МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З КУРСУ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

(для студентів галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» напряму 6.030601 «Менеджмент» заочної форми навчання)

ХАРКІВ – ХНАМГ – 2012

Методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи з курсу «Дослідження операцій» (для студентів галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» напряму 6.030601 «Менеджмент» заочної форми навчання) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: А. Є. Ачкасов, О. О. Воронов. - Х.: ХНАМГ, 2012. - 50 с.

Укладачі: А. Є. Ачкасов, О. О. Воронков

Рекомендовано кафедрою економіки підприємств міського господарства, протокол № 12 від 07.06.12 р.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні вказівки спрямовані на допомогу студентам оволодіти практичними навичками з побудови математичних моделей задач оптимального вибору і застосування оптимізаційних методів для їх розв'язання.

Дисципліна «Дослідження операцій» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки бакалаврів за напрямом 030601 «Менеджмент». Відповідно до навчального плану її вивчають у 7 семестрі 4 курсу. Обсяг практичних занять становить 4 аудиторних години (2 практичних заняття). Обсяг самостійної роботи становить 98 годин. Вивчення дисципліни «Дослідження операцій» спрямоване на підготовку висококваліфікованих фахівців, що володіють методами математичного моделювання та оптимізації і здатні приймати рішення, підкріплені математичними розрахунками.

Відповідно до робочої програми курсу «Дослідження операцій» у методичних вказівках до практичних занять розглянуто найважливіші теми змістового модуля 1 «Моделі і методи системного аналізу, способи дослідження і оптимізації операцій», зокрема економічна та математична постановка транспортної задачі та задачі про призначення. Знання й навички, що отримані під час вивчення цих тем, є основою для вивчення наступних складніших тем курсу, та найчастіше застосовуються у практичній діяльності.

У методичних вказівках до самостійної роботи для кожної теми зазначено обсяг витрат часу на вивчення, що відповідає програмі курсу. Наприкінці методичних вказівок наведено список основних і додаткових підручників, які рекомендується використовувати. Кожна тема супроводжується посиланнями на відповідні їй сторінки підручників. Після вивчення теоретичного матеріалу треба дати відповіді на контрольні запитання з теми та вирішити задачі, пропоновані для самостійного розв'язання. Для полегшення роботи перед задачами для самостійного розв'язання наведене розв'язання аналогічних прикладів.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Практичне заняття 1

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета - сформувати вміння з визначення початкового опорного плану транспортної задачі та застосування методу потенціалів для її розв'язання.

Вказівки до виконання завдання

Є m пунктів відправлення (постачальників) $A_1, A_2, \ldots A_m$, в яких знаходиться однорідна продукція в кількостях $a_1, a_2, \ldots, a_m$ відповідно. Є n пунктів призначення (споживачів) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, яким потрібна ця продукція відповідно в кількостях $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Відомі c_{ij} - витрати на перевезення одиниці продукції з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Нехай x_{ij} - кількість продукції, яка вивозиться з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Завдання полягає в тому, щоб визначити, скільки продукції з кожного пункту відправлення треба вивезти в кожен пункт призначення, щоб сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Всі дані і шукані величини треба розмістити в таблиці:

Пункти відправлення	**Пункти призначення**				
	B₁	***B₂***	**...**	***Bₙ***	**Запаси**
A₁	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A₂	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
	...	...	...	...	…
Aₘ	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m

та перевірити збалансованість задачі за формулою

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,.$$

Далі потрібно визначити кількість базисних змінних $m + n - 1$, кількість вільних змінних $(n-1)*(m-1)$ та початковий опорний план. Початковий опорний план треба покращити шляхом зменшення перевезення в дорогій клітці та збільшення в дешевій. Для перевірки оптимальності плану перевезень обчислити потенціали u_i і v_j - постачальників і споживачів відповідно – та перевірити, чи не виконується умова $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$ хоча б для однієї вільної клітки.

Задача 1.1

З трьох пунктів виробництва потрібно вивезти однорідний продукт у п'ять пунктів споживання. Транспортні витрати та обсяг виробництва представлені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запаси**
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	8	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Знайти початковий опорний план.

Розв'язання

Маємо три постачальники та п'ять споживачів. Кількість базисних невідомих дорівнює $m+n-1$, тобто 7. Заповнимо таблицю 1.2.

Таблиця 1.2 – Визначення початкового опорного плану

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	30	50	45	0	0	125
A_2	0	0	55	5	0	60
A_3	0	0	0	35	80	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Запишемо спочатку можливості постачальників і потреби споживачів. Як бачимо, споживачу B_1 потрібно 30 одиниць продукції, постачальник A_1 має 125 одиниць; отже за рахунок постачальника A_1 можна повністю задовольнити потреби споживача B_1. Записуємо в клітку (1,1) менше з чисел 30 і 125 x_{11} = min(30, 125)=30. Перший стовпець виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпця проставимо нулі.

У постачальника A_1 залишається ще 125-30 = 95 одиниць. Тепер заповнимо клітку (1,2). Споживачу B_2 необхідно 50 одиниць. Отже за рахунок постачальника A_1, в якого залишилося ще 95 одиниць, можна повністю задовольнити потреби споживача B_2. У клітку (1,2) записуємо менше з чисел 50 і 95, тобто .x_{12} = min(50,95)= 50. Другий стовпець виключаємо з розгляду, в решту кліток цього стовпця проставимо нулі. У постачальника A_1 залишилося ще 95-50 = =45 одиниць продукції.

Тепер заповнимо клітку (2,3). Споживачу B_3 необхідно ще додати 55 одиниць, постачальник A_2 має 60 одиниць. У клітку (2,3) записуємо менше з чисел 55 і 60, тобто x_{23} = min(55,60)= 55. Третій стовпець виключаємо з розгляду, записавши в останній клітці цього стовпця нуль.

У постачальника A_2 залишилося ще 60-55 = 5 одиниць. Тепер заповнимо клітку (2,4). Споживачу B_4 необхідно 40 одиниць. Записуємо в клітку (2,4) менше з чисел 5 і 40, тобто x_{24} = min(5;40)= 5. Потреби споживача *B4* задоволені частково, залишилася потреба в 40-5 =35 одиницях. Резерви постачальника A_2 вичерпані. Другий рядок виключаємо з розгляду, проставивши в останній клітці цього рядка 0.

Тепер заповнимо клітку (3,4). Споживачу B_4 необхідно додати 35 одиниць, постачальник A_3 має 115 одиниць. У клітку (3,4) записуємо менше з чисел 35 і 115, тобто $x_{34} = min($35,115)= 35. У постачальника A_3 залишилося 115-35 = =80 одиниць.

Заповнюємо останню клітку (3,5). Споживачу B_5 необхідно 80 одиниць, тобто $x_{35}=80$. Отже, початковий опорний план має вигляд:

$x_{11}=30, x_{12}=45, x_{23}=55, x_{24}=5, x_{34}=35, x_{35}=80$, решта $x_{ij} = 0$.

Значення цільової функції:

$$L = 7*30+5*50+2*45+4*55+6*5+2*35+3*80=1110.$$

Сформулюємо тепер математичну модель транспортної задачі: знайти такі значення змінних x_{ij}, (i=1,m; j = 1,n), що задовольняють обмеженням

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i\ ,\quad j=\overline{1,n}\ ,\qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i=\overline{1,m},$$

$$x_{ij} \ge 0; i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$$

та обертають на мінімум цільову функцію

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ .$$

Задача 1.2

Знайти оптимальний розв'язок задачі 1.1, скориставшись початковим опорним планом з таблиці 1.2.

Розв'язання

Підрахуємо кількість заповнених кліток. Якщо початковий опорний план транспортної задачі має *m + n - 1* додатних перевезень, то він називається не виродженим. Якщо початковий опорний план має менше *за m + n - 1* додатних перевезень, то він називається виродженим.

У нашому випадку початковий опорний план не вироджений, оскільки кількість заповнених кліток дорівнює 3+5-1=7.

Перевіримо на оптимальність початковий опорний план з таблиці 1.2. З цією метою складемо систему рівнянь для визначення потенціалів, використовуючи таблицю 1.1. Для заповнених кліток маємо:

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 7; \qquad C_{23} = U_2 + V_3 = 4,$$
$$C_{24} = U_2 + V_4 = 6, \qquad C_{12} = U_1 + V_2 = 5,$$
$$C_{34} = U_3 + V_4 = 2, \qquad C_{13} = U_1 + V_3 = 2,$$
$$C_{35} = U_3 + V_5 = 3.$$

Отримали систему 7 рівнянь з 8 невідомими. Така система має нескінченну множину розв'язків. Знайдемо один з них. Нехай $U_1 = 0$, тоді з першого рівняння знаходимо $V_1 = 7$. Аналогічно з решти рівнянь знаходимо значення всіх інших змінних:

$$V_2 = 5, \quad V_3 = 2, \quad U_2 = 2,$$
$$V_4 = 4, \quad U_3 = -2, \quad V_5 = 5.$$

Складемо таблицю 1.3, де у клітках з перевезеннями записуємо транспортні витрати. Нехай $U_i = 0$. Тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13}, можна знайти V_1, V_2, V_3.

$$V_1 = C_{11} - U_1,\ V_2 = C_{12} - U_1,\ V_3 = C_{13} - U_1;$$
$$V_1 = 7, \qquad V_2 = 5 \qquad V_3 = 2.$$

Таблиця 1.3 – Перевірка оптимальності початкового опорного плану

U_i \ V_j	7	5	2	4	5
0	7	5	2	8 4	7 5
2	8 9	9 7	4	6	9 7
-2	5 5	1 3	9 0	2	3

Знаючи V_3 та C_{23}, знаходимо $U_2 = 2$. Знаючи U_2 і C_{24} знаходимо $V_4 = 4$. Знаючи U_4 і C_{34}, знаходимо $U_3 = -2$. Знаючи U_3 і C_{35}, знаходимо $V_5 = 5$.

Ті клітки, в яких не було перевезень, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, в нижній - суму $U_i + V_j$ та порівнюємо її з транспортними витратами.

Δ_{14}=4-8= -4, Δ_{15}=5-7= -2, Δ_{21}=9-8=1, Δ_{22}=7-9= -2, Δ_{25} = 7-9 = -2, Δ_{31} = 5-5 = 0, Δ_{32}=3-1 =2, Δ_{33}=0-9= -9.

Оскільки $\Delta_{21} = 1 > 0$ і $\Delta_{32} = 2 > 0$, то знайдений опорний план є не оптимальним. Його можна поліпшити. Найбільша оцінка відповідає клітці (3,2). Складемо таблицю 1.4.

Таблиця 1.4 – Покращення опорного плану

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	$-\theta$ 50	$+\theta$ 45	0	0
A_2	0	0	$-\theta$ 55	$+\theta$ 5	0
A_3	0	$+\theta$ 0	0	$-\theta$ 35	80

У клітку (3,2) треба розмістити вантаж. Позначимо його кількість через θ. Тепер треба знайти замкнутий цикл, який забезпечить баланс задачі. Для цього треба відняти θ з обсягу перевезення клітки (3,4) (щоб сума перевезень в третьому рядку залишилася без зміни); потім додати θ до обсягу перевезення клітки (2,4) (щоб сума перевезень в четвертому стовпці залишилася без зміни); далі треба відняти θ з обсягу перевезення клітки (2,3) (щоб сума перевезень в другому рядку залишилася без зміни); далі треба додати θ до обсягу перевезення клітки (1,3) (щоб сума перевезень в третьому стовпці залишилася без зміни); врешті-решт, треба відняти θ з обсягу перевезення клітки (1,2) (щоб сума перевезень в першому рядку і в другому стовпці залишилася без зміни).

Величина θ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити в знайденому циклі. θ визначаємо як найменшу зі всіх перевезень, які стоять в клітках, в яких θ віднімається. У нашому випадку $\theta = min(50, 55, 35) = 35$. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, представлений в таблиці 1.5.

Таблиця 1.5 – Новий опорний план

Ai \ Bj	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	$-\theta$ 30	15	$+\theta$ 80	0	0
A_2	$+\theta$ 0	0	$-\theta$ 20	*40*	0
A_3	0	35	0	0	80

Для перевірки на оптимальність нового опорного плану потрібно знову побудувати систему потенціалів та перевірити виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки. Щоб знайти U_i і V_j, складемо таблицю 1.6. У тих клітках, де були перевезення, записуємо транспортні витрати C_{ij}. Нехай $U_1 = 0$, тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13}, можна знайти V_1, V_2, V_3:

$$V_1 = C_{11} - U_1 = 7 - 0 = 7,$$
$$V_2 = C_{12} - U_1 = 5 - 0 = 5,$$
$$V_3 = C_{13} - U_1 = 2 - 0 = 2.$$

Знаючи C_{23} та V_3, можна знайти U_2: $U_2 = C_{23} - V_3 = 4-2 = 2$. Знаючи C_{24} і U_2, знаходимо $V_4 = C_{24} - U_2 = 6-2 = 4$. Знаючи C_{32} і V_2, знаходимо $U_3 = C_{32} - V_2 = 1-5 = -4$. Знаючи C_{35} і U_3, знаходимо $V_5 = C_{35} - U_3 = 3 - (-4) = 7$.

Ті клітки, в яких не було перевезень, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, а в нижній суму $V_i + U_j$ і порівняємо її з транспортними витратами. Бачимо, що для клітки (2,1) $\Delta_{21} = 9-8 = 1 > 0$, тобто умова оптимальності не виконується. Таким чином, план не є оптимальним, його можна поліпшити.

Таблиця 1.6 – Перевірка оптимальності плану

Vj **Ui**	7	5	2	4	7
0	7	5	2	8 4	7 7
2	8 9	9 7	4	6	9 9
-4	5 3	1	9 -2	2 0	3

У клітку (2,1) таблиці 1.5 розміщуємо вантаж θ. Знаходимо замкнутий цикл, для чого переміщуємось клітками (2,3) (1,3) (1,1). Обираємо клітки, в яких θ віднімається, $\theta = \min(20,30) = 20$.

В результаті перерозподілу вантажу дістанемо новий опорний план, представлений в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7 – Новий опорний план

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	*10*	15	*100*	0	0
A_2	*20*	0	*0*	*40*	0
A_3	0	35	0	0	80

Для перевірки на оптимальність нового опорного плану треба знову побудувати систему потенціалів та перевірити виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки. Для знаходження U_i і V_j складемо таблицю 1.8, як це робили в табл. 1.4 і в табл. 1.6 (у наступній таблиці обчислення без пояснень).

Таблиця 1.8 – Перевірка оптимальності плану

Vj **Ui**	7	5	2	5	7
0	7	5	2	8 5	7 7
1	8 9	9 6	4 3	6	9 8
-4	5 3	1	9 -2	2 1	3

Всі клітки цієї таблиці мають $\Delta_{ij} \le 0$. Отже, оптимальний розв’язок має вигляд: $x_{11} = 10, x_{12} = 15, x_{13} = 100, x_{21} = 20, x_{24} = 40, x_{32} = 35, x_{35} = 80$ і решта $x_{ij} = 0$. Транспортні витрати на перевезення дорівнюють:

$$L_{min} = 7*10+5*15+2*100+8*20+6*40 + 1*35+3*80= 1010.$$

Перевірка:

$L_{нов} = L_{поч} - \theta * \Delta ij$; $L_{поч} = 1100$; $L_{нов} = 1100 - 35*2 = 1030$ (після першого перерозподілу). $L_{нов} = 1030 - 20*1 = 1010$ (після другого перерозподілу).

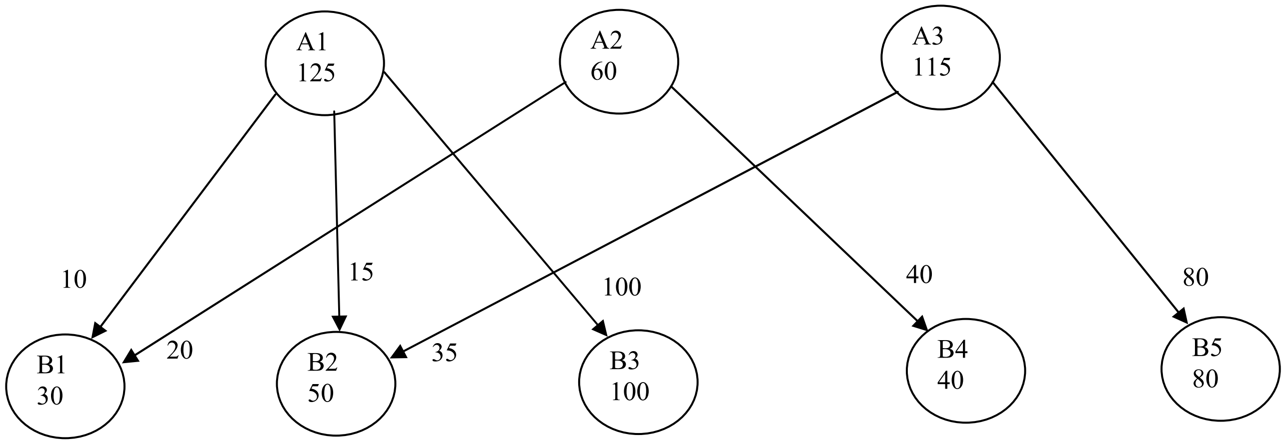

Рис. 1.1 - Схема перевезень

Практичне заняття 2

РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЗБАЛАНСОВАНОЇ ТА ВИРОДЖЕНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Мета – оволодіння прийомами розв’язання незбалансованої та виродженої транспортних задач.

Вказівки до виконання завдання

На практиці збалансованість попиту і пропозиції часто не виконується, а зустрічаються наступні випадки:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i \rangle \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва більше за сумарну потребу споживачів, в цьому випадку вводять фіктивного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і вартостями перевезень $C_{in+1} =0$ (i = 1,m);

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i \langle \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва менше сумарної потреби споживачів. В цьому випадку вводять фіктивного постачальника A_{m+1} із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і вартостями перевезень $C_{m+1j} =0$, (j = 1,n).

Після того, як задачу збалансовано, вона розв'язується звичайним способом.

Якщо задача є виродженою, то на певному етапі обчислення може бути так, що таблиця міститиме менше, ніж *m+n-1* заповнених кліток. Якщо не вистачає s заповнених кліток до кількості *m+n-1*, то поміщають в s вільних кліток нулі і вважають їх фіктивно заповненими.

Як обрати вільні клітки для заповнення їх нулями, залежить від конкретної ситуації. Якщо звиродніліcть зустрічається відразу після побудови опорного плану, наприклад, за методом «північно-західного кута», то фіктивно заповнені клітки обирають там, де у разі не виродженості клітки були б заповненими. Якщо звиродніліcть зустрічається на якомусь проміжному кроці розв'язання задачі, як фіктивно заповнені клітки обирають ті, що стали вільними на даному кроці і які мають найменше значення вартостей.

Задача 2.1

З трьох пунктів виробництва треба вивезти однорідний продукт в чотири пункти споживання. Транспортні витрати, обсяг виробництва і обсяг споживання подавлені в таблиці 2.1. Необхідно спланувати перевезення вантажу з пунктів виробництва до пунктів споживання при мінімальних транспортних витратах.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	4	5	3	2	400
A_2	2	4	5	1	180
A_3	3	2	4	3	250
Потреби	100	140	200	90	

Розв'язання

Підрахуємо сумарні запаси $\sum_{i=1}^{m} a_i$ = 400 + 180 + 250 = 830 та сумарні потреби $\sum_{j=1}^{n} b_j$ =100+140+200+90 = 530. Запаси перевищують потреби на 300 одиниць. Необхідно ввести фіктивного споживача з потребою 300 одиниць і вартостями перевезень, що дорівнюють нулю. Після того, як завдання збалансоване, знаходимо початковий опорний план за методом "північно-західного кута" (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – Початковий опорний план за методом північно-західного кута

A_i	Bj					Запаси
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	
A_1	100	140	160	0	0	400
A_2	0	0	40	90	50	180
A_3	0	0	0	0	250	250
Потреби	100	140	200	90	300	830

Спочатку заповнюємо клітку (1,1). x_{11} = min(100,400)= 100. Перший стовпець далі не розглядаємо. Заповнюємо клітку (1,2). x_{12} = min(140,300)= 140. Другий стовпець далі не розглядаємо. Заповнюємо клітку (1,3). x_{13} = min(160,200)= 160. Перший рядок далі не розглядаємо. Заповнюємо клітку (2,3). x_{23} = min(40,180)= 40. Третій стовпець далі не розглядаємо. Заповнюємо клітку (2,4). x_{24} = min(90,140)= 90. Четвертий стовпець далі не розглядаємо. Заповнюємо дві клітки x_{25} = 50, x_{35} = 250. Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до одержаного плану будуть такими:

$$L = 4*100 + 5*140 + 3*160 + 5*40 + 1*90 + 0*50 + 0*250 = 1870.$$

Знайдемо початковий опорний план за методом мінімальної вартості. У таблиці шукаємо найменшу вартість, не враховуючи поки що фіктивного споживача. Таким елементом є 1 в клітці (2,4). Заповнюємо цю клітку, x_{24} =min(90,180) = 90. Четвертий стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A_3 залишилося 90 одиниць (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 - Початковий опорний план за методом мінімальної вартості

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	*4* 0	5 0	*3* 200	2 0	0 200	400
A_2	*2* 90	4 0	*5* 0	*1* *90*	0 0	180
A_3	3 10	2 140	4 0	3 0	0 100	250
Потреби	100	140	200	90	300	830

У частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 2, що знаходиться в клітках (2,1) та (3,2). Заповнюємо клітку (3,2) (сюди можна більше перевезти). x_{32} =min(140,250) = 140. Другий стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A_3 залишилося 110 одиниць. Заповнюємо клітку (2,1). x_{21} = min(100,90)= =90. Другий рядок далі не розглядається. Споживачу B_1 треба ще 10 одиниць.

У частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 3, що знаходиться в клітках(1,3) та (3,1). Заповнюємо клітку (1,3). x_{13} = min(200,400)= 200. Третій стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилося 200 одиниць. Далі заповнюємо клітку (3,1). x_{31} = min(10,110)= 10. Перший стовпець далі не розглядаємо. Тепер заповнюємо останній стовпець. x_{15} = 200, x_{35} = 100.

Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до одержаного плану:

$$L_{min} = 3*200 + 2*90 + 1*90+3*10+2*140= 1180.$$

Ці витрати менші, ніж при плані, визначеному за методом "північно-західного кута ", тому перевірятимемо на оптимальність план, визначений за методом мінімальної вартості. Кількість заповнених кліток дорівнює 7, тобто план не вироджений. Для перевірки його на оптимальність побудуємо таблицю 2.4.

Таблиця 2.4 – Перевірка опорного плану на оптимальність

V_j / U_i	3	2	3	2	0
0	4 3	5 2	3	2 2	0
-1	2	4 1	5 2	1	0 -1
0	3	2	4 3	3 2	0

У тих клітках, де були перевезення, записуємо транспортні витрати. Нехай $U_1 = 0$. Тоді знаходимо $V_3 = 3\text{-}0 = 3$, і $V_5 = 0\text{-}0 = 0$. Тепер можна знайти $U_3 = 0\text{-}0 = 0$. Знаючи U_3, знаходимо $V_1 = 3\text{-}0 = 3$ і $V_2 = 2\text{-}0 = 2$. Тепер можна знайти $U_2 = 2\text{-}3 = -1$. Врешті-решт $V_4 = 1 - (-1) = 2$. Клітки, в яких не було постачань, ділимо навпіл. У верхній частині записуємо транспортні витрати, в нижній - суму $U_i + V_j$, і порівняємо її з транспортними витратами.

Всі клітки в таблиці 2.4 мають $\Delta_{ij} \leq 0$. Таким чином, розв'язок $x_{13} = 200$, $x_{21} = 90$, $x_{24} = 90$, $x_{31} = 10$, $x_{32} = 140$ є оптимальним. При такому плані у постачальника A_1 залишається 200 одиниць, а в A_3 залишається 100 одиниць.

Задача 2.2

У трьох сховищах знаходиться пальне, яке необхідно відправити до чотирьох пунктів споживання. Відстані від кожного сховища до кожного пункту споживання в кілометрах, запаси сховища і потреби кожного споживача в тоннах подані в таблиці 2.5. Скласти такий план відправки пального, щоб одержати мінімум тонно-кілометрів.

Таблиця 2.5 – вихідні дані

A_i	B_j				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	5	1	60
A_2	2	3	9	4	70
A_3	8	4	2	5	50
Потреби	85	30	25	80	

Розв'язання

Сумарні запаси менші за сумарні потреби. Вводимо фіктивного постачальника A_4 (четверте сховище) із запасом пального 40 т і з відстанями $C_{4j} = 0$ (j=1,4).

Після того, як задачу збалансовано, знаходимо початковий опорний план, наприклад, за методом мінімальної вартості.

Таблиця 2.6 – Початковий опорний план

A_i	B_j				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 0	4 0	5 0	1 60	60
A_2	2 70	3 0	9 0	4 0	70
A_3	8 0	4 25	2 25	5 0	50
A_4	0 15	0 5	0 0	0 20	40
Потреби	85	30	25	80	220

Не враховуючи поки що фіктивного постачальника, шукаємо найменшу відстань. Таким елементом є 1, що знаходиться в клітці (1,4). Заповнюємо цю клітку. $x_{14} = \min(80,60) = 60$. Перший рядок далі не розглядаємо. Наступним найменшим елементом є 2. Заповнюємо клітку(2,1). $x_{21} = \min(85,70) = 70$. Другий рядок далі не розглядаємо. Заповнюємо клітку(3,3). x_{33} = min (25,50) = 25. Далі третій стовпець не розглядаємо. Тепер заповнюємо останній рядок. $x_{14}= 15$, $x_{42}=5$, $x_{44}=20$.

Кількість заповнених кліток - 7, тобто план не вироджений. Перевіримо його на оптимальність. Для цього побудуємо таблицю 2.7.

Таблиця 2.7 – Перевірка оптимальності плану

V_j U_i	1	1	-1	1
0	2 1	4 1	5 1	1
1	2	3 2	9 0	4 2
3	8 4	4	2	5 4
-1	0	0	0 -2	0

Нехай U_1 = 0. Тоді знаходимо V_4 = 1-0 =1. Тепер можна знайти U_4= 0-1 = =-1. Далі знаходимо V_1 = 0 - (-1) = 1 і V_2 = 0- (-1) = 1. Тепер знаходимо U_2 =2-1= =1 і U_3 =4-1 =3. Врешті-решт V_3 =2-3= -1.

Клітки, в яких не було перевезень, ділимо навпіл. У верхній частині записуємо транспортні витрати, в нижній - суму $U_i + V_j$ і порівняємо її з відстанями. Усі $\Delta_{ij} \leq 0$. Отже, маємо оптимальний план $x_{14} = 60$, $x_{33} = 25$, $x_{21} = 70$, $x_{32} = 25$. Значення цільової функції наступне:

$$L = 1*60+2*70+4*25+2*25=350.$$

Потребу споживача B_1 не задоволено на 15 т, B_2 - на 5 т, B4 - на 20 т.

Задача 2.3

З трьох кар'єрів до чотирьох керамічних заводів перевозять глину. Потужність кар'єрів, потреби заводів та витрати на перевезення 1 т глини від кожного кар'єру до кожного заводу подано в таблиці 2.8.

Таблиця 2.8 – Вихідні дані

A_i	B_j				Потужність
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	9	7	4	50
A_2	6	8	10	6	65
A_3	5	4	7	6	50
Потреби	50	20	65	30	

Спланувати перевезення глини на керамічні заводи так, щоб транспортні витрати були мінімальними.

Розв’язання

Початковий опорний план, знайдений за методом мінімальної вартості, записаний в таблиці 2.9.

Таблиця 2.9 – Початковий опорний план

A_i	B_j				Потужність
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 50	9 0	7 $+\theta$ 0	4 $-\theta$ 0	50
A_2	6 0	8 0	10 $-\theta$ 35	6 $+\theta$ 30	65
A_3	5 0	4 20	7 30	6 0	50
Потреби	50	20	65	30	

У таблиці 2.9 кількість заповнених клітинок дорівнює 5, а має бути у разі не виродженої задачі 3+4-1= 6. Отже, буде одна фіктивно заповнена клітка. Вважатимемо клітку (1,4) заповненою. Перевезення в цій клітці відзначимо [0]. Перевіримо план на оптимальність в таблиці 2.10.

Таблиця 2.10 – Перевірка опорного плану на оптимальність

V_j / U_i	3	5	8	4
0	3	9 5	7 8	4
2	6 5	8 7	10	6
-1	5 2	4	7	6 3

План не є оптимальним, оскільки оцінка $\Delta_{ij}>0$.

Покращуємо його. Заповнюємо клітку (1,3). Контур, за яким проводиться перерозподіл, показаний в таблиці 2.9. θ= min(0,35)=0.

План залишається тим самим, але фіктивно заповненою кліткою буде (1,3).

Таблиця 2.11 – Остаточний опорний план

A_i	B_j				Потужність
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 50	9 0	7 0	4 0	50
A_2	6 0	8 0	10 35	6 30	65
A_3	5 0	4 20	7 30	6 0	50
Потреби	50	20	65	30	

Перевіримо цей план на оптимальність. Всі $\Delta ij \leq 0$. Отже, маємо оптимальний план $x_{11} = 50, x_{23} = 35, x_{24} = 30, x_{32} = 20, x_{33} = 30$. При цьому плані транспортні витрати складають

$$L = 3*50 + 10*35 + 6*30 + 5*20 + 7*30 = 970.$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ЗМ 1. Моделі і методи системного аналізу, способи дослідження і оптимізації операцій

Тема 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ – НАУКА ПРО ОБҐРУНТУВАННЯ ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ (2 години)

1. Основні поняття. Моделі дослідження операцій. Етапи дослідження операцій
2. Класифікація задач та методів дослідження операцій

Джерела: [1] 5-14; [2] с. 11-41; [3] с. 20-33; [4] с. 21-33; [6] с. 4-11;.[7] с. 7-13.

Контрольні запитання

1. Що розуміють під дослідженням операцій?
2. Сформулюйте основне завдання дослідження операцій.
3. Чи існує зв'язок між критерієм оптимальності та принципом оптимальності? Відповідь аргументуйте.
4. У чому полягає принципова відмінність статичних і динамічних завдань дослідження операцій?
5. Приведіть класифікацію завдань дослідження операцій за структурою інформаційного стану ОПР.
6. Яке завдання дослідження операцій називають параметричним, в чому його принципова відмінність від завдання ухвалення рішень в умовах невизначеності?
7. Приведіть класифікацію завдань дослідження операцій за видом критерію оптимальності.
8. Який зв'язок існує між завданнями математичного програмування і векторної оптимізації?

Тема 2. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ (12 годин)

1. Лінійні економіко-математичні моделі. Постановка задачі лінійного програмування (ЛП)
2. Структура множини припустимих розв’язків задач ЛП. Геометрична інтерпретація задачі ЛП
3. Симплекс-метод розв’язування ЗЛП
4. Поняття двоїстості. Правило побудови двоїстих задач
5. Інтерпретація двоїстих оцінок в задачах техніко-економічного планування
6. Аналіз двоїстих оцінок. Параметричні зміни вектору обмежень
7. Параметричні зміни вектора цільової функції

Джерела: [1] с. 16-122; [2] с. 42-75, 119-122; [4] с. 21-33; [5] с. 7-14; [7] с. 14-39.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
2. Дайте визначення для наступних понять: план, припустимий план, оптимальний план, розв'язок задачі.
3. Чим відрізняється загальна задача лінійного програмування від канонічної?
4. Чи завжди загальну задачу лінійного програмування можна привести до канонічного виду?
5. Яку точку опуклої множини називають кутовою?

6. В чому полягає перша геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування?

7. Який план ЗЛП називають базисним?

8. Як пов'язані базисні плани й кутові точки області визначення задачі лінійного програмування?

9. Який план задачі лінійного програмування називають виродженим?

10. Сформулюйте критерій оптимальності припустимого базисного плану, застосовуваний у симплекс-методі.

11. Сформулюйте основні етапи стандартної ітерації симплекс-методу.

12. Для чого застосовують перетворення Жордана-Гаусса?

13. Який елемент симплекс-таблиці називають ведучим?

14. За яких умов роблять висновок про необмеженість цільової функції в розв'язуваній задачі?

15. Чи можна заздалегідь точно визначити кількість ітерацій, що потрібна для розв'язання задачі симплекс-методом? Чи можна знайти верхню границю для даної величини?

16. Яку задачу називають виродженою? За якими ознаками можна впізнати, що поточний план є виродженим?

17. Поясніть, в чому полягає основна ідея методу збурювань?

18. Для чого призначений метод мінімізації нев'язань?

19. Поясніть суть подвійності в лінійному програмуванні.

20. Складіть просту економіко-математичну модель та запишіть до неї двоїсту. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.

21. Скільки змінних і обмежень має двоїста задача щодо прямої задачі?

22. Поясніть економічний зміст першої теореми подвійності.

23. Поясніть економічний зміст другої теореми подвійності.

24. У чому полягає економічний зміст третьої теореми подвійності?

25. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.

26. Як на підставі оптимального розв'язку прямої задачі одержати оптимальний розв'язок двоїстої задачі?

27. У чому полягає економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач лінійного програмування?

28. Як визначити, чи є ресурс дефіцитним?

29. Як визначити, що продукція є рентабельною або нерентабельною?

30. У чому полягає економічний зміст змінних двоїстої задачі?

31. Який зміст вкладають у поняття «параметрична стійкість»?

32. Сформулюйте умови для припустимих змін цільової функції задачі, за яких її оптимальний план залишається незмінним.

33. Як визначити статус ресурсів прямої задачі?

34. Як визначити інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів?

35. Як визначити оптимальний план виробництва продукції й зміну доходу підприємства під час збільшення або зменшення обсягу ресурсів?

36. Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції?

Приклад 2.1. На підприємстві є можливість випускати чотири види продукції $П_j$. При її виготовленні використовуються ресурси $Р_1$, $Р_2$ і $Р_3$. Розміри припустимих витрат ресурсів обмежені відповідно величинами 34, 16 і 22 одиниць. Видаток ресурсу $Р_i$ ($i=\overline{1,3}$) на одиницю продукції $П_j$ ($j=\overline{1,4}$) заданий матрицею

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Планова ціна одиниці продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ відповідно дорівнює 18, 14, 15, 10 грош. од., а оптова ціна – 25, 17, 19, 12 грош. од. Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє знайти збалансований по ресурсах план випуску продукції, що забезпечує підприємству максимальний прибуток. Симплексним методом знайти оптимальний план випуску продукції за видами, дати змістовну відповідь, розкривши економічний зміст усіх змінних, які беруть участь у розв'язанні задачі.

Розв'язання

Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 кількість одиниць продукції відповідно $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, запланованої до випуску. Прибуток підприємства є різницею між його доходом і витратами. Визначимо величину прибутку для кожного виробу:

для $П_1$ 25-18=7 грош. од.,
для $П_2$ 17-14=3 грош. од.,
для $П_3$ 19-15=4 грош. од.,
для $П_4$ 12-10=2 грош. од.

Тоді цільова функція виразиться в такий спосіб:

$$L = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \max.$$

Складемо обмеження, обумовлені видатком ресурсів:

$$2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 5x_4 \le 34,$$
$$4x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 1x_4 \le 16,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 \le 22.$$

За змістом задачі змінні x_1, x_2, x_3, x_4 не можуть виражатися невід'ємними числами. Введемо обмеження

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Таким чином, модель задачі формулюється так:
Знайти такі x_1, x_2, x_3, x_4, які перетворюють у максимум цільову функцію

$$L = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \max.$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 5x_4 \le 34,$$
$$4x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 1x_4 \le 16,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 \le 22,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Перш ніж вирішувати задачу лінійного програмування симплексним методом, її модель приводять до канонічної форми. Основною ознакою канонічної форми є запис обмежень задачі у вигляді рівностей. Щоб перетворити нерівності в еквівалентні рівняння, введемо в ліві частини нерівностей додаткові (балансові) невід'ємні змінні x_5, x_6, x_7, які за змістом є різницями між правими й лівими частинами нерівностей. У результаті модель буде записана у вигляді: знайти такі x_j, які перетворюють у максимум функцію

$$L = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max.$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 5x_4 + x_5 \leq 34,$$
$$4x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 1x_4 + x_6 \leq 16,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 + x_7 \leq 22,$$
$$x_j \geq 0.$$

Відзначимо також, що додаткові змінні x_5, x_6, x_7 мають цілком певний економічний зміст – це не використовувана при даному плані виробництва кількість сировини того або іншого виду (можливі залишки ресурсів P_1, P_2, P_3), їх ще називають резервами.

Аналізуючи канонічну модель, зазначимо, що кожна змінна x_5, x_6, x_7 входить тільки в одне з рівнянь системи. Ця обставина свідчить про те, що змінні x_5, x_6, x_7, є базисними, а інші x_1, x_2, x_3, x_4 – вільними.

Складемо симплекс-таблицю, що відповідає початковому опорному плану

$$x = (0, 0, 0, 0, 34, 16, 22)$$

при якому цільова функція L = 0.

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**
A_5	0	34	2	4	1	5	1	0	0
A_6	0	16	4	1	4	1	0	1	0
A_7	0	22	2	3	1	2	0	0	1
L_j		0	0	0	0	0	0	0	0
Δ_j			-7	-3	-4	-2	0	0	0

Оскільки в рядку Δ_j є від'ємні елементи, план не є оптимальним. Перш ніж перейти до нового опорного плану, визначимо, який вектор треба вводити до базису в першу чергу. Для цього визначимо добутки $\Delta_j * \Theta_j$ і виберемо найбільший за абсолютною величиною.

$$\Theta_1 = \min(34/2,\ 16/4,\ 22/2) = 4$$
$$\Theta_2 = \min(34/4,\ 16/1,\ 22/3) = 7{,}33$$
$$\Theta_3 = \min(34/1,\ 16/4,\ 22/1) = 4$$
$$\Theta_4 = \min(34/5,\ 16/1,\ 22/2) = 6{,}8$$
$$\Delta_1 * \Theta_1 = -7*4 = -28,\ \Delta_2 * \Theta_2 = -3*7{,}33 = -22,$$
$$\Delta_3 * \Theta_3 = -4*4 = -16,\ \Delta_4 * \Theta_4 = -2*6{,}8 = -13{,}6.$$

Найбільшим за абсолютною величиною є $\Delta_1 * \Theta_1 = -28$. Будемо вводити до базису вектор A_1, і виводити з базису вектор A_6.

Складемо нову симплекс-таблицю

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**
A_1	7	4	1	0,25	1	0,25	0	0,25	0
A_5	0	26	0	3,50	-1	4,50	1	-0,50	0
A_7	0	14	0	2,50	-1	1,50	0	-0,50	1
L_j		28	7	1,75	7	1,75	0	1,75	0
Δ_j			0	-1,25	3	-0,25	0	1,75	0

Отриманий новий опорний план x= (4; 0; 0; 0; 26; 0; 14), при якому цільова функція L = 28, тобто стала більше.

Перевірка плану на оптимальність показує, що в рядку Δ_j є від'ємні елементи, тобто цей план також не є оптимальним. Визначимо, який вектор треба вводити до базису для переходу до нового опорного плану. Знайдемо добутки Δ_j*Θ_j:

$$\Theta_2 = \min(4*4,\ 26*2/7,\ 14*2/5) = 5{,}6$$

$$\Theta_4 = \min(4*4,\ 26*4/18,\ 14*4/6) = 5{,}78;$$

$\Delta_2*\Theta_2 = -1{,}25*5{,}6 = -7$, $\Delta_4*\Theta_4 = -1/4*5{,}78 = -1{,}445$. Будемо вводити до базису вектор A_2, а виводити з базису вектор A_7.

Складемо нову симплекс-таблицю

Базис	$C_{j\text{баз}}$	C_j	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Отримано новий план x= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L = 35.

Перевірка отриманого плану на оптимальність показує, що всі $\Delta_j \geq 0$, отже план є оптимальним. Відповідно до цього плану треба виготовити 2,6 од. продукції $П_1$ і 5,6 од. продукції $П_2$; продукцію $П_3$ і $П_4$ виготовляти не слід. При цьому підприємство дістане максимальний прибуток в розмірі 35 грош. од. Залишаться невикористаними 6,4 од. ресурсу P_1, а ресурси P_2 і P_3 будуть витрачені повністю.

Приклад 2.2. Використовуючи розв'язання прикладу 2.1 і відповідність між двоїстими змінними, знайти компоненти оптимального плану двоїстої задачі – двоїсті оцінки u_i.

Розв'язання

Для складання двоїстої задачі скористуємося умовою прямої задачі й властивостями пари сполучених задач.

Пряма задача була сформульована в такий спосіб: знайти такі x_j, які перетворюють у максимум функцію

$$L = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 5x_4 + x_5 \leq 34$$
$$4x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 1x_4 + x_6 \leq 16$$
$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 + x_7 \leq 22$$
$$x_j \geq 0.$$

Двоїста задача формулюється в такий спосіб: знайти такі u_1, u_2, u_3, які перетворюють у мінімум цільову функцію

$$L' = 34u_1 + 16u_2 + 22u_3 \to \min$$

і задовольняють обмеженням

$$2u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 7,$$
$$4u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 3,$$

$$u_1 + 4u_2 + u_3 \geq 4,$$
$$5u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 2,$$
$$u_i \geq 0 \ (i = 1,3).$$

З теорем двоїстості виходить, що якщо розв’язано одну з пари двоїстих задач, то одночасно знайдений і розв'язок іншої задачі. Компоненти оптимального плану цієї задачі перебувають у рядку цільової функції останньої симплекс-таблиці розв’язаної задачі. Визначити їх можна, використовуючи відповідність між змінними двоїстих задач. Щоб установити цю відповідність, перетворимо обмеження двоїстої задачі в еквівалентні рівняння, віднімаючи з лівих частин додаткові невід’ємні змінні. Отримаємо:

$$2u_1 + 4u_2 + 2u_3 - u_4 = 7,$$
$$4u_1 + u_2 + 3u_3 - u_5 = 3,$$
$$u_1 + 4u_2 + u_3 - u_6 = 4,$$
$$5u_1 + u_2 + 2u_3 - u_7 = 2,$$
$$u_i \geq 0 \ (i = 1,7).$$

У цьому запису змінні u_4, u_5, u_6, і u_7 є базисними, а u_1, u_2, u_3 – вільними. У прямій задачі змінні x_1, x_2, x_3 і x_4 є вільними , а x_5, x_6, x_7 - базисними. Відповідність встановлюють, зіставляючи базисним змінним однієї задачі вільні змінні іншої і навпаки.

$$\overbrace{x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4}^{\text{вільні}} \qquad\qquad \overbrace{x_5 \ \ x_6 \ \ x_7}^{\text{базисні}}$$
$$\Updownarrow \ \ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \ \ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \ .$$
$$\underbrace{u_4 \ \ u_5 \ \ u_6 \ \ u_7}_{\text{базисні}} \qquad\qquad \underbrace{u_1 \ \ u_2 \ \ u_3}_{\text{вільні}}$$

Як бачимо, змінна u_1 зв'язана із змінною x_5 (тому їх називають двоїстими змінними), в останній симплексній таблиці, що містить оптимальний план, x_5 перебуває в базисі, значить двоїста їй змінна u_1 на цьому етапі розрахунків є вільною і як вільна змінна дорівнює нулю (у будь-якій двоїстій парі завжди одна змінна базисна, а інша – вільна). Отже, $u_1 = 0$. Далі, u_2 відповідає x_6 . Остання симплекс-таблиця має вигляд

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Оптимальний план x= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L = 35.

У цій симплекс-таблиці в стовпці вектора A_6 у рядку L_6 перебуває елемент 1,5, отже $u_2 = 1,5$. У такий же спосіб можна визначити, що $u_3 = 0,5$.

З теорем подвійності також виходить, що значення цільових функцій розв'язаних двоїстих задач рівні між собою, тому L' = 35.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1. Графічним методом визначити оптимальні плани наступних задач лінійного програмування:

а).

$$\min(\max)(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

б).

$$x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в).

$$\min(\max)(x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

г).

$$\min(\max)(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Задача 2.1. Фірма планує організацію виробництва двох видів продукції А і В. Призначений для цього інвестиційний фонд обмежений сумою 5000 дол. Якщо буде потреба, цю суму можна збільшити на 10000 дол. за рахунок банківського кредиту, процентна ставка за використання якого становить 20%. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці продукції А, дорівнюють 50 дол., а одиниці продукції В - 100 дол. Очікуваний прибуток фірми від реалізації одиниці продукції А становить 100 дол., а одиниці продукції В - 150 дол. Фірма має попереднє замовлення на виробництво не менше ніж 100 од. продукції А і 50 од. продукції В.

Визначити обсяги виробництва продукції кожного виду, які забезпечать фірмі найбільший прибуток з урахуванням виплат за кредит.

Задача 2.3. Фірма має капітал 300000 дол., що може використатися для фінансування проектів 1 і 2. Реалізація проекту 2 гарантує одержання щорічного прибутку в розмірі 1 дол. на кожний вкладений долар. Проект 1 гарантує прибуток у розмірі 3 дол. на кожний інвестований долар, але через два роки. У випадку фінансування проекту 1 період інвестицій повинен бути кратним двом рокам.

Визначити, як слід розпорядитися капіталом, щоб максимізувати загальний дохід, який може одержати фірма через три роки після початку інвестицій.

Задача 2.4. Вирішити симплексним методом наступні задачі:

а)

$$\max(5x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -3 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

б)

$$\min(x_1 - 3x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -2 \\ 2x_2 + 4x_3 \le 7 \\ x_j \ge 0; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

в)

$$\max(-x_1 - x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

г)

$$\min(-x_1 - 3x_2 + 2x_3)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Задача 2.5. Для виготовлення виробів A, B, C підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A, B і C, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в таблиці.

Вид сировини	**Норми витрат сировини**			**Запас сировини**
	A	**B**	**C**	
S_1	18	15	12	360
S_2	6	4	8	192
S_3	5	3	3	180
Ціна одного виробу, грн.	9	10	16	

Скласти план виготовлення виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною. Скласти двоїсту задачу й знайти її оптимальний план. (Відповідь: x*=(0; 8; 20; 0; 0; 96), L*=400 грн. u*=(0,22; 1,67; 0)).

Тема 3. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ТА ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ (12 годин)

1. Економічна постановка транспортної задачі. Математична модель
2. Методи знаходження опорного плану транспортної задачі
3. Метод потенціалів
4. Змістовна постановка задачі про призначення. Математична модель задачі вибору
5. Угорський метод розв'язання задачі про призначення

Джерела: [1] с. 123-152; [2] с. 76-118; [3] с. 33-46, 394-405; [4] с. 193-216; [5] с. 118-138; [6] с. 134-169; [7] с. 41-60.

Контрольні запитання

1. Які специфічні властивості дозволяють виділити транспортні задачі в окремий клас з множини задач лінійного програмування?
2. Опишіть методи побудови припустимого плану транспортної задачі.
3. Скільки ненульових елементів має містити не вироджений базисний план транспортної задачі?
4. Сформулюйте критерій оптимальності для припустимого плану транспортної задачі.
5. Поясніть, на чому заснований метод потенціалів?
6. З чого випливає критерій оптимальності припустимого плану транспортної задачі?
7. Перелічіть основні етапи методу потенціалів.

8. Які умови повинні бути дотримані під час побудови ланцюжка перетворення плану в методі потенціалів?

9. Що треба робити під час виникнення ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?

10. Як формулюють задачу про призначення?

11. Які значення мають приймати змінні задачі про призначення?

12. У чому полягає зміст угорського методу розв'язання задачі про призначення?

13. Охарактеризуйте особливості алгоритму угорського методу розв'язання задачі про призначення.

Приклад 3.1. Виробниче об'єднання складається із трьох філій A_1,A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в кількості відповідно 1000, 1500 і 1200 од. на місяць. Ця продукція відправляється на два склади D_1, D_2 місткістю відповідно 2500 і 1200 од., а потім — до п'ятьох споживачів B_1, B_2, ..., B_5, попит яких становить відповідно 900, 700, 1000, 500 і 600 од. Вартості перевезення одиниці продукції від виробника на склад, а потім із складів до споживачів наведені в таблицях:

Філія	**Вартість перевезення від виробника на склад**	
	D_1	**D_2**
A_1	2	8
A_2	3	5
A_3	1	4

Склад	**Вартість перевезення із складу до споживача**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1	3	8	5	4
D_2	2	4	5	3	1

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першої філії другому споживачеві, а також із третьої філії четвертому споживачеві. Вартість транспортування одиниці продукції за транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 грош. од., а за маршрутом A_3B_4 — 4 грош. од. Перевезення продукції зі складу на склад є недопустимим.

Сформулювати задачу як транспортну із проміжними пунктами (двоетапну) і визначити її оптимальний план.

Розв'язання

Кожний склад можна уявити як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому склади відіграють роль і постачальників продукції, і її споживачів.

Перевезення продукції безпосередньо від філій до споживачів (крім випадків, означених в умові задачі), а також із складу на склад блокується за допомогою досить великої вартості М. Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю двоетапної задачі наведено нижче:

A, D	D, B							u_i
	D_1=2500	**D_2=1200**	**B_1=900**	**B_2=700**	**B_3=1000**	**B_4=500**	**B_5=600**	
A_1=1000	-2 **1000 -Θ**	8	M	3 +Θ	M	M	M	u_1 =0
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =1
A_3=1200	1 **1200**	4	M	M	M	4	M	u_3 =-1
D_1=2500	0 +Θ	M	1 **900**	3 **700 -Θ**	8 **900**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **100**	3 **500**	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=2	v_2=4	v_3=1	v_4=3	v_5=8	v_6=6	v_7=4	

При такому плані витрати становлять L = 2*1000 + 3*300 + 5*1200 + +1*1200+ 1*900+ 3*700 +8*900 + 5*100 + 3*500 + 1*600 = 22900 грош. од.

Зазначимо, що в клітках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає можливість неповного використання складських приміщень у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням.

Дана ТЗ є збалансованою, тому що

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1500 + 1200 = 3700;$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 900 + 700 + 1000 + 500 + 600 = 3700.$$

Перший опорний план побудований за методом мінімальної вартості. Він є неоптимальним. Перехід до нового плану виконаємо, заповнивши порожню клітку D_1D_1 відповідно до побудованого циклу.

A, D	D, B							u_i
	D_1=2500	**D_2=1200**	**B_1=900**	**B_2=700**	**B_3=1000**	**B_4=500**	**B_5=600**	
A_1=1000	-2 **300**	8	M	3 **700**	M	M	M	u_1 =2
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =3
A_3=1200	1 **1200 -Θ**	4	M	M	M	4 +Θ	M	u_3 =-1
D_1=2500	0 **700 +Θ**	M	1 **900**	3	8 **900 -Θ**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **100 +Θ**	3 **500 -Θ**	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=0	v_2=2	v_3=1	v_4=1	v_5=8	v_6=6	v_7=4	

L = 2*300 + 3*700 + 3*300 +5*1200+ 1*1200+ 1*900 +8*900 + 5*100 + +3*500 + 1*600 = 21500 грош. од.

В останній таблиці отриманий оптимальний план ТЗ. Мінімальні витрати на перевезення становлять:

L = 2*300 + 3*700 + 3*300 +5*1200+ 1*1200+ 1*700 +4*500 +1*900 + 8*400 + +5*600 + 1*600 = 20000 грош. од.

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, має вигляд:

A, D	D, B							u_i
	D_1=2500	**D_2=1200**	**B_1=900**	**B_2=700**	**B_3=1000**	**B_4=500**	**B_5=600**	
A_1=1000	-2 **300**	8	M	3 **700**	M	M	M	u_1 =0
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =2
A_3=1200	1 **700**	4	M	M	M	4 **500**	M	u_3 =3
D_1=2500	0 **1200**	M	1 **900**	3	8 **400**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **600**	3	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=0	v_2=2	v_3=1	v_4=1	v_5=8	v_6=3	v_7=4	

Оптимальний план перевезень продукції двоетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми. Із схеми видно, що на перший склад надходить 300 + 300 + 700= =1300 од. продукції, тобто його місткість використовується не цілком (D_1D_1 = 1200 од.). Це виникає внаслідок прямих поставок продукції за маршрутом A_1B_2 у кількості 700 од. і A_3B_4 у кількості 500 од.

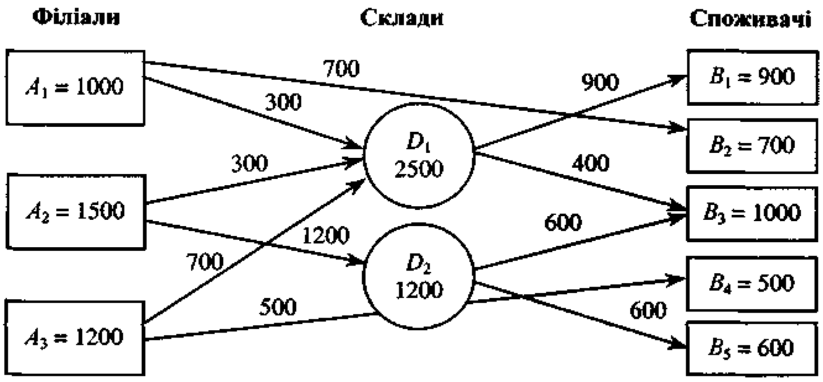

Рис. 3.1 – Схема перевезень

Ця ТЗ має ще один альтернативний оптимальний план, що відрізняється від першого лише в частині, яка стосується перевезення продукції із складів до третього й п'ятого споживачів.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.12. Передбачено штрафи за недопоставку одиниці продукції споживачам B_1, B_2, B_3 у розмірі відповідно 5, 3 і 2 грош. од. Визначити оптимальний план ТЗ:

$$a_i = (10; 80; 15) \quad b_j = (75; 20; 50); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.2. Розв’язати транспортну задачу

$$a_i = (80; 40; 60; 40);\quad b_j = (70; 60; 80) \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

якщо вартість збереження одиниці продукції, що не вивезена, у постачальників A_1, A_2, A_3, A_4 дорівнює відповідно 5, 4, 2 і 3 грош. од.

Задача 3.3. Розв’язати транспортну задачу:

$$a_i = (75; 40; 35; 40);\quad b_j = (20; 60; 140) \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

якщо штрафи за недопоставку продукції споживачам B_1, B_2, B_3 складають відповідно 6, 4 і 8 грош. од.

Задача 3.4. Розв’язати транспортну задачу за умови, що вартість збереження не вивезеної продукції у постачальників A_1, A_2, A_3 дорівнює відповідно 8, 7 і 5 грош. од. за одиницю продукції:

$$a_i = (60; 90; 50);\quad b_j = (30; 80; 20; 40) \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.5. В транспортній задачі загальний обсяг виробництва продукції перевищує загальний попит. Вартість зберігання одиниці продукції, яка не вивезена від постачальників A_1, A_2, A_3, A_4, дорівнює відповідно 7, 3, 4 і 8 грош.од. Визначити оптимальний план задачі:

$$a_i = (30; 80; 20; 40);\quad b_j = (60; 80; 20) \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.6. У незбалансованій транспортній задачі загальний попит перевищує загальний обсяг виробництва на 10 од. продукції. За недопоставку продукції споживачам за умовами задачі передбачено штрафи у розмірі 6 і 4 грош.од. за кожну одиницю продукції відповідно для першого і другого постачальників. Визначити оптимальний план такої транспортної задачі:

$$a_i = (10; 10; 30\ 20);\quad b_j = (20; 30; 20; 10) \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тема 4. МЕРЕЖЕВІ МОДЕЛІ (8 годин)

1. Основні поняття теорії графів та мереж

2. Транспортна задача у мережевій формі. Дослідження мережевої моделі як задачі лінійного програмування

3. Задача про максимальний потік. Визначення критичного шляху

Джерела: [1] с. 286-330; [4] с. 243-297; [7] с. 60-69.

Контрольні запитання

1. Які специфічні властивості дозволяють виділити транспортні задачі в окремий клас з множини задач лінійного програмування?

2. Опишіть методи побудови припустимого плану транспортної задачі.

3. Скільки ненульових елементів має містити невироджений базисний план транспортної задачі?

4. Сформулюйте критерій оптимальності для припустимого плану транспортної задачі.

5. Поясніть, на чому заснований метод потенціалів?

6. З чого випливає критерій оптимальності припустимого плану транспортної задачі?

7. Перелічіть основні етапи методу потенціалів.

8. Які умови мають бути дотриманими під час побудови ланцюжка перетворення плану в методі потенціалів?

9. Що треба робити під час виникнення ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?

10. Приведіть формулювання лінійної сіткової задачі.

11. Покажіть, що транспортна задача в матричній постановці є окремим випадком транспортної задачі в сітковій постановці.

12. Дайте визначення поняття «остов сітки». Який зв'язок існує між остовом сітки й базисом транспортної задачі в сітковій постановці?

13. Перелічіть основні етапи методу потенціалів для транспортної задачі в сітковій постановці.

14. За яким способом можна одержати припустимий потік у транспортній сітці?

15. У чому полягає задача про найкоротший шлях?

16. Перелічіть основні етапи методу Мінті.

Тема 5. ДИСКРЕТНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (4 години)

1. Класичні задачі цілочислової оптимізації, класифікація та характеристика методів
2. Метод відсікань Гоморі
3. Метод гілок та границь

Джерела: [1] 153-172; [2] с. 129-173; [4] с. 397-417, 422-428, 432-437; [5] с. 152-171, 177-184; [6] с. 175-186, 214-221; [7] с. 70-77.

Контрольні запитання

1. Які основні проблеми виникають при розв'язанні дискретних задач?
2. Сформулюйте задачу про ранець.
3. Які економіко-математичні моделі можна звести до задачі про комівояжера?
4. Наведіть приклади моделей з розривними цільовими функціями.
5. Який принцип використовують для побудови правильного відсікання в методі Гоморі?
6. Яку роль відіграє алгоритм двоїстого симплекс-методу при розв'язанні цілочислової лінійної задачі за методом Гоморі?
7. Перелічіть принципові ідеї, що лежать в основі методів віток і границь.
8. Як провадиться побудова відсікання при розв'язанні цілочислової лінійної задачі за методом віток і границь?
9. Опишіть схему розв'язання цілочислової задачі лінійного програмування за методом віток і границь.
10. За рахунок яких перетворень вдається побудувати сполучений базис під час додавання відсікаючого обмеження?

Приклад 5.1. На придбання обладнання для нової виробничої ділянки виділено 15 грош. од. Підприємство може замовити машини типу А вартістю 3 грош. од., що випускають 1 од. продукції за зміну; і машини типу В вартістю 2 грош. од., що забезпечують випуск 2 од. продукції за зміну. Причому число придбаних машин В не повинне перевищувати 5 штук. Потрібно скласти економіко-математичну модель, користуючись якою, можна знайти план придбання машин, що враховує можливості підприємства й забезпечує найвищу продуктивність нової ділянки. Користуючись одним з методів цілочислового програмування, знайти оптимальний план придбання обладнання.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 машин А и x_2 машин В. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти наступним нерівностям:

$$3x_1+2x_2\leq 15 \qquad x_2\leq 5.$$

Якщо підприємство придбає зазначену кількість обладнання, то продуктивність нової ділянки складе:

$$L= x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть приймати тільки цілі не-від'ємні значення, тобто

$$x_1, x_2 \geq 0, \qquad x_1, x_2 – \text{цілі}.$$

Таким чином, математична модель задачі матиме вигляд:

знайти таке рішення $x=(x_1, x_2)$, що перетворює в максимум цільову функцію

$$L= x_1+2x_2 \rightarrow \max$$

і задовольняє обмеженням

$$3x_1+2x_2\leq 15 \qquad 208x_1+505x_2\leq 5200$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \qquad x_1, x_2 – \text{цілі}.$$

Оскільки невідомі можуть приймати тільки цілі значення, задача є задачею цілочисельного програмування. Тому що число змінних дорівнює двом, для розв'язання задачі можна використати її геометричну інтерпретацію. Для цього побудуємо багатокутник розв'язків (рис. 5.1).

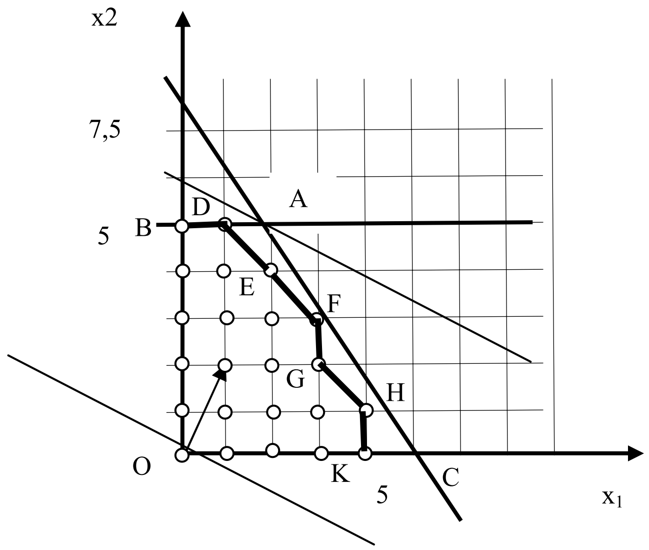

Рис. 5.1 - Багатогокутник розв'язків

Обмеженням задачі задовольняють всі точки отриманого багатокутника OBAC, а умовам цілочисельності – тільки точки, показані кружками. Щоб знайти точку, координати якої є рішенням задачі, замінимо багатокутник OBAC багатокутником OBDEFGHK, що містить всі припустимі точки із цілочисельними координатами й таким, що координати кожної з вершин є цілими числами. Для визначення вершини, що містить оптимальний план, побудуємо вектор c=(1;2) і пряму $x_1 + 2x_2 =0$. Пересуваючи побудовану пряму в напрямку, зазначеному вектором, визначимо, що останньою точкою, яка з'єднує її з багатокутником OBDEFGHK, є його вершина з координатами x=(1; 5).

Вирішимо задачу симплексним методом не з огляду на вимогу цілочисельності. Для цього приведемо її до канонічного вигляду:

$$L= x_1 + 2x_2 \to max$$

$$3x_1+2x_2 +x_3 = 15$$

$$x_2 + x_4 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Очевидно, що опорним планом є план

$$x = (0, 0, 15, 5).$$

Заповнимо симплекс-таблицю

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**1**	**2**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	15	3	2	1	0
A_4	0	5	0	1	0	1
L_j		0	0	0	0	0
Δ_j			-1	-2	0	0

Зроблена оцінка оптимальності плану показує, що план не є оптимальним. Перейдемо до нового базису. Очевидно, що вводити до базису треба в першу чергу вектор A_2, виводити з базису при цьому необхідно вектор A_4. Складемо нову симплекс-таблицю. Помножимо головний рядок нової таблиці на -2 і додаємо до рядку вектору A_3, результат записуємо в рядок вектора A_3 нової таблиці.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**1**	**2**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	2	5	0	1	0	1
A_3	0	5	3	0	1	-2
L_j		10	0	2	0	2
Δ_j			-1	0	0	2

Новий опорний план x = (0; 5; 5; 0). Перевіривши його на оптимальність, переконуємося, що цей план також не є оптимальним, його необхідно поліпшити. Перейдемо до чергового опорного плану. Для цього введемо до базису вектор A_1, виводити з базису будемо вектор A_3. Заповнимо чергову симплекс-таблицю.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**1**	**2**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3
A_2	2	5	0	1	0	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3
Δ_j			0	0	1/3	4/3

Отримали новий опорний план x = (5/3; 5; 0; 0). Всі розраховані значення симплекс-різниць додатні або дорівнюють нулю, отже отриманий план є оптимальним. Але він не задовольняє умові цілочисельності змінних x_1 і x_2. Для змінної x_1, що має дробову частину, складаємо додаткове обмеження, користуючись останньою симплекс-таблицею:

$$x_1 + 1/3x_3 – 2/3x_4 \ge 5,3.$$

До системи обмежень додамо нерівність

$$f(1)\ x_1 + f(1/3)x_3 + f(–2/3)x_4 \ge f(5/3),$$

$$1/3x_3 + 1/3x_4 \ge 2/3.$$

Введемо невід’ємну змінну x_5 і складемо рівняння:

$$1/3x_3 +1/3x_4 -x_5 = 2/3.$$

Складемо нову симплекс-таблицю з новою умовою, доповнивши таблицю, що містить оптимальний план, новим рядком:

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3	0
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	-2/3	0	0	-1/3	-1/3	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3	0
Δ_j			0	0	1/3	4/3	0

Слід пам'ятати, що після включення в систему обмежень додаткового рівняння, яке відповідає правильному відсіканню, завжди буде утворюватися неприпустиме базисне рішення. Для одержання припустимого базисного рішення потрібно перевести в базисні змінні одну з вільних змінних (x_3 або x_4). Нехай це буде x_3. Введемо до базису вектор A_3. Для цього помножимо рядок A_5 на (-3) і результат запишемо в рядок A_3. Головний рядок нової таблиці помножимо на (-1/3) і додамо до першого рядку попередньої таблиці. Результат запишемо в рядок A_1. Потім цей же рядок помножимо на 0,069 і додамо до другого рядку попередньої таблиці, результат запишемо в рядок A_2. Потім помножимо головний рядок на (-1/3) і додамо до другого рядку попередньої таблиці.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1	1	0	0	-1	1
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	2	0	0	1	1	-3
L_j		11	1	2	0	1	1
Δ_j			0	0	0	1	1

Отримано план x = (1; 5; 0; 0; 2). Дослідження плану на оптимальність показує, що він є оптимальним, при цьому отримали цілочисельне рішення.

Таким чином, підприємству треба придбати одну машину А і п'ять машин типу В. При цьому продуктивність нової ділянки буде максимальною і складе 11 одиниць продукції.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1. Підприємство випускає вироби А і В, при виготовленні яких використовується сировина C_1 і C_2. Відомі запаси сировини (b_1= 7, b_2 = 10), норми витрати на одиницю виробу А сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 1 од. На одиницю продукції В сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 2 од. Оптові ціни виробу А – 12 од., виробу В – 11 од., планова собівартість виробу А – 9 од., В – 10 од. Як тільки обсяг випуску продукції перестане відповідати оптимальним розмірам підприємства, подальше збільшення випуску x_j приводить до підвищення вартості продукції і в першому наближенні фактична собівартість c_j описується функцією

$$c_j = c_j^0 + c_j^{'} x_j ,$$

де c_j’ - деяка постійна величина. При пошуку плану випуску виробів, що забезпечує підприємству найвищий прибуток в умовах порушення балансу між обсягом випуску й оптимальних розмірів підприємства цільова функція набуває вигляд

$$f = (p_1 - (c_1^0 + c_1^{'} x_1)) * x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2^{'} x_2)) * x_2 ,$$

а обмеження за видами сировини мають вигляд

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \, . \\ &x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Скласти економіко-математичну модель задачі. Графічним методом вирішити отриману задачу й сформулювати відповідь в економічних термінах відповідно до умов задачі.

Задача 5.2. За методом Гоморі розв’язати задачі цілочисельного програмування:

а)

$$Z = x_1 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

б)

$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

в)

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_2 \le 13 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

г)

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

Задача 5.3. За методом віток і границь розв'язати задачу цілочисельного програмування:

а)

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 16 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

б)

$$Z = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \le 32 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

в)

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

г)

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 3x_1 + 9x_2 \le 27 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases}$$

Тема 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (8 годин)

1. Загальна постанова задачі нелінійного програмування
2. Класичний метод оптимізації з використанням множників Лагранжа
3. Градієнтні методи розв'язання задач безумовної оптимізації
4. Метод дроблення кроку
5. Опукле програмування
6. Теорема Куна-Таккера
7. Квадратичне програмування

Джерела: [1] 200-244; [2] с. 174-199; [4] с. 797-804; [5] с. 187-195; [6] с. 251-279; [7] с. 78-92.

Контрольні запитання

1. За яких умов оптимізаційну задачу можна віднести до класу нелінійних?
2. Наведіть приклад економічної моделі, що зводиться до задачі нелінійного програмування.
3. Перелічіть основні труднощі, що виникають у процесі розв'язання задачі нелінійного програмування.
4. Який зміст вкладають в поняття «умовна оптимізація»?
5. Для чого призначений метод множників Лагранжа й у чому він полягає?
6. Яку точку множини розв'язків називають стаціонарною?
7. Які принципові етапи входять у градієнтні методи?
8. Для розв'язання яких задач призначений метод найскорішого спуску й метод дроблення кроку?
9. Дайте визначення опуклої (увігнутої) функції.
10. Сформулюйте достатню умову опуклості (увігнутості) функції.

11. У чому полягає специфіка задач опуклого програмування?

12. Дайте визначення сідлової точки. Наведіть приклад функції, що має сідлову точку.

13. Сформулюйте необхідну й достатню умови теореми Куна-Таккера. Яке значення вони мають для розв'язання задач нелінійного програмування?

14. У чому полягає умова регулярності Слейтера? Поясніть її зміст.

15. Наведіть приклад пари двоїстих задач нелінійного програмування.

16. Які властивості пари нелінійних двоїстих задач можна застосувати для їх розв'язання?

Приклад 67.1. Знайти умовний екстремум функції F = xy за умови

$$g(x, y) = x + y - 2 = 0 \text{ для } x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Розв'язання

Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y+x-2).$$

Для відшукання передбачуваного екстремуму вирішимо систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y + x - 2 = 0.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, знаходимо y - x = 0. З третього рівняння визначаємо y + x = 1. Підставивши y = x в останню формулу, остаточно одержимо x*= 1 і y* = 1. З урахуванням цих результатів з першого або другого рівнянь знаходимо λ* = -1. Значення функції в точці екстремуму

$$F^*=x^*y^* = 1*1 = 1.$$

Умови прикладу подані на рис. 6.1.

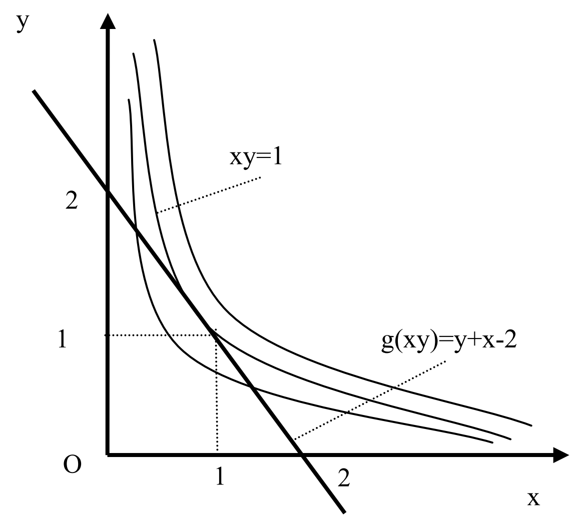

Рис. 6.1 - Умови прикладу

Лінія рівня, що проходить через точку передбачуваного екстремуму, описується рівнянням $xy = 1$. Всі лінії рівня, що лежать нижче лінії $xy = 1$, мають рівень менше 1, а що лежать вище лінії рівня $xy = 1$, мають рівень більше 1. Це випливає з рівняння ліній рівнів $y = k/x$, де k - значення рівня. Ясно, що чим більше k, тим правіше проходить крива. Функція, обумовлена умовою $g(xy)=y+x-2=0$, є прямою лінією $y=2-x$. Через симетрію задачі функції $xy = 1$ і $g(xy)=y+x-2=0$ торкаються одна одної в точці передбачуваного екстремуму (з координатами (1,1)). Із сказаного випливає, що на прямій $y=2-x$ значення функції $u = xy$ менше одиниці скрізь, крім точки передбачуваного екстремуму. Таким чином, у цій точці має місце максимум.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. Використовуючи метод Лагранжа, відшукати умовний екстремум функції

$$F = x_1 x_2 + x_3$$

за умови

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^2 = 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Задача 6.2. Знайти графічним методом максимум і мінімум функції:

$$F = x + 2y$$

за умови

$$x^2 + y^2 \leq 4,$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Задача 6.3. За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму.

а). $\begin{array}{l} F = 2x_1^2 + x_2^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{array}$ б). $\begin{array}{l} F = x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \end{array}$ в). $\begin{array}{l} F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{array}$

г). $\begin{array}{l} F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{array}$ д). $\begin{array}{l} F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{array}$ є). $\begin{array}{l} F = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 = 12 \end{array}$

Задача 6.4. На виробництво трьох видів продукції А, В і С витрачають матеріальні, трудові й фінансові ресурси. Норми витрат на одиницю продукції, сумарний запас, а також розмір прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежить від обсягу виробництва (в умовних одиницях), відбиває таблиця

Ресурси	Продукція			Запас ресурсів
	A	**B**	**C**	
Матеріальні	4	5	7	100
Трудові	3	6	8	120
Фінансові	2	1	4	75
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2 + 2x_2$	$3x_3^2+6$	
Обсяг виробництва	X_1	X_2	X_3	

Попит на продукцію видів B і C відомий і становить 12 і 8 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, якщо ресурси потрібно використати повністю. Знайти оцінки ресурсів і подати економічний аналіз оптимального плану.

Тема 7. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (4 години)

1. Загальна схема методів динамічного програмування
2. Основні типи задач і моделі динамічного програмування

Джерела: [1] 245-272; [2] с. 200-263; [4], с. 441-465; [5], с. 195-209; [6], с. 292-310; [7] с. 93-100.

Контрольні запитання

1. Для розв'язання яких задач призначений метод динамічного програмування?
2. Поясніть, що являють собою адитивна й мультиплікативна функції.
3. У чому полягає сутність методу динамічного програмування?
4. Яким умовам має задовольняти задача, щоб для її розв'язання міг бути застосований алгоритм динамічного програмування?
5. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана, поясніть відсутність післядії.
6. Як визначають напрям розв'язання задачі в алгоритмах динамічного програмування?
7. Сформулюйте математичну модель для задачі про планування робочої сили.
8. Випишіть основне рекурентне співвідношення, використовуване під час розв'язання задачі про планування робочої сили.
9. Сформулюйте математичну модель для задачі про заміну устаткування.
10. Випишіть основне рекурентне співвідношення, використовуване під час розв'язання задачі про заміну устаткування.
11. З якими особливостями задач керування запасами пов'язане застосування під час їх розв'язання апарату динамічного програмування?
12. Який вигляд має цільова функція в динамічній задачі керування запасами?
13. Випишіть основне рекурентне співвідношення, використовуване під час

розв’язання динамічної задачі керування запасами.

Приклад 7.1. Для ритмічної роботи підприємства необхідно систематичне поповнення запасу сировини С, що витрачається при виробництві продукції. Потреба в сировині за місяцями планового періоду відома й виражається числами 150, 50, 100 і 100 од. Поповнення запасу проводиться партіями, кратними 50 од. На початок планового періоду на складах підприємства є запас сировини обсягом в 100 од. Складські приміщення не дозволяють зберігати одночасно більше 300 од. сировини. До кінця планового періоду весь запас повинен бути витрачений, оскільки підприємство переходить на випуск нової продукції, для якої сировина С не буде потрібна.

Витрати P(x) на поповнення запасу залежать від обсягу x партії поставки й описуються функцією P(x), що задається таблицею.

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
P(x)	0	50	48	44	40	36	32	27	24	22	21	21	20

Витрати $\varphi(\bar{m}_i)$ на зберігання сировини залежать від середнього рівня $\bar{m}_i$ запасу сировини в даному місяці, що визначається за формулою

$$\overline{m_t} = D_t/2 + j_t,$$

де D_t – обсяг споживання сировини в даному місяці, j_t - залишок сировини до кінця цього місяця. Витрати на зберігання описуються функцією $\varphi(\bar{m}_i)$, що задається таблицею.

$\bar{m}_i$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325
$\varphi(\bar{m}_i)$	0	3	8	15	30	36	41	46	50	51	52	53	54	56

Потрібно так організувати процес поповнення і зберігання сировини на підприємстві в розглянутому плановому періоді, щоб сумарні витрати мінімізувалися при неодмінній умові безперебійного функціонування виробництва.

Розв'язання

Позначимо:

$f_t(i)$ – мінімальні сумарні витрати на поповнення і зберігання сировини за останні t місяців планового періоду при рівні запасу на початок t-го місяця в i одиниць;

x - обсяг партії поставки сировини;

d_t – обсяг споживання сировини в t-му місяці;

i_t – рівень запасу сировини на початок місяця;

j_t – залишок сировини на кінець місяця;

M - місткість складських приміщень підприємства;

Тоді рівень запасу сировини на кінець t-го місяця визначиться як

$$i_t + x - d_t$$

Функціональні рівняння Беллмана матимуть такий вигляд:

для 4-го місяця - $f_4(i) = P_4(x) + \varphi_4(d_4/2)$,

де перший доданок - витрати на поповнення запасу сировини, а другий - витрати на зберігання сировини в четвертому місяці;

для проміжного t-го місяця -

$$f_t(i) = \min\{P_t(x) + \varphi_t(d_t/2 + (i + x - d_t)) + f_{t-1}(i + x - d_{t-1})\},$$

де перший доданок – витрати в t-му місяці на поповнення запасу сировини в обсязі x_t од., другий – витрати на зберігання сировини в цьому місяці, причому середній рівень запасу становить ($d_t/2+(i+x-d_t)$) од., третій – мінімальні сумарні витрати на поповнення і зберігання сировини за попередні місяці планового періоду.

За умовою $d_1=150$, $d_2=50$, $d_3=100$ і $d_4=100$, $i_1=100$, M=300 (рис. 7.1).

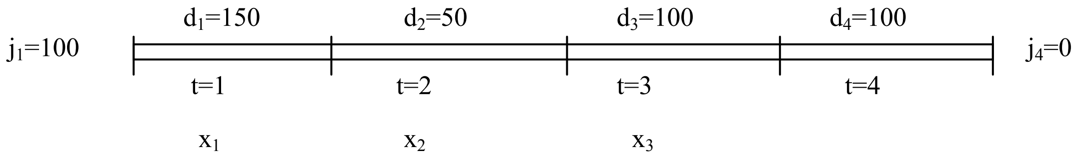

Рис. 7.1 – Обсяги споживання сировини

Функціональне рівняння для четвертого місяця матиме такий вигляд:

$$f_4(i) = P_4(x) + \varphi_4(100/2),$$

де рівень запасу сировини на початок четвертого місяця може становити 0, 50 або 100 од., відповідно x може приймати значення 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю і визначимо сумарні мінімальні витрати на поповнення запасу і його зберігання

i	**x_4(i)**	**f_4(i)**
0	100	40+8
50	50	48+8
100	0	0+8

Очевидно, витрати останнього місяця будуть найменшими у випадку, якщо запас на початок забезпечить витрати сировини.

Проаналізуємо два останніх місяці:

$$f_3(i) = \min\{P_3(x) + \varphi_3(100/2 + (i + x - 100)) + f_4(i + x - 100)\}.$$

Рівень запасу сировини на початок третього (другого від кінця) місяця може становити 0, 50, 100, 150 або 200 од., а обсяг поставки сировини x відповідно 200, 150, 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю. У клітки основного поля таблиці будемо вписувати значення суми трьох доданків P_3, φ_3 і f_4. Якщо на початок третього місяця залишок i=0, тоді:

якщо поставка x=100, то $f_3(i=0) = 40+8+48$, якщо поставка x=150, то $f_3(i=0)$ = 32+30+56,

якщо поставка x=200, то $f_3(i=0)$ = 24+41+8.

Мінімальна вартість дорівнює 73 при поставці x=200. Занесемо ці значення в останні стовпці.

Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці.

x / i3	0	50	100	150	200	$x^{опт}{}_3(i)$	$f_3(i)$
0			40+8+48	32+30+56	24+41+8	200	73
50		48+8+48	40+30+56	32+41+8		150	81
100	0+8+48	48+30+56	40+41+8			0	56
150	0+30+56	48+41+8				0	86
200	0+41+8					0	49

Функціональне рівняння для другого місяця

$$f_2(i) = \min\{P_2(x) + \varphi_2(50/2 + (i + x - 50)) + f_3(i + x - 50)\}$$

Рівень запасу сировини на початок другого (третього від кінця) місяця може становити 0, 50, 100, 150, 200 або 250 од., а обсяг поставки сировини x відповідно 250, 200, 150, 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю. Якщо на початок другого місяця залишок i=0, тоді:

якщо поставка x=50, то $f_3(i=0)$ = 48+3+73,

якщо поставка x=100, то $f_3(i=0)$ = 40+15+81,

якщо поставка x=150, то $f_3(i=0)$ = 32+36+56,

якщо поставка x=200, то $f_3(i=0)$ = 24+46+86,

якщо поставка x=250, то $f_3(i=0)$ = 21+51+49.

Мінімальна вартість дорівнює 121 при поставці x=250. Занесемо ці значення в останні стовпці.

Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці.

x / i_2	0	50	100	150	200	250	$x^{опт}{}_2(i)$	$f_2(i)$
0		48+3+73	40+15+81	32+36+56	24+46+86	21+51+49	150	121
50	0+3+73	48+15+81	40+36+56	32+46+86	24+51+49		0	76
100	0+15+81	48+36+56	40+46+86	32+51+49			0	96
150	0+36+56	48+46+86	40+51+49				0	92
200	0+46+86	48+51+49					0	132
250	0+51+49						0	100

Функціональне рівняння для першого місяця:

$$f_1(i) = \min\{P_1(x) + \varphi_1(150/2 + (i + x - 150)) + f_2(i + x - 150)\}.$$

Рівень запасу сировини на початок першого (четвертого від кінця) місяця може становити за умовою задачі 100 од., а обсяг поставки сировини x відповідно 200, 150, 100, 50 од. Заповнимо таблицю. Якщо на початок першого місяця залишок i=100, тоді:

якщо поставка x=50, то $f_3(i=0)$ = 48+3+73,

якщо поставка x=100, то $f_3(i=0)$ = 40+15+81,

якщо поставка x=150, то $f_3(i=0)$ = 32+36+56,

якщо поставка x=200, то $f_3(i=0)$ = 24+46+86,

якщо поставка x=250, то $f_3(i=0)$ = 21+51+49.

Мінімальна вартість дорівнює 121 при поставці x=250. Занесемо ці значення в останні стовпці.

Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці.

i_2 \ x	50	100	150	200	$x^{опт}{}_1(i)$	$f_1(i)$
100	48+15+121	40+36+76	32+46+96	24+51+92	100	152

Тепер можна прийняти остаточне рішення щодо організації процесу поповнення і зберігання сировини, який мінімізує витрати. З останньої таблиці видно, що мінімальна вартість витрат складе 152 од. Для її досягнення треба в першому місяці планового періоду зробити закупівлю 100 од. сировини, при цьому загальний запас сировини складе 200 од., з яких 150 од. буде витрачене на потреби виробництва. До початку другого місяця планового періоду залишиться 50 од. сировини, цей запас повністю буде використаний у виробництві протягом другого місяця. На початку третього місяця треба зробити закупівлю 200 од. сировини. Цей запас повністю забезпечить виробництво в третьому й четвертому місяцях.

Задачі для самостійного розв'язання.

Задача 7.1. Підприємство розподіляє кошти на покупку п'яти типів верстатів у чотири цехи. Експлуатація k-го верстата приносить прибуток $f_k(x_k)$ цеху залежно від кількості виділених цьому цехові верстатів x_k. Функція $f_k(x_k)$ задана таблицею:

x_k	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$	$f_3(x_k)$	$f_4(x_k)$
1	10	12	14	12
2	15	14	16	13
3	18	16	19	16
4	20	20	22	18
5	24	22	24	22

Визначити, яку кількість верстатів треба виділити кожному цеху, щоб сумарний прибуток був максимальним.

Задача 7.2. В умовах попередньої задачі кількість виділених верстатів взяти рівною шести. Функція для шести верстатів задана в таблиці f_k (x_k).

x_k	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$	$f_3(x_k)$	$f_4(x_k)$
1	10	12	14	12
2	15	14	16	13
3	18	16	19	16
4	20	20	22	18
5	24	22	24	22
6	30	28	32	30

Задача 7.3. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на трьох підприємствах, виділяючи для цього 18 млн. грн. За кожним з підприємств розроблено інвестиційний проект із зазначенням прогнозованих сумарних витрат C та доходів D, що пов'язані з його реалізацією. Розробити план інвестування.

Інвестиційний проект	Підприємство					
	1		2		3	
	Інвестиції, млн. грн.	Прибуток, млн. грн.	Інвестиції, млн. грн.	Прибуток, млн. грн.	Інвестиції, млн. грн.	Прибуток, млн. грн.
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	6	12	7	9
3	4	8	7	14	8	10
4	5	11	9	18	10	14

Задача 7.4. Розв'язати задачу 8.3, якщо розмір інвестицій становить 20 млн. грн., а перший інвестиційний проект (ситуація, коли певному підприємству не виділяється коштів) є неприпустимим.

Задача 7.5. Розв'язати задачу 8.3, якщо модернізація має проводитися ще на одному — четвертому підприємстві фірми, для якого розроблено три інвестиційні проекти:

Проект	Інвестиції, млн. грн.	Прибуток, млн. грн.
1	0	0
2	4	6
3	5	8

Врахувати, що інвестиційний портфель збільшиться на 2 млрд. грн.

Задача 7.6. Знайти оптимальний розподіл 6 млрд. грн. між трьома підприємствами галузі. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожне з підприємств, відбиває таблиця:

Розмір капіталовкладень, млн. грн.	Прибуток по підприємствах, млн. грн.		
	I	II	III
1	0,27	0,34	0,21
2	0,31	0,44	0,35
3	0,42	0,57	0,46
4	0,65	0,69	0,68
5	0,74	0,87	0,74
6	0,93	0,95	0,85

Тема 8. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР (8 годин)

1. Основні поняття теорії ігор
2. Матричні ігри двох осіб з нульовою сумою
3. Чисті та змішані стратегії
4. Зведення гри двох гравців до задачі лінійного програмування
5. Статистичні ігри (ігри з природою)

Джерела [1] 173-198; [2] с. 122-128; [4] с. 549-557, 575-578, 580-587; [5] с. 213-221; [6] с. 239-249; [7] с. 101-110.

Контрольні запитання

1. Коротко сформулюйте предмет теорії ігор як наукової дисципліни.
2. Який зміст вкладають в поняття «гра»?
3. Для опису яких економічних ситуацій можна застосовувати апарат теорії ігор?
4. Яку гру називають антагоністичною?
5. Чим однозначно визначаються матричні ігри?
6. В чому полягають принципи максиміна та мінімакса?
7. За яких умов можна говорити про те, що гра має сідлову точку?
8. Наведіть приклади ігор, які мають сідлову точку й у яких вона відсутня.
9. Які підходи існують до визначення оптимальних стратегій?
10. Що називають «ціною гри»?
11. Дайте визначення поняттю «змішана стратегія».
12. Сформулюйте основну теорему матричних ігор.
13. Поясніть розходження між стратегічною й статистичною іграми.

Приклад 8.1. Дві компанії А і В продають два види товарів. Компанія А рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) і в газетах (A_3). Компанія В, на додаток до використання радіо (B_1), телебачення (B_2) і газет (B_3), розсилає також брошури поштою (B_4). Залежно від уміння й інтенсивності проведення рекламної кампанії кожна з компаній може залучити на свою сторону частину клієнтів конкуруючої компанії. Наведена нижче матриця характеризує відсоток клієнтів, притягнутих або загублених компанією А.

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Мінімуми рядків**
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	-2	4	-9	5	-9
Максимуми стовпців	8	5	9	8	

Розв'язання

Вирішення гри засноване на забезпеченні найкращого результату з найгірших кожного гравця. Якщо компанія А вибирає стратегію A_1, то незалежно від того, що робить компанія В, найгіршим результатом є втрата компанією А 3% ринку на користь компанії В. Це визначається мінімумом елементів першого рядка матриці платежів. Аналогічно при виборі стратегії A_2 найгіршим результатом для компанії А є збільшення ринку на 5 % за рахунок компанії В. Нарешті, найгіршим результатом при виборі стратегії A_3 є втрата компанією А 9% ринку на користь компанії В. Ці результати містяться в стовпці «Мінімуми рядків». Щоб досягти найкращого результату з найгірших, компанія А вибирає стратегію A_2, тому що вона відповідає найбільшому елементові стовпця «Мінімуми рядків».

Розглянемо тепер стратегії компанії В. Оскільки елементи матриці є платежами компанії А, критерій найкращого результату з найгірших для компанії В відповідає вибору мінімаксного значення. У результаті доходимо висновку, що вибором компанії В є стратегія B_2.

Оптимальним рішенням у грі є вибір стратегій A_2 і B_2, тобто обом компаніям треба проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь компанії А, тому що її ринок збільшиться на 5 %. У цьому разі говорять, що ціна гри дорівнює 5% і що компанії А і В використовують стратегії, що відповідають сідловій точці.

Рішення, що відповідає сідловій точці, гарантує, що ні однієї компанії немає рації намагатися вибрати іншу стратегію. Дійсно, якщо компанія В переходить до іншої стратегії (B_1, B_3 або B_4), то компанія А може зберегти свій вибір стратегії A_2, що приведе до більшої втрати ринку компанією В (6 або 8 %). За тими ж причинами компанії А немає резону використовувати іншу стратегію, тому що коли вона візьме, наприклад, стратегію A_3, то компанія В може використати свою стратегію B_3 і збільшити свій ринок на 9 %. Аналогічні висновки мають місце, якщо компанія А буде використовувати стратегію A_1.

Оптимальне рішення гри, що відповідає сідловій точці, не обов'язково повинне характеризуватися чистими стратегіями. Замість цього оптимальне рішення може вимагати змішування випадковим чином двох або більше стратегій.

Приклад 8.2. Розв'язати гру 2x4, у якій платежі сплачуються гравцеві А.

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

Для розв'язання скористатися графічним методом.

Розв'язання

Гра не має розв'язання у чистих стратегіях, тому стратегії повинні бути змішаними. Очікуваний виграш гравця А, відповідний j-ї чистої стратегії гравця В, визначають за формулою

$$(a_{1j}-a_{2j})p_1 + a_{2j}, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Очікувані виграші гравця А, відповідні чистим стратегіям гравця В, запишемо у таблицю

Чисті стратегії гравця В	Очікувані виграші гравця А
1	$-2p_1+4$
2	$-p_1+3$
3	p_1+2
4	$-7p_1+6$

Відповідно до чотирьох стратегій гравця В побудуємо чотири прямі лінії (рис. 8.1).

Максимінну точку визначаємо як найбільший виграш нижньої огинаючої, якому відповідає точка перетину прямих 3 і 4. Визначимо імовірність p_1:

$$p_1 + 2 = -7p_1+6; \; p_1=0{,}5.$$

Визначимо ціну гри:

$$v = \begin{cases} 0{,}5 + 2 = 2{,}5 - \text{з} \quad \text{рівняння} \quad \text{прямої} \quad 3 \\ -7 * 0{,}5 + 6 = 2{,}5 - \text{з} \quad \text{рівняння} \quad \text{прямої} \quad 4 \end{cases}$$

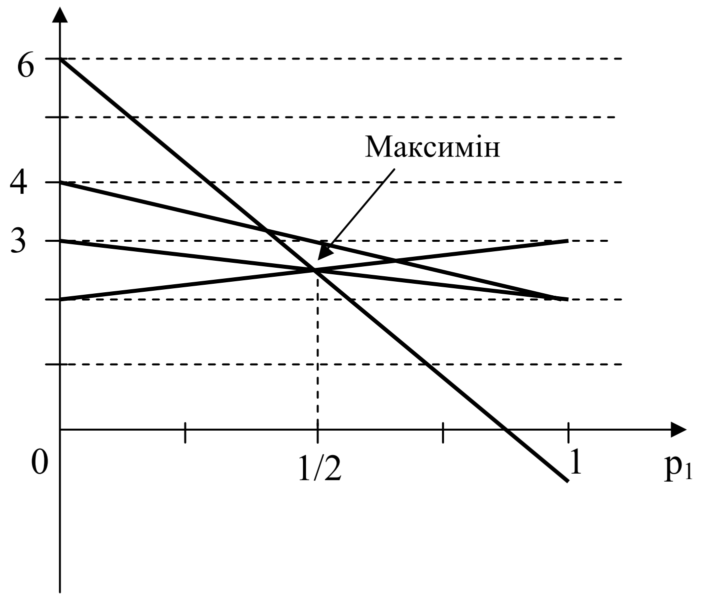

Рис. 8.1 – Визначення точки максиміна

Оптимальним рішенням для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з ймовірностями 0,5 і 0,5. Оптимальна змішана стратегія гравця В визначається двома стратегіями, що визначають нижню огинаючу графіка, тобто стратегіями B_3 і B_4. Виходячи з цього, запишемо очікувані платежі гравця В, відповідні чистим стратегіям гравця А:

Чисті стратегії гравця А	Очікувані платежі гравця В
1	$4q_3-1$
2	$-4q_3+6$

Відповідно до двох стратегій гравця А побудуємо прямі лінії (рис. 8.2).

Мінімакс для гравця В визначаємо як найменший програш верхньої огинаючої, якому відповідає точка перетину прямих. Знайдемо імовірність q_3:

$$4q_3-1=-4q_3+6; \quad q_3=7/8.$$

Визначимо ціну гри:

$$v = \begin{cases} 4*\dfrac{7}{8} - 1 = 2{,}5 \\ -4*\dfrac{7}{8} + 6 = 2{,}5 \end{cases}.$$

Таким чином, рішення гри для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з рівними ймовірностями 0,5 і 0,5, а для гравця В - змішування стратегій B_3 і B_4 з ймовірностями 7/8 і 1/8.

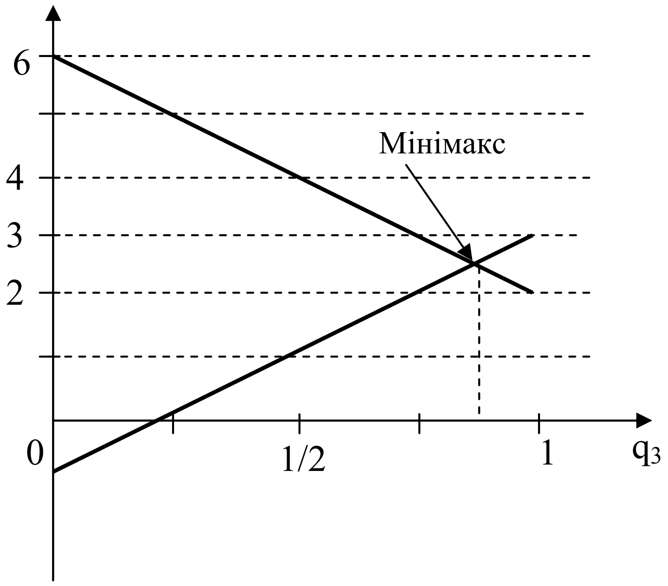

Рис. 8.2 – Визначення точки мінімакса

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Знайти рішення, обумовлене сідловою точкою, що відповідає чистій стратегії, і ціну гри для наступних ігор, в яких платежі задані для гравця А.

а)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

б)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	-4	-5	6
A_2	-3	-4	-9	-2
A_3	6	7	-8	-9
A_4	7	3	-9	5

Задача 8.2. Розв'язати графічно гру, в якій платежі сплачуються гравцеві А.

а)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	3	4	-3	-2
A_2	2	5	1	4	1

б)

	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	1
A_3	3	7
A_4	4	6
A_5	9	2

в)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	3	2	-4	8
A_2	2	1	4	5	3

г)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4
A_1	2	4	0	3	5
A_2	6	3	8	4	2
A_3	1	3	-2	2	4

Тема 9. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ (6 годин)

1. Постановка проблеми багатокритеріальної оптимізації
2. Основні множини ефективних рішень (альтернатив): повна множина альтернатив, множина Парето
3. Підходи до розв’язування задачі багатокритеріальної оптимізації

Джерела: [3] с. 33-46; [7] с. 111-120.

Контрольні запитання

1. Що називають множиною Парето і чому її ще називають множиною компромісу?
2. У чому полягає основна ідея підходу до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації, пов'язаного з ранжируванням скалярних критеріїв? Які достатні умови реалізації цього підходу Ви знаєте?
3. У яких ситуаціях для розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації використовують метод компромісів?
4. Сформулюйте вимоги, яким має задовольняти глобальний скалярний критерій задачі векторної оптимізації, і приведіть їх обґрунтування.
5. Доведіть еквівалентність вимог (1.6), (1.7) і (1.8), що пред'являються до глобального скалярного критерію задачі векторної оптимізації.
6. Викладіть загальну ідею синтезу глобального скалярного критерію для задачі векторної оптимізації.
7. Які можна запропонувати принципи оптимальності для задач багатокритеріальної оптимізації?
8. Які завдання оптимального проектування приводять до використання методу ідеальної точки?

ЗМ. 1 .2. Методи моделювання бізнес-процесів

Тема 10. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МАКРОЕКОНОМІКИ (18 годин)

1. Напрями економіко-математичного моделювання процесів бізнесу
2. Поняття та призначення виробничих функцій
3. Основні форми подання виробничих функцій
4. Моделі споживання

Джерела: [7], с. 118-128; [8], с. 6-16, 72-89, 178-246; [9], с. 9-28, 73-96.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте основні напрями економіко-математичного моделювання бізнес-процесів.

2. Які властивості об'єкту, що вивчається, називають істотними? Як їх визначають?

3. Перелічіть переваги економіко-математичної моделі та назвіть, за якими ознаками їх розрізняють.

4. Поясніть визначення керованих факторів, параметрів, що управляють екзогенних та ендогенних змінних.

5. З якою метою використовують макроекономічні моделі? Які процеси вони моделюють?

6. Наведіть визначення виробничої функції. Поясніть, що являє собою макроекономічна виробнича функція? Наведіть приклади.

7. Які характеристики виробничої одиниці найчастіше розраховують на підставі виробничих функцій?

8. Проаналізуйте, як відрізняються еластичність виробництва та еластичність заміщення факторів.

9. Які форми виробничих функцій використовують найчастіше?

10. Наведіть вираз мультиплікативно-степеневої форми виробничої функції Кобба-Дугласа.

11. Поясніть, як у функції Кобба-Дугласа, що описує обсяг виробництва залежно від чисельності зайнятих, коефіцієнти еластичності характеризують ефект масштабу виробництва.

12. За якими методами визначають параметри виробничих функцій?

13. Наведіть лінійну модель споживання та охарактеризуйте її складові.

Тема 11. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МІКРОЕКОНОМІКИ (16 годин)

1. Особливості моделювання мікроекономічних процесів
2. Основні принципи та етапи моделювання попиту і споживання
3. Функції корисності та споживання
4. Моделювання виробничих можливостей

Джерела: [7], с. 129-138; [8], с. 247-277; [9], с. 151-171.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте області застосування мікроекономічних моделей та їх відмінність від макромоделей.

2. Охарактеризуйте зміст чотирьох етапів моделювання попиту.

3. Яким вимогам мають задавольняти фактори, що вводяться в модель? Який з цих факторів є найбільш істотним?

4. Перелічіть фактори, що роблять найбільший вплив на структуру попиту.

5. Наведіть лінійну модель споживання та охарактеризуйте її складові.

6. Поясніть, що таке функція корисності.

7. Які змістовні висновки можна одержати з аналізу функції корисності?

8. Поясніть, що таке пропозиція виробника та сукупна пропозиція. Яку властивість повинна мати сукупна пропозиція для встановлення економічної рівноваги?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Исследование операций в экономике: Уч. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман./ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Посібник. "Вища школа", Київ, 1988 р.
3. Волков И. К., Загоруйко Е. А. Исследование операций. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000, - 436с.
4. Таха Х. А. Введение в исследование операций. - М.: Изд.дом «Вильямс», 2005.
5. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. - К.: КНЕУ, 2001.
6. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. А., Волощенко А. В. Математическое программирование. - М.:Высш.школа,1980. - 240с.
7. Воронков О. О., Конспект лекцій з курсу «Дослідження операцій» (для студентів галузі знань 0306 - «Менеджмент» напряму 6.030601 - «Менеджмент і адміністрування» заочної форми навчання) / А. Є. Ачкасов, О. О. Воронков; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х. : ХНАМГ, 2012.
8. Власов М. П., Моделирование экономических процессов / М. П. Власов, П. Д. Шимко. – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 409.
9. Математические модели трансормационной экономики: Учебное пособие / Клебанова Т. С., Раевнева Е. В. и др. – Х.: ИДЖ ИНЖЭК, 2006. – 280 с.
10. Цифровий репозиторій ХНАМГ: http://eprints.ksame.kharkov.ua
11. Національна парламентська бібліотека України: http://ukrlibrary.org

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки
до практичних занять і самостійної роботи
з курсу
ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
(для студентів галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» напряму 6.030601 «Менеджмент» заочної форми навчання)

Укладачі: проф. **АЧКАСОВ** Анатолій Єгорович,
ст. викл. **ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *А. Є. Ачкасов*

За редакцією авторів

Комп'ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2012, поз. 591 М

Підп. до друку 02.10.2012 Формат 60х84/16
Друк на різографі. Ум. друк. арк. 2,9
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011р.