

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**



**Я. Б. Форкун, М. Л. Глєбова**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ**  
**З ДИСЦИПЛІНИ**  
**«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»**  
**(ЧАСТИНА ІІІ)**

*(для студентів усіх форм навчання напряму підготовки  
6.050701 – "Електротехніка та електротехнології")*

**Харків**  
**ХНУМГ**  
**2013**

**Форкун Я. Б.** Текст лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» (частина 3) (для студентів усіх форм навчання напряму підготовки 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології») / Я. Б. Форкун , М. Л. Глєбова; Харк. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х.: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. – 115 с.

Автори:           к.т.н., доц., Я. Б. Форкун,  
                      к.т.н., доц., М. Л. Глєбова

Рецензент: д.т.н., проф., А. Г. Сосков

Рекомендовано кафедрою теоретичної та загальної електротехніки,  
протокол № 4 від 22.11. 2012 р.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	8
1.1 Основні визначення.....	8
1.2 Рівняння однорідної двохпровідної лінії.....	9
1.3 Усталений режим в однорідній лінії.....	10
1.4 Характеристики однорідної лінії.....	14
1.5 Рівняння однорідної лінії в гіперболічній формі.....	16
1.6 Вхідний опір лінії.....	17
1.7 Коефіцієнт відбиття хвилі.....	18
1.8 Узгоджене навантаження лінії.....	18
1.9 Лінія без спотворень.....	20
1.10 Неробочий хід і коротке замикання лінії з втратами.....	22
1.11 Лінії без втрат.....	23
1.12 Стоячі хвилі.....	24
1.13 Застосування ліній без втрат.....	25
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ.....	27
2.1 Загальні відомості про електромагнітне поле.....	27
2.2 Електричне поле нерухомих зарядів (електростатичне поле). Закон Кулона.....	28
2.3 Напруженість електричного поля.....	30
2.4 Поняття про об'ємний, поверхневий і лінійний заряди.....	31
2.5 Електричне поле об'ємного заряду.....	32
2.6 Електричне поле поверхневого заряду.....	33
2.7 Електричне поле лінійного заряду.....	33
2.8 Лінії вектора напруженості („силові" лінії).....	34
2.9 Потік вектора $\vec{E}$ .....	34
2.10 Дивергенція вектора $\vec{E}$ .....	35
2.11 Диференціальний оператор «набла».....	36
2.12 Теорема Остроградського.....	37
2.13 Теорема Гауса для однорідного середовища.....	37
2.14 Робота сил електричного поля. Потенціал.....	39
2.15 Зв'язок потенціалу з напруженістю поля.....	41
2.16 Рівняння Пуассона і Лапласа.....	42
2.17 Поляризація діелектриків.....	42
2.18 Вектор електричної індукції. Теорема Гауса в диференціальній формі для неоднорідного середовища.....	44

2.19 Теорема Гауса в інтегральній формі для неоднорідного середовища.....	45
2.20 Граничні умови в електростатичному полі.....	45
2.21 Провідник в електричному полі.....	47
2.22 Електрична ємність.....	48
2.23 Теорема про єдино можливий розв'язок рівняння Лапласа. Метод дзеркальних зображень.....	49
2.24 Енергія електричного поля.....	50
РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	53
3.1 Електричний струм у провідному середовищі.....	53
3.2 Густина електричного струму.....	53
3.3 Закони Ома і Джоуля-Ленца в диференціальній формі.....	55
3.4 Закони Кірхгофа.....	56
3.5 Рівняння Лапласа для електричного поля у провідному середовищі.....	58
3.6 Граничні умови.....	58
3.7 Аналогія між електричним полем постійного струму і електростатичним полем.....	59
РОЗДІЛ 4. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	61
4.1 Електричне і магнітне поле як дві сторони єдиного електромагнітного поля.....	61
4.2 Індукція магнітного поля.....	61
4.3 Закон Біо-Савара.....	62
4.4 Магнітний потік і його неперервність.....	63
4.5 Сили магнітного поля, які діють на заряд, що рухається.....	64
4.6 Сили магнітного поля, що діють на провідник зі струмом.....	66
4.7 Ротор векторної величини. Теорема Остроградського-Стокса.....	66
4.8 Вектор-потенціал магнітного поля.....	67
4.9 Намагнічування середовища. Напруженість магнітного поля.....	69
4.10 Закон повного струму в інтегральній формі.....	71
4.11 Загальні відомості про індуктивність і взаємодуктивність.....	73
4.12 Енергія магнітного поля.....	75
4.13 Граничні умови в магнітному полі.....	75
РОЗДІЛ 5. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ.....	78
5.1 Визначення змінного електромагнітного поля.....	78
5.2 Струм зсуву. Рівняння неперервності змінного струму.....	78

5.3 Перше рівняння Максвелла.....	79
5.4 Друге рівняння Максвелла.....	80
5.5 Повна система рівнянь Максвелла.....	81
5.6 Граничні умови в електромагнітному полі.....	82
5.7 Баланс енергії електромагнітного поля. Вектор Пойтинга. Теорема Умова-Пойтинга.....	83
5.8 Електродинамічні потенціали. Рівняння Даламбера.....	85
5.9 Запізнілі потенціали.....	87
5.10 Рівняння Максвелла в комплексній формі запису.....	88
5.11 Теорема Умова-Пойтинга в комплексній формі.....	89
5.12 Рівняння електромагнітного поля в провідному середовищі.....	90
РОЗДІЛ 6. ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ.....	92
6.1 Плоска електромагнітна хвиля.....	92
6.2 Поширення плоскої електромагнітної хвилі в однорідному провідному півпросторі.....	95
6.3 Глибина проникнення і довжина хвилі.....	96
РОЗДІЛ 7. ПОВЕРХНЕВИЙ ЕФЕКТ.....	98
7.1 Явище поверхневого ефекту.....	98
7.2 Змінний магнітний потік у плоскому листі.....	99
7.3 Електричний поверхневий ефект у прямокутній шині.....	102
7.4 Поверхневий ефект у циліндричному провіднику.....	102
7.5 Застосування теореми Умова-Пойтинга для визначення активного і внутрішнього індуктивного опору циліндричного проводу при змінному струмі.....	105
ВИСНОВКИ.....	107
ОСНОВНІ ЛІТЕРНІ ПОЗНАЧЕННЯ.....	111
ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ.....	113
СПИСОК ДЖЕРЕЛ.....	114

## ВСТУП

Електротехнікою називається широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) – дисципліна, яка займається питаннями розрахунку й вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Третя частина курсу ТОЕ присвячена вивченню теорії електромагнітного поля, у якій розглядаються електромагнітні явища у нерухомих ізотропних середовищах, а також методи дослідження і розрахунку електромагнітних полів.

Фізичні явища і процеси, що відбуваються в електромагнітному полі, лежать в основі дії великого числа різних електромагнітних і електронних приладів і пристроїв, таких як електричні машини й апарати, електроенергетичні установки для передачі електричної енергії, електромагнітні й електронні елементи автоматики, радіотехнічні засоби передачі інформації і багато інших.

Розрахунок і конструювання таких пристроїв базується на загальній теорії електромагнітного поля, знання якої необхідно як для інженерно-педагогічних спеціальностей енергетичного й електромеханічного профілю, так і для інженерних спеціальностей.

Перша і друга частини курсу ТОЕ, які присвячені вивченню теорії електричних і магнітних кіл, ґрунтуються на наближеній заміні реального електромагнітного пристрою деякою моделлю, для аналізу якої використовуються такі інтегральні величини, як струм, напруга, ЕРС, що є функціями тільки часу.

Теорія електромагнітного поля, що досліджується у третій частині курсу ТОЕ, є фізично строгою теорією, яка і розглядає електромагнітні процеси як функції просторових координат і часу. Для опису електромагнітних полів використовуються рівняння Максвелла в інтегральній і диференціальній формі, що зв'язують між собою вектора напруженостей електричного і магнітного поля, електричної і магнітної індукції ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ).

Лекції побудовані за принципом переходу від простих питань до складних. Спочатку розглядається теорія електростатичного поля, даються визначення основних величин, що характеризують його, і розглядаються методи розрахунку таких полів.

Далі розглядаються стаціонарне електричне поле в провідному середовищі і магнітне поле постійного струму. Основна частина матеріалу лекцій присвячена вивченню змінних електромагнітних полів. Наводяться основні рівняння електродинаміки і методи розрахунку електромагнітних полів.

Перед вивченням теорії електромагнітного поля слід повторити розділ «Електромагнітні хвилі» з курсу фізики, а також деякі розділи з курсу вищої математики: диференціальні рівняння в звичайних і часткових похідних, векторний аналіз, теорія поля. Необхідно звернути увагу на такі поняття, як градієнт, дивергенція, ротор і операції над ними.

Текст лекцій по курсу ТОЕ (частина 3) призначений для студентів, які навчаються за напрямами 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології».

## Розділ 1. КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 1.1 Основні визначення

**Електричними колами (лініями) з розподіленими параметрами** називають такі кола, у яких струм і напруга безперервно змінюються при переході від однієї точки (перетину) лінії до іншої, сусідньої точки.

Під **магнітними колами (лініями) з розподіленими параметрами** розуміють такі кола, магнітний потік і магнітна напруга, уздовж яких безперервно змінюються при переході від однієї точки лінії до сусідньої.

Коли говорять про лінії з розподіленими параметрами, то звичайно цей термін думкою зв'язують з потужними лініями передачі електричної енергії на великі відстані, з телефонними і телеграфними повітряними і кабельними лініями, з рейковими лініями автоблокування на залізничному транспорті, з антенами в радіотехніці і т.д.

Але і звичайна індуктивна котушка практично являє собою лінію з розподіленими параметрами на частотах порядку декількох мегагерц. Між кожними двома сусідніми витками котушки є ємність. Крім того, між кожним витком і корпусом приладу (землею) є ємність. Якщо по котушці протікає змінний струм, то через ємність між витками і ємність на землю також потече струм. Струм через ємності прямо пропорційний частоті змінного струму. При низькій частоті струм ємності несутимірний у порівнянні зі струмами через витки котушки.

У лініях електропередачі невеликої довжини при частоті 50 Гц і напругах до 35 кВ можна знехтувати струмами, обумовленими ємністю між проводами (струмами зсуву) і провідністю ізоляції (струмами витоку через гірлянди ізоляторів і струмами, обумовленими коронними електричними розрядами поблизу поверхні проводів).

При великих напругах, що зустрічаються в електроенергетиці, і при великих частотах, з якими має справу електрозв'язок, а також при значній довжині ліній зневажати струмами зсуву і витоку не можна. Отже, струм у проводах не однаковий у різних перетинах лінії.

Струм у проводах лінії викликає спадання напруги в активному опорі проводів і створює змінне магнітне поле, що наводить уздовж усієї лінії ЕРС самоіндукції. Тому напруга між проводами також не залишається постійною уздовж лінії.

Щоб врахувати зміну струму і напруги уздовж лінії, вважають, що кожен як завгодно малий елемент лінії має опір і індуктивність, а між проводами – провідність і ємність, тобто розглядають лінію як коло з **розподіленими параметрами**. Таку лінію називають **довгою**.



Будемо вважати, що опір, індуктивність, провідність і ємність рівномірно розподілені уздовж лінії, що є деякою ідеалізацією дійсних умов. Таку лінію умовимось називати **однорідною**.

## 1.2 Рівняння однорідної двохпровідної лінії

Складемо диференціальні рівняння, яким задовольняють напруги і струми в будь-якому перетині двохпровідної лінії (лінія зв'язку – двохпровідний кабель зі скрученими проводами).

Умовимось називати верхній провід двохпровідної лінії **прямим**, а нижній провід – **зворотним**. Виберемо додатні напрямки струму і напруги.

Первинними параметрами однорідної лінії є:

$R_0$  – активний опір одиниці довжини прямого і зворотного проводів;

$L_0$  – індуктивність одиниці довжини петлі, утвореної прямим і зворотним проводом;

$G_0$  – провідність (витік) на одиницю довжини між проводами;

$C_0$  – ємність на одиницю довжини між проводами.

Розіб'ємо лінію (рис. 1.1) на ділянки довжиною  $dx$ , де  $x$  – відстань від початку лінії. На довжині  $dx$  активний опір дорівнює  $R_0 dx$ , індуктивність –  $L_0 dx$ , провідність витoku –  $G_0 dx$  і ємність –  $C_0 dx$ . Позначимо струм на початку виділеної ділянки лінії через  $i$ , а напругу між проводами на початку ділянки через  $u$ . Опір  $R_0 dx$  і індуктивність  $L_0 dx$  будемо вважати включеними в один провід. Струм і напруга є в загальному випадку функціями відстані уздовж лінії  $x$  і часу  $t$ . Тому в рівняннях використані частинні похідні від  $u$  і від  $i$  за часом  $t$  і за відстанню  $x$ .

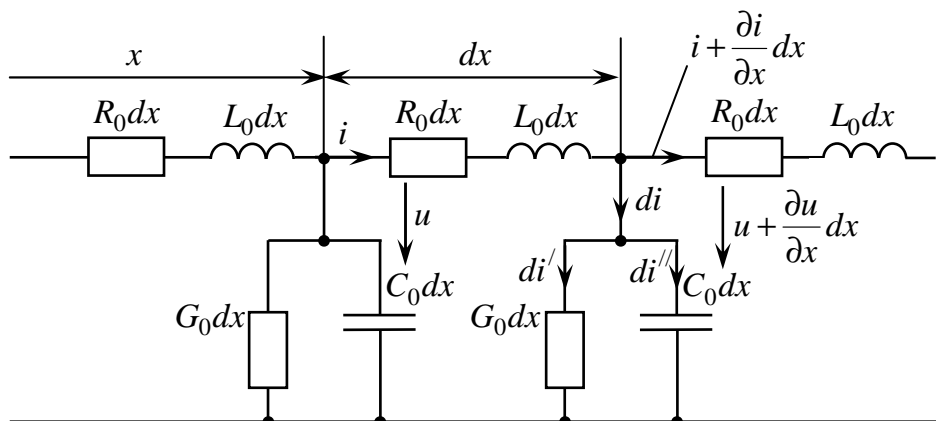


Рис. 1.1

Позначимо для деякого моменту  $t$  струм на початку ділянки  $i$ , а наприкінці ділянки струм для того ж моменту часу позначимо  $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ , де  $\frac{\partial i}{\partial x}$  – швид-

кість зміни струму в напрямку  $x$ ;  $\frac{\partial i}{\partial x} dx$  – збільшення струму на шляху  $dx$ .

Аналогічно, позначимо напругу на початку ділянки  $i$ , а наприкінці ділянки для того ж моменту часу –  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

Складемо:

- рівняння за другим законом Кірхгофа для замкнутого контуру, утвореного ділянкою лінії довжиною  $dx$ , обійшовши його за годинниковою стрілкою;
- рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла **2** з урахуванням напруги  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  наприкінці ділянки:

$$\begin{aligned} u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) &= R_0 \cdot dx i + L_0 \cdot dx \frac{\partial i}{\partial t}; \\ i - (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) &= (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) \cdot G_0 \cdot dx + C_0 \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} \cdot (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Приводячи подібні члени, зневажаючи величинами другого порядку малості й скорочуючи на  $dx$ , одержуємо диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь у частинних похідних при визначених початкових і граничних умовах дає можливість визначити струм і напругу як функції відстані від початку лінії і часу.

Ці рівняння справедливі при будь-яких змінах струму і напруги у часі.

### 1.3 Усталений режим в однорідній лінії

Розглянемо усталений режим в однорідній лінії при синусоїдному джерелі живлення. Рівняння (1.2) для стаціонарного гармонічного струму можна записати в комплексній формі:

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= (R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot \underline{I} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}; \\ -\frac{dI}{dx} &= (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0) \cdot \underline{U} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  – комплексний опір одиниці довжини лінії (погонний опір);

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  – комплексна провідність одиниці довжини лінії (погонна провідність).

Диференціюємо рівняння (1.3) за змінною  $x$ :

$$\begin{aligned}-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} &= \underline{Z}_0 \cdot \frac{d\underline{I}}{dx}; \\ -\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} &= \underline{Y}_0 \cdot \frac{d\underline{U}}{dx}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Замість  $\frac{d\underline{I}}{dx}$  і  $\frac{d\underline{U}}{dx}$  у правій частині підставимо їх значення з рівнянь (1.3).

Одержимо:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} &= \underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}; \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} &= \underline{Y}_0 \cdot \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Ці рівняння, що визначають зміни комплексних напруг і струмів уздовж лінії, мають однаковий вигляд. Тому досить знайти, наприклад, закон зміни напруги  $\underline{U}$ , а струм одержати з рівнянь (1.3).

Розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку для комплексної напруги  $\underline{U}$  має вигляд:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}, \tag{1.6}$$

де  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  – комплексні сталі інтегрування;

$\underline{\gamma}$  – комплексна величина, яка називається **коефіцієнтом поширення лінії**

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta; \tag{1.7}$$

$\alpha$  – **коефіцієнт загасання**;

$\beta$  – **коефіцієнт фази**.

Струм відповідно до рівняння (1.3)

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}) = \frac{\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}}{\sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}} \tag{1.8}$$

Знаменник, що має розмірність опору, називається **хвильовим опором лінії** і позначається  $\underline{Z}_{xs} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$ . Розглядаючи однорідну лінію як чотириполіусник, легко показати, що хвильовий опір лінії збігається з характеристичним опором чотириполіусника. Тому надалі хвильовий опір будемо позначати  $\underline{Z}_c$ .

$$\underline{Z}_{xs} = \underline{Z}_c = \underline{Z}_c \cdot e^{j\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} \cdot e^{j\theta}, \tag{1.9}$$

$$\text{де } \theta = \frac{1}{2} \cdot \arctg \frac{\omega \cdot (G_0 \cdot L_0 - R_0 \cdot C_0)}{R_0 \cdot G_0 + \omega^2 L_0 \cdot C_0} - \text{аргумент хвильового опору.} \quad (1.10)$$

Хвильовий опір  $\underline{Z}_{x\phi}$  і коефіцієнт поширення  $\underline{\gamma}$  називаються **вторинними параметрами однорідної лінії**.

Підставивши  $\underline{Z}_c$  в рівняння для струму (1.8), запишемо:

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}; \quad (1.11)$$

$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1}$  і  $\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2}$ , тому миттєві значення напруги та струму:

$$u = \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2); \quad (1.12)$$

$$i = \frac{\sqrt{2} \cdot A_1}{Z_c} \cdot e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) - \frac{\sqrt{2} \cdot A_2}{Z_c} \cdot e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta); \quad (1.13)$$

Кожне з доданків правої частини двох останніх рівнянь можна розглядати як **хвилю, що біжить** у напрямку зростання або убуття координати  $x$  і загасаючу в напрямку руху.

Основними характеристиками біжучих хвиль є фазова швидкість і довжина хвилі.

**Фазовою швидкістю хвилі  $c$**  називається швидкість переміщення фази коливання, що у перебігу часу  $t$  і в міру збільшення відстані  $x$ , пройденого хвилею, залишається постійною, тобто

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}, \text{ звідки } \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0, \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{dx}{dt} = c = \omega / \beta, \quad (1.14)$$

а для правого доданка рівняння (1.12) значення фазової швидкості таке саме, але зі зворотним знаком. Отже, ці доданки можуть розглядатися як хвилі, що рухаються в протилежних напрямках.

**Довжиною хвилі  $\lambda$**  називається відстань між найближчими двома точками, узятя в напрямку поширення хвилі, фази коливання, в яких відрізняються на  $2\pi$ . Отже, для першого доданка одержимо

$$\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1 = \omega t - \beta x + \psi_1 - 2 \cdot \pi, \quad \text{звідки } \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad \text{і} \quad c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}, \quad (1.15)$$

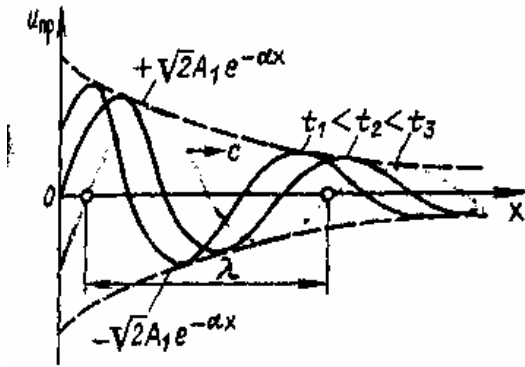


Рис. 1.2

тобто за період  $T$  хвиля пробігає відстань, що дорівнює довжині хвилі.

Умовимося, хвилю, що рухається від початку лінії називати **прямою**, а що рухається від кінця лінії – **зворотною**.

Загасаюча пряма хвиля надана на рис. 1.2.

Виберемо додатні напрямки напруг і струмів окремих хвиль від прямого проводу до зворотного.

З (1.12) і (1.13) випливає, що напруга  $\underline{U}$  є сума напруг прямої і зворотної хвиль, а струм  $\underline{I}$  – різниця струмів прямої і зворотної хвиль, тоді

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} + \underline{U}_{звор}; \quad \underline{I} = \underline{I}_{np} - \underline{I}_{звор}, \quad (1.16)$$

$$\text{де } \underline{U}_{np} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x}; \quad \underline{U}_{звор} = \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}; \quad \underline{I}_{np} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma x}; \quad \underline{I}_{звор} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma x}. \quad (1.17)$$

Струми та напруги як прямої, так і зворотної хвилі зв'язані між собою законом Ома:

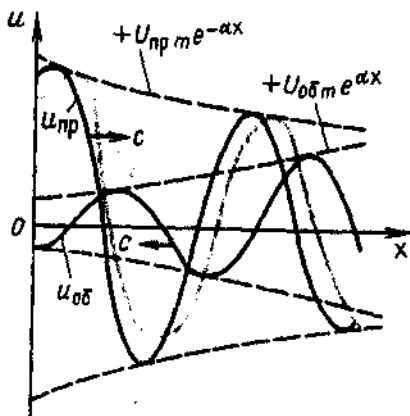


Рис. 1.3

$$\underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{Z}_c}; \quad \underline{I}_{звор} = \frac{\underline{U}_{звор}}{\underline{Z}_c}. \quad (1.18)$$

Слід мати на увазі, що фізично існують тільки результуючі струм  $\underline{I}$  і напруга  $\underline{U}$ , а розкладання їх на прямі і зворотні хвилі лише зручний прийом.

Криві розподілу миттєвих значень напруг і струмів також мають хвилоподібний характер (рис. 1.3).

Одержимо вирази для напруги і струму в будь-якій точці лінії через напругу і струм на початку лінії.

Перепишемо рівняння (1.6) і (1.8):

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}; \quad (1.19)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}}{\underline{Z}_c}. \quad (1.20)$$

Припускаючи, що на початку лінії ( $x = 0$ ) напруга  $\underline{U} = \underline{U}_1$  і струм  $\underline{I} = \underline{I}_1$ , з рівнянь (1.20) знайдемо сталі інтегрування  $\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$ .

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_1 = \underline{A}_1 - \underline{A}_2; \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c); \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c). \end{aligned} \quad (1.22)$$

З урахуванням (1.22) рівняння (1.6) і (1.8) для струмів і напруг у будь-якій точці лінії ( $x \neq 0$ ) можна записати так:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma x}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{\gamma x}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Подібним чином одержимо вирази для напруги і струму в будь-якій точці лінії через напругу і струм наприкінці лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma x}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{\gamma x}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

#### 1.4 Характеристики однорідної лінії

До характеристик однорідної лінії відносяться коефіцієнт поширення  $\gamma$ , коефіцієнт згасання  $\alpha$ , коефіцієнт фази  $\beta$ , хвильовий опір  $\underline{Z}_c$ , фазова швидкість хвилі  $c$ .

**Коефіцієнт  $\gamma$**  характеризує зміну прямої і відбитої хвиль у лінії за амплітудою і фазою.

**Коефіцієнт  $\alpha$**  характеризує зміну амплітуди хвилі, його визначають у децибелах (або неперах) на одиницю довжини.

**Коефіцієнт  $\beta$**  характеризує зміну фази, його визначають у радіанах на одиницю довжини.

Спадання амплітуди хвилі уздовж лінії обумовлюється наявністю втрат у лінії, а зміна фази – кінцевою швидкістю поширення хвиль.

З рівняння (1.7) можна одержати наступні формули для визначення  $\alpha$  і  $\beta$ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (Z_0 \cdot Y_0 + R_0 \cdot G_0 - \omega^2 L_0 \cdot C_0)}; \quad (1.25)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (Z_0 \cdot Y_0 - R_0 \cdot G_0 + \omega^2 L_0 \cdot C_0)}. \quad (1.26)$$

Для лінії постійного струму ( $\omega = 0$ )  $\alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0}$ ,  $\beta = 0$ , а для лінії без втрат ( $R_0 = 0, G_0 = 0$ ) або лінії, що працює на високих частотах ( $\omega \rightarrow \infty$ )  $\alpha = 0$ ,  $\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0}$ .

З (1.18) випливає, що опір  $\underline{Z}_c$  зв'язує струми прямої і зворотної хвиль з відповідними напругами:

$$\underline{Z}_c = \frac{U_{np}}{I_{np}}; \quad \underline{Z}_c = \frac{U_{обр}}{I_{обр}}. \quad (1.27)$$

У будь-якій точці лінії відношення напруги до струму прямої або зворотної хвилі представляє **хвильовий опір**  $\underline{Z}_c$ .

Хвильовий опір лінії з втратами

$$\underline{Z}_c = Z_c \cdot e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \cdot e^{j\theta}. \quad (1.28)$$

Для лінії постійного струму ( $\omega = 0$ )  $Z_c = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$ , а при дуже високих частотах ( $\omega \rightarrow \infty$ )  $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ .

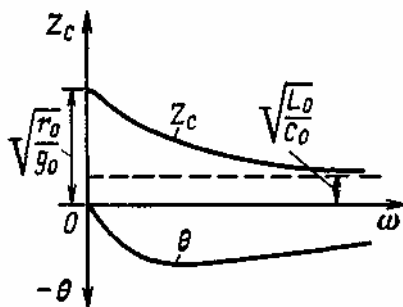


Рис. 1.4

Для повітряних ліній середнє значення модуля  $\underline{Z}_c$  становить 300 – 400 Ом, а для кабелів – (60 – 80) Ом. У кабелів ємність  $C_0$  значно більше, а індуктивність  $L_0$  менше, ніж у повітряних ліній, тому що проводи кабелю розташовані ближче друг до друга. Тому  $Z_c$  кабелю в 6 – 8 разів менше, ніж у повітряних ліній.

На рис. 1.4 наведені частотні характеристики однорідної лінії (АЧХ і ФЧХ), побудовані за рівняннями (1.9) і (1.10).

**Фазова швидкість хвилі** в лінії на даній частоті визначається коефіцієнтом фази  $\beta$  (1.13). Для ліній без спотворень ( $R_0/G_0 = L_0/C_0$ ) і для ліній без втрат ( $R_0 = 0, G_0 = 0$ );

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}, \quad (1.29)$$

де  $c_0$  – швидкість світла у вакуумі;

$\epsilon_r$  і  $\mu_r$  – відносні діелектрична і магнітна проникності діелектрика, що оточує проводи.

У повітряних ліній  $\epsilon_r \approx 1$ ,  $\mu_r \approx 1$  і при відсутності втрат швидкість хвилі  $c$  практично дорівнює  $c_0$ .

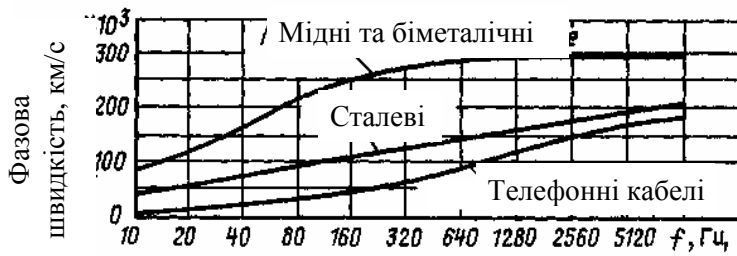


Рис. 1.5

У кабелях з  $\epsilon_r \approx 4 \div 5$  швидкість хвиль у  $2 \div 2,5$  рази менше  $c_0$ .

На рис. 1.5 показані залежності фазової швидкості від частоти для однорідних повітряних і кабельних ліній зв'язку.

У повітряних ЛЕП, для яких фазова швидкість близька до  $c_0$  при  $f = 50 \text{ Гц}$ , а довжина хвилі складає  $\lambda = c \cdot T \approx \frac{c_0}{f} = 6000 \text{ км}$ , навіть при довжині лінії 1000 км не можна спостерігати хвилеподібної зміни струму або напруги, а можна спостерігати лише їхню монотонну зміну.

Хвилеподібну зміну напруги і струму уздовж лінії можна спостерігати в пристроях зв'язку. Для передавачів, що працюють у діапазоні коротких хвиль, довжина лінії може бути в багато разів більше довжини хвилі.

### 1.5 Рівняння однорідної лінії в гіперболічній формі

У рівняннях (1.23) і (1.24) уведемо гіперболічні синус і косинус:

$$\frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = ch \gamma x; \quad \frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = sh \gamma x. \quad (1.30)$$

Тоді струм і напруга в будь-якій точці лінії можуть бути записаними за їхніми значеннями на початку лінії

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \cdot ch \gamma x - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh \gamma x \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \cdot sh \gamma x + \underline{I}_1 \cdot ch \gamma x \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Струм і напруга в будь-якій точці лінії за їх значеннями наприкінці лінії

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot ch \gamma x + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh \gamma x \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot sh \gamma x + \underline{I}_2 \cdot ch \gamma x \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$



## 1.6 Вхідний опір лінії

Під **вхідним опором лінії**  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  розуміють опір двополюсника, яким можна замінити лінію разом із приймачем на її кінці при розрахунку режиму на початку лінії.

Використовуючи формули (1.32), для лінії довжиною  $l$  одержимо:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \underline{sh} \gamma l}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \underline{sh} \gamma l + \underline{I}_2 \cdot \underline{ch} \gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c \cdot \underline{th} \gamma l}{\underline{Z}_n \cdot \underline{th} \gamma l + \underline{Z}_c}. \quad (1.33)$$

Вхідний опір лінії **при неробочому ході** ( $\underline{I}_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_x = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{ch} \gamma l}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \underline{sh} \gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \underline{cth} \gamma l = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{th} \gamma l}. \quad (1.34)$$

Вхідний опір лінії **при короткому замиканні** ( $\underline{U}_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_k = \frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{I}_{1k}} = \frac{\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \underline{sh} \gamma l}{\underline{I}_2 \cdot \underline{ch} \gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \underline{th} \gamma l. \quad (1.35)$$

Вхідний опір можна записати через опори неробочого ходу  $\underline{Z}_x$  і короткого замикання  $\underline{Z}_k$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_x \cdot \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_x} = \underline{Z}_{\text{вх}} \cdot e^{j\varphi_{\text{вх}}}. \quad (1.36)$$

Аналіз показує, що  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  і  $\varphi_{\text{вх}}$  змінюються хвилеподібно як при зміні довжини

лінії  $l$ , так і при зміні частоти  $f$ .

На рис. 1.6 показана зміна  $\underline{Z}_x$  і  $\underline{Z}_k$  для мідної двохпровідної лінії зв'язку

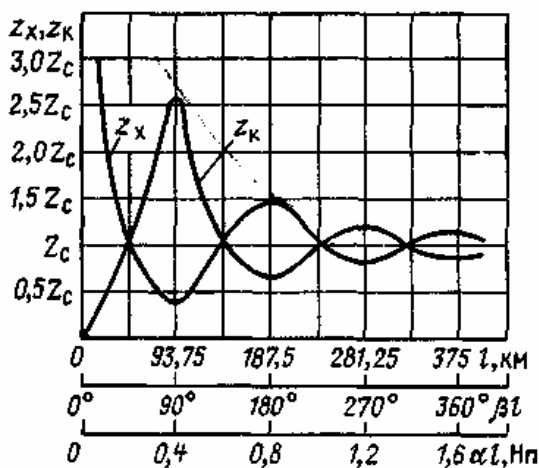


Рис.1. 6

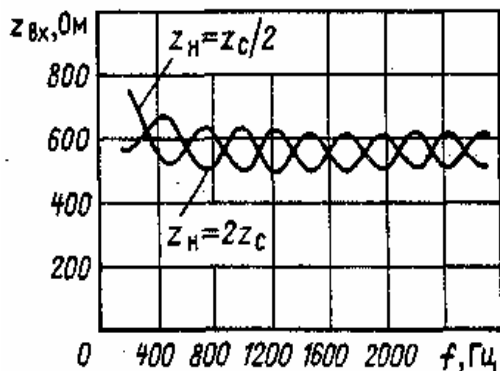


Рис. 1.7

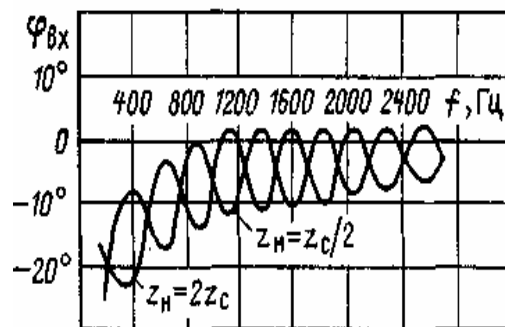


Рис. 1.8

при діаметрі проводів 3 мм і при частоті  $f = 800$  Гц ( $\lambda = 375$  км) у залежності від довжини лінії  $l$ . На рис. 1.7 і рис. 1.8 наведені зміни  $Z_{\text{вх}}$  і  $\varphi_{\text{вх}}$  мідної лінії зв'язку у функції частоти.

### 1.7 Коефіцієнт відбиття хвилі

**Коефіцієнт відбиття хвилі** – це відношення комплексів напруг або струмів зворотної (відбитої) і прямої хвиль у будь-якій точці лінії:

$$\begin{aligned} \underline{p}_U &= \frac{\underline{U}_{\text{звор}}}{\underline{U}_{\text{пр}}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma x} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma x}; \\ \underline{p}_I &= \frac{\underline{I}_{\text{звор}}}{\underline{I}_{\text{пр}}} = \frac{\underline{I}_2 - \underline{U}_2 / \underline{Z}_c}{\underline{I}_2 + \underline{U}_2 / \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma x} = \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_n}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma x}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Коефіцієнт відбиття хвилі звичайно визначається в точках кінця або початку лінії ( $x = 0$ ), тоді

$$\underline{p}_U = \frac{\underline{U}_{\text{звор}}}{\underline{U}_{\text{пр}}} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c}; \quad \underline{p}_I = \frac{\underline{I}_{\text{звор}}}{\underline{I}_{\text{пр}}} = \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_n}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c}. \quad (1.38)$$

Модуль коефіцієнта відбиття не може бути більше 1, тому що амплітуда зворотної хвилі завжди менше амплітуди прямої хвилі.

При розімкнутій лінії ( $\underline{Z}_n = \infty$ ) коефіцієнти відбиття  $\underline{p}_U = 1$ ;  $\underline{p}_I = -1$ .

Це означає, що хвиля напруги відбивається без зміни, а хвиля струму зі зміною знака. Для випадку короткого замикання на кінці лінії ( $\underline{Z}_n = 0$ ) коефіцієнт відбиття  $\underline{p}_U = -1$ ;  $\underline{p}_I = 1$ , тобто хвиля напруги відбивається зі зміною, а хвиля струму без зміни знака.

Якщо замкнути лінію опором, що дорівнює хвильовому ( $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$ ), то  $\underline{p}_U = 0$ ;  $\underline{p}_I = 0$ , тобто в лінії будуть відсутні зворотні хвилі.

Відсутність зворотної хвилі має ту перевагу, що вся потужність, яка переноситься прямою хвилею до кінця лінії, поглинається опором навантаження. При наявності зворотної хвилі частина потужності прямої хвилі повертається до джерела. Тому потужність в опорі навантаження буде менше, якщо вважати, що потужність джерела залишається незмінною.

### 1.8 Узгоджене навантаження лінії

Якщо наприкінці лінії включений опір навантаження, який дорівнює хвильовому опорі:  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$ , то відбитої хвилі не виникає. Таке навантажен-

ня називають **узгодженим навантаженням**. При цьому коефіцієнт відбиття  $\underline{p} = 0$ .

Для узгодженого навантаження

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} = \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad \underline{U}_{звор} = 0; \quad (1.39)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma \cdot x} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma \cdot x} = \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad \underline{I}_{звор} = 0. \quad (1.40)$$

Відкіля випливає

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c. \quad (1.41)$$

Це співвідношення зберігається для будь-якої точки лінії. Тому **режим роботи генератора, що живить таку лінію, не зміниться, якщо в будь-якому перетині лінії її розрізати і замість відрізаної частини лінії увімкнути хвильовий опір**.

З (1.33) випливає, що для узгодженої лінії ( $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$ ) вхідний опір  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_c$ .

Нехай початкова фаза напруги наприкінці узгодженої лінії дорівнює нулю. На підставі (1.39) і (1.40) запишемо миттєві значення напруги і струму в будь-якій точці лінії:

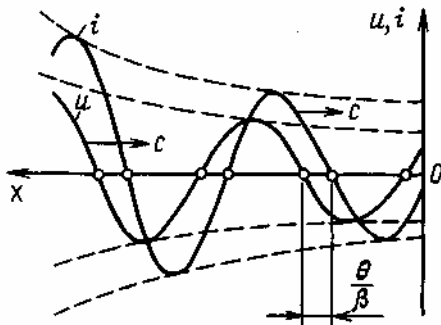


Рис. 1.9

$$\begin{aligned} u &= \underline{U}_{2m} \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x); \\ i &= \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x - \theta). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Таким чином, напруга і струм у різних точках лінії розрізняються не тільки за амплітудою, але і за фазою (рис. 1.9).

Миттєві значення струму і напруги в будь-який момент часу в будь-якій точці являють собою хвилі, що біжать у напрямку від початку лінії до кінця лінії.

Для повітряних ліній передач  $\underline{Z}_c = Z_c$ , тобто є чисто активним опором,  $\theta = 0$ . Тому напруга  $u$  і струм  $i$  будуть збігатися між собою за фазою, а при малих втратах у лінії ( $\alpha = 0$ ) їхні амплітуди будуть незмінними.

Режим хвилі, що біжить, є ідеальним з погляду економічності та технічної зручності передачі енергії по лінії.

Потужність у будь-якому перетині лінії

$$P = U \cdot I \cdot \cos \theta = \frac{U_2^2}{Z_c} \cdot e^{2\alpha \cdot x} \cdot \cos \theta \quad (1.43)$$

залежить від  $U_2^2$ , тобто чим більше напруга, тим більше передана потужність.

Ця потужність зменшується в міру віддалення від початку, тому що на кожному елементі довжини лінії мають місце втрати потужності

$$dP = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{U_2^2}{Z_c} \cdot e^{2\alpha \cdot x} \cdot \cos \theta dx = (R_0 \cdot I^2 + G_0 \cdot U^2) \cdot dx \quad (1.44)$$

Таким чином, потужність втрат дорівнює сумі втрат в опорі й у провідності ізоляції на елементі довжини лінії  $dx$ .

Потужність, яка передається по узгодженій лінії, називається **природною** або **натуральною**. Режим передачі природної потужності може мати місце в лініях, якщо опір навантаження дорівнює хвильовому опорові. Середні значення природної потужності для ліній 500, 400, 220, 110 і 35 кВ відповідно становлять 600, 360, 120, 30 і 3 МВт.

Потужність на вході лінії

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \theta \quad (1.45)$$

потужність наприкінці лінії

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \theta \quad (1.46)$$

На підставі (1.39) і (1.40) можна зв'язати потужність на вході й виході лінії довжиною  $l$

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \theta = U_2 \cdot I_2 \cdot e^{2\alpha \cdot l} \cdot \cos \theta = P_2 \cdot e^{2\alpha \cdot l} \quad (1.47)$$

і КПД лінії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha \cdot l} \quad (1.48)$$

Узгодження параметрів лінії і навантаження широко застосовується в пристроях зв'язку, тому що ця умова дозволяє передавати максимально можливу потужність.

## 1.9 Лінія без спотворень

У слабкострумових лініях зв'язку здійснюється передача енергії як періодичних, так і неперіодичних сигналів різної форми. Дуже важливо, щоб форма цих сигналів на початку і наприкінці лінії була б однаковою, тобто сигнал передавався без спотворень. Крім того, необхідно, щоб величина цих

сигналів наприкінці лінії була б достатньою для їхнього прийому. У реальних лініях хвильовий опір і коефіцієнт поширення залежать від частоти (1.7), (1.9). У зв'язку з цим при проходженні лінії сигнали різної частоти будуть мати загасання по амплітуді, і змінюватися за фазою неоднаково. Крім того, умова узгодження лінії з навантаженням для одержання максимального ККД лінії для різних частот буде різною.

Відзначимо деякі особливості ліній зв'язку. У кабельних лініях зв'язку через близьке розташування проводів відносно один одного індуктивний опір  $x_0 = \omega \cdot L_0$  малий в порівнянні з активним  $R_0$  і їм у першому наближенні можна знехтувати. Так само активною провідністю  $G_0$  між проводами можна знехтувати в порівнянні з реактивною провідністю  $B_0 = \omega C_0$ . Тому при  $L_0 = 0$  і  $G_0 = 0$ , а також,  $Z_0 = R_0$ ;  $Y_0 = j \cdot \omega \cdot C_0$  з формул (1.9) і (1.26) одержимо:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot \omega \cdot C_0};$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0}{j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{\omega \cdot C_0}} \cdot e^{-j\pi/4}. \quad (1.49)$$

З цих співвідношень видно, що коефіцієнт згасання  $\alpha$  і коефіцієнт фази  $\beta$  пропорційні квадратному кореневі з частоти. Тому гармоніки більш високих частот загасають сильніше, що приводить до спотворення мови, музики й інших сигналів, тобто до так званих **амплітудних спотворень**. Фазова швидкість також залежить від частоти. Залежність фазової швидкості від частоти приводить до зміни форми кривих струмів і напруг наприкінці лінії в порівнянні з їхньою формою на початку лінії. Ці спотворення називаються **фазовими**. Амплітудні спотворення також змінюють форму кривих. Підкреслимо особливо, що при високих частотах  $R_0 \ll \omega L_0$ ,  $G_0 \ll \omega C_0$ , тоді відповідно до виразу (1.19)

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (1.50)$$

Тому фазова швидкість (1.14) не залежить від частоти та фазові спотворення відсутні

$$c = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (1.51)$$

Далі відзначимо, що через амплітудні й фазові спотворення кабельні лінії зв'язку без особливих пристосувань непридатні для передачі мови, музики й інших сигналів на великі відстані.

Повітряна або кабельна лінія зв'язку, не забезпечена спеціальними підсилювачами, придатна для передачі сигналів, якщо коефіцієнт згасання  $\alpha$  не залежить від частоти і невеликий. Збереження тембру звуку, розбірливості мови і

форми сигналу визначається вищими гармоніками, тому дослідження виразу для  $\alpha$  на мінімум як для кабельних, так і для повітряних ліній зв'язку треба проводити, якщо вважати частоту  $\omega$  досить великою, а отже, вирази  $\frac{R_0}{\omega \cdot L_0}$  і  $\frac{G_0}{\omega \cdot C_0}$  досить малими.

При цих умовах після деяких перетворень будемо мати:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot (R_0 \cdot \sqrt{C_0/L_0} + G_0 \cdot \sqrt{L_0/C_0}) \quad (1.52)$$

$\alpha$  є функцією відносини  $z = L_0/C_0$ , тому знайдемо мінімум  $\alpha$ , дорівнявши  $\frac{d\alpha}{dz} = 0$ . Звідси одержимо значення  $z$ , при якому  $\alpha$  мінімально:

$$L_0/C_0 = R_0/G_0 \quad (1.53)$$

Ця умова була отримана Хевісайдом у 1893 р.

З (1.26) з урахуванням (1.53) знайдемо:

$$\alpha_{\min} = \sqrt{R_0 \cdot G_0}; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (1.54)$$

Лінію, що задовольняє умову (1.25), у якій коефіцієнт згасання не залежить від частоти і мінімальний, називають **лінією без спотворень**.

При цих умовах хвильовий опір:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{L_0/C_0} = \sqrt{R_0/G_0}; \quad \theta = 0. \quad (1.55)$$

Хвильовий опір лінії без спотворень не залежить від частоти й активний. Фазова швидкість також не залежить від частоти

$$c = \omega/\beta = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}. \quad (1.56)$$

### 1.10 Неробочий хід і коротке замикання лінії з втратами

Розглянемо неробочий хід лінії ( $I_2 = 0$ ). Змінивши напругу на початку лінії так, щоб напруга наприкінці лінії залишилося рівною  $\underline{U}_2$ , з рівнянь (1.32) одержимо:

$$\underline{U}_x = \underline{U}_2 \cdot ch \underline{\gamma} x; \quad \underline{I}_x = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot sh \underline{\gamma} x. \quad (1.57)$$

Якщо в лінії при короткому замиканні ( $\underline{U}_2 = 0$ ) змінити напругу на початку лінії так, щоб струм наприкінці лінії дорівнював  $\underline{I}_2$ , одержимо:

$$\underline{U}_\kappa = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot sh \underline{\gamma} x; \quad \underline{I}_\kappa = \underline{I}_2 \cdot ch \underline{\gamma} x. \quad (1.58)$$

З (1.32), (1.57) і (1.58) можна одержати:

$$\underline{U} = \underline{U}_x + \underline{U}_\kappa; \quad \underline{I} = \underline{I}_x + \underline{I}_\kappa. \quad (1.59)$$

Цими формулами зручно користуватися при розрахунках.

### 1.11 Лінії без втрат

Якщо прийняти такими, що дорівнюють нулю, опір проводів лінії ( $R_0 = 0$ ) і провідність витoku між проводами ( $G_0 = 0$ ), то одержимо так названу **лінію без втрат** – ідеалізацію реальної довгої лінії.

У радіотехніці дуже часто розглядають двохпровідні повітряні лінії і коаксіальні кабелі як лінії без втрат.

Для такої лінії маємо:

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_c; \quad \theta = 0; \\ c = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad \lambda = 2 \cdot \pi / \beta. \quad (1.60)$$

У лінії без втрат немає згасання хвиль, а хвильовий опір чисто активний і не залежить від частоти.

Фазову швидкість можна записати у вигляді

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0} = 1 / \sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}, \quad (1.61)$$

де  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  – абсолютні діелектрична і магнітна проникність середовища.

З огляду на те, що швидкість світла у вакуумі  $c_0 = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$ , фазова швидкість  $c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}$ .

Для повітряних ліній  $\epsilon_r = \mu_r = 1$  і фазова швидкість у вакуумі збігається зі швидкістю світла. Для кабельних ліній  $\epsilon_r > 1$  і  $c < c_0$ . У лініях без втрат  $\theta = 0$ , тобто струми прямої і зворотних хвиль збігаються за фазою з напругами.

Рівняння довгої лінії з гіперболічними функціями від комплексного аргументу переходять у рівняння з круговими функціями від дійсного аргументу, тобто:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \cdot \cos \beta x - j \cdot \underline{I}_1 z_c \sin \beta x \\ \underline{I} &= -j \cdot \frac{\underline{U}_1}{z_c} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_1 \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x + j \cdot \underline{I}_2 \cdot z_c \cdot \sin \beta x \\ \underline{I} &= j \cdot \frac{\underline{U}_2}{z_c} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Вхідний опір лінії без втрат

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = Z_c \cdot \frac{\underline{Z}_H + j \cdot z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l}{\underline{Z}_H \cdot j \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l + z_c}. \quad (1.64)$$

Миттєві значення при  $\underline{U}_2 = U_2$  і  $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{-j\varphi_2}$ :

$$\begin{aligned} u &= U_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin \omega t + I_{2m} \cdot z_c \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi_2); \\ i &= \frac{U_{2m}}{z_c} \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + I_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin(\omega t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Розглянемо властивості лінії без втрат довжиною у чверть і в половину довжини хвилі.

При  $l = \frac{\lambda}{4}$ ,  $\beta l = (2\pi/\lambda) \cdot \lambda/4 = \pi/2$ , тоді з (1.63) випливає

$$\underline{U}_1 = j \cdot \underline{I}_2 \cdot z_c; \quad \underline{I}_1 = j \cdot \underline{U}_2 / z_c \quad (1.66)$$

тобто напруга (струм) на початку лінії пропорційна струму (напрузі) наприкінці лінії і випереджає його за фазою на кут  $90^\circ$ .

При  $l = \frac{\lambda}{2}$ ,  $\beta \cdot l = \pi$  і  $\underline{U}_1 = -\underline{U}_2$ ;  $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$ ,

тобто напруга і струм на початку лінії дорівнюють за абсолютним значенням і протилежні за фазою напрузі і струмові наприкінці лінії.

## 1.12 Стоячі хвилі

Розглянемо режими, при яких активна потужність наприкінці лінії без втрат дорівнює нулю. Це може бути при неробочому ході, короткому замиканні і чисто реактивному навантаженню.



При неробочому ході з (1.63) випливає:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x; \quad \underline{I} = j \cdot \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \cdot \sin \beta x. \quad (1.67)$$

При  $\underline{U}_2 = U_2$  миттєві значення напруги і струму мають вигляд:

$$\begin{aligned} u &= U_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin \omega t; \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \cdot \sin \beta x \cdot \cos \omega t, \end{aligned} \quad (1.68)$$

і являють собою рівняння стоячих хвиль.

Стоячою **хвилею** називається процес, що виходить від накладення прямої і зворотної хвиль з однаковими амплітудами.

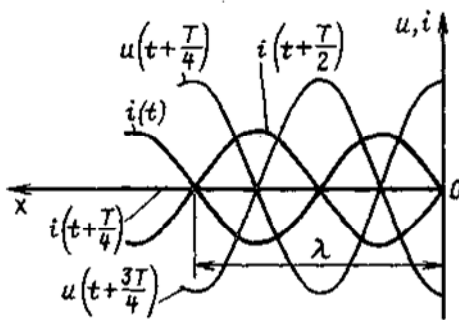


Рис. 1.10

При неробочому ході на кінці лінії ( $x = 0$ ) і в точках, що відстоять від кінця на відстанях  $x = k \cdot \pi / \beta = k \cdot \lambda / 2$ , де  $k$  – ціле число, маємо в будь-який момент часу максимуми напруги, називані пучностями, і нулі струму, називані вузлами (рис. 1.10). На відстанях від кінця лінії  $x = (2 \cdot k \cdot \pi + 1) / 2 \cdot \beta = (2 \cdot k + 1) \cdot \lambda / 4$  спостерігаються вузли напруги і пучності струму.

Вузли і пучності струму і напруги нерухомі. Вузли струму збігаються з пучностями напруги і навпаки.

При виникненні стоячих хвиль електромагнітна енергія від початку до кінця лінії не передається. Однак на кожному відрізку лінії, який дорівнює чверті довжини хвилі, запасена деяка електромагнітна енергія. Ця енергія періодично переходить з енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки. У моменти часу, коли струм уздовж усієї лінії виявляється таким, що дорівнює нулю, енергія переходить в енергію електричного поля. У моменти часу, коли напруга уздовж усієї лінії дорівнює нулю, а струм досягає максимального значення, вся енергія переходить в енергію магнітного поля.

Картина стоячої хвилі напруги (струму) при короткому замиканні на кінці лінії якісно повторює картину стоячої хвилі струму (напруги) при неробочому ході лінії.

### 1.13 Застосування ліній без втрат

Лінії без втрат довжиною у чверть хвилі застосовуються в якості елемента, що узгоджує, лінію без втрат і приймач з резистивним опором на її кінці  $\underline{Z}_H = R_H$ , який відрізняється від хвильового опору лінії. Наприклад, за допомогою чвертьхвильової лінії можна узгодити лінію (без втрат), що живить антену, із самою антеною, вхідний опір якої є чисто активним.

Знайдемо вхідний опір чвертьхвильової лінії ( $l = \lambda/4$ ), навантаженої на антену опором  $\underline{Z}_H = R_H$ . На підставі виразу (1.64):

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = z_c \frac{R_H + j \cdot Z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}}{R_H \cdot j \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} + z_c} \quad (1.69)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty, \text{ тому } \underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{Z_c^2}{R_H}. \quad (1.70)$$

Для узгодження лінії живлення з антеною необхідно, щоб  $\underline{Z}_{\text{вх}} = Z_{c1}$ , де  $Z_{c1}$  – хвильовий опір лінії живлення.

Звідси отримаємо необхідне значення хвильового опору

$$Z_c = \sqrt{Z_{c1} \cdot R_H}. \quad (1.71)$$

У цьому випадку чвертьхвильова лінія без втрат називається чвертьхвильовим трансформатором, тому що вона трансформує хвильовий опір лінії живлення, погоджуючи його з опором навантаження.

## Розділ 2. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ

### 2.1 Загальні відомості про електромагнітне поле

Третя частина курсу ТОЕ присвячена вивченню теорії електромагнітного поля, у якій розглянуті фізичні явища і процеси, що відбуваються в електромагнітному полі, і методи їхнього розрахунку. Ці явища і процеси лежать в основі дії великого числа різних електромагнітних і електронних приладів і пристроїв, які широко застосовуються на практиці. Методи розрахунку фізичних явищ і процесів розглянуті в розділі Електромагнітне поле, використовують при розрахунку і конструюванні цих приладів і пристроїв.

Під **електромагнітним полем** розуміють вид матерії, що характеризується сукупністю взаємно зв'язаних і взаємно зумовлюючих електричних і магнітних полів. Електромагнітне поле має характерні для нього електричні і магнітні властивості, доступні для спостереження. Силевий вплив поля на електричні заряди і струми покладено в основу визначення основних векторних величин, якими характеризують поле: напруженості електричного поля  $\vec{E}$  й індукції магнітного поля  $\vec{B}$ .

Значення  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  як взаємно зв'язаних характеристик єдиного електромагнітного поля залежать від умов спостереження цього поля. Вони виявляються різними в нерухомій і в рухливій системах координат. Так, електричний заряд, що рухається в деякій системі координат прямолінійно з постійною швидкістю, створює навколо себе в цій системі й електричне, і магнітне поле. Але спостерігач, що рухається з тією же швидкістю й у тім же напрямку, знайшов би тільки електричне поле, тому що стосовно нього заряд нерухомий.

Електромагнітне поле може самостійно існувати у виді електромагнітних хвиль у вакуумі. Це свідчить про те, що поле, будучи формою матерії, може існувати при відсутності іншої форми матерії – речовини. Поряд з цим, електромагнітне поле має такі характеристики, що властиві речовині, а саме: енергію, масу і кількість руху.

Маса електромагнітного поля в одиниці об'єму визначається як частка від ділення енергії поля в одиниці об'єму на квадрат швидкості поширення електромагнітної хвилі у вакуумі, яка дорівнює швидкості світла. Кількість руху електромагнітного поля, віднесена до одиниці об'єму, дорівнює добуткові маси поля в одиниці об'єму на швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі.

При поширенні електромагнітного поля одночасно з рухом потоку електромагнітної енергії відбувається переміщення маси поля і кількості руху.

Маса електромагнітного поля, що укладена в одиниці об'єму, незрівнянно мала у порівнянні з масою (густиною) всіх відомих речовин. Навіть при максимально досяжних у даний час значеннях напруженості електричного і магнітного полів маса поля в одиниці об'єму дорівнює  $10^{-16} - 10^{-18} \text{ кг/м}^3$ . Проте, наявність маси поля має принципове значення, оскільки в цьому виявляється відома інерційність процесів в електромагнітному полі. В одних випадках електромагнітне поле розподілене в просторі безперервно, в інших виявляє дискретну структуру, що виявляється у вигляді квантів випроміненого поля. Електромагнітне поле може перетворюватися в речовину, а речовина – у поле. Так, електрон і позитрон перетворюються в два кванти електромагнітного випромінювання, а при зникненні фотона виникають пари: електрон і позитрон. Перетворення поля в речовину, а речовини в поле відповідають перетворенню одного виду матерії в іншій. Простір і час є формами існування електромагнітного поля.

## 2.2 Електричне поле нерухомих зарядів (електростатичне поле). Закон Кулона

**Електростатичне поле** – це окремий вид електромагнітного поля. Воно створюється сукупністю електричних зарядів, нерухомих у просторі стосовно спостерігача і незмінних у часі.

З курсу фізики відомо, що будь-яка речовина складається з елементарних заряджених часток, оточених електромагнітним полем.

**Елементарні заряди** (заряди електрона і протона) характеризуються зв'язком із власним і взаємодією з зовнішніми електричними полями.

У теорії поля усереднюють мікроскопічні неоднорідності речовини в просторі і в часі.

У зарядженому тілі (якщо загальний заряд його незмінний у часі) елементарні заряди рухаються хаотично. Тому навіть у безпосередній близькості від поверхні цього тіла магнітне поле, що створено елементарними зарядами, практично відсутнє. Це і дає можливість розглядати в електростатичному полі лише один електричний компонент електромагнітного поля.

Під **зарядом** (зарядом тіла) розуміють скалярну величину, яка дорівнює алгебричній сумі елементарних електричних зарядів у цьому тілі.

Надалі, як правило, будемо мати справу з полем, що створене в **однорідному й ізотропному середовищі**.

Середовище, електричні властивості якого однакові для всіх точок поля, називається **однорідним**, при цьому всі нескінченно малі елементи об'єму мають однакові фізико-хімічні властивості. **Ізотропним** середовищем називається

середовище, у кожній точці якого відносна діелектрична проникність не залежить від напрямку вектора напруженості поля.

**Точковим зарядом** називають заряд, лінійні розміри якого незрівнянно малі в порівнянні з відстанню до точки спостереження або до інших зарядів.

В основі теорії електричного поля лежить закон взаємодії «точкових» зарядів, відкритий у 1785 р. Кулоном.

Цей закон містить наступні положення:

1. Заряди однакової полярності відштовхуються, протилежної полярності – притягаються.

2. Сила взаємодії пропорційна добуткові абсолютних величин зарядів, обернено пропорційна квадратові відстані між зарядами, залежить від середовища, у якому розташовано заряди, діє уздовж прямої лінії, що з'єднує заряди

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}, \quad (2.1)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей середовища, у якому взаємодіють заряди;

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$  – діелектрична проникність;

$\varepsilon_0$  – діелектрична проникність вакууму;

$\varepsilon_r$  – відносна діелектрична проникність (для вакууму  $\varepsilon_r = 1$ , для води  $\varepsilon_r = 81$ , для слюди  $\varepsilon_r = 5,6 - 6$ ).

При використанні одиниць системи СІ відстань  $R$  виражають у метрах (м), заряди – у кулонах (Кл), електричну постійну  $\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$  – у фарадах на метр (Ф/м), тоді силу одержують у ньютоні (Н).

З урахуванням векторного значення відстані  $R$  закон Кулона має вигляд

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \cdot \vec{R}_0, \quad (2.2)$$

де  $\vec{R}_0$  – одиничний вектор, спрямований по лінії, що з'єднує заряди, до точки спостереження (див. рис. 2.1).

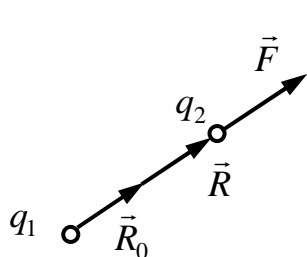


Рис. 2.1

$\vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{R}$ , де  $\vec{R}$  – радіус-вектор, спрямований до точки спостереження, тому

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}. \quad (2.3)$$

Ця формула математично відбиває **закон „взаємодії“ точкових зарядів**. Кожний із зарядів є оточений еле-

ктричним полем, і при внесенні в це поле іншого заряду на останній будуть діяти сили поля.

Якщо заряди  $q_1$  і  $q_2$  одного знаку, то сила  $F$ , що діє на заряд, який знаходиться в точці спостереження (рис. 2.1), збігається за напрямком з радіусом-вектором  $\vec{R}$ , тобто має місце відштовхування зарядів; якщо ж заряди  $q_1$  і  $q_2$  мають протилежні знаки, то сила  $F$  спрямована протилежно напрямкові радіуса-вектора  $\vec{R}$ , тобто має місце притягання зарядів.

Якщо електричне поле створене  $n$  точковими зарядами, то при внесенні в це поле заряду  $q_0$  на нього буде діяти сила, що може бути визначена на підставі принципу накладання.

Принцип накладання в даному випадку справедливий в силу лінійної залежності сили від зарядів. Таким чином,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_i^3} \cdot \vec{R}_i; \quad (2.4)$$

де  $\vec{R}_i$  – радіус-вектор, проведений із точки розташування заряду  $q_i$  в точку в якій розміщений заряд  $q_0$ .

## 2.3 Напруженість електричного поля

Для визначення інтенсивності електричного поля, створеного відокремленим зарядом  $q$ , внесемо в це поле пробний заряд  $q_0$ .

**Пробним зарядом** називають точковий заряд, внесення якого в поле, що створене іншими зарядами, не змінює розташування зарядів, які створюють поле.

На заряд  $q_0$  буде діяти сила  $\vec{F}$ , яка викликана полем заряду  $q$ , що за законом Кулона для точкових зарядів (2.3) дорівнює

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}. \quad (2.5)$$

**Напруженість поля**  $\vec{E}$  – силова характеристика поля, це фізична векторна величина, що характеризує виникнення сил, що діють на одиницю позитивного пробного заряду, поміщеного в поле.

Напруженість електричного поля є величина векторна і позначається буквою  $\vec{E}$ . Одиниця виміру  $\vec{E}$  – В/м.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \quad (2.6)$$

де  $q_0$  – пробний заряд.

Напруженість  $\vec{E}$  збігається за напрямком з вектором сили  $\vec{F}$ .  
З урахуванням (2.3) буде

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}, \quad (2.7)$$

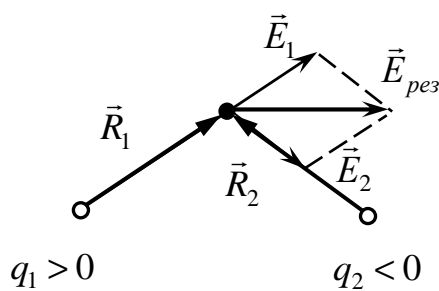
де  $\vec{R}$  – радіус-вектор, проведений із точки розташування заряду  $q$  у точку розташування пробного заряду  $q_0$ .

$|\vec{R}| = R$ , тому модуль напруженості поля  $\vec{E}$  у полі точкового заряду

$$E = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}. \quad (2.8)$$

Знаючи напруженість поля  $\vec{E}$ , можна визначити силу, з якою поле діє на пробний заряд

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q_0. \quad (2.9)$$



Якщо електричне поле створюється двома точковими зарядами, то за принципом накладання результуюча напруженість визначається як геометрична сума напруженостей окремих зарядів (див. рис. 2.2)

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (2.10)$$

Рис. 2.2

Нехай поле створюється системою  $n$  – точкових зарядів. Застосовуючи принцип накладання для визначення результуючого значення  $\vec{E}_{рез}$ , одержимо:

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (2.11)$$

## 2.4 Поняття про об'ємний, поверхневий і лінійний заряди

Якщо заряд  $q$  рівномірно розподілений в об'ємі  $V$ , то заряд, що знаходиться в одиниці об'єму, визначається як:

$$q = \rho \cdot V \quad (\text{Кл}/\text{м}^3), \quad (2.12)$$

де  $\rho$  – питома густина об'ємного заряду.

**Питома густиною об'ємного заряду** називають заряд одиниці об'єму.  
При нерівномірному розподілі зарядів

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (2.13)$$

Якщо заряди розподілені по поверхні тіла  $S$ , а товщина шару заряду нескінченно мала в порівнянні з лінійними розмірами поверхні, то вводиться поняття **поверхневої густини заряду**  $\sigma$ .

При рівномірному розподілі зарядів:

$$\sigma = \frac{q}{S} \text{ (Кл/м}^2\text{)}. \quad (2.14)$$

При нерівномірному розподілі зарядів:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (2.15)$$

Якщо заряди розташовані на проводах, лінійні розміри перетинів яких досить малі в порівнянні з довжиною  $l$  і відстанню до точок спостереження, можна вважати, що заряди розподілені за осями цих проводів з деякою лінійною густиною  $\tau$ .

При рівномірному розподілі зарядів:

$$\tau = \frac{q}{l} \text{ (Кл/м)}. \quad (2.16)$$

При нерівномірному розподілі зарядів:

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (2.17)$$

## 2.5 Електричне поле об'ємного заряду

Нехай об'єм  $V$  заповнений зарядом (наприклад, електронна хмара) з питомою об'ємною густиною  $\rho$ , значення якої в кожній точці задано.

Знайдемо в довільній точці  $A$  напруженість, створену цим об'ємним зарядом (рис. 2.3).

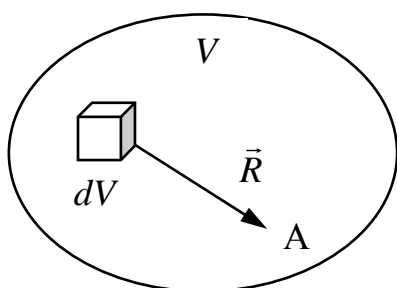


Рис. 2.3

Розіб'ємо об'єм на нескінченно малі елементи об'єму  $dV$ .

В елементі об'єму  $dV$  питому густину заряду можна вважати величиною сталою. Елементарний заряд  $dq = \rho \cdot dV$  можна розглядати як точковий. Напруженість поля, яка створена цим зарядом у точці спостереження  $A$ , може бути визначена за формулою (2.7)

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R} = \frac{\rho \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^3} \cdot dV, \quad (2.18)$$

де  $\vec{R}$  – радіус-вектор, проведений від елементарного заряду в точку спостереження.



Напруженість поля в точці  $A$ , яка створена всіма зарядами, розподіленими в об'ємі  $V$  з питомою об'ємною густиною  $\rho$ ,

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dV. \quad (2.19)$$

Інтегрування ведеться за всім об'ємом  $V$ , де  $\rho$  відмінно від нуля.

## 2.6 Електричне поле поверхневого заряду

Якщо заряд, що розподілений у досить тонкому поверхневому шарі (наприклад, на поверхні зарядженого провідника) з поверхневою густиною  $\sigma$ , значення якої в кожній точці задано, то можна вважати, що заряд буде розподілений по поверхні. Розіб'ємо поверхню на нескінченно малі елементи площі  $dS$ . Будемо вважати, що в елементі площі  $dS$  поверхнева густина заряду  $\sigma$  – величина стала. Елементарний заряд елемента поверхні  $dq = \sigma \cdot dS$  можна розглядати як точковий, тоді згідно з (2.7), напруженість поля в точці спостереження має бути:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R} = \frac{\sigma \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dS, \quad (2.20)$$

де  $R$  – відстань від елементарного заряду  $dq$  до точки спостереження.

Напруженість поля, що створена всією зарядженою поверхнею  $S$ ,

$$\vec{E} = \int_S \frac{\sigma \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dS. \quad (2.21)$$

Інтегрування ведеться щодо всієї поверхні, де  $\sigma$  відмінна від нуля.

## 2.7 Електричне поле лінійного заряду

Нехай провідник, довжиною  $l$ , несе заряд  $q$  з лінійною густиною  $\tau$ , значення якої в кожній точці задане (див. рис. 2.4).

Виділимо на провіднику нескінченно малий відрізок  $dl$ . Елементарний заряд  $dq = \tau \cdot dl$  можна розглядати як точковий, тоді згідно з (2.7), напруженість поля в точці спостереження буде

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R} = \frac{\tau \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dl, \quad (2.22)$$

де  $R$  – відстань від елементарного заряду  $dq$  до точки спостереження. Напруженість поля, яка створена всім зарядженим провідником:

$$\vec{E} = \int_l \frac{\tau \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dl. \quad (2.23)$$

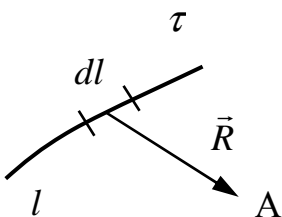


Рис. 2.4

Інтегрування ведеться за всією довжиною провідника, де  $\tau$  є відмінна від нуля.

Якщо електричне поле створюється лінійним, поверхневим, об'ємним і точковим зарядами, то для визначення напруженості поля, створеного цією системою зарядів, застосовується принцип накладання (суперпозиції):

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \quad (2.24)$$

## 2.8 Лінії вектора напруженості („силові“ лінії)

З викладеного вище випливає, що в будь-якій точці електричного поля, утвореного довільним розподілом зарядів, може бути визначений вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$ .

Для графічного зображення і наочного подання електричного поля введено поняття **лінії вектора напруженості** („силові“ лінії).

**Силова лінія** – це уявно проведена у полі лінія, що починається на позитивно зарядженому тілі, а закінчується на негативно зарядженому тілі. Проводиться вона таким чином, що дотична до неї в будь-якій її точці дає напрямок напруженості поля  $\vec{E}$  в цій точці. Силові лінії мають початок (на позитивно зарядженому тілі) і кінець (на негативно зарядженому тілі). Позитивний і негативний заряди, що створюють поле, не можуть бути в одній і тій же точці, тому силові лінії електростатичного поля не можуть бути лініями, замкненими самі на себе.

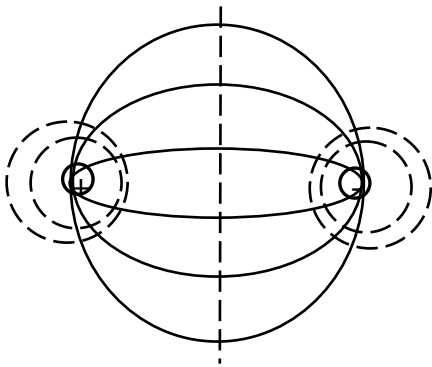


Рис. 2.5

У кожній точці поля вектор  $\vec{E}$  має цілком визначений напрямок (за винятком точок, де  $\vec{E}$  дорівнює нулю), тому через кожну точку поля можна провести тільки одну лінію вектора  $\vec{E}$ .

Диференціальне рівняння „силових“ ліній:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (2.25)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.25) являє собою рівняння лінії вектора  $\vec{E}$ .

На рис. 2.5 за допомогою силових ліній (суцільні лінії) надане поле різноимених зарядів.

## 2.9 Потік вектора $\vec{E}$

В електричному полі виділимо нескінченно малий елемент площадки  $dS$  і спрямуємо в яку-небудь сторону одиничний, нормальний до цього елемента, вектор  $\vec{n}$  (рис. 2.6). Елементарний потік вектора  $\vec{E}$  крізь площадку  $dS$  є величина скалярна, що дорівнює:

$$dN = E \cdot dS \cos(\hat{\vec{E}} \vec{n}) = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.26)$$

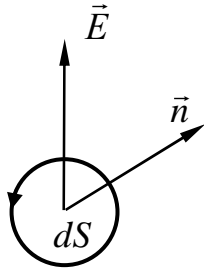


Рис. 2.6

де  $\vec{n} dS = d\vec{S}$  – вектор, довжина якого чисельно дорівнює площі елемента поверхні  $dS$ , а напрямок збігається з напрямком одиничного вектора  $\vec{n}$ .

Залежно від кута між  $\vec{E}$  і  $\vec{n}$  потік вектора  $\vec{E}$  може мати той або інший знак (якщо кут гострий, то знак потоку додатний, якщо тупий – від’ємний). Звичайно напрямок одиничного вектора  $\vec{n}$  зв’язують з обходом елемента площадки  $dS$  за правоїгннтовою системою.

Потік вектора  $\vec{E}$  крізь поверхню  $S$  дорівнює:

$$N = \int_s dN = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (2.27)$$

При  $N > 0$  говорять про витік вектора  $\vec{E}$ , а при  $N < 0$  – про стік вектора.

Якщо поверхня замкнена, то потік вектора  $\vec{E}$  крізь замкнену поверхню визначиться

$$N = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (2.28)$$

При цьому умовно будемо вважати додатною зовнішню нормаль до замкненої поверхні.

Якщо поверхня, крізь яку визначають потік вектора, замкнена, то на знак інтеграла ставлять кружок.

В теорії поля виявляють інтерес не тільки до присутності потоку вектора, а і до того, в якій точці знаходиться джерело вектора. Для визначення джерела поля в кожній точці простору вводять поняття дивергенції вектора.

## 2.10 Дивергенція вектора $\vec{E}$

Для характеристики векторного поля введена скалярна величина, що називається **дивергенцією** або **розходимістю вектора**. Математично дивергенція є операцією диференціювання векторної величини за координатними напрямками.

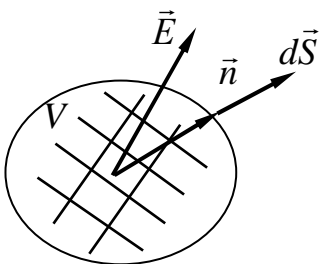


Рис. 2.7

Нехай деякий об’єм  $V$  знаходиться у полі вектора  $\vec{E}$ . Розіб’ємо поверхню, що обмежує об’єм, на нескінченно малі елементи  $dS$  (рис. 2.7).

Будемо вважати зовнішню нормаль, проведену до поверхні об’єму, додатною. Тоді вектор  $d\vec{S}$  буде спрямований із об’єму. Потік вектора  $\vec{E}$  крізь поверхню, що обмежує об’єм, дорівнює:

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.29)$$

Межа, до якої прямує відношення повного потоку вектора через замкнену поверхню до величини об'єму, що обмежується нею, при нескінченному зменшенні останнього, називається **дивергенцією** або розходимістю вектора.

Дивергенція – це скалярна величина; вона додатна, якщо лінії поля починаються в нескінченно малому об'ємі, і від'ємна, якщо лінії поля закінчуються в цьому об'ємі.

Поля, у яких повний потік вектора через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю, називаються **бездивергентними**.

Визначення дивергенції вектора  $\vec{E}$  можна виразити математично:

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (2.30)$$

Дивергенція вектора  $\vec{E}$  в прямокутних координатах буде:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (2.31)$$

де  $E_x, E_y, E_z$  – складові вектора щодо координатних осей.

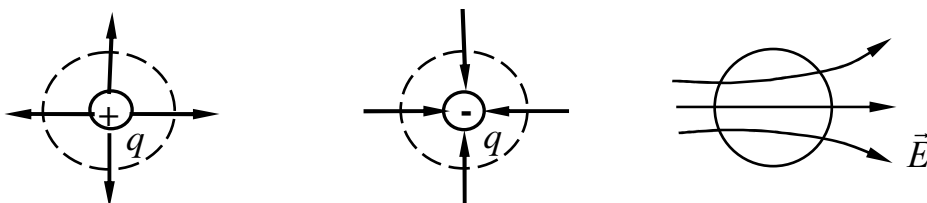
Дивергенція вектора  $\vec{E}$  в точці, у якій відсутній заряд, дорівнює нулю.

Дивергенція вектора  $\vec{E}$  у всіх точках простору електричного поля дорівнює нулю, якщо в даному просторі відсутні заряди.

Якщо електричне поле створене позитивним зарядом, то усередині області, у якій знаходиться заряд, буде **джерело (витік)** поля вектора  $\vec{E}$ , якщо негативним, то – **стік**. Якщо усередині області немає зарядів, то немає ні джерел, ні стоків поля, тобто  $\text{div} \vec{E} = 0$  (рис. 2.8). Отже, дивергенція характеризує векторне поле в кожній його точці з погляду наявності джерел або стоків поля.

## 2.11 Диференціальний оператор «набла»

Обчислення дивергенції являє собою операцію складного диференціювання



Витік поля вектора  $\vec{E}$     Стік поля вектора  $\vec{E}$      $\text{div} \vec{E} = 0$

Рис. 2.8

векторної величини за координатами. Для позначення цієї операції вводять символ  $\nabla$  (набла):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}, \quad (2.32)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори за відповідними координатами.

Вираз дивергенції можна розглядати, як скалярний добуток вектора  $\nabla$  і вектора

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k}. \quad (2.33)$$

Отже, у прямокутній системі координат

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (2.34)$$

Застосування оператора  $\nabla$  до скалярної функції дає інший диференціальний оператор – градієнт

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (2.35)$$

Фізично градієнт визначає швидкість зміни функції в напрямку її максимального зростання.

## 2.12 Теорема Остроградського

**Теорема Остроградського (теорема дивергенції)** – інтеграл від дивергенції вектора, узятий за об'ємом, можна замінити потоком вектора через замкнену поверхню, що обмежує цей об'єм.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (2.36)$$

## 2.13 Теорема Гауса для однорідного середовища

Однорідне ізотропне середовище характеризується діелектричною проникністю  $\varepsilon$ , яка не залежить від координат (тобто  $\varepsilon$  можна винести за знак дивергенції).

Теорема Гауса – окремий випадок застосування теореми Остроградського для електричного поля. Вона дозволяє порівняно швидко розрахувати поле (визначити  $\vec{E}$  в кожній його точці), яке має циліндричну, сферичну або плоску симетрію.

**Теорема Гауса в інтегральній формі для однорідного середовища** – потік вектора  $\vec{E}$  крізь замкнену поверхню не залежить від розміру і форми поверхні, прямо пропорційний зарядові, що знаходиться усередині поверхні, і обе-

рнено пропорційний діелектричній проникності середовища

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}. \quad (2.37)$$

*Доказ.* Нехай поле збуджується зарядом  $q$  (див. рис. 2.9). Оточимо цей заряд сферичною поверхнею  $S_0$  з центром на заряді і будь-якою іншою поверхнею  $S$ . Обидві поверхні пронизує те саме число силових ліній, тому потоки вектора  $\vec{E}$  через поверхні будуть однакові

$$N = \oint_{S_0} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}_0 = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (2.38)$$

Ці потоки обчислюються в напрямку зовнішніх нормалей до відповідних поверхонь.

У будь-якій точці поверхні  $S_0$  вектор

$$\vec{E}_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}, \text{ за модулем } E_0 = \text{const}$$

$$\text{і дорівнює } E_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^2}.$$

Радіус вектор  $\vec{R}$  збігається за напрямком з нормаллю.

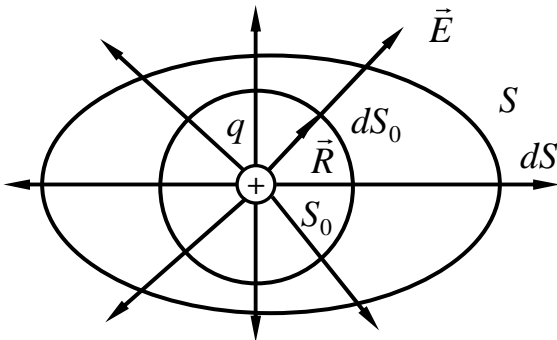


Рис. 2.9

Тому

$$\oint_{S_0} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}_0 = \oint_{S_0} \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^2} \cdot dS_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^2} \oint_{S_0} dS_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{q}{\epsilon} \quad (2.39)$$

$$\text{або } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}. \quad (2.40)$$

Якщо усередині об'єму, обмеженого поверхнею  $S$ , знаходиться об'ємний заряд, то  $q = \int_V \rho \cdot dV$  і  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{\epsilon}$ . (2.41)

Замінімо ліву частину рівняння за теоремою Остроградського – Гауса.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{\epsilon}. \quad (2.42)$$

Останнє рівняння справедливе, якщо функції під інтегралами тотожні, тому

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (2.43)$$

**Це теорема Гауса в диференціальній формі для однорідного середовища.**

Якщо заряд у даній точці поля відсутній, то  $\text{div}\vec{E}=0$ . Рівняння показує, що джерелом поля вектора  $\vec{E}$  є вільний заряд.

Якщо  $\text{div}\vec{E} > 0$ , тобто потік вектора  $\vec{E}$  додатний, то дана точка поля є джерелом (витоком) векторного поля, якщо  $\text{div}\vec{E} < 0$ , то – стоком.

## 2.14 Робота сил електричного поля. Потенціал

Теорема Гауса в диференціальній формі дозволяє розв'язати зворотну задачу електростатики (по заданому закону зміни вектора напруженості  $\vec{E}$  знайти закон зміни заряду, що збуджує поле). Для розв'язання прямої задачі цього рівняння недостатньо (пряма задача – визначення поля за заданим зарядом). Для полегшення аналізу та розрахунку полів вводять розрахункову скалярну функцію  $\varphi$  – **потенціал**.

Нехай поле збуджується зарядом  $+q$ . Знайдемо роботу поля при переміщенні пробного заряду  $+q_0$  з точки А в точку В (див. рис. 2.10). Якщо заряд перемістився на відстань  $dl$ , то робота сил поля

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot dl \cos(\vec{F} \hat{d\vec{l}}) = q_0 \cdot E \cdot dl \cdot \cos(\vec{F} \hat{d\vec{l}}), \quad (2.44)$$

де  $d\vec{l}$  формально розглядається як вектор, спрямований по дотичній, а довжина його дорівнює відрізкові шляху  $dl$ .

$$dl \cos(\vec{F} \hat{d\vec{l}}) = dR, \text{ тоді} \quad (2.45)$$

робота сил з переміщення заряду  $q_0$  на шляху  $l$  дорівнює

$$A = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} q_0 \cdot E \cdot dR = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q_0 \cdot q \cdot dR}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R^2} = \frac{q_0 \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right). \quad (2.46)$$

Робота з переміщення заряду в електричному полі не залежить від вигляду шляху, а залежить від початкового і кінцевого положення заряду.

Поле, робота сил якого не залежить від вигляду шляху, називається **потенціальним полем**.

З (2.49) випливає, що робота уздовж замкнутого шляху дорівнює нулю, тобто

$$\oint_l q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.47)$$

Якщо пробний заряд  $q_0=1$ , то робота за замкненим контуром

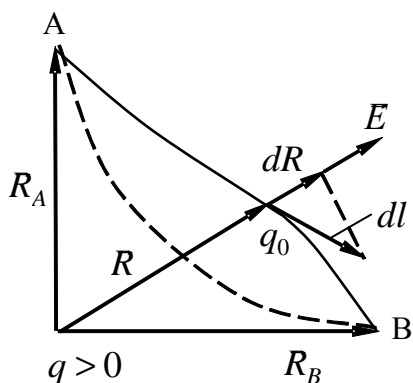


Рис. 2.10

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.48)$$

Цей інтеграл називають **циркуляцією вектора  $\vec{E}$**  (поле потенційне).

Якщо пробний заряд  $q_0 = 1$ , то робота визначиться виразом

$$A = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} E \cdot dR = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right). \quad (2.49)$$

Якщо пробний заряд  $q_0 = 1$  перемістився в нескінченно віддалену точку ( $R_B \rightarrow \infty$ ), тоді

$$A = \int_{R_A}^{\infty} E \cdot dR = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_A} \quad (2.50)$$

**Потенціал – це енергетична характеристика кожної точки поля; чисельно потенціал дорівнює роботі сил поля щодо переміщення одиниці заряду з даної точки поля в нескінченність (потенціал нескінченності прийнятий таким, що дорівнює нулю).**

$$\varphi = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{R} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}. \quad (2.51)$$

Одиниця виміру потенціалу – В (вольт).

Якщо поле створюється декількома зарядами, то потенціал у будь-якій точці дорівнює сумі потенціалів складових полів:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n \quad (2.52)$$

Якщо поле створюється об'ємним зарядом, то, розбиваючи об'єм на нескінченно малі об'єми і вважаючи заряд цих об'ємів точковим ( $dq = \rho \cdot dV$ ), за принципом накладання результуючий потенціал:

$$\varphi = \int_v \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}, \quad (2.53)$$

де  $R$  – відстань від точки спостереження до нескінченно малого об'єму  $dV$ .

Аналогічно для системи поверхнево розподілених зарядів

$$\varphi = \int_s \frac{\sigma \cdot dS}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}, \quad (2.54)$$

і для системи лінійно розподілених зарядів

$$\varphi = \int_l \frac{\tau \cdot dl}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}. \quad (2.55)$$

Нехай пробний заряд  $q_0 = 1$  переміщується в електричному полі, створеному точковим зарядом, від точки А до точки В. При цьому робота сил електричного поля визначитися, як

$$A = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} E \cdot dR = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_A} - \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_B} = \varphi_A - \varphi_B = U_{AB} \quad (2.56)$$



тобто, робота, яка виконана електричним полем при перенесенні одиниці заряду, чисельно дорівнює різниці потенціалів між точками А та В.

Різниця потенціалів називається електричною **напругою** і позначається буквою  $U$ .

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} E \cdot dR. \quad (2.57)$$

В електричному полі, створеному довільно розподіленими зарядами, можна провести поверхні, у різних точках яких потенціал є величиною сталою. Ці поверхні називаються **еквіпотенціальними поверхнями**. Вони описуються рівнянням  $\varphi = C$ , де  $C$  – стала величина.

На еквіпотенціальних поверхнях різниця потенціалів між будь-якими двома точками дорівнює нулю, тобто

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.58)$$

Ця умова виконується в тому випадку, якщо  $\vec{E} \perp d\vec{l}$ , отже, еквіпотенціальні поверхні повинні бути нормальні до силових ліній. Еквіпотенціальні поверхні показані пунктирними лініями на рис. 2.5.

При переміщенні заряду вздовж еквіпотенціальної поверхні робота поля не відбувається.

При переході з однієї точки електричного поля в іншу потенціал у загальному випадку змінюється. Швидкість зміни потенціалу в напрямку найшвидшого його росту, тобто в напрямку, нормальному до еквіпотенціальних поверхонь, називається **градієнтом потенціалу**,

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \vec{n}, \quad (2.59)$$

де  $\vec{n}$  – одиничний вектор, спрямований за нормаллю до еквіпотенціальної поверхні.

У декартовій системі координат

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k} = \nabla \cdot \varphi, \quad (2.60)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори за відповідними координатами.

## 2.15 Зв'язок потенціалу з напруженістю поля

У будь-якій точці поля, збудженого вільним зарядом, розподіленим із об'ємною густиною  $\rho$ ,

$$\varphi = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}. \quad (2.61)$$

Визначимо градієнт потенціалу  $grad\varphi = grad \int_v \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}$ .

Операції градієнт та інтегрування не залежать одне від одного, тому що градієнт береться за координатами точки спостереження, а інтегрування ведеться за об'ємом, у якому розподілений заряд. Тому

$$grad\varphi = \int_v grad \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R} = \int_v \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} grad\left(\frac{1}{R}\right) = - \int_v \frac{\rho \cdot dV \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} = -\vec{E}. \quad (2.62)$$

Тут враховано, що  $grad\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$ .

Таким чином,

$$\vec{E} = -grad\varphi. \quad (2.63)$$

Користуючись цим рівнянням можна визначити  $\vec{E}$ , якщо відомий закон зміни  $\varphi$ .

## 2.16 Рівняння Пуассона і Лапласа

Спільне розв'язання рівнянь  $\vec{E} = -grad\varphi$  і  $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$  дозволяє вирішити пряму задачу електростатики (розрахувати поле за заданим розподілом зарядів).

Візьмемо дивергенцію від рівняння  $\vec{E} = -grad\varphi$

$$div\vec{E} = -divgrad\varphi = -\nabla^2\varphi. \quad (2.64)$$

Але  $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ , тому

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \text{ (рівняння Пуассона)}. \quad (2.65)$$

Рівняння Пуассона зв'язує між собою потенціал і об'ємну густину заряду в довільній точці поля. Якщо в розглянутій області  $\rho = 0$ ,

$$\text{то } \nabla^2\varphi = 0 \text{ (рівняння Лапласа)}. \quad (2.66)$$

Це рівняння доповнює вираз  $\vec{E} = -grad\varphi$ .

При розрахунку полів за допомогою цих рівнянь повинні бути однозначно задані граничні умови, і потрібно раціонально вибрати систему координат.

## 2.17 Поляризація діелектриків

Діелектрик – це речовина, основною електричною властивістю якої є здатність поляризуватися в електричному полі.

Будемо вважати, що ідеальні діелектрики (ізолятори) не мають вільних зарядів, тобто їхня провідність дорівнює нулю.

Заряди, що здатні вільно переміщатися під впливом електричного поля і їх переміщення не обмежується внутрішньо молекулярними силами (електрони в металах, іони в газах і електролітах), а також заряди, які внесені в діелектрик ззовні та порушують нейтральність діелектрика, називаються **вільними зарядами**.

Заряди, що входять до складу нейтральних молекул діелектрика, та іони у твердих діелектриках, які можуть переміщатися в межах атома поблизу визначеного положення рівноваги, називаються **зв'язаними зарядами**.

При внесенні діелектрика в електричне поле він поляризується, тобто під дією сил поля відбувається пружний зсув зв'язаних зарядів. При аналізі вводять поняття **густини зв'язаних зарядів**  $\rho_{зв'яз}$ .

Розглянемо атом водню (рис. 2.11). Заряди електрона і ядра будемо вважати нерухомими точковими. Заряд електрона розташований на осі його обертання. Під дією зовнішнього електричного поля центр дії позитивного заряду зміщується по зовнішньому полю, а центр дії негативного заряду – проти поля. В електричному полі нейтральний атом водню поляризується, відбувається деформація електронної оболонки (орбіти). Атом уже не нейтральний, а має власне поле, тому результуюче поле в діелектрику змінюється. Сам атом утворює диполь. Під диполем розуміють два рівних за величиною і протилежних за знаком заряди, жорстко зв'язані між собою, що знаходяться на відстані  $l$  одне від

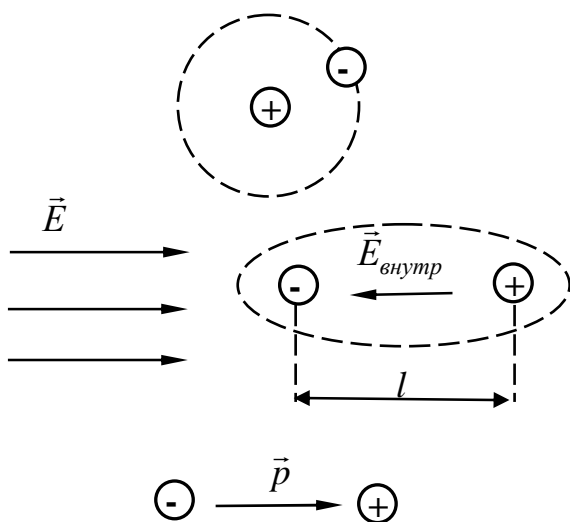


Рис. 2.11

одного. Прийmemo  $l \ll R$  – відстані до точки спостереження. Для характеристики диполя вводять **дипольний момент**  $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$ , причому  $\vec{l}$  направляють до позитивного заряду. При внесенні діелектрика в електричне поле всі диполі орієнтуються і створюють власне поле, яке протилежне зовнішньому, отже, результуюче поле змінюється. Для характеристики поляризованості діелектрика вводять поняття «**вектора поляризації**» (поляризованості) – сумарний дипольний момент усіх дипольних систем, що знаходяться в одиниці об'єму речовини

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (2.67)$$

Якщо діелектрик не знаходиться в зовнішньому електричному полі, то  $\vec{P} = 0$ , тобто діелектрик не поляризований.

## 2.18 Вектор електричної індукції. Теорема Гауса в диференціальній формі для неоднорідного середовища

У загальному випадку поле збуджується як вільними, так і зв'язаними зарядами, тобто

$$\rho_{\text{полн}} = \rho_{\text{віль}} + \rho_{\text{зв'яз}}. \quad (2.68)$$

Можна показати, що  $\rho_{\text{зв'яз}} = -\text{div}\vec{P}$ , тоді відповідно до (2.21)

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{полн}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{віль}} + \rho_{\text{зв'яз}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{віль}} - \text{div}\vec{P}}{\epsilon_0}. \quad (2.69)$$

З отриманого співвідношення випливає, що

$$\text{div}\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\rho_{\text{віль}}}{\epsilon_0} \text{ або } \text{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{віль}}. \quad (2.70)$$

Позначимо  $\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ , тоді

$$\text{div}\vec{D} = \rho_{\text{віль}}. \quad (2.71)$$

**Це теорема Гауса в диференціальній формі для неоднорідного середовища.**

Джерелом вектора  $\vec{D}$  є вільний електричний заряд. Якщо об'ємна густина заряду в даній точці поля додатна ( $\rho_{\text{віль}} > 0$ ), то з нескінченно малого об'єму, що оточує дану точку поля, лінії вектора  $\vec{D}$  виходять. Якщо  $\rho_{\text{віль}} < 0$ , то у нескінченно малий об'єм, в якому є дана точка поля, лінії вектора  $\vec{D}$  входять. Якщо у даній точці поля  $\rho_{\text{віль}} = 0$ , то у даній точці об'єму немає ні витоків, ні стоків ліній вектору  $\vec{D}$ .

Вектор  $\vec{D}$  є розрахунковою величиною, яка називається **вектором електричної індукції** (зсувом електричного поля). Одиниця виміру – Кл/м<sup>2</sup>.

В ізотропних середовищах вектора  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  збігаються за напрямком. При відносно слабких полях для більшості діелектриків вектор  $\vec{P}$  пропорційний напруженості поля, тобто  $\vec{P} = k \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ . У цьому випадку

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + k \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot (1 + k) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} = \epsilon \cdot \vec{E}, \quad (2.72)$$

де  $1 + k = \epsilon_r$  – відносна діелектрична проникність, вона показує у скільки разів поле в вакуумі інтенсивніше, ніж у діелектрику;

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$  – абсолютна діелектрична проникність середовища. Одиниця виміру – Ф/м.

Звідси  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  – відносна діелектрична проникність.

Для вакууму  $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ .

## 2.19 Теорема Гауса в інтегральній формі для неоднорідного середовища

У неоднорідному середовищі відповідно до (2.71)  $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{віль}}$ . Інтегруючи цей вираз за об'ємом, одержимо

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho_{\text{віль}} \cdot dV = q_{\text{віль}}, \quad (2.73)$$

де  $q_{\text{віль}}$  – сумарний вільний заряд, що знаходиться у розглянутому об'ємі.

Переходячи за теоремою Остроградського від інтеграла за об'ємом до інтегралу по поверхні, одержимо

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{віль}}. \quad (2.74)$$

**Це теорема Гауса в інтегральній формі для неоднорідного середовища** – *потік вектора індукції  $\vec{D}$  крізь замкнену поверхню дорівнює сумарному вільному зарядові, що знаходиться всередині цієї поверхні.*

Лінії, дотичні до яких у всіх точках збігаються за напрямком з вектором  $\vec{D}$ , називаються лініями вектора  $\vec{D}$ .

В ізотропних середовищах лінії вектора  $\vec{D}$  збігаються з лініями вектора  $\vec{E}$ , тобто вектор  $\vec{D}$  збігається за напрямком з вектором  $\vec{E}$ .

Лінії індукції варто наносити на рисунок так, щоб кількість ліній, що пронизують одиницю площі, нормальної до вектора  $\vec{D}$ , була пропорційна поточковому вектору через цю площадку.

## 2.20 Граничні умови в електростатичному полі

При переході через границю поділу середовищ вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  змінюються стрибком, тому що стрибкоподібно змінюється діелектрична проникність  $\varepsilon$ .

При розв'язанні задач часто необхідно знати, як поведуться вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  на границях поділу середовищ, тобто знати граничні умови.

Під **граничними умовами** в електричному полі розуміють умови на тих поверхнях, де  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  перетерплюють стрибкоподібні зміни, або на яких значення цих величин відомі із фізичних міркувань.

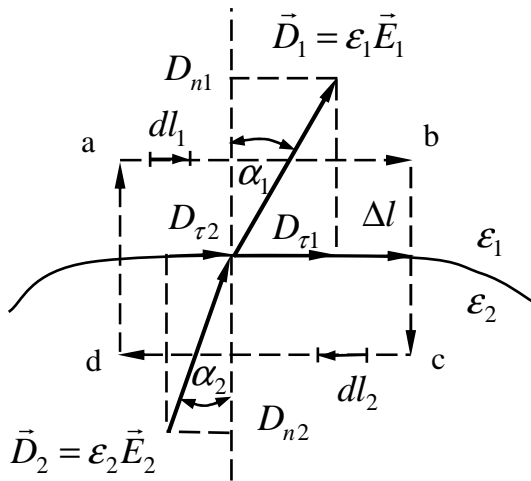


Рис. 2.12

Нехай поверхня є границею поділу двох однорідних і ізотропних середовищ з діелектричними проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  (рис. 2.12). Виберемо на поверхні поділу двох середовищ елемент дуги  $\Delta l$  і побудуємо контур  $abcd$  на цьому елементі дуги. Виберемо довільно напрямок обходу контуру. Циркуляція вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру дорівнює нулю (поле потенційне) (2.48).

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.75)$$

Спрямовуючи відрізки  $ad$  і  $bc$  до нуля, одержимо

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{E}_1 \cdot \hat{d\vec{l}}_1) + E_2 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{E}_2 \cdot \hat{d\vec{l}}_2) = E_{\tau 1} \cdot \Delta l - E_{\tau 2} \cdot \Delta l = 0, \quad (2.76)$$

відкіля

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad (2.77)$$

де  $E_{\tau 1}$  і  $E_{\tau 2}$  – дотичні (тангенціальні) складові вектора  $\vec{E}$  на поверхні поділу (при наявності поверхневого заряду співвідношення такі самі).

Таким чином, **тангенціальні складові вектора  $\vec{E}$  при переході через поверхню поділу двох середовищ незалежно від наявності заряду на поверхні поділу не терплять розриву.**

$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ , тому

$$\frac{D_{\tau 1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\epsilon_2}, \quad (2.78)$$

тобто **тангенціальна складова вектора електричної індукції на границі поділу двох середовищ терпить розрив, змінюється прямо пропорційно діелектричній проникності середовищ незалежно від наявності заряду на поверхні поділа.**

Поводження нормальних складових  $D_n$  і  $E_n$  можна визначити за допомогою теореми Гауса в диференціальній формі, записаної для поверхні поділу (2.71) при заміні об'ємного заряду з питомою густиною  $\rho$  на поверхневий заряд із густиною  $\sigma$ .

Вираз  $\text{div} \vec{D} = \rho$  для поверхні поділу приймає вигляд:

$$\text{div} \vec{D} = \sigma = D_{n1} - D_{n2}, \quad (2.79)$$

де  $\text{div}\vec{D}$  – поверхнева дивергенція, яка визначає поведінку нормальних складових вектора  $\vec{D}$  на поверхні поділу середовищ.

$D_n = \varepsilon \cdot E_n$ , тому одержимо

$$\varepsilon_1 \cdot E_{n1} - \varepsilon_2 \cdot E_{n2} = \sigma. \quad (2.80)$$

В окремому випадку, якщо  $\sigma = 0$ , то для нормальних складових векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  маємо:

$$D_{n1} = D_{n2}; \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.81)$$

Висновки:

а) при наявності поверхневого заряду:

$$E_{\tau1} = E_{\tau2}, \varepsilon_1 \cdot E_{n1} - \varepsilon_2 \cdot E_{n2} = \sigma; \quad (2.82)$$

$$\frac{D_{\tau1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau2}}{\varepsilon_2}, D_{n1} - D_{n2} = \sigma; \quad (2.83)$$

б) при відсутності поверхневого заряду:

$$E_{\tau1} = E_{\tau2}, \varepsilon_1 \cdot E_{n1} = \varepsilon_2 \cdot E_{n2}; \quad (2.84)$$

$$\frac{D_{\tau1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau2}}{\varepsilon_2}, D_{n1} = D_{n2}. \quad (2.85)$$

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{D_{\tau1}}{D_{n1}} = \frac{\varepsilon_1 \cdot E_{\tau1}}{D_{n1}}, \text{tg} \alpha_2 = \frac{D_{\tau2}}{D_{n2}} = \frac{\varepsilon_2 \cdot E_{\tau2}}{D_{n2}}, \text{ а відношення} \quad (2.86)$$

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2.87)$$

Ця формула є **закон переломлення ліній векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  при переході з одного середовища в інше** при відсутності поверхневого заряду.

## 2.21 Провідник в електричному полі

Речовини, що мають вільні заряди, називаються провідниками. У металів вільними зарядами є електрони.

Внесемо в постійне електричне поле провідник. Під дією сили електричного поля вільні заряди будуть переміщатися по всьому об'єму провідника, а зв'язані зміщатися в межах атома. У результаті такого переміщення всередині провідника створюються два протилежно спрямованих поля: одне з них створено в результаті переміщення вільних зарядів (пунктирна стрілка), а інше – зовнішнє (суцільна стрілка) (рис. 2.13).

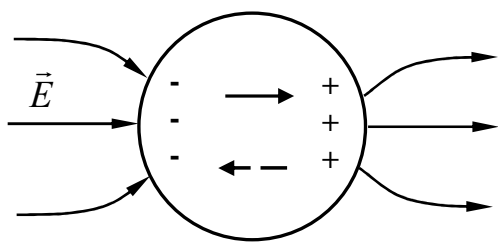


Рис. 2.13

Переміщатися вільні заряди всередині провідника будуть доти, доки напруженість результуючого поля не буде дорівнювати нулю.

Усередині провідного тіла напруженість поля дорівнює нулю ( $E_{внутр} = 0$ ), тому що зовнішнє поле компенсується полем вільних зарядів, розташованих на поверхні тіла.

Ця властивість провідника використовується для екранування електричного поля.

Визначимо величину і напрям вектора  $\vec{E}$  на поверхні провідника, який помістили в електричне поле.

$$E_{внутр} = 0, \text{ тому } E_{\tau внутр} = 0 \text{ і } E_{n внутр} = 0. \quad (2.88)$$

При проходженні через поверхню, що несе заряд, тангенціальна складова не змінюється, значить

$$E_{\tau внутр} = E_{\tau зовн} = 0. \quad (2.89)$$

Нормальна складова терпить зміни при переході через поверхню поділу середовищ, тобто

$$\epsilon_1 \cdot E_{n зовн} - \epsilon_2 \cdot E_{n внутр} = \sigma. E_{n внутр} = 0, \text{ тому } E_{n зовн} = \frac{\sigma}{\epsilon_1}. \quad (2.90)$$

На поверхні провідника існує лише нормальна складова вектора  $\vec{E}$ , тому  $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$ . Тобто різниця потенціалів між будь-якими двома точками провідника дорівнює нулю. Електричне поле всередині провідника відсутнє.

Висновки. В електростатичному полі:

1. Напруженість поля на зовнішній поверхні провідника спрямована нормально до поверхні.
2. Поверхня провідника являє собою граничну поверхню і може бути використана як граничні умови.
3. Вектор напруженості спрямований нормально до поверхні, тому поверхня провідника будь-якої форми є екіпотенціальною поверхнею (потенціал провідника є сталою величиною).

## 2.22 Електрична ємність

Якщо в зарядженому відокремленому провіднику змінити заряд, то зміниться його потенціал, тобто  $q = C \cdot \phi$ . Коефіцієнт пропорційності  $C = \frac{q}{\phi}$ .



У системі двох провідників, заряджених рівними за величиною, але протилежними за знаком зарядами,  $q = C \cdot U$  і  $C = \frac{q}{U}$ .

Коефіцієнт  $C$  називається **електричною ємністю**. Одиниця виміру – фарада (Ф).

$$\varphi = \int_s \frac{\sigma \cdot dS}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}, \text{ тому при зміні розмірів та форми провідника змінюється}$$

густина заряду, а отже і потенціал. Таким чином, потенціал залежить від геометричних розмірів провідника й діелектричної проникності. Електрична ємність також залежить від цих величин. Формально під ємністю провідника або системи провідників розуміють здатність їх накопичувати електричний заряд.

*Чисельно ємність дорівнює зарядові, який потрібно надати провідникові, щоб змінити потенціал на 1 вольт. Електрична ємність характеризує геометричну структуру поля й залежить від середовища, у якому знаходиться поле.*

## 2.23 Теорема про єдино можливий розв'язок рівняння Лапласа. Метод дзеркальних зображень

Електричне поле описується рівняннями Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$  або Пуассона  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ . Ці рівняння є диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Рівняння в частинних похідних мають у загальному випадку безліч лінійно незалежних одне від одного розв'язків. У будь-якій конкретній практичній задачі є єдина картина поля, тобто єдиний розв'язок. Так рівнянню Лапласа задовольняють функції:

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \varphi = C \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \text{ і т.д.} \quad (2.91)$$

З безлічі лінійно незалежних розв'язків, що допускаються рівняннями Лапласа або Пуассона, вибір єдиного, який задовольняє конкретну задачу, роб-

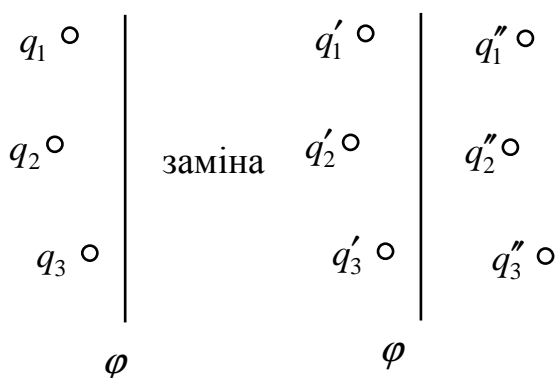


Рис. 2.14

лять за допомогою граничних умов.

**Теорема. Якщо розв'язок рівняння Лапласа задовольняє граничним умовам на границі розглянутої області, то він є єдино можливим.** Отже, для визначення поля за допомогою рівнянь Лапласа потрібно знати граничні умови.

Нехай поле збуджується системою зарядів, і заданий потенціал на границі розглянутої області. Якщо цю систему замінимо системою інших зарядів так, щоб

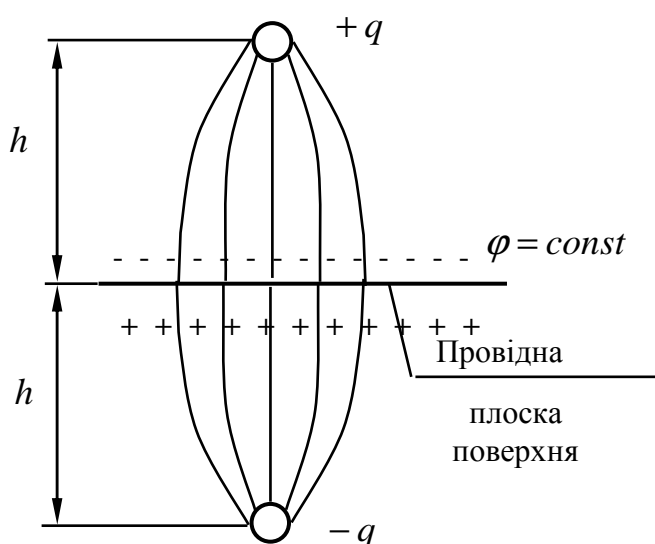


Рис. 2.15

на заданій поверхні (границі) потенціал не змінився, то відповідно до теореми одиницності розв'язок рівняння Лапласа залишиться незмінним. Метод електричних зображень (рис. 2.14) і полягає у тому, що реальну систему зарядів замінюють штучною таким чином, щоб потенціал на граничній поверхні не змінився. Така заміна часто дозволяє полегшити розрахунок не симетричних полів у неоднорідних середовищах.

Окремим випадком цього методу є метод дзеркальних зображень (рис. 2.15).

Поле заряду  $q$  замінюється системою двох зарядів так, щоб картина поля не змінилася (заряд відображається у нижньому півпросторі дзеркально). Поле розраховується як результуюче від зарядів  $+q$  та  $-q$  і границя поділу середовищ не враховується, тобто простір розглядається однорідним, таким, у якому знаходиться заряд  $q$ .

## 2.24 Енергія електричного поля

Поле будь-якої системи зарядів має енергію. Визначимо енергію системи двох точкових зарядів. В точці 1 знаходиться заряд  $q_1$ . Потенціал поля заряду  $q_1$  в точці 2 дорівнює  $\varphi_{12}$ . Помістимо заряд  $q_2$  у точку 2. Енергія заряду  $q_2$  в точці 2 –  $W_{12} = q_2 \cdot \varphi_{12}$ . Це робота, що може виконати поле при переміщенні заряду  $q_2$  з точки 2 у нескінченність. Потенціал точки 1 у полі заряду  $q_2$  дорівнює  $\varphi_{21}$  й енергія заряду  $q_1$  в точці 1 –  $W_{21} = q_1 \cdot \varphi_{21}$ .

$$\varphi_{12} = \frac{q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}; \quad W_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}; \quad \varphi_{21} = \frac{q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}; \quad W_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R}. \quad (2.92)$$

Отже, енергія взаємодії зарядів  $W_{12} = W_{21}$ .

Для зручності енергію записують у симетричній формі

$$W = \frac{1}{2} \cdot (W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot \varphi_{21} + q_2 \cdot \varphi_{12}) \quad (2.93)$$

Якщо ми маємо систему зарядів, то

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \cdot \varphi_1 + q_2 \cdot \varphi_2 + q_3 \cdot \varphi_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi_i \quad (2.94)$$

де  $\varphi_i$  – потенціал у точці розташування заряду  $q_i$ , створений усіма зарядами, що залишилися, крім заряду  $q_i$ . Останнє рівняння не визначає повну енергію системи, тому що не враховується енергія, витрачена на створення зарядів.

Якщо поле збуджується об'ємним зарядом, то за точковий заряд можна прийняти  $dq = \rho \cdot dV$ , якщо поверхневим, о  $dq = \sigma \cdot dS$  і енергія

$$dW = \frac{1}{2} \rho \cdot \varphi \cdot dV + \frac{1}{2} \sigma \cdot \varphi \cdot dS \text{ або } W = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \varphi \cdot dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \cdot \varphi \cdot dS. \quad (2.95)$$

Якщо потенціал  $\varphi$  у першому доданку створений тільки об'ємним зарядом, а в другому – тільки поверхневим, то вираз визначає суму власних енергій.

Якщо потенціал  $\varphi$  у першому доданку створений тільки поверхневим зарядом, а в другому – тільки об'ємним, то рівність визначає взаємну енергію.

Якщо потенціал  $\varphi$  у першому і другому доданках створений об'ємним і поверхневим зарядами, то рівність визначає повну енергію системи.

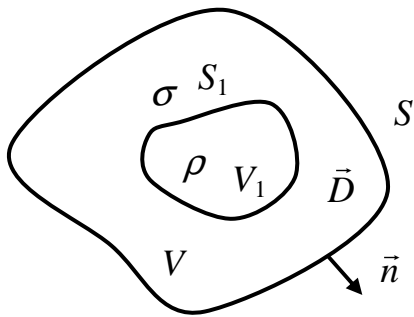


Рис. 2.16

Усі наведені вирази для енергії електричного поля справедливі для стаціонарного поля. Вони вказують на те, що енергія зосереджена в місцях розподілу зарядів, що суперечить матеріалістичному розумінню поля. Тому ці формули, будучи зручним математичним апаратом, не відбивають сутності явища.

Доведемо, що електромагнітне поле має енергію.

Розглянемо об'єм  $V$ , у якому розташовано об'ємний і поверхневий заряди (рис. 2.16).

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \rho \cdot \varphi \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \cdot \varphi \cdot dS_1 \quad (2.96)$$

Враховуючи, що  $\rho = \text{div} \vec{D}$  і  $\sigma = \vec{D} \cdot \vec{n}$  (тому, що напруженість електричного поля на зовнішній поверхні провідника (2.90) становить  $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_1}$ ), одержимо

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} \varphi \cdot \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS_1 = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV - \frac{1}{2} \int_{S_1} \varphi \cdot \vec{D} \cdot \vec{S}_1 \quad (2.97)$$

Тут  $\vec{D} \cdot \vec{S}_1 = -\vec{D} \cdot \vec{n}$ .

Якщо застосуємо теорему Остроградського, тоді маємо:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV - \frac{1}{2} \int_{V_1} \text{div}(\varphi \vec{D}) \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV - \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV - \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{D} \cdot \text{grad} \varphi \cdot dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{D} \cdot \text{grad} \varphi \cdot dV = -\frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Тут  $\text{div}(\varphi \vec{D}) = \varphi \cdot \text{div} \vec{D} + \vec{D} \cdot \text{grad} \varphi$  і  $\text{grad} \varphi = -\vec{E}$ .

Таким чином,

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \quad (2.99)$$

Ця формула справедлива і для стаціонарних і для змінних полів.

Рівняння показує, що носієм енергії є електростатичне поле. Енергія електростатичного поля поширюється у всьому просторі, де є поле.

В однорідних і ізотропних середовищах  $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ , тоді

$$W = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon \cdot E^2 dV, \quad (2.100)$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2. \quad (2.101)$$

Енергія одиниці об'єму

$$W_0 = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}. \quad (2.102)$$

Вимірюється енергія в джоулях (Дж).

Енергія зарядженого провідника із зарядом  $q$ :

$$W = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \varphi, \text{ але } q = C \cdot \varphi, \text{ тому } W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \varphi^2 \text{ або}$$

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2. \quad (2.103)$$

Знаючи енергію, можна визначити силу, що діє на заряджений провідник

$$\vec{F} = \pm \frac{\partial W}{\partial a}, \text{ де } F - \text{узагальнена сила, } a - \text{узагальнена координата} - \text{координата,}$$

уздовж якої відбувається результуюче нескінченно мале переміщення під дією сили  $F$ .

## Розділ 3. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 3.1 Електричний струм у провідному середовищі

Відповідно до електронної теорії провідності метали мають вільні електрони, що розподілені у вигляді електронної хмари і можуть переміщатися по всьому об'єму провідника.

Якщо під впливом зовнішніх джерел в провідному середовищі створено електричне поле, то буде протікати електричний струм.

Упорядкований рух вільних електронів у металі й іонів у рідині під дією електричного поля прийнято називати **струмом провідності**.

При своєму русі електрони «зіштовхуються» з іонами кристалічних ґрат провідника і передають частину енергії, придбаної під дією поля, що приводить до нагрівання провідника.

Таким чином, провідник чинить опір протіканню струму.

Властивість середовища, що характеризує його здатність проводити струм, називається **питомою провідністю**  $\gamma$ . Питома провідність  $\gamma$  залежить від фізичних властивостей матеріалу і температури. Вона вимірюється в сименсах на метр ( $\text{См}/\text{м}$ ).

Чисельно електричний струм визначається величиною заряду, що проходить через заданий перетин в одиницю часу

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Струм  $I$  – величина скалярна, вимірюється в амперах, А.

### 3.2 Густина електричного струму

Для характеристики струму в кожній точці провідника уводиться векторна величина – густина струму  $\vec{j}$ .

**Густиною струму** називають кількість електрики, що проходить за одиницю часу через одиницю площі провідника, розташованої перпендикулярно векторові густини струму.

В ізотропному середовищі напрямок вектора густини струму збігається з напрямком вектора  $\vec{E}$ .

В однорідному провіднику, де струм рівномірно розподілений по перетину,  $j = \frac{I}{S}$ . Одиниця виміру густини струму –  $\text{А}/\text{м}^2$ .

У загальному випадку густина струму  $j$  не буде однакою у всіх точках перетину провідника

$$j = \frac{dI}{dS_n}. \quad (3.2)$$

Напрямок вектора  $\vec{j}$  вибирається таким чином, щоб він збігався з напрямком руху позитивних зарядів.

Із (3.2) випливає

$$dI = j \cdot dS_n = j \cdot dS \cos(\hat{j} d\vec{S}) = \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (3.3)$$

Звідси

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (3.4)$$

Таким чином, *струм є потоком вектора густини струму*.

При протіканні постійних струмів усередині провідних тіл і поза ними існують постійні магнітні поля. Ці поля незмінні у часі, тому в полі не виникає явище електромагнітної індукції, тобто магнітне поле, що створене постійним струмом не впливає на електричне поле постійного струму. Тому електричне і магнітне поле постійного струму будемо розглядати окремо одне від одного.

Постійним **струмом** називається струм, величина і напрямок якого в різ-

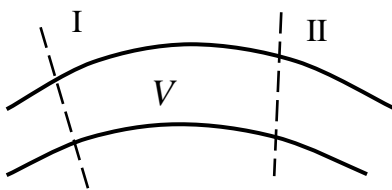


Рис. 3.1

них перетинах провідника не змінюються в часі.

Отже, струм, що протікає через перетин I дорівнює струму, що протікає через перетин II (див. рис. 3.1),

тобто в стаціонарному режимі будь-який об'єм провідника зберігає незмінним число зарядів, що знаходяться усередині його, тобто

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.5)$$

За теоремою Остроградського  $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} dV$ , звідки

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad (3.6)$$

Це рівняння називається **законом Кірхгофа-Ленца в диференціальній формі** і говорить про те, що лінії вектора густини струму завжди замкнені, тобто немає ні стоків, ні джерел вектора  $\vec{j}$ .

Рівняння

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{і} \quad \text{div} \vec{j} = 0 \quad (3.7)$$

називаються **рівняннями безперервності вектора густини струму  $\vec{j}$** .

### 3.3 Закони Ома і Джоуля-Ленца в диференціальній формі

Виділимо в провіднику, по якому тече струм  $I$ , нескінченно малий циліндр із основою  $dS$  і утворюючою  $dl$  (див. рис. 3.2).

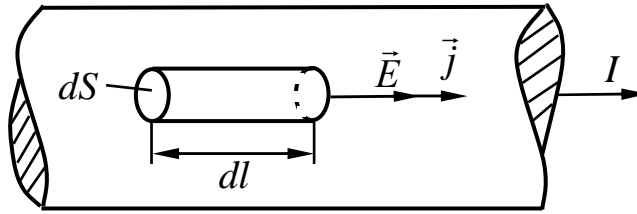


Рис. 3.2

Опір виділеного циліндра –  $R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dl}{dS}$ ,

де  $\gamma$  – питома провідність провідника.

Розташуємо цей циліндр так, щоб напруженість поля в ньому була спрямована паралельно утворюючої. В силу малості об'єму можна вважати, що напруженість електричного поля  $\vec{E}$  однакова у всьому елементарному об'ємі. Елементи  $dS$  еквіпотенціальні, різниця потенціалів між ними дорівнює  $dU$  (2.57).

Закон Ома у застосуванні до цього циліндра

$$dI = \frac{d \cdot U}{R}. \text{ Але } d \cdot U = E_l \cdot dl = \vec{E} d\vec{l}, \text{ а } R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dl}{dS}. \quad (3.8)$$

$$\text{Виходить, що } dI = \frac{d \cdot U}{R} = \frac{\vec{E} d\vec{l} \cdot \gamma \cdot dS}{dl} = \vec{E} \cdot \gamma \cdot dS, \text{ або } \frac{dI}{dS} = \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}.$$

Таким чином **закон Ома в диференціальній формі** має вигляд

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}. \quad (3.9)$$

Нехай по провіднику з питомою провідністю  $\gamma = const$  протікає постійний струм  $I$ . Виділимо в провіднику відрізок довжиною  $l$ , в якому торці є еквіпотенціальні поверхні. Густина постійного струму в різних перетинах постійна, тому

$$j = \frac{I}{S}. \quad (3.10)$$

Різниця потенціалів між еквіпотенціальними поверхнями (2.56)

$$U = \int_l E_L \cdot dl = \int_l \frac{j}{\gamma} \pm \cdot dl = \frac{j \cdot l}{\gamma} = \frac{I \cdot l}{\gamma \cdot S} = R \cdot I \quad (3.11)$$

$$\text{де } R = \frac{l}{\gamma \cdot S}. \quad (3.12)$$

Отже одержимо  $U = R \cdot I$  – **закон Ома в інтегральній формі**.

Визначимо енергію, що виділяється в елементі об'єму провідника (див. рис. 3.2). Якщо струм через основу елемента об'єму  $dI = \vec{j} d\vec{S}$ , а різниця потенціалів між торцями розглянутого об'єму  $d \cdot U = \vec{E} d\vec{l}$ , то енергія, що поглинається за одиницю часу, буде

$$dP = dI \cdot dU = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{E} d\vec{l} = \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (3.13)$$

Енергія, що виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу

$$P_0 = \frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \cdot E^2 = \frac{j^2}{\gamma} = \rho \cdot j^2. \quad (3.14)$$

Енергію, що виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу, називають питомою потужністю.

Рівняння  $P_0 = \frac{j^2}{\gamma} = \rho \cdot j^2$  є **законом Джоуля – Ленца в диференціальній формі**.

Якщо в розглянутому об'ємі  $\rho = const$ ,  $j = const$ , то

$$P_0 = R \cdot I^2. \quad (3.15)$$

Отримане рівняння – це **закон Джоуля – Ленца в інтегральній формі**.

### 3.4 Закони Кірхгофа

#### **Перший закон Кірхгофа.**

Проведемо замкнену поверхню навколо точки розгалуження струму (див. рис. 3.3).

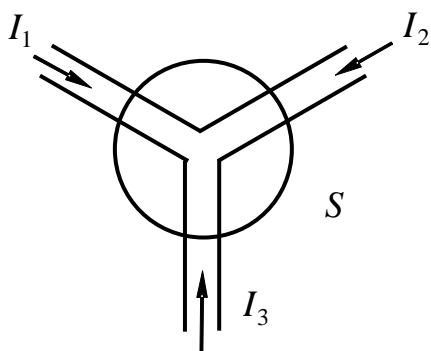


Рис. 3.3

Відповідно до рівняння безперервності  $\text{div} \vec{j} = 0$ .

Візьмемо інтеграл за об'ємом, обмеженим поверхнею  $S$ .

$$\int_V \text{div} \vec{j} dV = 0. \quad (3.16)$$

Враховуючи теорему Остроградського, має-

$$\text{мо: } \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 = \sum_{i=1}^n I_i \quad (3.17)$$

Це **перший закон Кірхгофа** – алгебрична сума струмів у вузлі розгалуження дорівнює нулю.



### Другий закон Кірхгофа.

Головною відмінністю поля постійного струму є те, що для підтримки струму потрібне безперервне поповнення енергії від сторонніх джерел. При протіканні струму відбуваються втрати енергії і без поповнення енергії струм швидко припиняється. Таким чином, у тих точках, де діє, крім електростатичного поля, поле сторонніх джерел, результуюча напруженість  $E_p$  дорівнює геометричній сумі цих полів

$$\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_{cm}, \quad (3.18)$$

де  $\vec{E}$  – напруженість електростатичного поля;

$\vec{E}_{cm}$  – напруженість, що викликана полем стороннього джерела.

Під стороннім електричним полем розуміють електричне поле, обумовлене хімічними, електрохімічними, тепловими, термоелектричними процесами.

Відповідно до закону Ома (3.9)

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}_p = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{cm}) \quad (3.19)$$

Це узагальнення закону Ома або другий закон Кірхгофа в диференціальній формі.

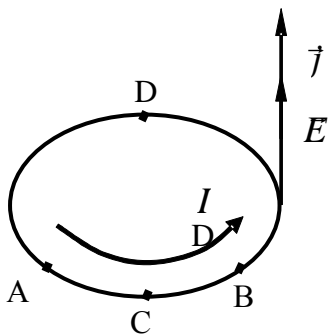


Рис. 3.4

З останнього рівняння можна одержати і другий закон Кірхгофа в інтегральній формі.

Для цього розглянемо замкнений контур (рис. 3.4). Напрямки векторів  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  збігаються. Нехай на ділянці АСВ діють сторонні джерела. Тоді  $\vec{j} = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{cm})$ . Помножимо обидві частини рівняння на  $\frac{d\vec{l}}{\gamma}$  і візьмемо інтеграл по замкнутому контуру.

$$\oint_l \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_l \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l} \quad (3.20)$$

У силу потенційності електричного поля

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ тому}$$

$$\oint_l \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \oint_l \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l}. \quad (3.21)$$

Розіб'ємо інтеграл на ділянки АСВ і ВДА і, помноживши чисельник і знаменник на перетин провідника, одержимо:

$$\oint_l \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{cm} = \int_{ACB} \frac{\vec{j} \cdot \vec{S} \cdot d\vec{l}}{\gamma \cdot S} + \int_{BDA} \frac{\vec{j} \cdot \vec{S} \cdot d\vec{l}}{\gamma \cdot S}, \quad (3.22)$$

де  $\varepsilon_{cm}$  – електрорушійна сила стороннього поля.

Беручи до уваги, що  $j \cdot S = I$ , а  $\int \frac{dl}{\gamma \cdot S} = R$ , одержимо

$$\varepsilon_{cm} = I \cdot (R_0 + R_{\text{вн}}), \quad (3.23)$$

де  $R_0$  – опір кола ділянки ВСА, де діє стороння ЕРС;

$R_{\text{вн}}$  – опір кола ділянки ADB, де діє електростатичне поле.

Рівняння (3.23) – це **другий закон Кірхгофа в інтегральній формі**.

### 3.5 Рівняння Лапласа для електричного поля у провідному середовищі

Так само, як і в електростатичному полі, у провідному середовищі  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ .

З рівняння безперервності для постійного струму  $\text{div}\vec{j} = \text{div}\gamma\vec{E} = 0$ .

Якщо провідність середовища  $\gamma$  не змінюється від точки до точки, тобто якщо середовище однорідне і ізотропне,  $\gamma$  можна винести за знак дивергенції

$$\text{div}\vec{j} = \text{div}\gamma \cdot \vec{E} = \gamma \cdot \text{div}\vec{E} = 0, \text{ звідси}$$

$$\text{div}\vec{E} = 0, \text{ або } \text{div}(-\text{grad}\varphi) = \nabla^2\varphi = 0. \quad (3.24)$$

Таким чином, електричне поле в однорідному провідному середовищі є полем **потенційним**. У ньому, в областях, не зайнятих джерелом,  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ , або  $\text{rot}\vec{E} = 0$  (поле не вихрове).

### 3.6 Граничні умови

При відсутності сторонніх ЕРС у провідному середовищі поле постійних струмів описується тими ж рівняннями, що й електростатичне поле, а граничні умови аналогічні граничним умовам електростатичного поля:

1) тангенціальна складова вектора напруженості поля на границі поділу двох середовищ безперервна

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad (3.25)$$

2) нормальна складова вектора густини струму  $\vec{j}$  на границі поділу двох середовищ безперервна

$$\vec{j}_{n1} = \vec{j}_{n2}. \quad (3.26)$$

$$j = \gamma \cdot E, \text{ тому } \gamma_1 \cdot E_{n1} = \gamma_2 \cdot E_{n2},$$

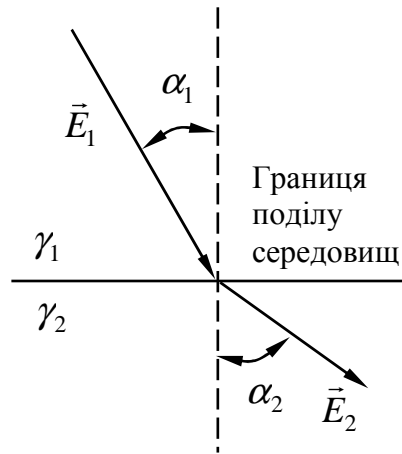


Рис. 3.5

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \text{ і } \frac{j_{\tau 1}}{\gamma_1} = \frac{j_{\tau 2}}{\gamma_2}, \quad (3.27)$$

тобто при переході через границю поділу середовищ нормальні складові вектора напруженості і тангенціальні складові вектора густини струму терплять розрив.

$$\vec{j}_{n1} = \vec{j}_{n2} \text{ і } E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \text{ тому (див. рис. 3.5) } E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2,$$

та  $\gamma_1 \cdot E_1 \cdot \cos \alpha_1 = \gamma_2 \cdot E_2 \cdot \cos \alpha_2$ . Звідки

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \quad (3.28)$$

Це рівняння – **закон заломлення** ліній вектора густини струму на границі поділу двох середовищ.

### 3.7 Аналогія між електричним полем постійного струму і електростатичним полем

Електростатичне поле створюється електростатичними зарядами, незмінними в часі і нерухомими в просторі. Електричне поле в провідному середовищі – це поле, в якому електричні заряди мають упорядкований рух під дією зовнішнього джерела. Проте, між двома полями можна провести формальну аналогію.

<i>Електростатичне поле</i>	<i>Поле постійного струму, де відсутні сторонні джерела</i>
$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$	$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$
$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$ при $\sigma = 0$ і $\rho = 0$	$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$
$\nabla^2 \varphi = 0$ при $\sigma = 0$ і $\rho = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
$\text{rot} \vec{E} = 0$	$\text{rot} \vec{E} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$
$Q = C \cdot U$	$I = G \cdot U$

$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$
--------------------------------	--------------------------------

Граничні умови

$D_{n1} = D_{n2}$ при $\sigma = 0$	$j_{n1} = j_{n2}$
$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ при $\sigma = 0$	$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$	$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$
$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}$	$\frac{j_{\tau 1}}{\gamma_1} = \frac{j_{\tau 2}}{\gamma_2}$
$\frac{tg \alpha_1}{tg \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{tg \alpha_1}{tg \alpha_2}$

На ділянках, де немає сторонніх джерел, поле постійного струму описується рівняннями, аналогічними рівнянням електростатичного поля. У цих рівняннях  $\gamma$  відповідає  $\varepsilon$ ,  $G \rightarrow C$ ,  $I \rightarrow Q$ ,  $\vec{j} \rightarrow \vec{D}$ .

Тому поле постійного струму можна досліджувати за формулами електростатики при відповідних замінах величин.

Аналогію між електричним полем постійного струму й електростатичним полем можна провести в такий спосіб.

У провіднику поле постійного струму потенційне і задовольняє рівнянню Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Отже, для визначення потенціалу поля необхідно розв'язати рівняння Лапласа і врахувати граничні умови.

У діелектрику електростатичне поле також описується рівнянням Лапласа (при відсутності вільних зарядів).

Тому, якщо дві однакові обмежені ділянки – провідна (без сторонніх джерел) і діелектрична (без вільних зарядів) – мають на граничній поверхні однаковий розподіл потенціалу, то усередині кожної з цих ділянок розподіл потенціалу також буде співпадаючим.

## Розділ 4. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 4.1 Електричне і магнітне поле як дві сторони єдиного електромагнітного поля

Дослідами встановлено, що будь-який заряд, що рухається (не має значення, чи йде мова про струми в провідниках, електролітах, газах, газових розрядах, або у випадках, коли заряди вільно летять), поза залежністю від причини, що викликала його рух, створює магнітне поле, що у свою чергу діє на інші заряди, що рухаються.

Магнітне поле створюється і постійними магнітами, але й у цьому випадку виникнення магнітного поля зв'язано з рухом зарядів, тобто з внутрішньо-атомним рухом елементарних зарядів. У будь-якій речовині елементарні електричні заряди знаходяться в безперервному тепловому русі, але не створюють магнітного поля, тому що тепловий рух є не упорядкованим і магнітні поля окремих зарядів взаємно компенсуються.

Якщо в будь-якому об'ємі простору немає зарядів, але електричне поле змінюється у часі, то в цьому випадку також виникає магнітне поле.

Магнітне поле окремо від електричного існувати не може, тому що заряди, які є одним з видів матерії, знаходяться в безперервному русі і створюють одночасно електричне і магнітне поля. Таким чином, магнітне поле – це одна зі сторін електромагнітного поля, що є особливим видом матерії. Магнітне поле виявляється в силах взаємодії між зарядами, що рухаються, у виникненні ЕРС індукції, у явищі магнітострикції (зміна розмірів тіл при розміщенні їх у магнітному полі) і тому подібне.

Магнітне поле створюється зарядом, що рухається, тому в основу теорії магнітного поля покладений закон про магнітні властивості елементарного заряду, що рухається.

### 4.2 Індукція магнітного поля

Для характеристики магнітного поля з погляду його інтенсивності введено поняття вектора магнітної індукції. Це силова характеристика поля.

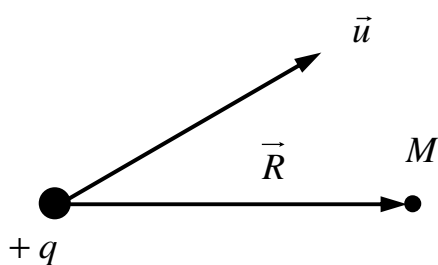


Рис. 4.1

**Магнітна індукція** – це фізична величина, що характеризує поле з погляду можливості виникнення сили, яка діє на елементарний заряд, що рухається, або на елемент струму, поміщений у дану точку поля.

Вектор магнітної індукції аналогічний ве-

кторові напруженості електричного поля  $\vec{E}$  і позначається буквою  $\vec{B}$ .

Розглянемо заряд  $q$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{u}$  (див. рис. 4.1).

Нехай  $\vec{R}$  – радіус – вектор, що з'єднує точку, в якій знаходиться заряд із точкою спостереження  $M$  в кожний момент часу.

Досліди показують, що вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}$  в точці  $M$  визначається як:

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot q \cdot \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3}, \quad (4.1)$$

де  $\mu_a$  – абсолютна магнітна проникність, розмірність її –  $\frac{\Gamma_H}{M}$ .

$$\mu_a = \mu_r \cdot \mu_0. \quad (4.2)$$

$\mu_r$  – відносна магнітна проникність – величина безрозмірна;

$\mu_0$  – магнітна стала, яка дорівнює  $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M}$ , характеризує магнітні властивості вакууму.

Відносна магнітна проникність  $\mu_r$  – величина, що показує, у скільки разів магнітна індукція поля  $B$  в даному середовищі більше, ніж магнітна індукція у вакуумі.

Модуль магнітної індукції  $|\vec{B}|$  прямо пропорційний заряду  $q$  і модулю швидкості  $|\vec{u}|$  та обернено пропорційний квадратові відстані від заряду, що рухається, до точки спостереження. Одиницею виміру індукції є тесла (Тл).

### 4.3 Закон Біо-Савара

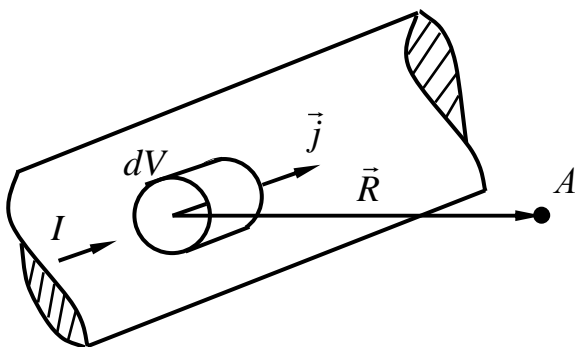


Рис. 4.2

Розглянемо провідник, по якому тече постійний струм  $I$  із густиною  $\vec{j}$  (див. рис. 4.2). Визначимо індукцію магнітного поля  $\vec{B}$  в точці  $A$ .

Для цього виділимо елементарний об'єм провідника  $dV$ . В об'ємі  $dV$  зосереджений заряд  $dq = \rho \cdot dV$ . Тоді індукція магнітного поля, яка створена точковим зарядом  $dq$ , буде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot dq \cdot \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3}. \quad (4.3)$$

Внесемо скалярну величину  $\rho$  під знак векторного добутку

$$d\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[\rho \cdot \vec{u}, \vec{R}]}{R^3} \cdot dV, \text{ але } \rho \cdot \vec{u} = \vec{j}, \text{ тоді}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} \cdot dV. \quad (4.4)$$

Отримане співвідношення для індукції, створеної зарядами, що рухаються в елементі об'єму, має назву **закону Біо-Савара**. Закон Біо-Савара не може бути перевірений експериментально, тому що неможливо створити постійний струм в окремому ізольованому елементі незалежно від замкнутого кола. Але експериментальна перевірка наслідків, що випливають з даного закону, підтверджує його справедливість.

Проінтегруємо останнє співвідношення за об'ємом провідника, тоді одержимо величину індукції  $\vec{B}$  в точці А, яка створена струмом  $I$ .

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_v \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} \cdot dV. \quad (4.5)$$

Якщо розміри поперечного переріза провідника малі в порівнянні з його довжиною і відстанню до точки спостереження, то такий провідник вважають **лінійним**.

Для випадку протікання струму  $I$  по лінійному провіднику існує формальне правило переходу у формулах від об'ємного струму до лінійного струму і навпаки

$$\vec{j} \rightarrow d\vec{l}, \quad dV \rightarrow I, \quad (4.6)$$

де  $d\vec{l}$  – елемент довжини провідника.

Якщо застосувати це правило до закону Біо-Савара, то для випадку лінійного струму цей закон буде мати такий вигляд:

$$\vec{B} = \frac{\mu_a \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_l \frac{[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}. \quad (4.7)$$

#### 4.4 Магнітний потік і його неперервність

Потік вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  крізь поверхню  $S$  називають **магнітним потоком**.

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.8)$$

Магнітний потік вимірюється у веберах (Вб). Магнітний потік величина скалярна.

Досліди показують, що магнітний потік, що ввійшов усередину будь-якого об'єму, дорівнює магнітному потокові, що вийшов з того ж об'єму.

Магнітний потік крізь замкнену поверхню завжди дорівнює нулю

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.9)$$

**Це інтегральна форма принципу неперервності магнітного потоку.**

Застосуємо теорему Остроградського (2.36)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = 0. \quad (4.10)$$

Це рівняння справедливе для будь-якого об'єму. Отже,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4.11)$$

**Це диференціальна форма принципу неперервності магнітного потоку.**

Таким чином, дивергенція магнітного поля дорівнює нулю, тобто не існує ні джерел, ні стоків вектора  $\vec{B}$ , лінії вектора  $\vec{B}$  завжди замкнені.

#### 4.5 Сили магнітного поля, які діють на заряд, що рухається

Якщо заряджена частка входить у магнітне поле з деякою швидкістю, то під дією сил поля траєкторія її руху зміниться. Як показують досліди, сила, яка діє на заряджену частку, що рухається, спрямована перпендикулярно до швидкості  $\vec{u}$  і напрямку магнітної індукції  $\vec{B}$  і дорівнює  $\vec{F} = q[\vec{u}, \vec{B}]$ .

Сила  $\vec{F}$  дорівнює нулю, коли частка рухається уздовж ліній вектора  $\vec{B}$  і кут між векторами  $\vec{u}$  і  $\vec{B}$  дорівнює нулю або  $180^\circ$ . У цьому випадку рух відбувається за інерцією, з постійною швидкістю, яка дорівнює початковій швидкості частки. Сила  $\vec{F}$  буде найбільшою, якщо  $\vec{u} \perp \vec{B}$ . У цьому випадку

$$F_{\max} = q \cdot u \cdot B. \quad (4.12)$$

Сила  $\vec{F}$  завжди спрямована перпендикулярно до швидкості  $\vec{u}$ , тому вона не виконує роботи, не змінює абсолютної величини швидкості, отже, не змінює кінетичну енергію частки, що рухається. Рівняння руху частки визначається за законом Ньютона

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = q \cdot [\vec{u}, \vec{B}], \quad (4.13)$$

де  $m$  – маса частки.  $\vec{F} \perp \vec{u}$ , тому і прискорення  $\frac{d\vec{u}}{dt} \perp \vec{u}$ .

Отже, рух буде відбуватися з незмінною швидкістю  $u$ , змінюватися буде тільки напрямок вектора швидкості.



Нормальне прискорення, радіус кривизни траєкторії  $R_0$  і швидкість руху зв'язані співвідношенням:

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^2}{R_0}. \quad (4.14)$$

1) Якщо  $B = \text{const}$ ,  $\vec{u} \perp \vec{B}$ ,  $F_{\text{max}} = q \cdot u \cdot B$ .

При відсутності інших сил рух частки буде відбуватися по окружності, що лежить у площині, перпендикулярній до  $\vec{B}$ .

При цьому радіус окружності

$$R_0 = \frac{u^2}{\frac{du}{dt}} = \frac{m \cdot u^2}{F_{\text{max}}} = \frac{m \cdot u}{q \cdot B} \quad (4.15)$$

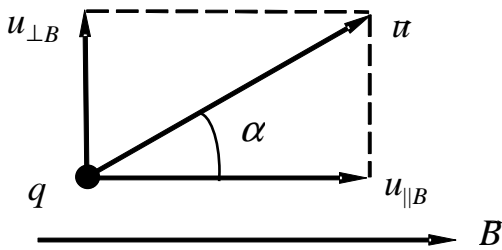


Рис. 4.3

Чим більше маса  $m$ , тим більше радіус і менше кривизна траєкторії.

$$\text{Період обертання } T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_0}{u}.$$

2) Якщо початкова швидкість  $\vec{u}$  частки складає кут  $\alpha$  з напрямком вектора  $\vec{B}$  (див. рис. 4.3), то вектор швидкості можна розкласти на

дві складові:

$$u_{\parallel B} = u \cdot \cos \alpha \quad \text{та} \quad u_{\perp B} = u \cdot \sin \alpha.$$

Сила, що діє на частку

$$F = q \cdot u_{\perp B} \cdot B \quad (4.16)$$

Складова швидкості  $u_{\parallel B}$  незмінна за величиною і напрямком. Складова  $u_{\perp B}$ , залишаючись незмінною за величиною, змінює свій напрямок під дією сили  $F$ . Таким чином, рух частки складається з прямолінійного руху зі швидкістю  $u_{\parallel B}$  уздовж ліній вектора  $\vec{B}$  і рівномірного руху по окружності навколо цих

ліній зі швидкістю  $u_{\perp B}$ . Траєкторія результуючого руху буде гвинтовою лінією (див. рис. 4.4).

Радіус  $R_0$  і крок  $h$  є функції кута  $\alpha$ :

$$R_0 = \frac{m \cdot u_{\perp B}}{q \cdot B} = \frac{m \cdot u \cdot \sin \alpha}{q \cdot B}, \quad (4.17)$$

$$h = u_{\parallel B} \cdot T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{m \cdot u \cdot \cos \alpha}{q \cdot B}, \quad (4.18)$$

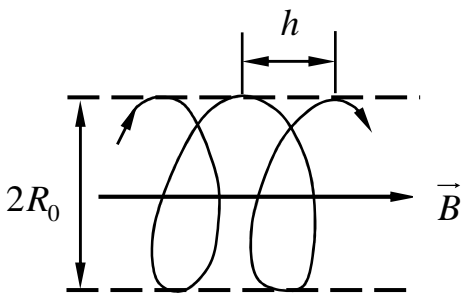


Рис. 4.4

де  $T$  – період обертання. Можливість керування рухом часток у магнітному полі використовується в прискорювачах заряджених часток, для фокусування електронного пучка в електронно-променевих трубках і інших пристроях.

#### 4.6 Сили магнітного поля, що діють на провідник зі струмом

Нехай провідник із густиною струму  $\vec{j}$  знаходиться в магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  (див. рис. 4.5). Виділимо в провіднику об'єм  $dV$ .

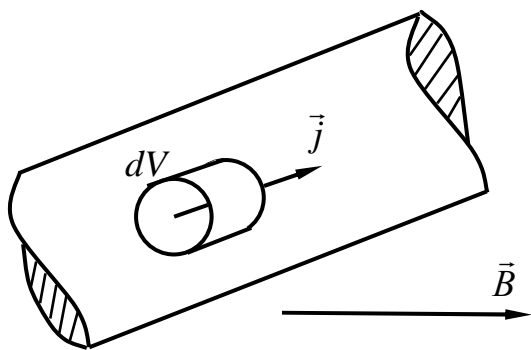


Рис. 4.5

Якщо об'ємна густина заряду  $\rho$ , то в елементі  $dV$  зосереджується заряд  $dq = \rho dV$ . Вважаючи  $dq$  точковим зарядом, одержимо

$$d\vec{F} = dq[\vec{u}, \vec{B}] = \rho dV[\vec{u}, \vec{B}], \text{ але } \rho\vec{u} = \vec{j},$$

тому

$$d\vec{F} = [\rho\vec{u}, \vec{B}]dV = [\vec{j}, \vec{B}]dV. \quad (4.19)$$

Проінтегрував останнє рівняння за об'ємом провідника, одержимо вираз для сили, що діє на провідник зі струмом

$$\vec{F} = \int_V [\vec{j}, \vec{B}]dV. \quad (4.20)$$

Для випадку лінійного струму, використовуючи правило переходу від об'ємного струму до лінійного ( $\vec{j} \rightarrow d\vec{l}$ ,  $dV \rightarrow I$ ), маємо аналог

$$\vec{F} = I \cdot \int_l [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (4.21)$$

#### 4.7 Ротор векторної величини. Теорема Остроградського-Стокса

**Дивергенція вектора** дає уяву про структуру векторного поля з погляду наявності джерел або стоків поля в кожній його точці.

Не менш важливою характеристикою векторного поля є здатність сил поля виконувати роботу.

Нехай під дією сил поля вектора  $\vec{a}$  тіло перемістилося на відстань  $d\vec{l}$ .

Тоді елементарна робота буде

$$dA = \vec{a}d\vec{l}. \quad (4.22)$$

Робота сил векторного поля по замкненому шляху називається **циркуляцією** вектора  $\vec{a}$ .

$$A = \oint_l \vec{a} d\vec{l} . \quad (4.22)$$

Циркуляція вектора  $\vec{a}$  не характеризує векторне поле в кожній його точці з погляду наявності циркуляції (вихру) у цій точці, тому що інтегрування ведеться по замкненому шляху.

Для характеристики векторного поля з погляду наявності циркуляції (вихру) у кожній його точці введено поняття **ротора** векторної величини.

**Ротор вектора  $\vec{a}$  в даній точці визначається як межа відносини лінійного інтеграла вектора  $\vec{a}$  за контуром, що охоплює площадку  $\Delta S$ , до величини цієї площадки, коли  $\Delta S$  прямує до нуля. При цьому площадка повинна займати з усіх можливих положень таке, при якому ця межа має найбільше значення.** Таким чином,

$$rot \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S} . \quad (4.23)$$

Якщо  $\oint_l \vec{a} d\vec{l} = 0$ , то  $rot \vec{a} = 0$ .

Ротор – величина векторна.

Напрямок ротора збігається з напрямком нормалі до площадки  $\Delta S$ , причому за додатний напрямок ротора вектора  $\vec{a}$  прийнято вважати напрямок переміщення осі штопора при повороті його рукоятки убік додатного обходу контуру. Визначення ротора, так само як і визначення дивергенції являє собою операцію диференціювання за координатами.

У прямокутній системі координат

$$rot \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla \vec{a}] . \quad (4.24)$$

Відповідно до **теорема Остроградського-Стокса** потік вектора  $rot \vec{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  можна замінити інтегралом від вектора  $\vec{a}$  за замкненим контуром, що обмежує цю поверхню

$$\int_S rot \vec{a} d\vec{S} = \oint_l \vec{a} d\vec{l} . \quad (4.25)$$

## 4.8 Вектор-потенціал магнітного поля

Для зручності аналізу і розрахунку магнітних кіл уводять векторну величину, що за аналогією з потенціалом  $\varphi$  називають **векторним потенціалом**  $\vec{A}$ .

Одержимо співвідношення, що визначають векторний потенціал, а також зв'язок між векторним потенціалом  $\vec{A}$  та індукцією магнітного поля  $\vec{B}$ .

Якщо по провіднику протікає струм із густиною  $\vec{j}$ , то відповідно до закону Біо-Савара (4.5):

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV. \quad (4.26)$$

Інтегрування ведеться за об'ємом провідника.

Зробимо перетворення підінтегральної функції, вважаючи, що точка джерела вектора  $\vec{R}$  фіксована, а точка спостереження є змінною. Тоді по точці спостереження

$$\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}, \text{ отже} \quad (4.27)$$

$$\frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} = -\left[\vec{j}, \text{grad}\frac{1}{R}\right] = \left[\text{grad}\frac{1}{R}, \vec{j}\right]. \quad (4.28)$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right) = \frac{1}{R} \cdot \text{rot} \vec{j} + \left[\text{grad}\frac{1}{R}, \vec{j}\right]. \quad (4.29)$$

Так як всі операції беруться по точці спостереження, у якій  $\vec{j} = 0$  і  $\vec{j}$  не залежить від координати точки спостереження, то  $\text{rot} \vec{j} = 0$ , тому

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right) = \left[\text{grad}\frac{1}{R}, \vec{j}\right] = \left[\frac{\vec{j}, \vec{R}}{R^3}\right]. \quad (4.30)$$

Замінімо підінтегральний вираз

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right) dV. \quad (4.31)$$

Так як інтегрування ведеться за об'ємом провідника, а операція  $\text{rot}$  – по точці спостереження, тому ці операції незалежні, і їх можна змінювати місцями

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right) dV = \text{rot} \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{\vec{j}}{R} dV = \text{rot} \vec{A}, \quad \text{тобто} \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (4.32)$$

$$\text{де} \quad \vec{A} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{\vec{j}}{R} dV. \quad (4.33)$$

Перейдемо до лінійного струму за правилом  $\vec{j} \rightarrow d\vec{l}$ ,  $dV \rightarrow I$ , тоді

$$\vec{A} = \frac{\mu_a \cdot I}{4 \cdot \pi} \int \frac{d\vec{l}}{R}. \quad (4.34)$$

Так як  $\vec{A}$  – вектор, то при розрахунках варто визначити його проекції на осі  $x, y, z$ :  $A_x, A_y, A_z$

$$A_x = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int \frac{j_x}{R} dV; \quad A_y = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int \frac{j_y}{R} dV; \quad A_z = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int \frac{j_z}{R} dV. \quad (4.35)$$

В електричному полі потенціал  $\varphi = \int \frac{\rho \cdot dV}{4\pi\epsilon R}$  є розв'язком рівняння Пуассона  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ .

Вирази для проекцій векторного потенціалу  $\vec{A}$  аналогічні виразам для  $\varphi$ , тому  $A_x, A_y, A_z$  є розв'язком рівнянь, які аналогічні рівнянню Пуассона:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a \cdot j_x; \quad \nabla^2 A_y = -\mu_a \cdot j_y; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_a \cdot j_z \quad \text{або} \quad (4.36)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \cdot \vec{j}. \quad (4.37)$$

Останній вираз є **диференціальним рівнянням магнітного поля** (або **рівнянням Пуассона для вектора-потенціалу**).

Проекції векторного потенціалу  $\vec{A}$  пропорційні густині струму  $\vec{j}$ , а при постійному струмі  $\text{div} \vec{j} = 0$ , тому  $\text{div} \vec{A} = 0$ , тобто лінії вектора  $\vec{A}$  завжди замкнені.

Вище було показано, що стоки і джерела ліній вектора  $\vec{B}$  відсутні в областях, у яких  $\vec{j} = 0$ . Переконаємося в цьому ще раз, використовуючи рівняння  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ :

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \text{rot} \vec{A} = \nabla[\nabla, \vec{A}] = [\nabla, \nabla] \vec{A} = 0. \quad (4.38)$$

Який же характер має магнітне поле в точках, де  $\vec{j} \neq 0$ ?

Для одержання відповіді обчислимо  $\text{rot} \vec{B}$ .

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}. \quad \text{div} \vec{A} = 0, \text{ тому}$$

$$\text{rot} \vec{B} = -\nabla^2 \cdot \vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j}. \quad (4.39)$$

Таким чином, в областях, де  $\vec{j} = 0$  поле вектора  $\vec{B}$  є **безвихровим** (потенційним), у якому  $\text{rot} \vec{B} = 0$ .

В областях, де  $\vec{j} \neq 0$  поле є **вихровим**,  $\text{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{j}$ .

#### 4.9 Намагнічування середовища. Напруженість магнітного поля

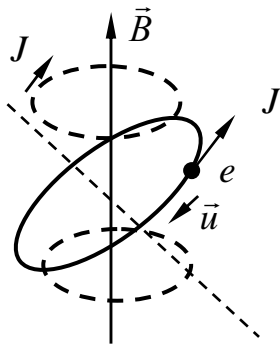


Рис. 4.6

Електрон в атомі, здійснюючи рух по орбіті, збуджує магнітне поле. При відсутності зовнішнього поля результуюче поле в середовищі не створюється. При внесенні речовини в зовнішнє магнітне поле осі орбіт електронів повертаються, і створюється результуюче магнітне поле, що може бути орієнтовано як за напрямком зовнішнього поля, так і проти нього. Наприклад, якщо в зовнішнє магнітне поле помістити атом водню, то електрон **обертається по орбіті** так, що збуджене їм

поле збільшує зовнішнє поле, тому що вісь обертання електрона орієнтується за напрямком зовнішнього поля. Крім того, магнітне поле впливає на електрон, що рухається, тому **з'являється прецесійний рух**, що аналогічний рухові вовчка (див. рис. 4.6). Магнітне поле, викликане прецесійним рухом електронних орбіт, послабляє зовнішнє магнітне поле. Залежно від того, який з цих рухів переважає, результуюче магнітне поле або збільшується, або зменшується. Речовини поділяються на **парамагнетики** (результуюче поле в них збільшується) і **діамагнетики** (результуюче поле зменшується).

Крім орбітального і прецесійного руху, електрон має магнітне поле, яке зв'язане з обертанням електрона навколо власної осі – «**спином**». Якщо напрямок «спина» збігається з зовнішнім магнітним полем, то він збільшує результуюче поле і навпаки, якщо напрямок «спина» протилежно зовнішньому полю, то він зменшує поле.

В інженерній практиці вважають, що відносна магнітна проникність діамагнітних і парамагнітних речовин дорівнює 1 ( $\mu_r = 1$ ).

Існують також і **ферромагнітні** речовини, у яких  $\mu_r \gg 1$ .

До ферромагнітних речовин відносяться залізо ( $\mu_r$  до 15000), нікель ( $\mu_r$  до 300), кобальт ( $\mu_r$  до 180).

У ферромагнетиках магнітне поле сильно збільшується у порівнянні з зовнішнім за рахунок магнітних моментів електронів.

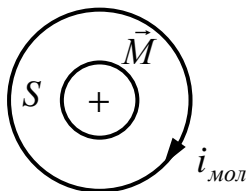


Рис. 4.7

Таким чином, магнітне поле залежить не тільки від джерела магнітного поля (наприклад, струму), але й від середовища, в якому знаходиться це джерело.

Для розрахунку магнітного поля з урахуванням середовища введемо нову величину - **вектор магнітного моменту**  $\vec{M}$ . Електрони, здійснюючи рух навколо ядра, утворюють молекулярний струм  $i_{\text{мол}}$  (круговий струм). Він збуджує магнітне поле, що характеризується

вектором магнітного моменту  $\vec{M}$  – добутком струму на вектор площадки, обмеженої цим струмом, тобто

$$d\vec{M} = i_{\text{мол}} \cdot d\vec{S} \quad \text{або} \quad \vec{M} = i_{\text{мол}} \cdot \vec{S}. \quad (4.40)$$

Напрямок вектора магнітного моменту визначають за правилом буравчика (див. рис. 4.7) .

Сумарний магнітний момент одиниці об'єму речовини називається **вектором намагніченості** речовини

$$\vec{I} = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{M}_k}{V}, \left[ \frac{A}{M} \right]. \quad (4.41)$$

Чим сильніше зовнішнє магнітне поле, тим більше орієнтуються молекули у визначеному напрямку, і тим більше буде величина вектора намагніченості.

Уводячи **молекулярну густину струму**  $\vec{j}_{\text{мол}}$ , можна показати, що  $\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{I}$ . Поле збуджується як струмом провідності, так і молекулярним струмом, тому можна ввести поняття **густини повного струму**

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{повн}} &= \vec{j}_{\text{мол}} + \vec{j}_{\text{пр}}, \text{ тоді} \\ \text{rot} \vec{B} &= (\vec{j}_{\text{мол}} + \vec{j}_{\text{пр}}) \cdot \mu_0 = \mu_0 \cdot (\text{rot} \vec{I} + \vec{j}_{\text{пр}}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Звідси

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) = \vec{j}_{\text{пр}}, \quad \text{або} \quad (4.43)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} \quad (4.44)$$

Це закон повного струму в диференціальній формі. В ньому  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$  – напруженість магнітного поля. Одиницею напруженості магнітного поля є  $\left[ \frac{A}{M} \right]$ .

З закону повного струму випливає, що магнітне поле збуджується струмом провідності, і що поле є вихровим у точках, де  $\vec{j} \neq 0$ .

Вектор намагніченості  $\vec{I}$  в ізотропних середовищах пропорційний векторові напруженості  $\vec{H}$ ,

$$\vec{I} = \alpha \cdot \vec{H}, \quad (4.45)$$

де  $\alpha$  – **коефіцієнт магнітної сприйнятливості**, що характеризує властивість середовища до намагнічування.

Тоді

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \alpha \cdot \vec{H} \quad \text{або} \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \cdot (1 + \alpha) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H}. \quad (4.46)$$

#### 4.10 Закон повного струму в інтегральній формі

Нехай поверхня  $S$ , що обмежена контуром  $l$ , пронизується струмами  $I_1, I_2, \dots, I_n$  (рис. 4.8). Для будь-якого середовища  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ . Проінтегруємо це рівняння по поверхні  $S$ :

$$\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sum I. \quad (4.47)$$

Замінімо ліву частину рівняння за теоремою Остроградського-Стокса, тоді одержимо

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I, \quad (4.48)$$

де  $\sum I$  – алгебрична сума струмів, зчеплених з контуром інтегрування.

Отримане рівняння називається **законом повного струму**:

**циркуляція вектора  $\vec{H}$  за замкненим контуром дорівнює сумі струмів, що пронизують цей контур, і не залежить від форми і величини контуру.**

Цей закон дозволяє легко розрахувати симетричні поля, наприклад, поля з осовою і циліндричною симетрією, коли напруженість поля в кожній точці поля однакова і може бути винесена за знак інтеграла, а

інтеграл приводиться до найпростішого вигляду.

Циркуляцію вектора  $\vec{H}$  за аналогією з електрорушійною силою називають **магніторушійною силою**.

Якщо контур інтегрування  $L_1$  (рис. 4.9) не охоплює провідник, по якому тече постійний струм, то в цьому випадку  $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 0$ , звідки випливає, що  $\text{rot} \vec{H} = 0$ , тобто контур розташований у потенційній

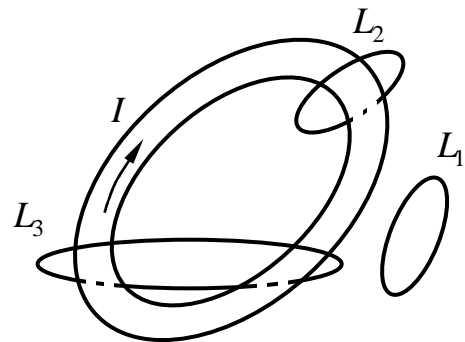


Рис. 4.9

області поля.

Для замкнутого контуру  $L_2$  циркуляція вектора  $\vec{H}$  не дорівнює нулю, тому що контур інтегрування охоплює провідник зі струмом  $I$ , який є вихровою областю, і в ньому  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ .

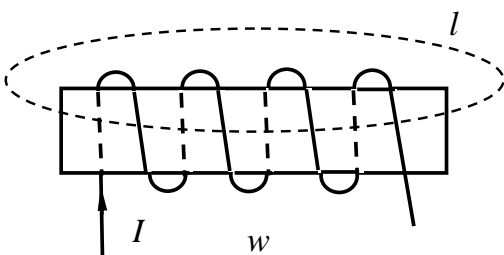


Рис. 4.10



Для контуру інтегрування  $L_3$  алгебрична сума струмів, що пронизують цей контур, дорівнює нулю, тому  $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 0$ .

Якщо струм протікає по котушці з числом витків  $w$  і контур інтегрування пронизує усі витки (рис. 4.10), то закон повного струму приймає вигляд

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = w \cdot I. \quad (4.49)$$

Розрахунок поля в цьому випадку за законом повного струму неможливий, тому що в різних точках контуру інтегрування напруженість поля різна, і її

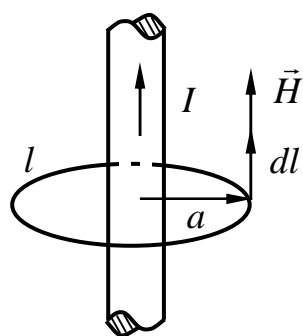


Рис. 4.11

не можна виносити за знак інтеграла. У цьому випадку для розрахунку поля можна скористатися формулами для вектора магнітної індукції або вектора-потенціалу.

**Приклад.** Нехай магнітне поле створюється постійним струмом  $I$ , що протікає по нескінченно довгому провіднику (рис. 4.11). Визначимо напруженість магнітного поля в точці, розташованій поза проводом на відстані  $a$  від його осі. Проведемо контур  $l$  навколо проводу, тоді відповідно до закону повного струму, маємо

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I \quad (4.50)$$

Але вектори  $\vec{H}$  і  $d\vec{l}$  збігаються за напрямком, тому  $\oint_l H dl = I$ .

Поле, що створюється струмом, який протікає у нескінченному проводі, симетрично. Тому на однаковій відстані від осі проводу в площині, перпендикулярній проводу, величина  $H$  однакова. Тому її можна винести за знак інтеграла

$$2 \cdot \pi \cdot a \cdot H = I, \text{ відкіля } H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a} \text{ і } B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a}. \quad (4.51)$$

#### 4.11 Загальні відомості про індуктивність і взаємодуктивність

Нехай лінійний струм  $I_1$  протікає по кільцевому провіднику (контур) (рис. 4.12). Цей струм створює магнітний потік, частина якого  $\Phi_{21}$  буде пронизувати другий контур.

$$\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_1, \quad (4.52)$$

де  $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$  – коефіцієнт пропорційності, називаний **коефіцієнтом взаємодукції** або

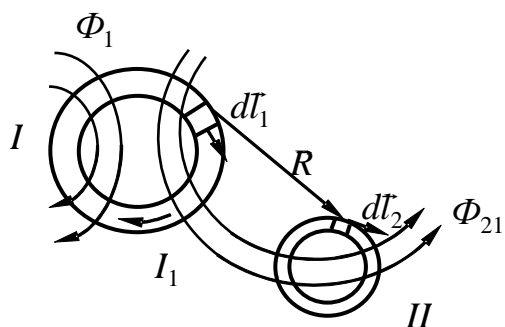


Рис. 4.12

**взаємною індуктивністю.** Одиницею виміру взаємної індуктивності є генрі – [Гн].

Коефіцієнт взаємодукції  $M$  визначає геометричну структуру поля і показує, у скільки разів зміниться потік зі зміною струму. Він залежить від середовища, геометричних розмірів і взаємного розташування контурів.

Для визначення  $M_{21}$  потрібно визначити потік  $\Phi_{21}$ , де

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} \text{rot} \vec{A}_1 d\vec{S}_2 = \oint_{l_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2. \quad (4.53)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_a \cdot I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1}{R}, \text{ тому } \Phi_{21} = \oint_{l_2} \frac{\mu_a \cdot I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}, \text{ і} \quad (4.54)$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}. \quad (4.55)$$

Аналогічно одержимо

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}. \quad (4.56)$$

У такий спосіб  $M_{12} = M_{21} = M$ .

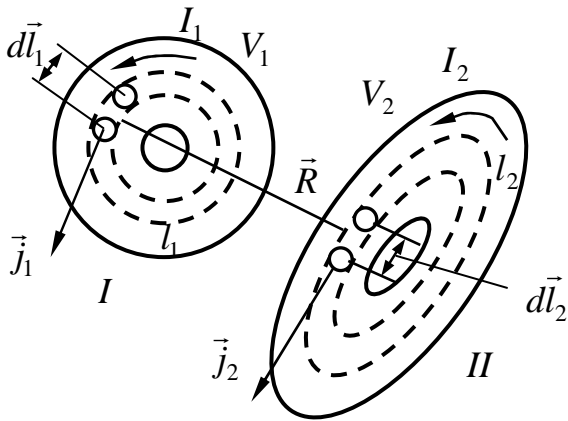


Рис. 4.13

Якщо ж у контурі протікають об'ємні струми з густиною  $\vec{j}_1$  і  $\vec{j}_2$  (рис. 4.13), то, дотримуючись правила переходу від об'ємного струму до лінійного  $\vec{j} \rightarrow d\vec{l}$ ,  $dV \rightarrow I$ , одержимо

$$M = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi \cdot I_1 \cdot I_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2}{R} dV_1 \cdot dV_2 \quad (4.57)$$

Якщо є один контур, то він пронизується потоком  $\Phi_{11}$ , що викликаний струмом  $I_1$ , який протікає у цьому ж контурі, тоді власна індуктивність контуру буде

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}, \quad (4.58)$$

де  $L_1$  – коефіцієнт пропорційності між струмом  $I_1$  у контурі і потоком, збудженим струмом  $I_1$ .

Якщо розглянутий контур має  $w$  витків, то магнітний потік буде зчіплюватися з усіма витками і, отже, потокозчеплення визначиться як

$$\Psi_{11} = w_1 \cdot \Phi_{11}. \quad (4.59)$$

Отримані вирази для розрахунку  $M$  досить складні, тому якщо є можливість простіше визначити потік або потокозчеплення  $\Psi$ , то знаходять ці величини, а потім визначають  $M$  або  $L$  за формулами:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}, \quad L_1 = \frac{w_1 \cdot \Phi_{11}}{I_1} = \frac{\Psi_{11}}{I_1}. \quad (4.60)$$

#### 4.12 Енергія магнітного поля

Розглянемо два контури, що знаходяться в однорідному ізотропному середовищі (рис. 4.14). Енергія магнітного поля

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 \pm M \cdot I_1 \cdot I_2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2. \quad (4.61)$$

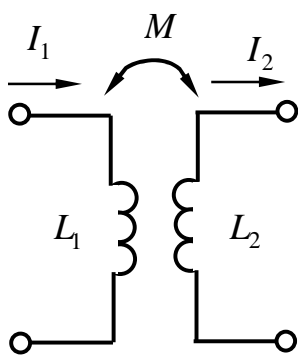


Рис. 4.14

Якщо позначити

$$L_1 = L_{11}; \quad L_2 = L_{22}; \quad M = \frac{L_{12}}{2} + \frac{L_{21}}{2}, \quad (4.62)$$

то одержимо

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot L_{11} \cdot I_1^2 \pm \frac{1}{2} \cdot L_{12} \cdot I_1 \cdot I_2 \pm \frac{1}{2} \cdot L_{21} \cdot I_1 \cdot I_2 + \frac{1}{2} \cdot L_{22} \cdot I_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (4.63)$$

Цей вираз справедливий для стаціонарних полів.

Можна показати, що енергія магнітного поля

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{B} \vec{H} dV, \quad (4.64)$$

а для однорідних ізотропних середовищ

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot \int_V B H dV. \quad (4.65)$$

Енергія магнітного поля одиниці об'єму

$$W_0 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \quad \text{або} \quad W_0 = \frac{\mu \cdot H^2}{2}. \quad (4.66)$$

#### 4.13 Граничні умови в магнітному полі

На границі двох середовищ вектори магнітного поля  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  задовольняють визначеним граничним умовам. Визначимо першу граничну умову.

Розглянемо замкнену циліндричну поверхню  $S$  на границі поділу двох середовищ (рис. 4.15).

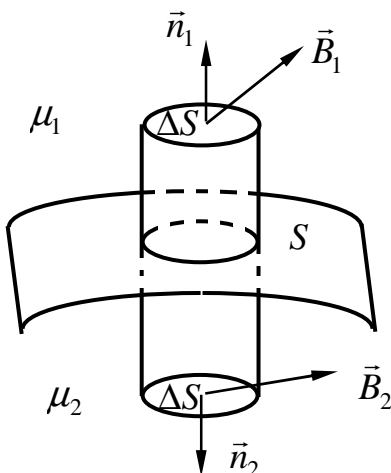


Рис. 4.15

На рис. 4.15  $\vec{n}_1$  – нормаль до першої поверхні,  $\vec{n}_2$  – нормаль до другої поверхні,  $\Delta S$  – елемент поверхні.

Через малість  $\Delta S$  будемо вважати, що  $\vec{B}$  має однакові значення у всіх точках  $\Delta S$ .

Магнітний потік

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (4.67)$$

З іншого боку,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_\phi = 0, \quad (4.68)$$

де  $\Phi_1$  – магнітний потік через першу поверхню,

$\Phi_2$  – магнітний потік через другу поверхню,

$\Phi_\phi$  – магнітний потік через бічну поверхню.

$$\Phi_1 \approx B_1 \cdot \Delta S \cdot \cos(\vec{B}_1, \vec{n}_1) = B_{1n} \cdot \Delta S, \text{ а } \Phi_2 \approx B_2 \cdot \Delta S \cdot \cos(\vec{B}_2, \vec{n}_2) = -B_{2n} \cdot \Delta S, \quad (4.69)$$

тому  $B_{1n} \cdot \Delta S - B_{2n} \cdot \Delta S + \Phi_\phi = 0$ .

При зменшенні висоти циліндра бічна поверхня  $S_\phi \rightarrow 0$  та  $\Phi_\phi = 0$ . Тоді

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (4.70)$$

тобто **нормальна складова вектора магнітної індукції на границі двох середовищ неперервна.**

$$B_{1n} = \mu_1 \cdot \mu_0 \cdot H_{1n}, \quad B_{2n} = \mu_2 \cdot \mu_0 \cdot H_{2n}, \text{ тому} \quad (4.71)$$

$$H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot H_{2n}, \quad (4.72)$$

тобто **нормальні складові вектора напруженості магнітного поля на границі двох середовищ терплять розрив.**

Визначимо другу граничну умову.

Складемо циркуляцію вектора  $\vec{H}$  уздовж контуру  $l$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{повн}}. \quad (4.73)$$

Циркуляція за контуром дорівнює сумі трьох інтегралів

$$H_1 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{H}_1, \vec{\Delta l}) + H_2 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{H}_2, \vec{\Delta l}) + \oint_{l_{\text{бічн}}} \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{повн}}. \quad (4.74)$$

Будемо стискати контур, тоді

$$H_{1\tau} \cdot \Delta l - H_{2\tau} \cdot \Delta l = I_{\text{полн}}. \quad (4.75)$$

Якщо по граничній поверхні тече струм з поверхневою густиною  $\eta$ , то повний струм дорівнює  $I_{\text{повн}} = \eta \cdot \Delta l$ .

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta, \quad (4.76)$$

тобто на границі двох середовищ дотична складова вектора напруженості магнітного поля перетерплює стрибок, який дорівнює густині поверхневого струму, що протікає по границі.

Якщо  $\eta = 0$ , тобто по граничній поверхні струм не протікає, то

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (4.77)$$

тобто дотична складова вектора  $\vec{H}$  неперервна на границі двох середовищ.

$$H_{1\tau} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \cdot \mu_0}, \quad H_{2\tau} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \cdot \mu_0}, \text{ тому} \quad (4.78)$$

$$B_{1\tau} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot B_{2\tau}. \quad (4.79)$$

З урахуванням (4.33) одержимо (див. рис. 4.16)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}} = \frac{B_{2\tau} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2}}{B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2, \text{ або} \quad (4.80)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} - \text{це} \quad (4.81)$$

закон переломлення ліній вектора магнітної індукції на границі двох середовищ.

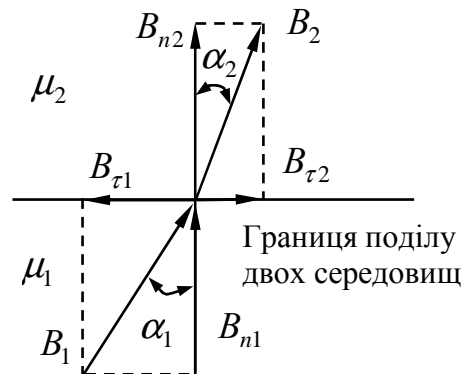


Рис. 4.16

## Розділ 5. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

### 5.1 Визначення змінного електромагнітного поля

Під **змінним електромагнітним полем** розуміють сукупність змінних у часі електричного і магнітного полів, взаємно зв'язані і обумовлюють одне одного.

Змінне електромагнітне поле є одним з видів матерії. Воно має енергію, масу, кількість руху, може перетворюватися в інші види енергії і самостійно існувати у вигляді електромагнітних хвиль.

При дослідженні процесів у змінному електромагнітному полі використовують рівняння Максвелла. Систему рівнянь Максвелла утворюють чотири рівняння.

### 5.2 Струм зсуву. Рівняння безперервності змінного струму

Якщо до конденсатора підключити джерело змінної напруги, то в колі буде протікати струм, збуджуючи між пластинами конденсатора електричне і магнітне поле. Розглянемо, чим збуджується магнітне поле. Якщо між пластинами діелектрик, то відбувається упорядкований зсув зв'язаних зарядів діелектрика, який є струмом, що збуджує магнітне поле. Цей струм називається **струмом зсуву в діелектрику**. Вектор густини цього струму –  $\vec{j}_{зсув}$ . Але магнітне поле між пластинами збуджується й у тому випадку, якщо між ними вакуум. Максвелл припустив, що магнітне поле збуджується електричним полем, що змінюється у часі. Для характеристики цього поля вводять поняття струму, що за аналогією зі струмом зсуву в діелектрику умовно назвали **струмом зсуву у вакуумі**. Відмінність струму зсуву у вакуумі від інших струмів полягає в тому, що він не викликає теплових утрат. Таким чином, магнітне поле збуджується повним струмом, що дорівнює сумі струму провідності і струму зсуву

$$\vec{j}_{np} + \vec{j}_{зсув} = \vec{j}_{повн} \quad (5.1)$$

Закон повного струму в диференціальній формі (4.44) буде мати вигляд

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{повн} = \vec{j}_{np} + \vec{j}_{зсув} \quad (5.2)$$

Визначимо джерело повного струму. Візьмемо дивергенцію правої та лівої частин рівняння

$$\text{div} \text{rot} \vec{H} = \text{div} \vec{j}_{повн} = \text{div} \vec{j}_{np} + \text{div} \vec{j}_{зсув} \quad (5.3)$$

Але  $\text{div} \text{rot} \vec{H} \equiv 0$ , отже,  $\text{div} \vec{j}_{повн} = 0$ , або

$$\text{div} \vec{j}_{np} = -\text{div} \vec{j}_{зсув}, \text{ це } - \quad (5.4)$$

### рівняння безперервності ліній повного струму.

Лінії  $\vec{j}_{повн}$  завжди замкнені. Це означає, що на границі провідного середовища і діелектрика струм провідності переходить у струм зсуву і навпаки.

### 5.3 Перше рівняння Максвелла

Постійні струми можуть бути тільки в замкнутих колах. Для постійного струму  $div \vec{j}_{np} = 0$ . Постійний струм через довільну замкнену поверхню повинен завжди дорівнювати нулю. Заряд в об'ємі, обмеженому такою поверхнею, залишається незмінним у часі.

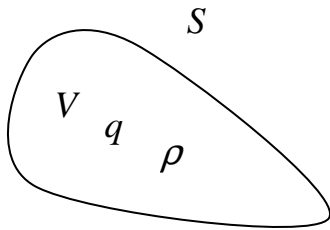


Рис. 5.1

Змінні струми можуть мати місце й у незамкнених колах (наприклад, коло з конденсатором). Отже, у змінних полях кола зі струмами провідності можуть бути незамкнутими.

Нехай в об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $S$ , знаходиться заряд  $q$ , об'ємна густина якого дорівнює  $\rho$  (рис. 5.1).

Якщо через поверхню  $S$  виходить струм провідності  $i_{np}$ , то заряд  $q$  стане зменшуватися і струм буде дорівнювати

$$i_{np} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (5.5)$$

$$i_{np} = \oint_S \vec{j}_{np} \cdot d\vec{S} \quad \text{та} \quad q = \int_V \rho \cdot dV, \quad \text{тому} \quad \oint_S \vec{j}_{np} \cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV. \quad (5.6)$$

Замінивши ліву частину за теоремою Остроградського-Гауса, одержимо

$$\int_V div \vec{j}_{np} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV. \quad (5.7)$$

Рівняння справедливе, якщо підінтегральні функції дорівнюють одна одній

$$div \vec{j}_{np} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.8)$$

Цей вираз також називають **рівнянням безперервності змінного струму** чи **законом збереження заряду**. Цей закон означає, що зміна у часі вільного заряду, що знаходиться в деякому малому об'ємі, може відбуватися тільки за рахунок переміщення заряду через поверхню, що оточує цей заряд.

$$div \vec{j}_{np} = -div \vec{j}_{зсуг}, \quad \text{тому} \quad div \vec{j}_{зсуг} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Максвелл припустив, що й у змінному полі  $div \vec{D} = \rho$ . Цей постулат надалі

був підтверджений практикою.

Отже,

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{зсуг}} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Рівняння задовольняється при умові, що  $\vec{j}_{\text{зсуг}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

Але  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , звідки виходить, що  $\vec{j}_{\text{зсуг}} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ .

Перший доданок – це електричне поле, що змінюється у часі.

Другий доданок обумовлений зміною у часі поляризації. В силу того, що  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{np}} + \vec{j}_{\text{зсуг}}$ , а  $\vec{j}_{\text{np}} = \gamma \cdot \vec{E}$ , то

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Це – перше рівняння Максвелла.

*Магнітне поле збуджується не тільки струмом провідності, але й електричним полем, що змінюється у часі.*

Перше рівняння Максвелла являє собою закон повного струму в диференціальній формі.

#### 5.4 Друге рівняння Максвелла

Якщо вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  змінюється у часі, то у витку, пронизаному полем, згідно з законом електромагнітної індукції наводиться ЕРС індукції  $\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ .

Максвелл узагальнив цей закон, указавши, що магнітний потік, що змінюється у часі, збуджує електричне поле і при відсутності витка. З іншого боку, спадання напруги у контурі дорівнює ЕРС індукції  $\mathcal{E} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}$ . Таким чином, у будь-якому середовищі справедливе рівняння

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{але} \quad \Phi = \int_s \vec{B} d\vec{S}, \quad \text{тому} \quad (5.12)$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} d\vec{S}. \quad (5.13)$$

Замінивши ліву частину за теоремою Стокса, одержимо

$$\int_s \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (5.14)$$



Рівність справедлива, якщо підінтегральні функції дорівнюють одна одній

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (5.15)$$

Це – друге рівняння Максвелла.

*Електричне поле збуджується електричним зарядом і магнітним полем, що змінюється у часі.*

Друге рівняння Максвелла являє собою закон електромагнітної індукції в диференціальній формі.

В ідеальному діелектрику  $j_{np} = 0$ . Тоді перше рівняння Максвелла приймає вигляд:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \epsilon_a \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \text{rotrot}\vec{H} = \epsilon_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{E} = -\mu_a \cdot \epsilon_a \cdot \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \quad (5.16)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_a \cdot \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rotrot}\vec{H} = \text{graddiv}\vec{H} - \nabla^2\vec{H} = -\nabla^2\vec{H}. \quad (5.17)$$

Таким чином, одержимо **хвильові рівняння**:

$$\begin{aligned} \nabla^2\vec{H} &= \mu_a \cdot \epsilon_a \cdot \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}; \\ \nabla^2\vec{E} &= \mu_a \cdot \epsilon_a \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

## 5.5 Повна система рівнянь Максвелла

Електромагнітне поле характеризується чотирма векторами:  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ , зв'язок між якими описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} I. \quad \text{rot}\vec{H} &= \gamma \cdot \vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \\ II. \quad \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \\ III. \quad \text{div}\vec{B} &= 0; \\ IV. \quad \text{div}\vec{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Систему доповнюють рівняння:

$$\text{div}\vec{j}_{np} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (5.20)$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot [\vec{E}_{cm} + \vec{E}], \quad \vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon_a \cdot \vec{E}, \quad (5.21)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_v (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) \cdot dV. \quad (5.22)$$

Для стаціонарних полів система рівнянь Максвелла розпадається на дві незалежні системи.

Для стаціонарного електростатичного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad (5.23)$$

$$\operatorname{div} \epsilon_a \cdot \vec{E} = \rho. \quad (5.24)$$

Для стаціонарного магнітного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np}; \quad (5.25)$$

$$\operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0. \quad (5.26)$$

Для розв'язання задач за допомогою даної системи рівнянь потрібно знати граничні умови.

## 5.6 Граничні умови в електромагнітному полі

Стрибок нормальної складової вектора на поверхні поділу середовищ часто називають поверхневою дивергенцією цього вектора і позначають  $Div$ , а поверхневий ротор позначають  $Rot$ .

Нехай одне середовище має  $\epsilon_1, \mu_1, \gamma_1$ , а друге середовище –  $\epsilon_2, \mu_2, \gamma_2$ .

На граничній поверхні

$$\operatorname{div} \rightarrow Div, \operatorname{rot} \rightarrow Rot, \rho \rightarrow \sigma, \frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (5.27)$$

$$Div \vec{j} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = |\vec{j}_{n1} - \vec{j}_{n2}| = |\gamma_1 \cdot \vec{E}_{n1} - \gamma_2 \cdot \vec{E}_{n2}|. \quad (5.28)$$

Якщо відсутній поверхневий заряд  $\sigma$ , то  $\vec{j}_{n1} = \vec{j}_{n2}$ .

У магнітному полі  $Div \vec{B} = 0 = |\vec{B}_{n1} - \vec{B}_{n2}|$ ,  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , тому

$$|\mu_{a1} \cdot \vec{H}_{n1} - \mu_{a2} \cdot \vec{H}_{n2}| = 0, \quad \text{або} \quad \frac{H_{n2}}{H_{n1}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}, \quad \text{тобто} \quad (5.29)$$

**при переході через границю поділу середовищ нормальна складова вектора магнітної індукції  $B_n$  неперервна, а нормальна складова вектора напруженості магнітного поля  $H_n$  змінюється стрибком.**

На границі поділу середовищ

$$\vec{j}_{np} \rightarrow \vec{j}_{nos}, \quad \text{а} \quad \frac{\partial D}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \text{тому} \quad Rot \vec{H} = \vec{j}_{nos} = |\vec{H}_{\tau1} - \vec{H}_{\tau2}|. \quad (5.30)$$

Якщо  $\vec{j}_{nos} = 0$ , то  $\vec{H}_{\tau1} = \vec{H}_{\tau2}$ , тобто

**при переході через границю поділу середовищ тангенціальна складова вектора  $\vec{H}_\tau$  змінюється стрибком за рахунок поверхневої густини струму.**

$$\vec{H}_\tau = \frac{\vec{B}_\tau}{\mu_a}, \text{ тому } \left| \frac{\vec{B}_{\tau 1}}{\mu_{a1}} = \frac{\vec{B}_{\tau 2}}{\mu_{a2}} \right| = \vec{j}_{нов}. \text{ Якщо } \vec{j}_{нов} = 0, \text{ то } \left| \frac{\vec{B}_{\tau 1}}{\vec{B}_{\tau 2}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}} \right|, \text{ тобто} \quad (5.31)$$

*тангенціальні складові векторів  $\vec{B}$  змінюються стрибком за рахунок середовища і поверхневої густини струму.*

## 5.7 Баланс енергії електромагнітного поля. Вектор Пойтинга. Теорема Умова-Пойтинга

Питання про поширення енергії було досліджено Умовим у 1874 р. Пойтинг застосував теорію Умова для дослідження електромагнітних хвиль. Носієм енергії електромагнітних хвиль є поле, енергія якого у кожному одиничному

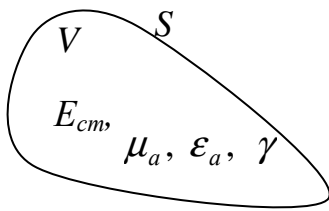


Рис. 5.3

елементі об'єму  $W_0 = \frac{1}{2} \cdot \vec{D} \vec{E} + \frac{1}{2} \cdot \vec{B} \vec{H}$ , а для однорідних

ізотропних середовищ  $W_0 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_a \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \mu_a \cdot H^2$ .

Розглянемо баланс енергії в деякому об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $S$  (рис. 5.3). Усередині об'єму знаходяться сторонні джерела енергії  $E_{cm}$  та споживачі. Ве-

личина  $\gamma$  позначає безповоротні втрати електромагнітної енергії (світло, тепло, електричні машини). Припустимо, що  $\mu_a, \epsilon_a, \gamma$  не залежать від часу. Поза об'ємом  $V$  також можуть існувати джерела і споживачі енергії. У загальному випадку енергія джерела може не дорівнювати енергії, споживаної усередині об'єму, отже, надлишок потужності повинний або входити, або виходити з об'єму.

У будь-якій точці об'єму  $V$  і поза ним справедливі рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{np} + \epsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.32)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.33)$$

Помножимо скалярно перше рівняння на  $\vec{E}$ , а друге на  $\vec{H}$  і віднімемо з першого рівняння друге.

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{j}_{np} + \epsilon_a \cdot \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \cdot \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.34)$$

$$\text{Але } \vec{j}_{np} = \gamma \cdot [\vec{E} + \vec{E}_{cm}] \quad \text{і} \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}_{np}}{\gamma} - \vec{E}_{cm}; \quad (5.35)$$

$$\epsilon_a \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\epsilon_a \cdot \frac{E^2}{2}); \quad \mu_a \cdot \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\mu_a \cdot \frac{H^2}{2}); \quad (5.36)$$

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}. \quad (5.37)$$

Підставивши (5.10), (5.11), (5.12) у (5.9), одержимо

$$-\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = \frac{j_{np}^2}{\gamma} - \vec{E}_{cm} \cdot \vec{j}_{np} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left( \frac{\mu_a \cdot H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a \cdot E^2}{2} \right). \quad (5.38)$$

Проінтегруємо останнє рівняння за об'ємом і замінімо ліву частину за теоремою Остроградського – Гауса. Тоді одержимо

$$-\oint_s [\vec{E}\vec{H}] d\vec{S} = \int_v \frac{j_{np}^2}{\gamma} \cdot dV - \int_v \vec{E}_{cm} \cdot \vec{j}_{np} \cdot dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left( \frac{\mu_a \cdot H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a \cdot E^2}{2} \right) \cdot dV. \quad (5.39)$$

Отримане рівняння являє собою **баланс енергії електромагнітного поля**. Векторний добуток  $[\vec{E}\vec{H}]$  визначає енергію електромагнітного поля, що входить у розглянутий об'єм або виходить з нього через площу поверхні, що обмежує цей об'єм.

$$[\vec{E}\vec{H}] = \vec{P}. \quad (5.40)$$

Цей векторний добуток називають **вектором Пойтинга** або вектором густини потоку енергії. Одиниця виміру

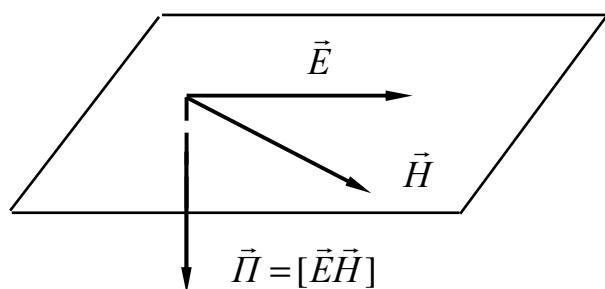


Рис. 5.4

вектора Пойтинга –  $\frac{Bm}{m^2}$ .

Вектор Пойтинга чисельно дорівнює енергії, що проходить у 1 секунду крізь поверхню площиною  $1 \text{ м}^2$ , що перпендикулярна до напрямку вектора  $\vec{P}$ .

Напрямок вектора Пойтинга (рис. 5.4)

збігається з напрямком руху вістря правого гвинта, якщо його обертати за найкоротшим шляхом від  $\vec{E}$  до  $\vec{H}$ .

Таким чином, ліва частина рівняння є потік потужності електромагнітного поля. Перший доданок правої частини визначає безповоротні втрати енергії, тобто енергію, що переходить у тепло. Другий доданок визначає потужність (енергію за одиницю часу) сторонніх джерел. Ця енергія може бути додатною або від'ємною залежно від того, споживає джерело енергію, чи віддає. Наприклад, якщо акумулятор заряджається, то енергія від'ємна, розряджається – додатна.

Третій доданок визначає зміну запасу енергії електромагнітного поля в розглянутому об'ємі. Причому енергія завжди додатна, а похідна може бути як додатною, так і від'ємною залежно від того, убиває або зростає енергія поля в даному об'ємі.

Якщо потужність джерел перевищує споживану потужність, то енергія

поля виходить з об'єму, і ліва частина рівняння (5.39) буде мати знак «+», в іншому випадку знак «-».

$$\vec{j}_{np} \cdot \vec{E}_{cm} \cdot V = \vec{j}_{np} \cdot \vec{E}_{cm} \cdot S \cdot l = I \cdot \varepsilon_{cm}, \quad (5.41)$$

$$\frac{j_{np}^2}{\gamma} \cdot V = \frac{j^2 \cdot S^2 \cdot l}{\gamma \cdot S} = I^2 \cdot R. \quad (5.42)$$

Теорема Умова – Пойтинга формулюється в такий спосіб:

*надлишок потужності, що поглинається (або віддається) усередині об'єму, втікає в цей об'єм (витікає з цього об'єму) у вигляді електромагнітної енергії через замкнену поверхню, що обмежує об'єм, причому густина потоку енергії через цю поверхню в будь-якій точці визначається вектором Пойтинга  $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$ .*

## 5.8 Електродинамічні потенціали. Рівняння Даламбера

Безпосередній розв'язок рівнянь Максвелла пов'язаний з великими математичними труднощами. Для спрощення розв'язання цієї задачі вводяться розрахункові допоміжні функції координат і часу – **електродинамічні векторний і скалярний потенціали  $\vec{A}$  і  $\varphi$ .**

Скориставшись рівняннями Максвелла і рівняннями  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ ,  $\text{div}\vec{B} = 0$ , одержимо основні співвідношення для цих функцій. Підставимо  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  в друге рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{A} = -\text{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{або} \quad \text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0. \quad (5.43)$$

Отриманий вираз говорить про те, що «вихор» деякого вектора завжди дорівнює нулю. Це дозволяє виразити вектор  $(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$  як градієнт скалярної функції, що задовольняє як змінному, так і стаціонарному полю. Отже,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\varphi \quad \text{або}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi, \quad (5.44)$$

де  $\varphi$  – електродинамічний скалярний потенціал.

Якщо поле стаціонарне, то  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ , отже,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (5.45)$$

Електродинамічний потенціал  $\vec{A}$ , як і електродинамічний потенціал  $\varphi$ , бере участь в утворенні магнітного поля.

Зв'язок між  $\vec{A}$  і  $\varphi$  визначається співвідношенням

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (5.46)$$

Візьмемо дивергенцію від рівняння (5.44).

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi. \quad (5.47)$$

В силу того, що  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$ , одержимо  $\frac{\rho}{\varepsilon_a} = -\nabla^2 \varphi + \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ , або

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (5.48)$$

Це – рівняння для визначення скалярного електродинамічного потенціалу  $\varphi$ .

Одержимо формулу, за якою визначають векторний електродинамічний потенціал  $\vec{A}$ .

За першим рівнянням Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Оскільки  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$ ,  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ ,  $\vec{H} = \frac{\operatorname{rot} \vec{A}}{\mu_a}$ , маємо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi, \quad (5.49)$$

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (5.50)$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \cdot \vec{A}. \quad (5.51)$$

Тому  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \cdot \vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi$ .

Отриманий вираз містить дві невідомі величини –  $\vec{A}$  та  $\varphi$ . Виключимо одну з них.

Електродинамічний вектор-потенціал  $\vec{A}$  не визначається однозначно, він є розрахунковою функцією, що вибирається зі зручності розрахунку, при чому вона не повинна суперечити фізичній стороні питання, тобто повинна відбивати зміну поля.

У стаціонарному магнітному полі  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ , а в змінному  $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$ .

Підставивши значення  $\text{div}\vec{A}$  у формулу (5.46), одержимо

$$-\text{grad}\varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^2 \cdot \vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\varphi. \quad (5.52)$$

Звідси отримаємо **рівняння для визначення вектора-потенціалу  $\vec{A}$**

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \vec{j}. \quad (5.53)$$

Рівняння (5.48) і (5.53) називаються **рівняннями Даламбера**

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_a \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\}. \quad (5.54)$$

Якщо в розглянутому об'ємі немає струмів провідності і вільних зарядів, то одержимо окремий випадок рівнянь Даламбера – **хвильові рівняння електромагнітного поля** (5.55), що характеризують процес поширення електромагнітного поля в областях, де немає джерел цього поля:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.55)$$

Для стаціонарного поля рівняння Даламбера переходять у **рівняння Пуассона**

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_a \cdot \vec{j} \end{aligned} \quad (5.56)$$

При відсутності в розглянутому об'ємі струмів провідності і вільних зарядів ці рівняння переходять у **рівняння Лапласа**

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \\ \nabla^2 \vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

## 5.9 Запізнілі потенціали

Розв'язком рівнянь Даламбера є наступні рівняння:

$$\varphi(t) = \int_V \frac{\rho \cdot (t - \frac{R}{u})}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_a \cdot R} \cdot dV, \quad \vec{A}(t) = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{\vec{j} \cdot (t - \frac{R}{u})}{R} \cdot dV, \quad (5.58)$$

де  $R$  – відстань від початку координат, де знаходиться заряд  $\Delta q$ , що змінюється у часі, до точки спостереження;

$u$  – швидкість поширення електромагнітного процесу;

$t$  – момент часу, в який у точці спостереження визначаються  $\vec{A}$  або  $\varphi$ .

Якщо заряди і струми змінюються у часі, то в точці спостереження потенціал зміниться не миттєво, а через інтервал часу, за який збурювання дійде від заряду до точки спостереження.

Зміни вільних об'ємних зарядів і струмів провідності позначаються в різних точках поля не миттєво, а через деякий час  $\frac{R}{u} = t'$ , необхідний для того, щоб електромагнітна хвиля пройшла відстань  $R$ . Тому потенціали  $\vec{A}$  і  $\varphi$  називають **запізнювальними потенціалами**. Для вакууму швидкість  $u$  дорівнює швидкості світла

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5.59)$$

У діелектричних середовищах величина швидкості поширення електромагнітної енергії дорівнює

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}. \quad (5.60)$$

## 5.10 Рівняння Максвелла в комплексній формі запису

Якщо проекції векторів поля  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  змінюються у часі за синусоїдальним законом, то рівняння Максвелла можна записати в комплексній формі.

Нехай  $\vec{E}$  має проекції

$$E_x = E_{xm} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} \cdot \{E_{xm} e^{i\psi} e^{i\omega t}\}, \quad (5.61)$$

$$E_y = E_{ym} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} \cdot \{E_{ym} e^{i\psi} e^{i\omega t}\}, \quad (5.62)$$

$$E_z = E_{zm} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} \cdot \{E_{zm} e^{i\psi} e^{i\omega t}\}. \quad (5.63)$$

Комплексною амплітудою вектора  $\vec{E}$  назовемо вектор

$$\underline{\vec{E}}_m = (E_{xm} \cdot \vec{1}_x + E_{ym} \cdot \vec{1}_y + E_{zm} \cdot \vec{1}_z) \cdot e^{i\psi} = \vec{E}_m e^{i\psi}. \quad (5.64)$$

Миттєве значення вектора  $\vec{E}$  має бути

$$\vec{E} = \text{Im} \cdot \{\dot{\vec{E}}_m \cdot e^{i\omega t}\}. \quad (5.65)$$

Аналогічно для напруженості магнітного поля комплексна амплітуда вектора  $\vec{H}$



$$\vec{H}_m = (H_{xm} \cdot \vec{1}_x + H_{ym} \cdot \vec{1}_y + H_{zm} \cdot \vec{1}_z) \cdot e^{i\psi} = \vec{H}_m \cdot e^{i\psi}. \quad (5.66)$$

Миттєве значення вектора  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \text{Im} \cdot \{ \vec{H}_m \cdot e^{i\omega t} \}. \quad (5.67)$$

Якщо в рівняння Максвелла підставити замість  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  величини  $\vec{E} = \text{Im} \cdot \{ \vec{E}_m \cdot e^{i\omega t} \}$  і  $\vec{H} = \text{Im} \cdot \{ \vec{H}_m \cdot e^{i\omega t} \}$ , то отриманий розв'язок буде справедливий не тільки для уявних складових, але і для дійсних складових. При цьому запис рівнянь значно скоротиться.

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \cdot \vec{E} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.68)$$

$$e^{i\omega t} \cdot \text{rot} \vec{H}_m = e^{i\omega t} \cdot \gamma \cdot \vec{E}_m + e^{i\omega t} \cdot \varepsilon_a \cdot i \cdot \omega \cdot \vec{E}_m, \text{ або} \quad (5.69)$$

$$\text{rot} \vec{H}_m = (\gamma + i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \vec{E}_m. \quad (5.70)$$

Аналогічно запишуться й інші рівняння електромагнітного поля за комплексною формою:

$$\text{rot} \vec{E}_m = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \vec{H}_m; \quad (5.71)$$

$$\text{div}(\mu_a \cdot \vec{H}_m) = 0. \quad (5.72)$$

Якщо розв'язати ці рівняння і визначити комплексні амплітуди  $\vec{H}_m$  і  $\vec{E}_m$ , то легко знайти миттєві значення векторів поля з виразів  $\vec{E} = \text{Im} \cdot \{ \vec{E}_m \cdot e^{i\omega t} \}$  та  $\vec{H} = \text{Im} \cdot \{ \vec{H}_m \cdot e^{i\omega t} \}$ .

Зауваження. Іноді індекс  $m$  для позначення комплексної амплітуди і точка над вектором опускаються.

### 5.11 Теорема Умова-Пойтинга в комплексній формі

У курсі ТОЕ було введено поняття реактивної потужності.

Для послідовного з'єднання елементів  $RLC$  реактивна потужність

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi. \quad (5.73)$$

$$U_p = U \cdot \sin \varphi = I \cdot X = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C}), \text{ тому} \quad (5.74)$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \omega L \cdot I_m^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{I_m^2}{\omega C}. \quad (5.75)$$

Замінивши  $\frac{I_m}{\omega C} = U_{Cm}$ , одержимо

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L \cdot I_m^2 - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot C \cdot U_{Cm}^2 = \omega \cdot (\frac{L \cdot I_m^2}{2} - \frac{C \cdot U_{Cm}^2}{2}) = \omega \cdot (W_m^{\text{магн}} - W_m^{\text{ел}}). \quad (5.76)$$

З першої частини курсу ТОЕ відомо, що комплексна потужність

$$\tilde{S} = P + i \cdot Q = \underline{U} \cdot \underline{I} = \frac{1}{2} \cdot \underline{U}_m \cdot \underline{I}_m. \quad (5.77)$$

Аналогічно введене поняття «**комплексного вектора Пойтинга**»

$$\underline{\vec{P}} = \vec{P}' + i\vec{P}'' = \frac{1}{2} \left[ \underline{\vec{E}} \underline{\vec{H}}^* \right], \quad (5.78)$$

де  $\underline{\vec{E}}$  і  $\underline{\vec{H}}$  – комплексні амплітуди (індекс  $m$  опущений),

$\underline{\vec{H}}^*$  – спряжена комплексна амплітуда (індекс  $m$  опущений).

**Теорема Умова-Пойтинга в комплексній формі**

$$\oint_S \underline{\vec{P}} d\vec{S} = \oint_S (\vec{P}' + i \cdot \vec{P}'') d\vec{S} = \oint_S \vec{P}' d\vec{S} + i \oint_S \vec{P}'' d\vec{S} = -(P + i \cdot Q). \quad (5.79)$$

Знак « $-$ » у правій частині відповідає ситуації, коли енергія споживається усередині об'єму  $V$  і вектор Пойтинга має напрямок переважно усередину об'єму  $V$ . Ліва частина при цьому також виходить від'ємною.

Дійсна частина  $\underline{\vec{P}} = \frac{1}{2} \left[ \underline{\vec{E}} \underline{\vec{H}}^* \right]$  дає потужність, що поглинається усередині об'єму  $V$  (активну потужність), уявна – відповідає реактивній потужності.

Ця теорема в комплексній формі дозволяє, наприклад, визначити активний опір  $R$  і внутрішній індуктивний опір  $\omega L_i$  провідника, якщо відомі комплекси  $\underline{\vec{E}}_{пов}$  і  $\underline{\vec{H}}_{пов}$  на поверхні цього провідника

$$\oint_S \frac{1}{2} \cdot \left[ \underline{\vec{E}} \underline{\vec{H}}^* \right] \cdot d\vec{S} = R \cdot I^2 + i \cdot \omega \cdot L \cdot I^2, \quad (5.80)$$

де  $I$  – діюче значення струму.

При цьому енергією  $W_{ел}$  у провіднику звичайно нехтують, тому що вона значно менше енергії  $W_{магн}$ .

## 5.12 Рівняння електромагнітного поля в провідному середовищі

У провіднику струми зсуву малі в порівнянні зі струмами провідності, і рівняння Максвелла при відсутності стороннього поля приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}, \\ \text{rot} \vec{E} &= -\mu_a \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Розв'яжемо ці рівняння відносно  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ . Візьмемо ротор від лівої і правої частини першого виразу

$$\text{rot rot}\vec{H} = \gamma \cdot \text{rot}\vec{E} = -\gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.82)$$

Але  $\text{rot rot}\vec{H} = \text{grad div}\vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$ ;  $\text{div}\vec{H} = 0$  тому

$$\nabla^2 \vec{H} = \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.83)$$

Так само

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\vec{E} &= -\frac{\partial \text{rot}\vec{H}}{\partial t} = -\gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{grad div}\vec{E} - \nabla^2 \vec{E} &= -\gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Але  $\text{div}\vec{E} = 0$ , отже

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5.85)$$

В окремому випадку гармонічної зміни величин у часі

$$\nabla^2 \underline{\vec{H}} = i \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \omega \underline{\vec{H}}, \quad (5.86)$$

$$\nabla^2 \underline{\vec{E}} = i \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \omega \underline{\vec{E}}. \quad (5.87)$$

## Розділ 6. ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

### 6.1 Плоска електромагнітна хвиля

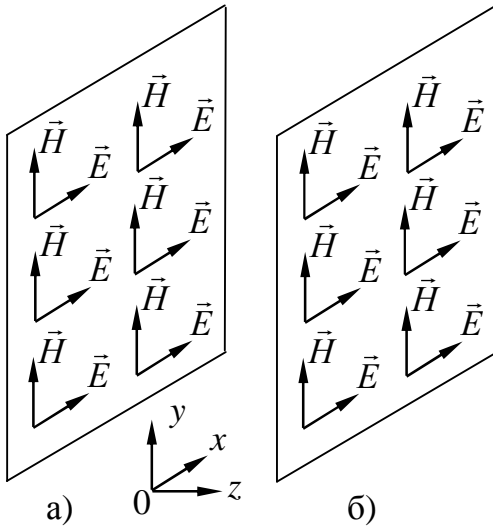


Рис. 6.1

Під **плоскою електромагнітною хвилю** розуміють хвилю, вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  якої розташовані в площині  $xoy$ , перпендикулярної напрямку поширення хвилі (осі  $z$ ), і змінюються тільки у функції координати  $z$  і часу  $t$ . На рис. 6.1 для одного моменту часу зображені вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  у двох паралельних площинах, які перпендикулярні осі  $z$  декартової системи координат. В усіх точках першої площини (рис. 6.1, а) напруженість електричного (магнітного) поля однакова за величиною і за напрямком. В усіх точках другої площини (рис. 6.1, б) напруженість електричного (магнітного) поля

також однакова за величиною і за напрямком, але вона не дорівнює напруженості поля в першій площині. У силу самого визначення плоскої хвилі маємо

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0. \quad (6.1)$$

У плоскій хвилі  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є функціями тільки однієї координати, у нашому випадку функцією тільки координати  $z$ .

Повернемо координатні осі таким чином, щоб вісь  $y$  збіглася з напруженістю магнітного поля  $\vec{H}$ . При цьому

$$\vec{H} = \vec{j} H, \quad (6.2)$$

де  $\vec{j}$  – одиничний орт осі  $y$  декартової системи координат.

Підставимо  $\vec{H} = \vec{j} H$  в рівняння  $\nabla^2 \vec{H} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{H}$  (5.86) і розкриємо оператор  $\nabla^2$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{j} H = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j} \cdot H. \quad (6.3)$$

Врахуємо, що

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \quad (6.4)$$

Тому

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dz^2} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \underline{H}. \quad (6.5)$$

У рівнянні замість частинної похідної стоїть проста похідна, тому що  $\underline{\vec{H}}$  є функцією тільки змінної  $z$ .

Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Його розв'язок

$$\underline{H} = \underline{C}_1 \cdot e^{pz} + \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}, \quad (6.6)$$

де  $\underline{C}_1$  і  $\underline{C}_2$  – постійні інтегрування, комплексні величини, що знаходяться з граничних умов і визначаються для конкретної задачі.

З характеристичного рівняння  $p^2 = i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a$  знайдемо сталу поширення

$$p = \sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}. \quad (6.7)$$

Якщо одиниця виміру  $\gamma$  –  $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ ,  $\mu_a$  –  $\text{Гн/м}$ , то  $p$  вимірюється в  $\text{м}^{-1}$ .

Як було показано раніше

$$p = k \cdot (1 + i), \text{ де } k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}{2}}. \quad (6.8)$$

Знайдемо напруженість електричного поля  $\underline{\vec{E}}$ . Для провідного середовища перше рівняння Максвелла в комплексній формі має вигляд:

$$\text{rot} \underline{\vec{H}} = \gamma \underline{\vec{E}}. \text{ Звідси } \underline{\vec{E}} = \frac{1}{\gamma} \cdot \text{rot} \underline{\vec{H}}. \quad (6.9)$$

З урахуванням того, що  $\text{rot} \underline{\vec{H}} = |\nabla \underline{\vec{H}}|$  та  $\frac{\partial \underline{\vec{H}}}{\partial x} = \frac{\partial \underline{\vec{H}}}{\partial y} = 0$ , маємо

$$\text{rot} \underline{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \underline{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left(-\frac{\partial \underline{H}}{\partial z}\right), \text{ отже,} \quad (6.10)$$

$$\underline{\vec{E}} = \vec{i} \cdot \left(-\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d \underline{H}}{dz}\right). \quad (6.11)$$

$$\text{Похідна } \frac{d \underline{H}}{dz} = p \cdot [\underline{C}_1 \cdot e^{pz} - \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}].$$

Вираз (6.11) показує, що напруженість електричного поля в плоскій хвилі при обраному розташуванні осей координат спрямована уздовж осі  $x$ , про що свідчить присутність одиничного орта осі  $x$  (орта  $\vec{i}$ ). Таким чином, у плоскій електромагнітній хвилі між векторами  $\underline{\vec{E}}$  і  $\underline{\vec{H}}$  є просторовий зсув у  $90^\circ$  ( $\underline{\vec{E}}$  спрямовано по осі  $x$ , а  $\underline{\vec{H}}$  – по осі  $y$ ).

Частка від ділення  $p$  на  $\gamma$  називається **хвильовим опором**

$$\underline{Z}_e = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{i45^0}. \quad (6.12)$$

Хвильовий опір  $\underline{Z}_e$  визначається в омах (Ом), залежить від властивостей середовища і кутової частоти.

Проекція  $\vec{E}$  на вісь  $x$  дорівнює

$$\underline{E} = \underline{E}_{nad} + \underline{E}_{vidb}, \quad (6.13)$$

де  $\underline{E}_{nad} = \underline{Z}_e \cdot \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}$  і  $\underline{E}_{vidb} = -\underline{Z}_e \cdot \underline{C}_1 \cdot e^{pz}$ .

Проекція  $\vec{H}$  на вісь  $y$  дорівнює

$$\underline{H} = \underline{H}_{nad} + \underline{H}_{vidb} \quad (6.14)$$

де  $\underline{H}_{nad} = \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}$  і  $\underline{H}_{vidb} = \underline{C}_1 \cdot e^{pz}$ .

Складові падаючої хвилі  $\vec{E}_{nad}$  і  $\vec{H}_{nad}$  визначають вектор Пойтинга  $\vec{\Pi}_{nad}$  (див. рис. 6.2, а). Він спрямований уздовж додатного напрямку осі  $z$ . Отже, рух енергії з падаючою хвилею відбувається уздовж додатного напрямку осі  $z$ .

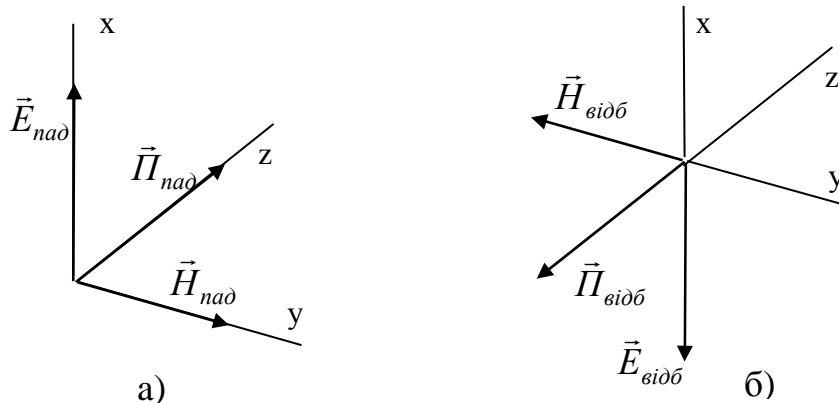


Рис. 6.2

Складові відбитої хвилі  $\vec{E}_{vidb}$  і  $\vec{H}_{vidb}$  визначають вектор Пойтинга  $\vec{\Pi}_{vidb}$  (див. рис. 6.2, б). Він спрямований уздовж від'ємного напрямку осі  $z$ . Отже, рух енергії з відбитою хвилею відбувається уздовж від'ємного напрямку осі  $z$ .

Хвильовий опір  $\underline{Z}_e$  можна трактувати як відношення  $\frac{\underline{E}_{nad}}{\underline{H}_{nad}}$ .

Хвильовий опір є числом комплексним і має аргумент  $45^0$ , тому зсув у часі між  $\vec{E}_{nad}$  і  $\vec{H}_{nad}$  для однієї і тієї ж точки поля дорівнює чверті періоду.

## 6.2 Поширення плоскої електромагнітної хвилі в однорідному провідному півпросторі

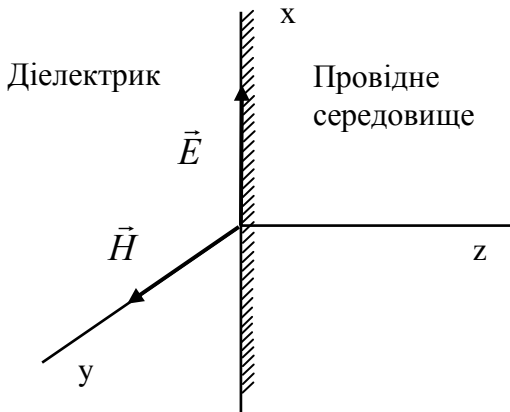


Рис. 6.3

Розглянемо поширення плоскої електромагнітної хвилі в однорідному теоретично нескінченно протяжному провідному середовищі (рис. 6.3).

Електромагнітна хвиля проникає з дієлектрика в провідне середовище і поширюється в ньому. Середовище простирається теоретично в нескінченність і падаюча хвиля в провідному середовищі не зустрічає границі, тому відбитої хвилі в даному випадку не виникає.

При наявності тільки однієї падаючої хвилі

$$\underline{H} = \underline{C}_2 \cdot e^{-pz} \quad \text{і} \quad \underline{E} = \underline{Z}_e \cdot \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}. \quad (6.15)$$

Постійну інтегрування  $C_2$  знайдемо з граничних умов. Якщо позначити напруженість магнітного поля на поверхні провідного середовища через  $\underline{H}_a = H_a \cdot e^{i\psi_a}$ , то при  $z = 0$

$$\underline{C}_2 = \underline{H}_a. \quad (6.16)$$

Тому з урахуванням (6.8) одержимо

$$\underline{H} = H_a \cdot e^{-kz} \cdot e^{-ikz} \cdot e^{i\psi_a}. \quad (6.17)$$

У свою чергу

$$\underline{E} = H_a \cdot e^{-kz} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{i45^\circ} \cdot e^{-ikz} \cdot e^{i\psi_a}. \quad (6.18)$$

Щоб записати вирази для миттєвих значень  $H$  і  $E$ , необхідно праві частини виразів для їхніх комплексних значень помножити на  $e^{i\omega t}$  і взяти мнимі частини від добутків.

Одержимо:

$$H = H_a \cdot e^{-kz} \cdot \sin(\omega t - kz + \psi_a), \quad (6.19)$$

$$E = H_a \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{-kz} \cdot \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ). \quad (6.20)$$

Проаналізуємо отримані вирази. Амплітуда  $H$  дорівнює  $H_a \cdot e^{-kz}$ , амплітуда  $E$  дорівнює  $H_a \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{-kz}$ . У міру збільшення  $z$  множник  $e^{-kz}$  зменшується за експоненціальним законом. Отже, у міру проникнення електромагнітної

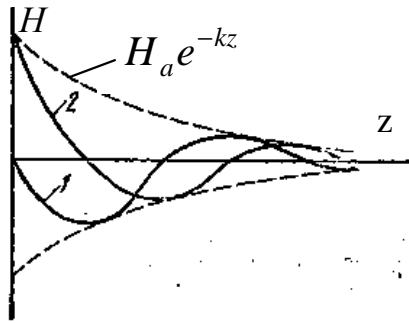


Рис. 6.4

хвилі в провідне середовище амплітуди  $H$  и  $E$  зменшуються за експоненціальним законом. На рис. 6.4 пунктиром зображені лінії, побудовані на основі виразу  $H_a e^{-kz}$ . Миттєве значення  $H$  чи  $E$  визначається аргументом синуса, що залежить від  $z$  і  $\omega t$ . Якщо прийняти  $\omega t = \text{const}$ , то на графіку миттєвих значень  $H$  в функції від  $z$  при  $\omega t + \psi_a = 0$  буде отримана крива 1 (рис. 6.4) і крива 2 при  $\omega t + \psi_a = 90^\circ$ .

Для того щоб охарактеризувати, наскільки швидко зменшується амплітуда падаючої хвилі в міру проникнення хвилі в провідне середовище, вводять поняття глибини проникнення.

### 6.3 Глибина проникнення і довжина хвилі

Під **глибиною проникнення**  $\Delta$  розуміють відстань уздовж напрямку поширення хвилі (уздовж осі  $z$ ), на якій амплітуда падаючої хвилі  $E$  (або  $H$ ) зменшується в  $e = 2,718$  разів. Глибину проникнення визначають за допомогою виразу

$$e^{-k\Delta} = e^{-1}.$$

Звідси випливає, що  $k\Delta = 1$  або

$$\Delta = \frac{1}{k}.$$

Глибина проникнення залежить від властивостей провідного середовища ( $\gamma$  і  $\mu_r$ ) і частоти  $\omega$ . Так, якщо електромагнітна хвиля має частоту  $f = 5000 \text{ Гц}$  і проникає в провідне середовище, для якого  $\gamma = 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$  і  $\mu_r = 10^3$ , то

$$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot 5000 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} 10^7}{2}} = 14100 \text{ м}^{-1}. \quad (6.21)$$

Глибина проникнення  $\Delta = \frac{1}{k} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , тобто на відстані в 0,07 мм амплітуди  $H$  і  $E$  знизилися в 2,7183 рази.

Під **довжиною хвилі**  $\lambda$  в провідному середовищі розуміють відстань уздовж напрямку поширення хвилі (уздовж осі  $z$ ), на якій фаза коливання змінюється на  $2\pi$ . Довжину хвилі визначають з рівняння  $\lambda k = 2 \cdot \pi$ :

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k}. \quad (6.22)$$



Для розглянутого числового прикладу

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{14100} \approx 0,445 \text{ мм}. \quad (6.23)$$

Під **фазовою швидкістю** поширення електромагнітної хвилі в провідному середовищі розуміють швидкість, з якою треба було б переміщатися уздовж осі  $z$ , щоб коливання мало ту ж саму фазу. Фаза коливання визначається виразом  $\omega t - kz + \psi_a$ .

Похідна від сталої величини дорівнює нулю  $\frac{d}{dt} \cdot (\omega t - kz + \psi_a) = 0$ .

Звідки

$$\omega - k \cdot \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}}; \quad v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (6.24)$$

Для розглянутого числового прикладу фазова швидкість буде

$$v_{\text{фаз}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5000}{14100} \approx 2,25 \text{ м/сек}. \quad (6.25)$$

## Розділ 7. ПОВЕРХНЕВИЙ ЕФЕКТ

### 7.1 Явище поверхневого ефекту

Змінний струм по перетину провідника розподіляється нерівномірно. Густина струму в різних точках перетину неоднакова. У циліндричному провіднику круглого перетину найбільша густина струму буде біля поверхні провідника, найменша – на осі.

Електромагнітна енергія проникає в провідник, передається вільним електронам і викликає (при змінному електромагнітному полі) упорядковане коливання електронів, тобто струм провідності.

Сили взаємодії між електронами і зв'язаними зарядами гальмують цей коливальний рух.

Електрони зіштовхуються з іонами кристалічних ґрат, віддають їм свою енергію і цим підсилюють безладний тепловий коливальний рух іонів, тобто викликають підвищення температури провідника. Електромагнітна енергія, що проникає в провідник, переходить у теплову енергію. Якщо припиниться надходження в провідник електромагнітної енергії, то припиниться й упорядкований рух електронів, і струму не буде.

При стаціонарному процесі (постійний струм) електромагнітна енергія проникає на всю глибину провідника, і струм рівномірно розподіляється по всьому перетину провідника.

При змінному процесі в той момент, коли вектора  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$  на поверхні провідника дорівнюють нулю, надходження енергії в провідник припиняється ( $\vec{P} = 0$ ). Електромагнітна енергія розповсюджується всередині провідника із кінцевою швидкістю і при високій частоті за ту частину періоду, коли вектор Пойтинга істотно відрізняється від нуля, не встигає проникнути на велику глибину. Чим вище частота, тим коротше проміжок надходження енергії електромагнітного поля в провідник, тим менше глибина проникнення енергії.

У результаті, при змінному струмі упорядкований рух електронів у зовнішніх шарах буде більш інтенсивним, ніж у внутрішніх шарах. Густина струму в міру заглиблення в провідник буде зменшуватися за амплітудою і відставати за фазою.

Явище нерівномірного розподілу поля по перетину провідного тіла, викликане згасанням електромагнітної хвилі при її розповсюдженні в провідне середовище, називають **поверхневим ефектом**.

Поверхневий ефект у більшій мірі виявляється при більш високих частотах і в провідниках більшого перетину.

При дуже високих частотах вважають, що весь струм проходить по поверхні провідника, і всередині провідника електромагнітного поля немає.

У провіднику нерівномірно будуть розподілені поля  $\vec{E}$  й  $\vec{H}$  і, відповідно, густина струму  $\vec{j}$ . У зв'язку з поверхневим ефектом змінюються активний опір і індуктивність провідника. Зі збільшенням частоти активний опір зростає, а індуктивність зменшується.

З ростом електричної провідності і магнітної проникності поверхневий ефект підсилюється.

Чим більше електрична провідність провідника, тим більше вільних електронів, тим інтенсивніше витрати енергії на їх упорядкований рух, і, отже, швидше загасає потік електромагнітної енергії, що входить через поверхню провідника.

Зі збільшенням магнітної проникності зменшується швидкість розповсюдження електромагнітного поля в провіднику (див. (5.60)), а отже, зменшується глибина його проникнення.

## 7.2 Змінний магнітний потік у плоскому листі

Розглянемо поле в сталевому листі при проходженні уздовж листа змінного магнітного потоку  $\Phi_m$  (рис. 7.1). Довжина листа  $l$  досить велика. Ширина

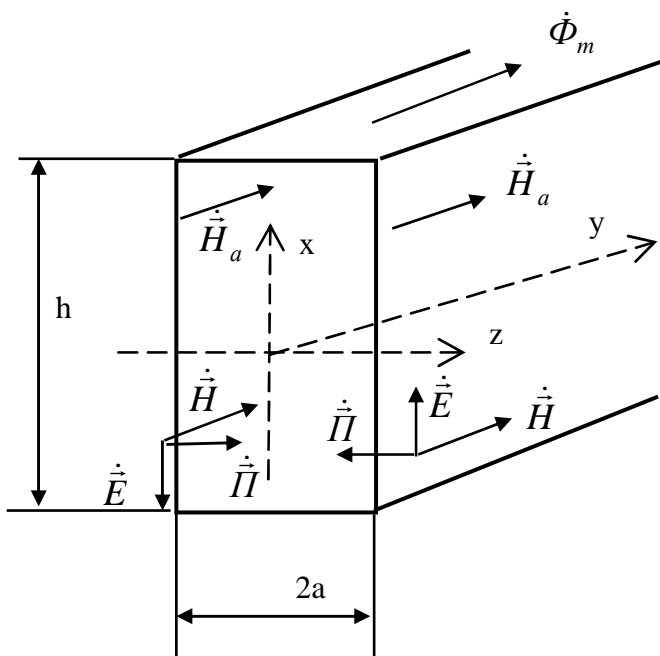


Рис. 7.1

$h$  і довжина  $l$  листа набагато більше його товщини  $2a$ , тому будемо вважати, що краї листа не спотворюють поле. Середня густина магнітної індукції по перетину листа

$$\underline{B}_{cp} = \frac{\Phi_m}{2 \cdot a \cdot h}.$$

Завдання полягає у визначенні законів зміни  $\underline{H}$  і  $\underline{B}$  по перетину листа.

Виберемо початок координат у середині перетину провідника. Лінії вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  спрямовані паралельно осі у провідника.

У силу симетрії  $\vec{H}_{z=a} = \vec{H}_{z=-a} = \vec{H}_a$ .

Рівняння електромагнітного поля у провідному середовищі (5.86)

$$\nabla^2 \cdot \vec{H} = i \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \omega \cdot \vec{H}. \quad (7.1)$$

З огляду на те, що  $\vec{H} = \underline{H} \cdot \vec{1}_y$ , скорочуючи на  $\vec{1}_y$ , одержимо

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial z^2} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \underline{H}. \quad (7.2)$$

Загальний розв'язок рівняння

$$\underline{H} = \underline{C}_1 \cdot e^{\dot{p}z} + \underline{C}_2 \cdot e^{-\dot{p}z}, \text{ де } \underline{p} = \sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}. \quad (7.3)$$

Сталі інтегрування  $\underline{C}_1$  і  $\underline{C}_2$  знаходяться з граничних умов

$$\underline{H}_a = \underline{C}_1 \cdot e^{-\dot{p}a} + \underline{C}_2 \cdot e^{\dot{p}a} \text{ при } z = -a, \quad (7.4)$$

$$\underline{H}_a = \underline{C}_1 \cdot e^{\dot{p}a} + \underline{C}_2 \cdot e^{-\dot{p}a} \text{ при } z = a. \quad (7.5)$$

Розв'язок дає наступний вираз

$$\underline{C}_1 = \underline{C}_2 = \frac{\underline{H}_a}{e^{\dot{p}a} - e^{-\dot{p}a}} = \frac{\underline{H}_a}{2 \cdot c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.6)$$

У довільній точці

$$\underline{H} = \frac{\underline{H}_a}{2 \cdot c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a} \cdot (e^{\dot{p}z} + e^{-\dot{p}z}) = \underline{H}_a \cdot \frac{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot z}{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.7)$$

Визначимо вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$ .

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \cdot \text{rot} \vec{H} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \vec{1}_x = -\frac{\rho}{\gamma} \cdot \underline{H}_a \cdot \frac{s \cdot h \cdot \underline{p} \cdot z}{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a} \cdot \vec{1}_x = -\underline{E} \cdot \vec{1}_x, \quad (7.8)$$

$$\text{де } \underline{E} = -\frac{\underline{p}}{\gamma} \cdot \underline{H}_a \cdot \frac{s \cdot h \cdot \underline{p} \cdot z}{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.9)$$

Струм, що виникає при проходженні по листу змінного магнітного потоку, називають **вихровим струмом**.

Вектор густини вихрового струму  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$  у будь-якій точці листа колінеарний з вектором  $\vec{E}$  у тій самій точці. Магнітна індукція у будь-якій точці

$$\underline{B} = \mu_a \cdot \underline{H} = \mu_a \cdot \underline{H}_a \cdot \frac{s \cdot h \cdot \underline{p} \cdot z}{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.10)$$

Середнє значення магнітної індукції в листі

$$\underline{B}_{cp} = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a \underline{B} \cdot dz = \frac{\mu_a \cdot \underline{H}_a \cdot s \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}{\underline{p} \cdot a \cdot c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a} = \frac{\mu_a \cdot \underline{H}_a \cdot t \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}{\underline{p} \cdot a}. \quad (7.11)$$

Якщо вважати  $\underline{B}_{cp}$  відомою величиною, то з цього виразу можна визначити напруженість поля  $\underline{H}_a$  на поверхні листа

$$\underline{H}_a = \frac{\underline{B}_{cp} \cdot \underline{p} \cdot a}{\mu_a \cdot t \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.12)$$

$$\underline{p} = \sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}, \quad \sqrt{i} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + i), \text{ тому} \quad (7.13)$$

$$\underline{p} = k \cdot (1 + i), \text{ де } k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}{2}}. \quad (7.14)$$

Отже, аргумент  $\underline{p} \cdot a = k \cdot a + i \cdot k \cdot a \in$  комплексною величиною і  $thpa$  є гіперболічний синус від комплексного аргументу і також є комплексним числом

$$t \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a = t \cdot h \cdot (k \cdot a + i \cdot k \cdot a) = \frac{s \cdot h \cdot 2 \cdot k \cdot a + i \cdot \sin 2 \cdot r \cdot k \cdot a}{c \cdot h \cdot 2 \cdot k \cdot a + \cos 2 \cdot k \cdot a}. \quad (7.15)$$

Відношення середнього значення магнітної індукції по перетину листа до напруженості поля на поверхні листа називають **комплексною магнітною проникністю**

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a \cdot t \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}{\underline{p} \cdot a} \quad (\tilde{\mu}_a = \mu_0 \cdot \tilde{\mu}_r). \quad (7.16)$$

При великих значеннях аргументу  $2 \cdot k \cdot a$   $t \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a \approx \frac{s \cdot h \cdot 2 \cdot k \cdot a}{c \cdot h \cdot 2 \cdot k \cdot a} \approx 1$  і

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{\underline{p} \cdot a}. \quad (7.17)$$

Напруженість поля в середній площині листа (при  $z = 0$ )

$$\underline{H}_{z=0} = \frac{\underline{H}_a}{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.18)$$

Звідси  $c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a = \frac{\underline{H}_a}{\underline{H}_{z=0}}.$

Ліва і права частини формули – комплексні величини.

Модуль  $c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a$  визначається за формулою:

$$|c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a| = \sqrt{\frac{c \cdot h \cdot 2 \cdot k \cdot a + \cos 2 \cdot k \cdot a}{2}}. \quad (7.19)$$

**Приклад.**

Нехай  $\mu = 100$ ;  $f = 500$  Гц;  $\gamma = 10^7 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ . При цьому  $k = 1410 \frac{1}{\text{м}}$ .

Товщина листа  $2a = 1$  мм; 2 мм; 4 мм.

Тоді  $2ka = 1,41$ ; 2,82; 5,64;

$$\frac{1}{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a} = 0,91; 0,52; 0,01.$$

Таким чином, напруженість магнітного поля в середній площині листа

може бути набагато менше напруженості поля на краю листа (рис. 7.2).

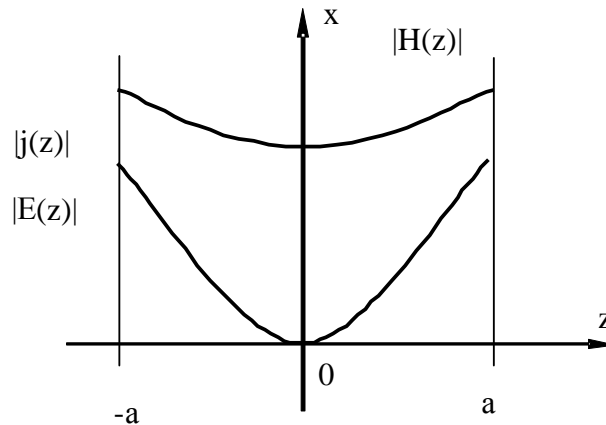


Рис. 7.2

### 7.3 Електричний поверхневий ефект у прямокутній шині

При електричному поверхневому ефекті уздовж шини спрямований синусоїдальний струм  $\underline{I}$  частотою  $\omega$ . У цьому випадку поле усередині провідника визначається за формулами:

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot h} \cdot \frac{s \cdot h \cdot \underline{p} \cdot z}{s \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}; \quad \underline{E} = \frac{\underline{p}}{\gamma} \cdot \frac{\underline{I}}{2 \cdot h} \cdot \frac{c \cdot h \cdot \underline{p} \cdot z}{s \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.20)$$

Модуль  $sh \underline{p} a$  визначається за формулою:

$$|sh \underline{p} a| = \sqrt{\frac{c \cdot h \cdot 2 \cdot k \cdot a - \cos 2 \cdot k \cdot a}{2}}. \quad (7.21)$$

Опір одиниці довжини шини

$$\underline{Z} = R + i \cdot X = \frac{\underline{p}}{\gamma \cdot 2 \cdot h \cdot t \cdot h \cdot \underline{p} \cdot a}. \quad (7.22)$$

### 7.4 Поверхневий ефект у циліндричному провіднику

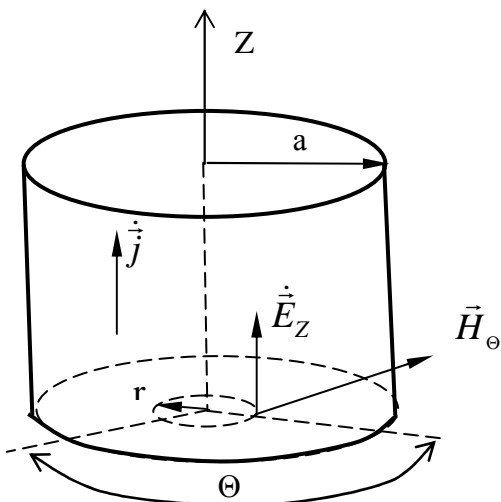


Рис. 7.3

Нехай по циліндричному проводу радіуса  $a$  протікає синусоїдальний струм  $\underline{I}$  частотою  $\omega$ . Провід будемо вважати нескінченно довгим.

Визначимо густину струму  $\vec{j}$  і напруженість  $\vec{H}$  у будь-якій точці перетину проводу.

Розв'язок проведемо в циліндричній системі координат (рис. 7.3).

Напруженість електричного поля має тільки складову, яка паралельна осі  $z$ , лінії вектора напруженості магнітного поля – концентричні окружності.

Електромагнітне поле при прийнятих умовах має циліндричну симетрію, і значення векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  буде змінюватися тільки залежно від відстані до осі провідника.

У циліндричній системі координат вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  і вектор густини струму  $\vec{j}$  мають складову тільки по осі  $z$ , вектор напруженості магнітного поля має складову тільки по координатній лінії координати  $\Theta$ . Тому

$$\vec{j} = \vec{1}_z \cdot j. \quad (7.23)$$

Запишемо рівняння Максвелла для провідного середовища (5.81) в комплексній формі запису:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (7.24)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \vec{H}. \quad (7.25)$$

Помножимо друге рівняння на  $\gamma$  та врахуємо, що  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ , тоді

$$\text{rot} \vec{j} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{H}. \quad (7.26)$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{j} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \text{rot} \vec{H} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j}, \text{ тобто} \quad (7.27)$$

$$(\text{grad} \text{div} \vec{j} - \nabla^2 \vec{j}) \cdot \vec{1}_z = (-i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma) \cdot \vec{j} \cdot \vec{1}_z. \quad (7.28)$$

У сталому режимі  $\text{div} \vec{j} = 0$ , тому

$$\nabla^2 \vec{j} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j}. \quad (7.29)$$

Розкриємо  $\nabla^2 \vec{j}$  в циліндричній системі координат і врахуємо, що  $\vec{j}$  не залежить від  $\Theta$  і  $z$ . Одержимо:

$$\frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial j}{\partial r} + r \frac{\partial^2 j}{\partial r^2} \right) = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot j, \text{ або } \frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial j}{\partial r} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot j. \quad (7.30)$$

Позначимо

$$q^2 = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \quad (7.31)$$

тоді  $\frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial j}{\partial r} + q^2 \cdot j = 0$  або

$$\frac{\partial^2 j}{\partial \cdot (q \cdot r)^2} + \frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial \cdot j}{\partial \cdot (q \cdot r)} + j = 0. \quad (7.32)$$

Це рівняння є окремий випадок рівняння Бесселя. Його розв'язок

$$\vec{j} = \underline{A} \cdot J_0(qr) + \underline{B} \cdot N_0(qr), \quad (7.33)$$

де  $\underline{A}, \underline{B}$  – сталі інтегрування;

$J_0(qr)$  – функція Бесселя нульового порядку першого роду;

$N_0(qr)$  – функція Бесселя нульового порядку другого роду.

При  $\underline{B} = 0$

$$\underline{j} = \underline{A} \cdot J_0(qr). \quad (7.34)$$

Визначимо  $\underline{\vec{H}}$  з виразу (7.26) з урахуванням (7.31).

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{q^2} \cdot \text{rot } \underline{\vec{j}} = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial \underline{j}}{\partial r} \cdot \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Theta \cdot \underline{H}, \quad (7.35)$$

$$\underline{H} = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [\underline{A} \cdot J_0(qr)] = -\frac{\underline{A}}{q^2} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} \cdot J_0(qr) \right] = \frac{\underline{A}}{q} \cdot J_1(qr), \quad (7.36)$$

$$\text{тобто } \underline{H} = \frac{\underline{A}}{q} \cdot J_1(qr), \quad (7.37)$$

де  $J_1(qr)$  – функція Бесселя першого порядку першого роду.

Використаємо закон повного струму (4.51) для визначення сталої інтегрування  $\underline{A}$ .

На поверхні проводу при  $r = a$ .

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{\underline{A}}{q} \cdot J_1(qr), \quad \underline{A} = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot J_1(qa)}. \quad (7.38)$$

Підставимо знайдене значення  $\underline{A}$  у формули (7.34) і (7.37), одержимо

$$\underline{j} = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_0(qr)}{J_1(qa)}, \quad (7.39)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_1(qr)}{J_1(qa)}. \quad (7.40)$$

За допомогою цих формул можна визначити комплекс густини струму  $\underline{j}$  та комплекс напруженості поля  $\underline{H}$  в будь-якій точці перетину проводу.

Радіус  $r$  може приймати значення від 0 до  $a$ . Для точки на осі проводу  $r = 0$ ; для точки на поверхні проводу  $r = a$ .  $J_0(0) = 1$ , тому на осі проводу

$$\underline{j}_0 = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot J_1(qa)}. \quad (7.41)$$

З огляду на (7.39) і (7.40) одержимо

$$\underline{j} = \underline{j}_0 \cdot J_0(qr). \quad (7.42)$$

З формули (7.42) випливає, що на поверхні проводу

$$\underline{j}_a = \underline{j}_0 \cdot J_0(qa). \quad (7.43)$$



Функції Бесселя  $J_0(qr)$  і  $J_1(qr)$  від комплексного аргументу також комплексні, визначаються за таблицями, у яких дається значення модуля й аргументу:

$$J_0(qr) = b_0 \cdot e^{i\beta_0}, \quad J_1(qr) = b_1 \cdot e^{i\beta_1}. \quad (7.44)$$

$q = \sqrt{-i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} = \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} \cdot \sqrt{-i} = \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} \cdot e^{-i90^\circ/2}$ , тому з урахуванням (7.44) формула (7.39) приймає вигляд

$$\underline{j} = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_0(qr)}{J_1(qa)} = \frac{\underline{I} \cdot \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{b_0(r)}{b_1(a)} \cdot e^{i(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ)} \quad (7.45)$$

Графік розподілу модуля  $\underline{j}$  уздовж осі проводу наведений на рис. 7.4.

Графік розподілу модуля  $\underline{H}$  наведений на рис. 7.5.

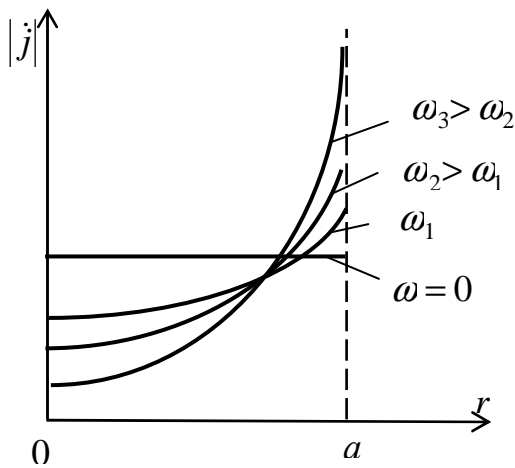


Рис. 7.4

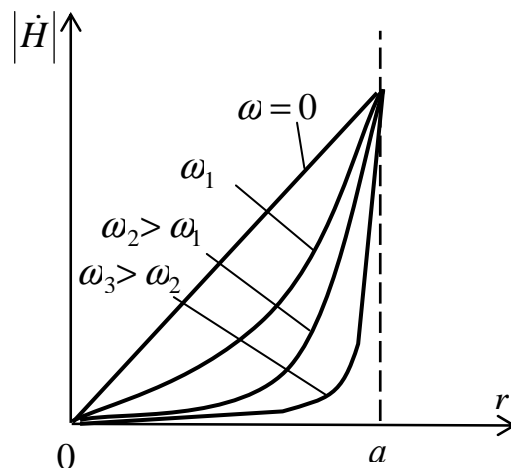


Рис. 7.5

**7.5 Застосування теореми Умова-Пойтинга для визначення активного і внутрішнього індуктивного опору циліндричного проводу при змінному струмі**

Активний і внутрішній індуктивний опори циліндричного проводу при змінному струмі часто визначають за допомогою теореми Умова-Пойтинга в комплексній формі.

$$-\oint_s [\vec{E} \vec{H}^*] d\vec{S} = P + i \cdot Q = I^2 \cdot (R + iX) = I^2 \cdot Z, \quad (7.46)$$

де  $P$  – активна потужність;

$Q$  – реактивна потужність.

Щоб одержати комплексний опір провідника на одиницю довжини, необхідно розрахувати потік вектора Пойтинга через бічну поверхню провідника на довжині 1 м і поділити отриману величину на квадрат струму, що протікає по провіднику.

$$\underline{Z} = R + iX = \frac{-\oint_S \left[ \underline{\vec{E}} \vec{H}^* \right] d\vec{S}}{I^2} \quad (7.47)$$

Для циліндричного проводу

$$\underline{\vec{E}} = \frac{j}{\gamma} = \frac{\underline{I} \cdot \sqrt{-\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot i}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{J_0(qa)}{J_1(qa)}, \quad (7.48)$$

$$\vec{H} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_1(qa)}{J_1(qa)} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a}. \quad (7.49)$$

Тоді

$$\underline{Z} = \frac{\underline{I}^2}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{\sqrt{-\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot i}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{J_0(qa)}{J_1(qa)} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{I^2} = \frac{\sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{b_0 \cdot e^{i\beta_0}}{b_1 \cdot e^{i\beta_1}} \cdot e^{-i45^\circ}. \quad (7.50)$$

Звідси

$$R = \frac{\sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{b_0}{b_1} \cdot \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ), \quad (7.51)$$

$$X = \frac{\sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{b_0}{b_1} \cdot \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ), \quad (7.52)$$

де  $X = X_L = \omega L_{\text{вн}}$  – внутрішній реактивний опір провідника.

Звідси легко визначити  $L_{\text{вн}} = \frac{X}{\omega}$ .

## ВИСНОВКИ

Стационарне електричне або магнітне поле можна розрахувати за рівнянням Пуассона, складеним для скалярного потенціалу  $\varphi$  або для векторного потенціалу  $\vec{A}$ :

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a},$$
$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \cdot \vec{j}.$$

Останнє векторне рівняння є скороченим записом трьох рівнянь Пуассона, складених для проекцій векторного потенціалу  $\vec{A}$  на осі координат.

В окремому випадку, коли в точці спостереження вільні заряди і струми провідності відсутні, співвідношення переходять у рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$
$$\nabla^2 \vec{A} = 0.$$

При розв'язку рівнянь Пуассона і Лапласа постійні інтегрування визначаються з граничних умов.

Розв'язок рівнянь Пуассона або Лапласа буде єдиним, якщо задано значення потенціалу (скалярних або векторного) на граничних поверхнях.

Знаючи  $\varphi$  і  $\vec{A}$ , за відомими співвідношеннями  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  і  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  можна визначити вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  і вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}$ .

Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  є фізичними характеристиками електричних і магнітних полів і визначають фізичні властивості поля в даній точці (наприклад, силу, що діє на нерухомий заряд, або на заряд, що рухається).

Крім того, існують ще вектор електричної індукції  $\vec{D}$  і вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ , які використовуються як розрахункові величини. Ці вектори відзначаються тим, що їхні диференціальні рівняння

$$\text{Div}\vec{D} = \rho,$$
$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$$

не залежать від середовища.

Розв'язок цих рівнянь, тобто поля векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{H}$  будуть залежати від середовища в тій мірі, в якій зміна середовища впливає на граничні умови, що визначають постійні інтегрування.

Наступний метод розрахунку електричного і магнітного полів – метод накладання або, як його ще можна назвати, метод безпосереднього інтегрування. При цьому методі заряд або струм розбиваються на елементарні заряди

або струми. Напруженість електричного поля або індукція магнітного поля визначаються як результат накладання напруженостей електричного поля або індукцій магнітного поля, створених елементарними зарядами або струмами:

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \int_v \frac{\rho \cdot \vec{R}}{R^3} \cdot dv,$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_v \frac{[\vec{j} \vec{R}]}{R^3} dv.$$

Скалярний і векторний потенціали можна обчислити за співвідношеннями:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \int_v \frac{\rho \cdot dv}{R},$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_v \frac{\vec{j}}{R} dv,$$

а знаючи ці величини, можна визначити

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad \text{та} \quad \vec{B} = rot\vec{A}.$$

Цей метод розрахунку має значні математичні труднощі.

Симетричні поля зручно розраховувати за теоремою Гауса (електричне поле) і за законом повного струму (магнітне поле).

Теорема Гауса і закон повного струму, як об'єктивні закони природи, справедливі для будь-яких полів, але як метод розрахунку вони зручні лише для симетричних полів.

Аналітичний розрахунок полів можливий тільки в окремих випадках.

У темі 3 розглянуто електричне поле в провідному середовищі, тобто електричне поле постійного струму.

Постійний струм можливий тільки при наявності стороннього поля, обумовленого перетворенням неелектричної енергії в електричну.

Стороннє поле існує лише всередині джерела струму. Електричне поле постійного струму, створене електричними зарядами, що рухаються, задовольняє співвідношенням, отриманим для електричного поля нерухомих зарядів. Додатково розглядається поле вектора густини струму  $\vec{j}$ .

Рівняння неперервності вектора густини постійного струму

$$div\vec{j} = 0$$

указує на відсутність джерел цього вектора, тобто на замкнутість його ліній.

У темі 5 розглядається змінне електромагнітне поле в нерухомому середовищі.

Рівняння Максвелла формулюються в результаті переходу від окре-

мих закономірностей до загальної теорії. Потім загальна теорія використовується для розв'язання окремих задач.

Перше рівняння Максвелла – 
$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Друге рівняння Максвелла – 
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Фізичний зміст цих рівнянь полягає в тому, що магнітне поле створюється не тільки струмом провідності, але і струмом зсуву, тобто зміною в часі електричного поля, так само як зміна в часі магнітного поля створює вихрове електричне поле. Всі інтегральні закони електротехніки, що лежать в основі розрахунку електричних кіл, можна одержати як наслідок рівнянь Максвелла.

Розглянуто метод розв'язку рівнянь Максвелла за допомогою векторного і скалярного потенціалів.

$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$  – рівняння для визначення скалярного електродинамічного потенціалу  $\varphi$ .

$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \vec{j}$  – рівняння для визначення вектора – потенціалу  $\vec{A}$ .

Ці рівняння є рівняннями Даламбера.

Напруженість електричного поля й індукція магнітного поля визначаються за співвідношеннями:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Якщо в розглянутому об'ємі немає струмів провідності і вільних зарядів, то одержимо окремий випадок рівнянь Даламбера:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ – хвильові рівняння електромагнітного поля, що}$$

характеризують процес поширення електромагнітного поля в областях, де немає джерел цього поля.

Для стаціонарного поля рівняння Даламбера переходять в рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a}; \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_a \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

При відсутності в розглянутому об'ємі струмів провідності і вільних зарядів одержимо рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0;$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0.$$

Розв'язок хвильового рівняння Даламбера виходить у вигляді запізнених потенціалів:

$$\varphi(t) = \int_v \frac{\rho \cdot (t - \frac{R}{u})}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_a \cdot R} \cdot dv, \quad \vec{A}(t) = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_v \frac{\vec{j} \cdot (t - \frac{R}{u})}{R} \cdot dv.$$

Запізнені потенціали є математичним вираженням матеріалістичної теорії близькодії, відповідно до якої електромагнітне поле поширюється через середовище від точки до точки з визначеною швидкістю, яка залежить від середовища.

Вивчення процесу поширення електромагнітної енергії привело до поняття вектора густини потоку потужності – вектора Пойтинга. При цьому було встановлено, що у випадку передачі енергії «по проводах» енергія в дійсності передається оточуючим проводам електромагнітним полем, що має визначену питому масу і питому енергію. Проводи лише відіграють роль граничних поверхонь, що створюють визначений просторовий розподіл електромагнітного поля.

У проводи надходить («засмоктується») тільки та енергія, яка необхідна для покриття теплових утрат.

Питання, зв'язані з випромінюванням електромагнітної енергії (вірніше говорити «з випромінюванням електромагнітного поля»), у цьому курсі не розглядались.

У даний час деякі основні питання електромагнітного поля ще не розв'язані до кінця: рівняння Максвелла не узагальнені на явища в мікросвіті; не пояснені постульовані закони електричної і магнітної взаємодії нерухомих зарядів і зарядів, що рухаються; вимагають подальшого розвитку математичні методи дослідження електромагнітних полів та ін.

У цей час можна вважати вже загальновизнаним те, що електромагнітне поле матеріальне так само, як матеріальна речовина.

Електромагнітне поле та речовина – це дві взаємоперехідні форми матерії. Електромагнітне поле, володіючи, подібно до речовини визначеною масою й енергією, поширюється з визначеною швидкістю.

Рушійною силою електромагнітного процесу є єдність протилежностей – єдність електричних і магнітних полів, їхній взаємний перехід – перехід однієї форми руху в іншу.

## ОСНОВНІ ЛІТЕРНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\vec{A}$	-	вектор-потенціал стаціонарного магнітного поля; електро-динамічний векторний потенціал
$\vec{B}$	-	вектор індукції магнітного поля
$C$	-	ємність
$c$	-	фазова швидкість хвилі
$\vec{D}$	-	вектор електричної індукції
$\vec{E}$	-	вектор напруженості електричного поля
$E_\tau$	-	дотична (тангенціальна) складова вектора $\vec{E}$
$E_n$	-	нормальна складова вектора $\vec{E}$
$E_{\text{внутр}}$	-	напруженість поля усередині провідного тіла
$E_{\text{зовн}}$	-	напруженість поля зовні провідного тіла
$F$	-	сила взаємодії зарядів
$f$	-	частота
$G$	-	активна провідність
$\vec{H}$	-	вектор напруженості магнітного поля
$I$	-	постійний струм
$\underline{I}$	-	комплексне значення струму
$i$	-	миттєве значення струму
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	-	одиничні вектори за відповідними координатами
$\vec{j}$	-	вектор густини струму
$\vec{j}_{\text{мол}}$	-	вектор молекулярної густини струму
$\vec{j}_{\text{повн}}$	-	вектор густини повного струму
$\vec{j}_{\text{пр}}$	-	вектор густини струму провідності
$\vec{j}_{\text{зсув}}$	-	вектор густини струму зсуву
$L$	-	індуктивність
$l$	-	довжина
$M$	-	взаємна індуктивність
$\vec{M}$	-	вектор магнітного моменту
$m$	-	маса
$N$	-	потік вектора $\vec{E}$
$\vec{n}$	-	одиничний вектор, що направлений по нормалі до поверхні
$P$	-	потужність
$\vec{p}$	-	дипольний момент
$\vec{P}$	-	сумарний дипольний момент
$\underline{p}$	-	коефіцієнт відбиття хвилі
$q$	-	заряд
$q_0$	-	пробний заряд
$q_{\text{вільн}}$	-	вільний заряд

$R$	- активний опір
$\vec{R}$	- радіус-вектор, що направлений до точки спостереження
$\vec{R}_0$	- одиничний вектор, що направлений вздовж лінії, яка з'єднує заряди (до точки спостереження)
$S$	- площа поверхні
$t$	- час
$u$	- миттєве значення напруги
$\underline{U}$	- комплексне значення напруги
$\vec{u}$	- швидкість руху заряду
$V$	- об'єм
$v_{faz}$	- фазова швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі
$W$	- енергія
$w$	- число витків
$X$	- реактивний опір
$\underline{Z}_{x\phi}$	- хвильовий опір
$\underline{Z}_c$	- характеристичний опір
$\underline{Z}_{ex}$	- вхідний опір лінії
$\vec{P}$	- вектор Пойтинга
$\Phi$	- магнітний потік
$\alpha$	- коефіцієнт магнітної сприйнятливості; коефіцієнт згасання
$\beta$	- коефіцієнт фази
$\gamma$	- питома провідність; коефіцієнт поширення
$\epsilon$	- діелектрична проникність
$\epsilon_0$	- діелектрична проникність вакууму; $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
$\epsilon_r$	- відносна діелектрична проникність
$\epsilon_{cm}$	- електрорушійна сила стороннього поля
$\lambda$	- довжина хвилі
$\mu_a$	- абсолютна магнітна проникність
$\mu_r$	- відносна магнітна проникність
$\mu_0$	- магнітна стала; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
$\rho$	- питома об'ємна густина заряду
$\rho_{св}$	- питома густина вільних зарядів
$\rho_{зв`яз}$	- питома густина зв'язаних зарядів
$\sigma$	- поверхнева густина заряду
$\tau$	- лінійна густина заряду
$\phi$	- потенціал стаціонарного електричного поля; електродинамічний скалярний потенціал
$\omega$	- кутова частота



## ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

$$1. \nabla \varphi = \text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$2. \text{divgrad} \varphi = \nabla^2 \varphi$$

$$3. \text{rotgrad} \varphi = 0$$

$$. \text{divrot} \vec{a} = 0$$

$$5. \text{rotrot} \vec{a} = \text{graddiv} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$$

6. Теорема Остроградського

$$\int_V \text{div} \vec{a} dV = \oint_S \vec{a} d\vec{S}$$

7. Теорема Остроградського-Стокса

$$\int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S} = \oint_l \vec{a} d\vec{l}$$

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник.— 10-е изд., стереотипное.—М.: Гардарики, 2003 г.
2. Бортник А. В., Комолов В. М. Плоские электромагнитные волны. Поверхностный эффект. Конспект лекций по курсу ТОЭ, ч. III. — Харьков, УИПА, 1996 г.
3. Татур Т. А. Основы теории электромагнитного поля. Справочное пособие — М. Высш. школа, 1989 г.
4. Брыков В. С., Жуковелая В. Н. Элементы теории поля. Текст лекций. - Харьков, УЗПИ, 1982 г.
5. Колобков Д. С., Брыков В. С. Теория электромагнитного поля. — ВИРТА., 1975 г.
6. „Теоретические основы электротехники.” Том. II. Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля. Под ред. Проф. Ионкина П.А. Изд. 2-ое, — М.: Высш. школа, 1976 г.
7. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники, ч. III .— М.: Энергия, 1975 г.
8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Под ред. проф. П. А. Ионкина — М: Энергоатомиздат, 1982. — 768 с.
9. Сборник задач по ТОЭ Под ред. Л. А. Бессонова, 4-е изд. — М.:,2000 г.

*Навчальне видання*

**ФОРКУН Яна Борисівна**  
**ГЛЄБОВА Марина Леонідівна**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ**

з дисципліни

**«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»**

**(частина III)**

*(для студентів усіх форм навчання напряму підготовки  
6.050701 – «Електротехніка та електротехнології»)*

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*

Редактор *З. І. Зайцева*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2012, поз. 109Л

---

Підп. до друку 04.12.2012  
Друк на ризографі.  
Зам. №

Формат 60 x 84 /16  
Ум. друк. арк. 6,8  
Тираж 50 пр.

---

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.