

УДК 620.178.3

В.А.ПУШНЯ, канд. техн. наук, М.В.ГОЛИКОВ

Харківська національна академія міського господарства

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕННЯ ДОСЛІДЖЕНЬ ЩОДО ЗМІНЮВАНОВОГО У ЧАСІ НАВАНТАЖЕННЯ

Вирішується завдання про збудження заданих режимів коливань на електродинамічному стенді для проведення випробувань виробів на навантаження, що загасають у часі за заданим законом.

При вібраційних випробуваннях конструкцій та апаратури на рухомій основі виникає задача [2, 4] про одержання заданої форми її руху. В реальних умовах на конструкції або апаратуру впливають навантаження складної форми, викликані вібрацією двигуна, сейсмічним збурюванням або іншими кінематичними впливами. Відтворення останніх у лабораторних умовах представляє значні труднощі [1], тому розглянемо найпростіші види динамічного навантаження – гармонійні загасаючі коливання й ударні впливи.

На рис.1 наведено приклади осцилограм перевантажень. Згідно з рис.1 та іншим експериментальним матеріалом, можна вважати, що багато осцилограм досить близькі до загасаючої синусоїди з майже рівними між собою інтегралами між точками перетинання осцилограми з віссю абсцис, також є тип, що спочатку має різкі зміни амплітуд, а далі також схоже на загасаючу синусоїду. І, нарешті, осцилограми довільного вигляду, де не проглядається яка-небудь закономірність. Досліджуваний виріб досить часто треба піддати деякому навантаженню, у загальному випадку далеко не схожому на процес загасання гармонійних коливань. Технічно важко створити довільний зовнішній вплив або рух платформи випробувального стенда і доцільно ставити завдання про наближене відтворення експериментально замірених перевантажень (рухів) або про одержання певних перевантажень у деякі обрані моменти часу [3].

Для визначення теоретичних можливостей відтворення навантажень або переміщень, загасаючих у часі за заданим законом, розглянемо найпростіший випадок – лінійну систему з одним ступенем вільності. До такої умовної схеми можна прийти, наприклад, коли з'єднання випробуваного виробу з платформою стенда досить жорстке й остання може робити вільні коливання і бути під впливом кінцевого числа імпульсів (рис.2) [2, 4]. Якщо випробовується зразок, то його жорсткість

може приєднуватися до жорсткості платформи. Рівняння руху в цьому випадку записується як

$$M\ddot{x} + h\dot{x} + cx = \sum_{i=1}^n S_i \delta(t - t_i), \quad (1)$$

де M – маса платформи і випробуваного виробу; h – коефіцієнт в'язкого тертя; c – коефіцієнт жорсткості підвіски; S_i – величина миттєвого імпульсу; $\delta(t)$ – дельта-функція.

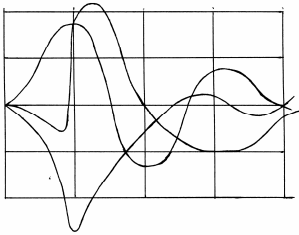


Рис.1 – Осцилограми реальних прискорень

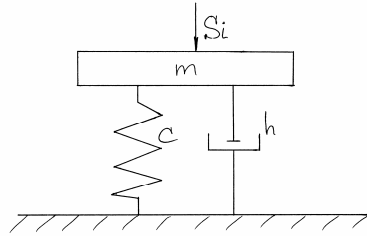


Рис.2 – Приведена динамічна модель випробуваного об'єкта

Рішення рівняння (1) має вигляд:

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{M \omega} e^{-n(t-t_i)} \sin \omega(t-t_i), \quad (2)$$

де $2n = h/M$; $\omega_0^2 = c/M$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$; $t > t_i$; A, B – довільні постійні рішення однорідного рівняння.

Якщо в початковий момент $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$B = x_0, \quad A = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega}. \quad (3)$$

Рух, викликаний імпульсами, накладається на вільне затухання.

Нехай величина ω вибрана приблизно, наприклад, як середня арифметична від приблизно однакових величин інтервалів між точками перетинання відтворюваного графіка переміщень з віссю абсцис. Така картина характерна для кінця осцилограм

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t). \quad (4)$$

Незалежними параметрами тут є n , A і B , причому A і B у свою чергу визначаються початковими умовами x_0 , \dot{x}_0 . Незавжди переконається, що при заданому ω можна точно одержати бажані переміщення

лише в трьох вибраних моментах часу t_1, t_2, t_3 .

Дійсно, тоді з (4) маємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-nt_1} (A \sin \omega t_1 + B \cos \omega t_1); \\ x_2 &= e^{-nt_2} (A \sin \omega t_2 + B \cos \omega t_2); \\ x_3 &= e^{-nt_3} (A \sin \omega t_3 + B \cos \omega t_3), \end{aligned} \quad (5)$$

де x_1, x_2, x_3 – задані величини.

З перших двох рівнянь (5) одержуємо:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Delta} (x_1 e^{-nt_1} \cos \omega t_2 - x_2 e^{-nt_2} \cos \omega t_1); \\ B &= \frac{1}{\Delta} (x_2 e^{-nt_2} \sin \omega t_1 - x_1 e^{-nt_1} \sin \omega t_2) \end{aligned} \quad (6)$$

при $\Delta = \sin \omega(t_1 - t_2)$. Якщо $\Delta = 0$, то треба спробувати взяти іншу комбінацію, наприклад, 1-е і 3-є або 2-е і 3-є рівняння (5).

Вставляючи далі вираз (6) в 3-є рівняння (5), отримаємо трансцендентне рівняння типу

$$ae^{n(t_2-t_3)} + be^{n(t_1-t_3)} = x_3, \quad (7)$$

вирішуючи яке, наприклад, графічно, знаходимо n , після чого з (6) визначаються A і B . Часто найцікавішим є відтворення на малому відрізьку часу, вимірюваному в мілісекундах, так що в ряді випадків можна розглядати nt_i як малі величини і розв'язувати задачу приблизно, аналітично, користуючись розкладаннями $e^{nt_i} \approx 1 - nt_i$ і т.п.

Проаналізуємо тепер, що може дати додавання миттєвих імпульсів і рух вільного затухання коливаний. Нехай в (2) $n = 1$ і нехай додатково в (5) потрібно, щоб переміщення дорівнювало x_4 в момент t_4 . Визначимо необхідну інтенсивність імпульсу δ , взявши за момент його прикладання $t_0 \leq \tau \leq t_4$, відповідно до графіка відтворених переміщень (у районі характерного зростання амплітуди). Тоді, згідно з (2), маємо

$$e^{-nt_4} (A \sin \omega t_4 + B \cos \omega t_4) + \frac{S}{M \omega} e^{-n(t_4-\tau)} = x_4. \quad (8)$$

Звідки

$$S = \frac{M \omega e^{-n(t_4-\tau)}}{\sin \omega(t_4 - \tau)} \left[x_4 - e^{-nt_4} (A \sin \omega t_4 + B \cos \omega t_4) \right]. \quad (9)$$

Якщо $\sin \omega(t_4 - \tau) = 0$, то треба зменшити час прикладання імпульсу. Аналогічно за допомогою наступного імпульсу можна одержати відхилення x_5 в момент t_5 і т.д.

Якщо $\sin \omega(t_5 - \tau) = 0$, то необхідно змінити час прикладання імпульсу. Аналогічно за допомогою наступного імпульсу можна одержати відхилення x_6 в момент t_6 і т.д. Якщо величина імпульсу S невелика, то це не спотворює істотно форми загасаючої синусоїди, для відтворення по кривих типу 2 на рис.1, мабуть, буде потрібно прикладання досить інтенсивних імпульсів.

Розглянемо докладніше картину зміни згасання після прикладання імпульсу в момент τ , тоді з урахуванням (3) вираз (9) можна записати так:

$$x = e^{-nt} a \sin(\omega t + \alpha) \quad (t > \tau), \quad (10)$$

де

$$a = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega} + \frac{Se^{n\tau} \cos \omega\tau}{M\omega} \right)^2 + \left(x_0 - \frac{Se^{n\tau} \sin \omega\tau}{M\omega} \right)^2}; \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 - \frac{Se^{n\tau} \sin \omega\tau}{M\omega}}{\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega} - \frac{Se^{n\tau} \cos \omega\tau}{M\omega}}. \quad (12)$$

Якщо величина S досить велика, то в момент τ за формулами (11) -(12) маємо

$$a \approx \frac{Se^{n\tau}}{M\omega}, \quad \operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{tg} \omega\tau \quad (13)$$

і за допомогою позитивних і негативних імпульсів можна так чи інакше впливати на криву вільного загасання коливань.

Подібні міркування й аналіз проводяться для випадку, коли потрібно відтворити деяку задану криву швидкостей або прискорень досліджуваного виробу.

Розглянемо, наприклад, випадок відтворення швидкостей. Тоді при вільному загасанні коливань із (4) маємо

$$\dot{x} = e^{-nt} [-(An + B\omega) \sin \omega t + (A\omega - Bn) \cos \omega t]. \quad (14)$$

Як вище, задамося величиною ω , вибираючи її як середньоарифметичне інтервалів між точками перетинання графіка швидкостей

з віссю абсцис. Тоді незалежними параметрами будуть n , A і B як для перемішень, швидкостей і прискорень. Тобто можна точно одержати бажані швидкості \dot{x}_1 , \dot{x}_2 , \dot{x}_3 лише в трьох обраних моментах часу t_1 , t_2 , t_3 . Дійсно, з (14)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{-nt_1} [-(An + B\omega) \sin \omega t_1 + (A\omega - Bn) \cos \omega t_1], \\ \dot{x}_2 &= e^{-nt_2} [-(An + B\omega) \sin \omega t_2 + (A\omega - Bn) \cos \omega t_2], \\ \dot{x}_3 &= e^{-nt_3} [-(An + B\omega) \sin \omega t_3 + (A\omega - Bn) \cos \omega t_3]. \end{aligned} \quad (15)$$

Подальші викладки не відрізняються від операцій з системою (5), розходження тільки в коефіцієнтах перед функціями $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$.

Якщо ж у відтворенні графіка швидкостей є характерний злам або бажано одержати x_4 в момент t_4 , то варто використати вплив зовнішнього імпульсу на вільне згасання.

Тоді, використовуючи похідну (2), маємо при $\tau = 1$

$$\begin{aligned} e^{-nt_4} [-(An + B\omega) \sin \omega t_4 + (A\omega - Bn) \cos \omega t_4] + \\ + \frac{S e^{-n(t_4 - \tau)}}{M\omega} [\omega \cos \omega(t_4 - \tau) - n\omega \sin \omega(t_4 - \tau)] = \dot{x}_4. \end{aligned} \quad (16)$$

Звідки

$$S = \frac{\dot{x}_4 - e^{-nt_4} [-(An + B\omega) \sin \omega t_4 + (A\omega - Bn) \cos \omega t_4]}{\frac{e^{-n(t_4 - \tau)}}{M\omega} [\cos \omega(t_4 - \tau) - n \sin \omega(t_4 - \tau)]}. \quad (17)$$

Величина τ задається як $t \leq \tau \leq t_4$, виходячи з характеру відтворюваного графіка. Додаючи наступний імпульс, можна одержати \dot{x}_5 в момент часу t_5 і т.д.

Усі міркування та висновки зберігаються й при відтворенні графіків прискорень (перевантажень), різниця з попереднім буде лише в числових коефіцієнтах перед функціями $\sin \omega t_i$ й $\cos \omega t_i$.

Наприклад, з (2) при $n = 1$ одержимо

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= e^{-nt} ((-A\omega^2 + 2n\omega + n^2 A) \sin \omega t + (-B\omega^2 - 2An\omega + n^2 B) \cos \omega t) + \\ &+ \frac{S e^{-n(t - \tau)}}{M\omega} (B - \omega^2 + n^2) \sin \omega(t - \tau) - 2n\omega \cos \omega(t - \tau). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином, число точок точного відтворення перемішень, швидкостей і прискорень визначається числом вільних параметрів сис-

теми: початкові умови, демпфірування, величина і час прикладання імпульсів. Тільки в цьому випадку одержують визначені алгебраїчні системи.

Неважко переконатися, що отриманий висновок вірний і для лінійної системи з багатьма ступенями вільності, якщо задатися з яких-небудь міркувань величинами її власних частот коливань. Тоді й загальне рішення виражається через початкові умови, коефіцієнти демпфірування й величини інтенсивностей імпульсів і час їх прикладання. Так що взагалі за рахунок кожного ступеня вільності є можливість відтворити бажані переміщення (швидкості, прискорення) в три заданих моменти часу, а за рахунок вибору інтенсивності й моменту прикладання кожного імпульсу ще в два моменти часу. Для системи з розподіленими параметрами такий простий аналіз провести не вдається, тому що процес загасання коливань у них складається з нескінченного числа гармонік.

Взагалі стосовно до лінійних систем з багатьма ступенями вільності, виходячи з отриманих результатів, можна назвати два можливих підходи до відтворення згасаючих рухів складної форми:

1) створити таке закріплення випробуваного виробу на платформі стенда, щоб можна було як модель розглядати систему з одним ступенем вільності й потім за допомогою імпульсів, що подаються в розрахункові моменти часу, домогтися бажаних переміщень (швидкостей, прискорень) у задані моменти;

2) виходити з моделі з багатьма ступенями вільності й користуватися тим, що за рахунок кожного ступеню при заданих власних частотах можна зробити бажані переміщення (швидкості, прискорення) у три обраних моменти часу.

Користуючись методом найменших квадратів, можна виконати наближення бажаних графіків переміщень (швидкостей, прискорень) з наближеними збігами на всьому інтервалі.

Нехай необхідно одержати переміщення x_k в момент часу t_k ($k = 1, 2, \dots, N$), користуючись вільним загасанням коливань системи з одним ступенем вільності. Виходячи з вигляду рішення для вільних коливань (4), можна записати суму

$$Q(A, B, n) = \sum_{k=1}^N \left[e^{-nt_k} (A \sin \omega t_k + B \cos \omega t_k) - x_k \right]^2. \quad (19)$$

Величину ω краще взяти відразу приблизно, наприклад, як середнє арифметичне, виходячи з інтервалів між точками перетинання відтвореного графіка з віссю абсцис, інакше аналіз дуже ускладниться.

Знаходячи далі A , B , n , приходимо до системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial A} &= 2 \left\{ A \sum_{k=1}^N e^{-2nt_k} \sin^2 \omega t_k + B \sum_{k=1}^N e^{-2nt_k} \sin \omega t_k \cos \omega t_k - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^N e^{-nt_k} x_k \sin \omega t_k \right\} = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial B} &= 2 \left\{ A \sum_{k=1}^N e^{-2nt_k} \sin \omega t_k \cos \omega t_k + B \sum_{k=1}^N e^{-2nt_k} \cos^2 \omega t_k - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^N e^{-nt_k} x_k \cos \omega t_k \right\} = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial n} &= 2 \sum_{k=1}^N \left[e^{-nt_k} (A \sin \omega t_k + B \cos \omega t_k) - x_k \right] \times \\ &\times (-t_k) e^{-nt_k} (A \sin \omega t_k + B \cos \omega t_k) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

З перших двох рівнянь системи (20) знаходимо вирази для A і B через e^{-nt_k} і підставляємо їх у третє рівняння цієї системи. Одержуємо трансцендентне рівняння, яке можна вирішити графічно. Рішення значно спрощується, якщо можна вважати $e^{-nt_k} = 1 - nt_k$.

Якщо для відтворення задана безперервна крива $x^*(t)$, то потрібно шукати мінімум інтеграла

$$Q(A, B, n) = \int_0^{t^*} \left[e^{-nt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) - x^*(t) \right]^2 dt, \tag{21}$$

де t^* – інтервал відтворення.

Можливі також інші оцінки точності відтворення, тут узяті найпростіші. Додавання проміжних імпульсів не вносить принципових труднощів в обчислення.

Таким чином, при відтворенні перехідних процесів у системі з одним ступенем вільності за рахунок вибору початкових умов вдається одержати бажані переміщення (швидкості або прискорення) тільки в трьох заданих моментах часу. Відтворення проміжного імпульсу дає можливість одержати бажані переміщення (швидкості або прискорення) ще у два обраних моменти часу.

1. Карпушин В.Б. Вибрации радиоаппаратуры. – М.: Сов. радио, 1977. – 311 с.

2.Остроменский П.И. Вибрационные испытания радиоаппаратуры и приборов. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1992. – 163 с.

3.Харрис С.М., Крид И.И. Справочник по ударным нагрузкам. – Л.: Судостроение, 1980. – 351 с.

4.Божко А.Е., Пермяков В.И., Пушня В.А. Методы проектирования электромеханических вибровозбудителей. – К.: Наук. думка, 1989. – 200 с.

Отримано 26.10.2007

УДК 624.21

В.П.КОЖУШКО, д-р техн. наук

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

РАСЧЕТ ПЛИТЫ СО СВОБОДНЫМ ЕЕ ОПИРАНИЕМ НА ЧЕТЫРЕ СТОРОНЫ

Приводится методика расчета плит, свободно опертых четырьмя сторонами, по методу, разработанному автором для определения напряженно-деформированного состояния пролетных строений мостов. Для сравнения полученных результатов по методам автора и Б.Г.Галеркина приведены примеры расчета.

Задача о расчете тонких пластин со свободно опертыми краями сводится к решению дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных. Сравнительно просто дифференциальное уравнение решается при загрузении пластинки по всей площади распределенной нагрузкой. Решение уравнения значительно усложняется при загрузении пластины иными внешними нагрузками (кусочной распределенной нагрузкой, сосредоточенными силами или моментами), поэтому точное решение известно только для отдельных (простых) задач.

Нами предлагается плиты разделять на систему продольных (вдоль пролета l_a) и поперечных (вдоль пролета l_b) полос (рис.1). Количество продольных полос шириной d должно быть не менее 10 (желательно принимать нечетное их количество n). Поперечные полосы шириной $b=1$ м вырезаются в том сечении плиты, в котором предполагается определять внутренние усилия вдоль оси $у-у$. Поперечный элемент рассматривается как полоса на упругих опорах (рис.1), которая одновременно опирается на две концевые опоры. Для построения линий влияния усилий Z_i , действующих на продольные полосы, над каждой продольной полосой последовательно устанавливается единичная распределенная нагрузка интенсивностью $q=1$, а задача по расчету поперечной полосы, т.е. полосы на упругих опорах, решается смешанным методом строительной механики в постановке Б.Н.Жемочкина [1]. Фиктивное защемление поперечной полосы вводится слева (в точке A). Если учитывать только вертикальные усилия Z_i , то количе-