{x=0} = 0.$$

Розв'язок. Використаємо розглянутий вище (приклад 6) алгоритм і в результаті отримаємо:

$$U'V + UV' - UVtgx = \frac{1}{cosx},\qquad U'V + U(V' - Vtgx) = \frac{1}{cosx}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' - Vtgx = 0$; $V' = V\,tgx$; $\frac{dV}{dx} = V\,tgx$;

$$\frac{dV}{V} = tgx\,dx;\quad lnV = -ln|cosx|;\quad lnV = ln\frac{1}{cosx}\ ;\quad V = \frac{1}{cosx}.$$

Тепер розв'яжемо рівняння $U'V = \frac{1}{cosx}$, підставимо в нього знайдене V:

$$U'\frac{1}{cosx} = \frac{1}{cosx};\quad U' = 1;\quad dU = dx;\quad U = x + C.$$

Знайдені функції дають загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = (x + C)\frac{1}{cosx}.$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, використовуючи задані початкові умови, тобто розв'яжемо задачу Коші:

$(0 + C)\frac{1}{cos0} = 0;\ \ C = 0;$ тому частинне рішення буде мати вигляд:

$$y = \frac{x}{cosx}.$$

Лінійними рівняння можуть бути, як відносно y, так і відносно x.

5.2. Диференціальні рівняння вищих порядків

5.2.1. Рівняння, які містять тільки похідну порядку n і незалежну змінну, тобто рівняння виду $F(x, y^{(n)}) = 0$

Таке рівняння необхідно перетворити в рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ і потім n разів проінтегрувати.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{1 + x^2}y'' - 1 = 0.$$

Розв'язок.

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Перше інтегрування:

$$y' = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsinx + C_1.$$

Друге інтегрування:

$$y = \int (arcsinx + C_1)dx = \int arcsinxdx + C_1 \int dx =$$

$$= \begin{vmatrix} U = arcsinx, & dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dV = dx, & V = x \end{vmatrix} = xarcsinx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + C_1 x =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = 1 - x^2 \\ dU = -2xdx \\ xdx = \dfrac{-dU}{2} \end{matrix} \right| = xarcsinx + \frac{1}{2}\int \frac{dU}{\sqrt{U}} + C_1 x.$$

Отже, $y = xarcsinx + \sqrt{1 - x^2} + C_1 x + C_2 -$ загальний розв'язок данного диференційного рівняння.

5.2.2. Рівняння другого порядку, які не містять шукану функцію

Рівняння другого порядку, які не містять шукану функцію, мають вид:

$$f(x, y', y'') = 0. \qquad (15)$$

Необхідно понизити порядок диференційного рівняння за допомогою підстановки

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x). \qquad (16)$$

Ця підстановка приводить до рівняння першого порядку

$$f(x, p, p') = 0.$$

Методи розв'язання таких рівнянь були розглянуті в попередньому розділі.

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$$

Розв'язок. Використаємо (16) і тотожність $p' = \frac{dp}{dx}$.

Рівняння матиме вид: $(x^2 + 1)\frac{dp}{dx} = 2xp$. Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{x^2 + 1}.$$

Після інтегрування отримаємо: $lnp = \ln(x^2 + 1) + lnC_1$,

$$lnp = \ln\big(C_1(x^2 + 1)\big); \;\; p = C_1(x^2 + 1).$$

Використаємо початкову умову $p(0) = y'(0) = 3$ для визначення C_1. $(0 + 1)C_1 = 3$, тому $p = 3x^2 + 3$, або $y' = 3x^2 + 3$. Отже,

$$y = \int (3x^2 + 3)\, dx = x^3 + 3x + C_2.$$

Визначимо C_2: $y(0) = 1$, $C_2 = 1$, тому розв'язком задачі Коші буде

$y = x^3 + 3x + 1 -$ частинний розв'язок данного диференційного рівняння.

5.2.3. Диференційні рівняння, які не містять незалежну змінну

Рівняння другого порядку, які не містять незалежну змінну, має такий вид:

$$f(y, y', y'') = 0. \qquad (17)$$

Пониження порядку рівняння виконуємо за допомогою підстановки: $y' = p(y)$, де $p(y) -$ нова шукана функція. В цьому випадку за незалежну змінну приймаємо не x, а y. Тому друга похідна повинна бути перетворена так, щоб незалежною змінною була y:

$$y'' = [p(y)]'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p'p. \qquad (18)$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'^2 + 2yy'' = 0.$$

Розв'язок. Застосуємо розглянуту підстановку, і початкове рівняння отримає вид: $p^2 + 2ypp' = 0$, або

$$p\left(p + 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Маємо два рівняння: $p = 0$ і $p + 2y\frac{dp}{dy} = 0$. Перше рівняння дає частинний розв'язок $y' = 0$, тобто $y = C$. Друге рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2y\frac{dp}{dy} = -p; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}; \quad lnp = -\frac{1}{2}lny + lnC_1; \quad lnp = ln\frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Розв'яжемо отримане рівняння, пам'ятаючи що $y' = p$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; \quad \sqrt{y}dy = C_1dx; \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2; \quad y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(C_1x + C_2);$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{4}(C_1x + C_2)^2} -$$ загальний розв'язок данного диференційного рівняння.

5.2.4. Лінійні однорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференційні рівняння (ЛОДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0, \qquad (19)$$

де a_1 і a_2 сталі.

Частинний розв'язок рівняння (19) будемо шукати у вигляді

$$y = e^{kx},$$

де k - деяке число. Диференціюючи цю функцію двічі і підставляючи отримані значення в рівняння (19) отримаємо:

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0, \text{або}$$

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (e^{kx} \neq 0). \qquad (20)$$

Рівняння (20) називається *характеристичним рівнянням* ДР (для його запису достатньо в рівнянні (19) замінити y'', y' і y відповідно на k^2, k і 1).

При розв'язанні характеристичного рівняння (20) можливі три випадки:

Випадок 1. Корені k_1 і k_2 дійсні та різні: $D > 0, k_1 \neq k_2$.

В цьому випадку загальне рішення рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}.$$

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 5k + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 24 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ k_1 = -2;\ k_2 = -3.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

Випадок 2. Корені k_1 і k_2 рівняння (20) дійсні та рівні: $D = 0$,

$$k_1 = k_2 = k.$$

В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = e^{kx}(C_1 x + C_2)}.$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - 8y' + 16 = 0$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = e^{4x}(C_1 x + C_2)$.

Випадок 3. Корені k_1 і k_2 рівняння (20) комплексні, нагадаємо, що $i^2 = -1$: $D < 0$, $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. У цьому випадку загальне рішення рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}.$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i; \quad \alpha = 2, \qquad \beta = 3.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

5.2.5. Лінійні неоднорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (21)$$

називається лінійним неоднорідним диференційним рівнянням (ЛНДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = y_o + \overline{y}, \qquad (22)$$

де y_o – загальний розв'язок однорідного рівняння, а $\overline{y}$ – частинне рішення нелінійного ДР, яке залежить від виду правої частини $f(x)$.

Розглянемо декілька типів правих частин $f(x)$:

Випадок 1. $f(x) = P_n(x)$,

де $P_n(x)$- многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq 0$ *і* $k_2 \neq 0$, тоді частинний розв'язок нелінійного ДР має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n},$$

$\overline{y}$ многочлен степені n, а $B_0, B_1, \dots, B_n$ - невідомі, які знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 9 = 0;$$

$$D = 36 - 36 = 0;$$

$$k_{1,2} = 3.$$

Маємо загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = e^{3x}(C_1 x + C_2)$.

Права частина: $f(x) = 2x^2 - x + 3$ –многочлен другої степені, тому

$$\overline{y} = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Знайдемо $\overline{y}'$ та $\overline{y}''$ і підставимо в дане рівняння отримані значення відповідно замість y'', y' та y .

$$\overline{y}' = 2B_0x + B_1;$$
$$\overline{y}'' = 2B_0.$$
$$2B_0 - 6(2B_0x + B_1) + 9(B_0x^2 + B_1x + B_2) = 2x^2 - x + 3;$$
$$2B_0 - 12B_1x - 6B_2 + 9B_0x^2 + 9B_1x + 9B_2 = 2x^2 - x + 3.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти B_0, B_1 і B_2 за методом невизначених коефіцієнтів. Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$x^2 |\ 9B_0 = 2, \qquad B_0 = \frac{2}{9}.$

$$x\ |\ -12B_0 + 9B_1 = -1;\ \ -12 \cdot \frac{2}{9} + 9B_1 = -1;\ \ 9B_1 = -1 + \frac{8}{3};\ \ 9B_1 = \frac{5}{3};$$
$$B_1 = \frac{5}{27}.$$

$x^0 |\ 2B_0 - 6B_1 + 9B_2 = 3;\ \ 2 \cdot \frac{2}{9} - 6 \cdot \frac{5}{27} + 9B_2 = 3;\ \ \frac{4}{9} - \frac{10}{9} + 9B_2 = 3;$

$$9B_2 = 3 + \frac{2}{3};\ \ 9B_2 = \frac{11}{3};\ \ B_2 = \frac{11}{27}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Розв'язок неоднорідного ДР: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{3x}(C_1x + C_2) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = 0$ *і* $k_2 \neq 0$, тоді

$$\boxed{\overline{y} = (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x},$$

де $B_0, B_1, \ldots, B_n$ - невідомі коефіцієнти.

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$2k^2 + 5k = 0;$$
$$k(2k + 5) = 0;$$
$$k_1 = 0, \qquad k_2 = -\frac{5}{2}.$$

Отже, маємо загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}}$.

Права частина $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ – степінь многочлена друга

і $k_1 = 0, k_2 \neq 0,$ тому

$$\overline{y} = (B_0x^2 + B_1x + B_2) \cdot x = B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x;$$
$$\overline{y}' = 3B_0x^2 + 2B_1x + B_2;$$
$$\overline{y}'' = 6B_0x + 2B_1.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$2(6B_0x + 2B_1) + 5(3B_0x^2 + 2B_1x + B_2) = 5x^2 - 2x - 1;$$
$$12B_0x + 4B_1 + 15B_0x^2 + 10B_1x + 5B_2 = 5x^2 - 2x - 1.$$

Знайдемо коефіцієнти B_0, B_1 і B_2, як у попередньому прикладі:

$x^2 |\ 15B_0 = 5;\ \ B_0 = \frac{1}{3}.$

$x\ \ |\ 12B_0 + 10B_1 = -2;\ \ 12 \cdot \frac{1}{3} + 10B_1 = -2;\ \ 10B_1 = -6;\ \ B_1 = -\frac{3}{5}.$

$x^0 |\ \ 4B_1 + 5B_2 = -1;\ \ 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 5B_2 = -1;\ \ 5B_2 = -1 + \frac{12}{5};\ \ 5B_2 = \frac{7}{5};$

$$B_2 = \frac{7}{25}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Рішення диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Випадок 2. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x),$

де $e^{\alpha x}$ - показникова функція, а $P^n(x)$- многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq \alpha$ *і* $k_2 \neq \alpha,$ тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n)}.$$

Приклад 15. Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3);\quad y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k = 0;$$
$$k(k - 2) = 0;$$
$$k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 2.$$

Загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 + C_2e^{2x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$. Тут $\alpha = 1$, $k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$ тому: $\overline{y} = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2)$;

$$\overline{y}' = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2) + e^x(2B_0x + B_1) =$$
$$= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1);$$
$$\overline{y}'' = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) + e^x(2B_0x + B_1 + 2B_0) =$$
$$= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0 - 2(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) =$$
$$= x^2 + x - 3;$$
$$B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0 - 2B_0x^2 - 2B_1x - 2B_2 - 4B_0x - 2B_1 =$$
$$= x^2 + x - 3;$$
$$-B_0x^2 - B_1x - B_2 + 2B_0 = x^2 + x - 3.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$x^2 | -B_0 = 1;\ B_0 = -1.$

$x\ | -B_1 = 1;\ B_1 = -1$

$x^0 | -B_2 + 2B_0 = -3;\quad -B_2 - 2 = -3;\quad -B_2 = -1;\ B_2 = 1.$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = e^x(-x^2 - x + 1).$$

Розв'язок диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Знайдемо частинний розв'язок даного ДР, підстановкою початкових умов в y та y' :

$$y' = 2C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$
$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ 2C_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}.$$

Задача Коші для даного диференційного рівняння має вид:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ *і* $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x}.$$

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3 - 4x).$$

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 3k + 2 = 0;$

$$D = 9 - 8 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2};\ k_1 = 2;\ k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^{2x}(3 - 4x)$. Тут $\alpha = 2,\ k_1 = \alpha,$ $k_2 \neq \alpha$.

Тому $\overline{y}$ має вид: $\overline{y} = e^{2x}(B_0 x + B_1) \cdot x = e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x)$;

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x) + e^{2x}(2B_0 x + B_1) = e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) + e^{2x}(4B_0 x + 2B_1 + 2B_0) =$$
$$= e^{2x}(4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 3(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) +$$
$$+2(B_0 x^2 + B_1 x) = 3 - 4x;$$
$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 6B_0 x^2 - 6B_1 x - 6B_0 x - 3B_1 +$$
$$+2B_0 x^2 + 2B_1 x = 3 - 4x;$$
$$2B_0 x + 2B_0 + B_1 = 3 - 4x.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$x \mid 2B_0 = -4;\ B_0 = -2.$

$x^0 \mid 2B_0 + B_1 = 3;\ -4 + B_1 = 3;\ B_1 = 7.$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Розв'язок рівняння має вид: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

в) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ *і* $k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x^2}.$$

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок ДР: $y'' - 4y' + 4 = 3e^{2x}$.

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 4 = 0;$$
$$D = 16 - 16 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = e^{2x}(C_1 x + C_2)$.

Права частина рівняння: $f(x) = 3e^{2x}$. Тут $\alpha = 2$ і $k_1 = k_2 = \alpha$.

Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = B_0 e^{2x} \cdot x^2 = B_0 x^2 \cdot e^{2x}.$$

Знайдемо першу і другу похідні:

$$\overline{y}' = 2B_0 x e^{2x} + 2B_0 x^2 e^{2x} = e^{2x}(2B_0 x + 2B_0 x^2);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0 x + 2B_0 x^2) + e^{2x}(2B_0 + 4B_0 x) = e^{2x}(4B_0 x^2 + 8B_0 x + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0 x^2 + 8B_0 x + 2B_0 - 4(2B_0 x + 2B_0 x^2) + 4B_0 x^2 = 3;$$

$$4B_0 x^2 + 8B_0 x + 2B_0 - 8B_0 x - 8B_0 x^2 + 4B_0 x^2 = 3;$$

$$2B_0 = 3; \quad B_0 = \frac{3}{2}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{3}{2} x^2 \cdot e^{2x}.$$

Розв'язок неоднорідного диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{2x}(C_1 x + C_2) + \frac{3}{2} x^2 e^{2x}.$$

Випадок 3. $f(x) = \text{a}\cos\beta x + b\sin\beta x,$

де a і b - сталі.

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = A\cos\beta x + B\sin\beta x},$$

де A і B - невідомі коефіцієнти.

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + 4y' + 13 = 5\sin 2x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Права частина рівняння: $f(x) = 5\sin 2x, \quad k_{1,2} \neq \pm 2i.$

$$\overline{y} = A\cos 2x + B\sin 2x;$$

$$\overline{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$

$$\overline{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$

$$+13(A\cos 2x + B\sin 2x) = 5\sin 2x\,;$$
$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$
$$+13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 5\sin 2x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти. Для цього порівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ та $\cos 2x$:

$$\sin 2x|\ -4B - 8A + 13B = 5;$$
$$\cos 2x| - 4A + 8B + 13A = 0.$$

Отримали систему рівнянь, яку розв'яжемо за правилом Крамера: $\begin{cases} -8A + 9B = 5 \\ 9A + 8B = 0 \end{cases}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -64 - 81 = -145,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{145} = -\frac{8}{29},\ \ B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

б) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x}.$$

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + y = \cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 1 = 0;$$
$$k^2 = -1;$$
$$k_{1,2} = \pm i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1\sin x + C_2\cos x$.

Права частина рівняння: $f(x) = \cos x$, $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = (A\sin x + B\cos x)\cdot x;$$

$$\overline{y}' = (A\cos x - B\sin x)\cdot x + A\sin x + B\cos x;$$
$$\overline{y}'' = (-A\sin x - B\cos x)\cdot x + A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ у початкове рівняння:

$$-(A\sin x + B\cos x)\cdot x + 2A\cos x - 2B\sin x + (A\sin x + B\cos x)\cdot x = \\ = \cos x;$$
$$2A\cos x - 2B\sin x = \cos x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x|\ 2A = 1, \qquad A = \frac{1}{2}.$$
$$\sin x|\ 2B = 0, \qquad B = 0.$$

Отже, знайшли частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = \frac{1}{2}x\sin x.$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є $y = y_o + \overline{y}$,:

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}x\sin x.$$

Випадок 4. $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$,

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}.$$

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДУ

$$y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x}\cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 7k + 6 = 0;$$
$$D = 49 - 24 = 25;$$
$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2};\ k_1 = 6;\ k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1e^{6x} + C_2e^{x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = 2e^{2x}\cos x$, $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{2x}(A\sin x + B\cos x);$$
$$\overline{y}' = 2e^{2x}(A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(A\cos x - B\sin x) = \\ = e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x);$$
$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x) + \\ + e^{2x}(2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x - B\cos x) =$$

$$= e^{2x}(4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x +$$
$$+ 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x + 2A\,cos\,x -$$
$$-2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x - 7(2A\,sin\,x + 2B\,cos\,x + A\,cos\,x - B\,sin\,x)$$
$$+ 6(A\,sin\,x + B\,cos\,x) = cos\,x\,;$$

$$4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x + 2A\,cos\,x -$$
$$-2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x - 14A\,sin\,x - 14B\,cos\,x - 7A\,cos\,x +$$
$$+7B\,sin\,x + 6A\,sin\,x + 6B\,cos\,x = cos\,x\,;$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x|\ 4B + 2A + 2A - B - 14B - 7A + 6B = 1,$$
$$\sin x|\ 4A - 2B - 2B - A - 14A + 7B + 6A = 0,$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} -3A - 5B = 1 \\ -5A + 3B = 0 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 25 = -34;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{34};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5, \qquad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{5}{34}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = e^{2x}\left(-\frac{3}{34}sin\,x - \frac{5}{34}\cos x\right) = -e^{2x}\left(\frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34}cos\,x\right).$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є $y = y_o + \overline{y}$,:

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{x} - e^{2x}\left(\frac{3}{34}sin\,x + \frac{5}{34}cos\,x\right).$$

Контрольні роботи

Варіант №1

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (x+3)cos2xdx$; б) $\int \frac{2x-5}{x^2+6x+8}dx$; в) $\int \frac{2x^2+3}{x^3+3x^2}dx$; г) $\int sin^3\frac{x}{2}dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_0^{\pi/2} cos^2x\, sinx\, dx$; б) $\int_0^1 xe^{-3x}dx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$; б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y = 4x - x^2, y = 2x$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\rho = 1 - cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а) $y' + 2xy = 2x^3y^3$; б) $(y'')^2 = y'$; в) $y'' - 7y' + 6y = sinx$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = 2x^3 - 3x^2y^2 + 6y - 1$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $z = e^{xy}$ рівнянню

$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -z^2$.

Варіант №2

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int x^2 3^{x/2}dx$; б) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1-6x-3x^2}}dx$; в) $\int \frac{x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$; г) $\int \frac{cos^3x}{\sqrt{sin^3x}}dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_0^{\sqrt[6]{3}} \frac{3x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$; б) $\int_0^2 xln(x+1)dx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{lnx}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y = x^3, y = 8, x = 0$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\begin{cases} x = 9(t - sint) \\ y = 9(1 - cost) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а)$xy' + 1 = e^y$; б) $xy' + y = y^2 lnx$; в) $y'' + 2y' + 5y = -2cos2x$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = -3x^2 + 2y^2 + 12y - 6x + 1$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $U = arctg\frac{x}{y}$ рівнянню

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Варіант №3

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \ln(x^2 + x)\, dx$; б) $\int \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$; в) $\int \frac{3x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx$;

г) $\int sin^3 3x cos^2 3x dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_1^e \frac{1 - lnx}{x}\, dx$; б) $\int_{-1/6}^{1/6} arcsin3x dx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_2^\infty \frac{xdx}{x^2 + 1}$; б) $\int\limits_0^1 x\, ln\, x$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y^2 = 3x, y \ge 0, x = {}^{16}/_{3}$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $y = \sqrt{2x - x^2}, 0 \le x \le 2$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а)$y' + 2xy = xe^{-x^2}$; б) $(y')^2 + 2yy'' = 0$; в) $2y'' + 5y' = 29cosx$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = \frac{9}{4}x^4 - xy + y^3 - 3$

8. Перевірити чи задовольняє функція $z = \frac{y^4}{x^2} + y^2$ рівнянню

$(x^3+3xy^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2y^3\frac{\partial z}{\partial y}=2y^2z.$

Варіант №4

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int x^3 ln\frac{x}{2}dx$; б) $\int \frac{x+5}{\sqrt{5-3x-x^2}}dx$; в) $\int \frac{3x^2+7x+10}{x^3+6x^2+10x}dx$; г) $\int sin^2\frac{x}{4}dx.$

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[3]{(4+5x^4)^4}}\,dx$; б) $\int_0^\pi (2x-1)cosxdx.$

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\,ln\,x}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^2+3, y=12$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\rho={}^1/_{cos\varphi}, 0\le\varphi\le{}^\pi/_4$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а)$y''-2ctgx\cdot y'=sin^3x$; б) $y^2+x^2y'=xyy'$; в) $y''-4y'+4y=2sin2x.$

7. Дослідити функцію на екстремум: $z=3xy-6x^2-6y^2+15x-1.$

8. Перевірити чи задовольняє функція $z=\frac{y^2}{3x}+arcsin(xy)$ рівнянню

$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0.$

Варіант №5

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int ln^2 2xdx$; б) $\int \frac{8-3x-x^2}{x^3-4x^2+4x}dx$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-1}$; г) $\int sin^3 2xcos^5 2xdx.$

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; б) $\int_{-1}^{-1/2} xe^{-2x}dx.$

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} x\, e^{-x^2} dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\, ln^2 x}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $x = 4 - y^2, x = 0$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\begin{cases} x = 8sint + 6cost \\ y = 6sint - 8cost \end{cases}$; $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. .

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а)$xy' = yln\frac{y}{x}$; б) $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$; в) $y'' + y = -8cos3x$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 1$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $z = ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$ рівнянню

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$.

Варіант №6

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1-x}{cos^2 3x} dx$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$; в) $\int \frac{2x^2 - 10x + 6}{x^3 + 5x^2 - 6x} dx$; г) $\int cos^4 \frac{x}{2} dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\, dx$; б) $\int_0^{\pi} (2x-1)cos3x dx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x\, ln\, x}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y^2 = 7x + 1, x = 2, y = 0$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $y = ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le {}^1/_2$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а)$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $2yy'' + 3(y')^2 = 4y^2$; в) $y'' + 6y' + 13 = e^x(3 - 4x)$

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $z = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ рівнянню $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x+y)}{x-y}$.

Варіант №7

1. Знайти невизначені інтеграли:

   а) $\int \frac{x+1}{3} sin2xdx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-4}$; в) $\int \frac{4x^2+2x+12}{x^3-27} dx$; г) $\int sin^5 2xdx$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

   а) $\int_3^9 \frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; б) $\int_1^2 (x-2)\log_2 x\, dx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

   а) $\int\limits_2^\infty \frac{xdx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y = {}^4/_x, y + x = 5$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\rho = 1 + cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le {}^\pi/_4$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а) $yy'' = (y')^2$; б) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$; в) $4y'' + 4y' + y = xe^{\frac{-x}{2}}$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^3 + 3xy^2 - 12y + 1$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $z = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$ рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -z$.

Варіант №8

1. Знайти невизначені інтеграли:

   а) $\int xln(x^2+1)dx$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}-4}$; в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+2x^2+3x}$; г) $\int \frac{cos^3 xdx}{\sqrt[3]{sin^5 x}}$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

   а) $\int_0^{1/2} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; б) $\int_{-2}^0 (x+2)3^{-x}dx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x+1)\,ln(x+1)}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y = x^2 = 8x, y = 2x$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$. .

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а)$xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 = y'$; б) $y' = 10^{x+y}$; в) $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^2 + 2xy + 8y - 4x$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $z = (x^2 + y^2)tg\frac{x}{y}$ рівнянню

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

Варіант №9

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int xln^2 4xdx$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$; в) $\int \frac{x^2+x+12}{x^3-27}dx$; г) $\int cos^4 2xdx$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_3^9 \frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; б) $\int_0^{\pi} (2x-1)cos3xdx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

$\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y = x^2, y + x = 4$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\rho = 1 + cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le {}^{\pi}/_{2}$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а)$xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$; б)$y'' - 2ctgx \cdot y' = sin^3 x$; в) $y'' + 2y' + 5y = 2cos2x$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^3 + 3xy^2 - 12y + 1$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $z = (x^2 + y^2)tg\frac{x}{y}$ рівнянню

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

Варіант №10

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int x^3 ln\frac{x}{2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-1}$; в) $\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}dx$; г) $\int sin^4 3x cos^3 3x dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int_0^{1/2} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\int_1^2 (x-2)e^{3x}dx$.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_0^{\infty} x^2\, e^{-x^3}dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\, ln^2 x}$.

4. Побудувати область, обмежену лініями: $y=4x-x^2, y=2x$. Знайти її площу.

5. Обчислити довжину лінії: $\begin{cases} x=8sint+6cost \\ y=6sint-8cost \end{cases}$; $0\le t\le \frac{\pi}{4}$.

6. Знайти рішення диференційного рівняння:

а) $y^2+x^2y'=xyy'$; б) $2yy''+3(y')^2=4y^2$; в) $4y''+4y'+y=(3x+1)e^{-x}$.

7. Дослідити функцію на екстремум: $z=x^3+3xy^2-12y+1$.

8. Перевірити чи задовольняє функція $z=ln\frac{x}{y}+x^3-y^3$ рівнянню

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3(x^3-y^3).$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2 - 810с, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. Р. Курант Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., 1970г., 672с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления , т.1: Учебное пособие для втузов. -13-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985г. -432с.
4. Бермант А.Ф., Арамович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. Учебник для высших технических учебных заведений. – 6-е узд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г.-736с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975г. – 416с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки з вищої математики

для самостійної роботи студентів 1 курсу заочної форми навчання

Частина 2

Укладачі: **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

ПАХОМОВА Євгенія Серафимівна

ШУЛЬГІНА Світлана Сергіївна

Відповідальний за випуск: *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *Л.П. Вороновська*

План 2013, поз. 115М

Підп. до друку 16.04.2013 Формат 60х84 /16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,1
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.