МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ,
ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
І ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА.

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

(для студентів 1 курсу заочної форми навчання
напряму підготовки 6.020107 – Туризм)

Харків
ХНАМГ
2012

Методичні вказівки до самостійної роботи, проведення практичних занять і виконання контрольної роботи з навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика. Теорія ймовірностей та математична статистика. Математичне програмування» (для студентів 1-го курсу заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.020107 – Туризм) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: М. І. Самойленко, О. М. Штельма. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 63 с.

Укладачі: М. І.Самойленко, О. М. Штельма

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рецензент: проф. д-р техн. наук, О. В. Грицунов

Рекомендовано кафедрою ПМ і ІТ , протокол № 5 від 28.12.2011 р.

Теорія ймовірностей та математична статистика

Основні поняття теорії ймовірностей

Під *експериментом* (*випробуванням*) розуміють деяку сукупність умов, в яких спостерігається те або інше явище, фіксується той або інший результат.

Подією (або *випадковою подією*) називається усякий факт, який в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Ймовірністю події називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості появи цієї події в результаті нового експерименту.

Ймовірність події A позначається як $P(A)$.

Достовірним називається подія U, яка в результаті експерименту неодмінно відбувається. Для достовірної події $P(U)=1$.

Неможливим називається подія, яка в результаті експерименту не може відбутися. Ймовірність появи неможливої події дорівнює нулю.

Ймовірність власне випадкової події A лежить у межах від нуля до одиниці: $0 < P(A) < 1$.

Повною групою подій називається декілька попарно несумісних подій таких, що в результаті експерименту одне з них неодмінно відбувається.

Декілька подій називаються *несумісними, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному експерименті.*

Декілька подій називаються *рівноможливими*, якщо вони володіють рівним ступенем об'єктивної можливості відбутися в результаті експерименту.

Якщо результати експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, то вони називаються *випадками.*

Випадок називається сприятливим до події A, якщо його поява тягне за собою появу події A.

Класичне означення ймовірності та елементи комбінаторного аналізу

Якщо результати експерименту зводяться до схеми випадків, то ймовірність події А обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

де n – загальне число випадків; m – число випадків, що сприятливі до події A.

Часто для підрахунку величин n і m у формулі (1) використовують формули комбінаторики: для числа сполучень з n елементів по m – формулу $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!n!} = C_n^{n-m}$; для числа розміщень з n елементів по m – формулу $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$; для числа перестановок з m елементів – формулу $P_n = n! = A_n^n$. При цьому $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Виключення: 0! = 1.

Приклад 1. Кидають одночасно дві гральні кістки. Знайти ймовірності подій: *A* – сума очок на обох кістках дорівнює *6*; *B* – добуток очок на обох кістках дорівнює 8; *C* – сума та добуток очок на обох кістках дорівнює 8.

Розв'язання. Загальне число можливих елементарних результатів експерименту $n = 36$, оскільки випадання очок на одній кістці має 6 варіантів, і кожен варіант однієї кістки може поєднуватися з 6 варіантами іншої кістки. Всі результати складають повну групу несумісних рівноможливих подій.

Сприятливими до події *A* є наступні результати кидання кісток: 2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2, тобто m =5. Шукана ймовірність за формулою (1) $P(A) = \frac{5}{36}$.

Сприятливими до події *B* є два результати: $2\times4; 4\times2$, тобто m =2. За формулою (1) $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Сприятливих до події *C* результатів немає, тобто m = 0, і $P(C) = 0$.

Приклад 2. В ящику 100 деталей, з них 10 – браковані. Навмання витягують 4 деталі. Знайти ймовірність події *A* – наявність рівно трьох стандартних деталей серед витягнутих.

Розв'язання. Загальне число можливих виходів експерименту $n = C_{100}^4$. Всі вони утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. Підрахуємо число результатів, що сприяють події *A*. Три стандартні деталі з 90 наявних в ящику можна витягнути C_{90}^3 способами. З кожною вибіркою з трьох стандартних деталей може поєднуватися одна нестандартна деталь з 10, тобто кожне поєднання трьох стандартних деталей з одною бракованою деталлю може здійснюватися C_{10}^1 способами. Кількість сприятливих випадків становить $m = C_{90}^3 C_{10}^1$. Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = 0{,}3$.

Приклад 3. На десяти картках написані цифри 0, 1, … , 9. Три з них вибираються навмання і укладаються на стіл в порядку появи. Знайти ймовірність того, що: *а*) вийде число 245 (подія *A*); *б*) з вибраних цифр можна скласти число 245 (подія *B*).

Розв'язання. Загальне число всіх можливих виходів експерименту – це число розміщень з 10 елементів по 3. Отримані з'єднання елементів (карток) можуть відрізнятися один від одного або самими елементами, або порядком їх входження. Всі результати утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій у кількості $n = A_{10}^3 = 720$. Із загального числа результатів тільки один сприятливий отриманню числа 245, тобто число сприяючих результатів $m = 1$. Тоді шукана ймовірність події *A* за формулою (1) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$.

На відміну від події *A* для події *B* загальне число результатів експерименту обчислюється як число з'єднань з 10 по 3, оскільки порядок вибору елементів не грає ролі.. Шукана ймовірність $P(B) = \frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$.

Приклад 4. З п'яти букв розрізної азбуки складено слово «КНИГА». Дитина, що не уміє читати, розсипала букви, а потім зібрав їх в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у нього знову вийшло слово «КНИГА».

Розв'язання. З п'яти букв дитина може скласти різні буквосполучення, які відрізняються один від одного тільки порядком входження букв. Тому число всіх результатів експерименту обчислимо як число перестановок з 5 елементів: $n = P5 = 5! = 120$. Всі результати утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, з яких тільки одна сприяє появі події A – відновленню слова «КНИГА». Отже, шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

Приклад 5. З шести букв розрізної азбуки складено слово «*АНАНАС*». Знайти, як і в попередньому завданні, ймовірність відновлення слова.

Розв'язання. Загальне число можливих результатів експерименту $n = P_6 = 6! = 720$. Число сприятливих результатів m більше, ніж в попередньому завданні. Слід врахувати, що перестановка місцями двох букв *Н*, значення слова не змінює. Відповідне число перестановок визначається як $P_2 = 2! = 2$. Але з кожною перестановкою букв *Н* може поєднуватися перестановка з трьох букв *А*. Загальне число перестановок цих трьох букв визначається як $P_3 = 3! = 6$. Таким чином, число сприяючих результатів $m = P_2 \cdot P_3 = 12$. Шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}$.

Складні події. Основні теореми теорії ймовірності

Сумою двох подій А і *В* називають подію *С*, що полягає в появі хоча би однієї з подій *А* і *В*.

Сумою декількох подій називають подію, що полягає в появі хоча би однієї з цих подій.

Добутком двох подій А і *В* називають подію *D*, що полягає в сумісній появі подій *А* і *В*.

Добутком декількох подій називають подію, що полягає в сумісній появі всіх цих подій.

Теорема про ймовірність суми подій. Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі їх ймовірностей за відрахуванням імовірності добутку цих подій:

$$P(A + B) = H(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (2)$$

У разі *несумісних* подій імовірність їх суми визначається за формулами:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \text{ – для двох подій } A \text{ і } B; \qquad (3)$$

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \text{ – для } n \text{ подій.} \qquad (4)$$

Дві несумісні події А і $\overline{A}$ називаються *протилежними*, якщо вони складають повну групу. Сума ймовірності протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (5)$$

Теорема про ймовірність добутку двох подій. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності одного з них на умовну ймовірність іншої за умови, що перша подія відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \qquad (6)$$

де – $P_{\grave{A}}(\hat{A})$ умовна ймовірність події *В* за умови, що відбулася подія *А*; $P_B(A)$ – умовна ймовірність події *А* за умови, що відбулося події *В*.

У разі *незалежних* подій формула (6) спрощується:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \text{ – для двох подій } A \text{ і } B; \qquad (7)$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \text{ – для } n \text{ подій.} \qquad (8)$$

Приклад 6. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,7; з другої – 0,8. Знайти ймовірність ураження цілі при одному залпі з двох гармат.

Розв'язання. Введемо позначення. Хай *A* – подія, яка полягає у влученні в ціль першою гарматою; *B* – другою. Ці події є сумісними і незалежними. Отже, подія *C* (ураження мішені при залпі) є сумою двох сумісних подій. Ймовірність події *C* можна визначити за формулою (2)

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - PA) \cdot P(B) =$$

$$= 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94 .$$

Цю задачу можна вирішити й іншим способом.

Ціль буде уражена, якщо відбудеться одна з трьох несумісних подій: $A_1 \cdot \overline{A_2}$ – в ціль влучила перша гармата та не влучила друга; $\overline{A_1} \cdot A_2$ – в ціль не влучила перша гармата та влучила друга; $A_1 \cdot A_2$ – в ціль влучили обидві гармати. В цьому випадку, застосовуючи теорему про суму несумісних подій у формі (4), а потім теорему про добуток незалежних подій, отримаємо

$$P(C) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2) + P(A_1 \cdot A_2) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94 .$$

Найпростіший спосіб вирішення цієї задачі полягає в подані ймовірності події *C* через імовірність протилежної події $\overline{C}$ – промах обох гармат:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}94 .$$

Приклад 7. Студент прийшов на іспит, знаючи відповіді на 15 з 20 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент відповість на три екзаменаційних питання.

Розв'язання. Подія *C* (студент знає відповіді на всі три питання) є добутком трьох залежних подій: A_1 (студент знає відповідь на перше питання); A_2 (студент знає відповідь на друге питання за умови, що він відповів на перше) і A_3 (студент знає відповідь на третє питання за умови, що він відповів на перше і друге). Обчислимо ймовірності цих подій: $P(A_1) = \frac{15}{20}$; $P_{A_1}(A_2) = \frac{14}{19}$; $P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) = \frac{13}{18}$.

За теоремою про ймовірність добутку залежних подій

$$P(C) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = 0{,}368 .$$

Приклад 8. З п'яти букв розрізної азбуки складено слово «*КНИГА*». Дитина, що не уміє читати, розсипала букви, а потім зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у нього знову склалося слово «*КНИГА*».

Розв'язання. Ця задача вже розглядалася (див. Приклад 4). Наведемо другий варіант вирішення, використовуючи основні теореми теорії ймовірностей.

Щоб в порядку появи букв склалося слово «*КНИГА*», першою повинна з'явитися буква *К*. Ймовірність такої події становить $P(К)=\frac{1}{5}$, оскільки з п'яти можливих результатів тільки один сприяє появі букви *К*. Припустимо, що ця подія відбулася. Тоді ймовірність того, що з чотирьох букв, що залишилися, наступною з'явиться *Н*, визначається як $P_К(Н)=\frac{1}{4}$. Аналогічно обчислюється ймовірність послідовної появи букв *И*, *Г* і *А*: $P_{К\cdot Н}(И)=\frac{1}{3}$; $P_{К\cdot Н\cdot И}(Г)=\frac{1}{2}$; $P_{К\cdot Н\cdot И\cdot Г}(А)=1$. За теоремою про ймовірність добутку залежних подій знайдемо шукану ймовірність: $P(К\cdot Н\cdot И\cdot Г\cdot А)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{120}$.

Умовна ймовірність та поняття про незалежність подій. Формула повної ймовірності та формула Байєса

Якщо в умовах експерименту подія *A* з'являється спільно з одним з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i $(i\in\{1,2,...,n\})$, то середня ймовірність події *A* визначається за *формулою повної* (середньою) *ймовірності:*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A/H_i), \qquad (9)$$

де $P(H_i)$ – ймовірність гіпотези H_i; $P(A/H_i)$ – умовна ймовірність події *A* при здійсненні гіпотези H_i.

Якщо відома апріорна ймовірність гіпотез $P(H_i)$ і відомо, що подія *A* відбулося, то апостеріорна ймовірність гіпотез обчислюється за *формулою Байєса:*

$$P(H_j/A)=\frac{P(H_j)\cdot P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_j)}, \qquad (10)$$

Приклад 9. На склад надходить продукція з трьох фабрик, при цьому частка продукції першої фабрики становить 20%, другою – 46%, третьою – 34%. Відомо, що середній відсоток нестандартних виробів для першої фабрики становить 3%, другою – 2%, третьою – 1%. Знайти ймовірність того, що: *а*) Навмання узятий виріб виявиться нестандартним; *б*) виріб виготовлений на першій фабриці, якщо він виявився нестандартним; *у*) виріб виготовлений на другій фабриці, якщо він виявився стандартним. *г*) Визначити, на якій фабриці найімовірніше було виготовлено виріб, якщо він виявився стандартним?

Розв'язання

а) Навмання узятий виріб може бути виготовлений або на першій фабриці (гіпотеза H_1), або на другій (гіпотеза H_2), або на третій (гіпотеза H_3). Всі гіпотези несумісні і складають повну групу. Ймовірність кожної гіпотези визначається приведенням процентної частки продукції відповідної фабрики в безрозмірну величину, тобто діленням заданої за умовами частки на 100%. Так, $P(H_1)$= 0,2; $P(H_2)$= 0,46; $P(H_3)$= 0,34. Аналогічно визначається умовна ймовірність події *A* (виріб є нестандартним): $P(A/H_1)$= 0,03; $P(A/H_2)$= 0,02; $P(A/H_3)$= 0,01. Тепер, використовуючи формулу (9), можна отримати шукану повну ймовірність події A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$

$$=0{,}2\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01=0{,}0186.$$

б) Відомо, що подія A вже відбулося. Потрібно визначити апостеріорну ймовірність гіпотези H_1. Шукану ймовірність знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_j)}=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}03}{0{,}0186}\approx 0{,}3226.$$

в) По умові завдання виріб виявився стандартним, тобто в прийнятих нами позначеннях відбулася подія $\overline{A}$. Необхідно знайти апостеріорну ймовірність гіпотези H_2.

За формулою Байєса: $P(H_2/\overline{A})=\dfrac{P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})}$

Події A і $\overline{A}$ є протилежними. З урахуванням (5) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}0186=0{,}9814$. Аналогічного обчислюємо умовну ймовірність події за умови, що здійснилася гіпотеза H_2: $P(\overline{A}/H_2)=1-P(A/H_2)=1-0{,}02=0{,}98$.

Підставляючи знайдену ймовірність у формулу Байєса, отримаємо шукану ймовірність:

$$P(H_2/\overline{A})=\frac{P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}46\cdot 0{,}98}{0{,}9814}\approx 0{,}4593.$$

г) Щоб визначити, на якій фабриці найімовірніше було виготовлено стандартний виріб, необхідно порівняти між собою апостеріорні ймовірності гіпотез: $P(H_1/\overline{A}), P(H_2/\overline{A}), P(H_3/\overline{A})$. Найбільша з цих ймовірностей визначає шукану фабрику. Одна з вказаних ймовірність була тільки що визначена, а саме: $P(H_2/\overline{A})=0{,}4593$. Аналогічно визначимо інші апостеріорні ймовірності гіпотез: $P(H_1/\overline{A})=0{,}1977$, $P(H_3/\overline{A})=0{,}3430$. Найбільша апостеріорна ймовірність відповідає другій гіпотезі. Отже, стандартний виріб найімовірніше був виготовлений на другій фабриці.

Модель повторних випробувань схеми Бернуллі.Теореми Лапласа.

Формула Бернуллі. Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів (байдуже в якій послідовності), визначаться за формулою

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}. \qquad (11)$$

Локальна теорема Лапласа. Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів (байдуже в якій послідовності), може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \ , \qquad (12)$$

де $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса, або щільність стандартного нормального розподілу; $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ – аргумент функції Гауса; $q = (1 - p)$ – ймовірність протилежної події.

У ***Додатку А*** наведена таблиця значень функції $\varphi(x)$ від позитивного аргументу x. Функція Гауса – парна, тому значення функції від негативного аргументу визначається як $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Інтегральна теорема Лапласа. Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться не менше рівно k_1 разів і не більше k_2 разів (байдуже в якій послідовності), може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1) \ , \qquad (13)$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функція Лапласа, або інтегральна функція стандартного нормального розподілу; $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ і $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$ – аргументи інтегральної функції розподілу; $q = (1 - p)$ – ймовірність протилежної події.

У ***Додатку В*** наведена таблиця значень функції $\Phi(x)$ від позитивного аргументу x. Функція Лапласа – непарна, тому значення функції від негативного аргументу визначаються як $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Найімовірніше число настання події. Якщо в кожному з n незалежних випробуваннях подія з'являється з однаковою ймовірністю p, то найімовірніше число настання події k_0 в цих випробуваннях (байдуже в якій послідовності) визначається за допомогою подвійної нерівності:

$$np+p-1\le k_o\le np+p. \qquad (14)$$

Приклад 10. Робиться 5 пострілів у мішень з імовірністю кожного влучення 0,7. Яка ймовірність того, що буде: *а*) точно 3 влучення; *б*) не менше 4 влучень; *в*) не більше 3 влучень.

Розв'язання

а) Проводиться n = 5 незалежних випробувань з постійною ймовірністю (p = 0,7) появи події в кожному з них. Ймовірність того, що буде точно k = 3 влучень, обчислюється за формулою Бернуллі (11):

$$P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}7^3(1-0{,}7)^2=0{,}3087.$$

б) Подію A, яка полягає в тому, що при 5 пострілах буде не менше 4 влучень, можна розглядати як суму двох несумісних подій: B (4 влучення з 5 пострілів) і C (5 влучень з 5 пострілів). Ймовірності двох останніх подій визначаються за формулою Бернуллі:

$$P(B) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}7^4 (1-0{,}7)^1 = 0{,}36015;$$

$$P(C) = P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}7^5 (1-0{,}7)^0 = 0{,}16807.$$

Шукану ймовірність визначимо за теоремою про ймовірність суми двох подій:

$$P(A) = P(B) + P(C) = 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}52822.$$

б) Міркуючи так само, як і в попередній задачі, можна обчислити ймовірність події (не більше трьох влучень з п'яти пострілів) як суму ймовірностей чотирьох несумісних подій: $P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3)$. Проте задача вирішується простіше, якщо врахувати, що події A (не менше чотирьох влучень з п'яти пострілів) і $\overline{A}$ (не більше трьох влучень з п'яти пострілів) є протилежними. Тоді

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}52822 = 0{,}47178.$$

Приклад 11. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі Дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена: *а*) рівно 75 разів; *б*) не менше 75 разів.

Розв'язання

а) За умови задачі проводиться n = 100 незалежних випробувань з однаковою ймовірністю появи події (влучення в мішень) p = 0,8. Ймовірність влучення в мішень рівно 75 разів при 100 пострілах $(P_{100}(75))$ теоретично можна обчислити за формулою Бернуллі. Проте при n > 10 користуватися формулою Бернуллі недоцільно із-за невиправдано великих обчислювальних витрат. Визначимо шукану ймовірність за допомогою локальної теореми Лапласа. Для цього заздалегідь обчислимо вираз:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot (1-0{,}8)} = 4,$$

а потім аргумент функції Гауса:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-100\cdot 0{,}8}{4} = -1{,}25.$$

У ***Додатку А*** знайдемо значення функції $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$. Через парність функції Гауса $\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$. Остаточно, за локальною теоремою Лапласа $\left(P_n(m) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \right)$ знайдемо шукану ймовірність:

$$P_{100}(75m) = \frac{\varphi(-1.25)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}1826}{4} = 0{,}0456.$$

б) Скористаємося інтегральною теоремою Лапласа при $n = 100$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $k_1 = 75$; $k_2 = 100$:

$$P_n(k_1, k_2) = P(75; 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0.8}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0.8}{4}\right) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25).$$

З урахуванням того, що функція Лапласа є непарною функцією, останній вираз слід перетворити:

$$\Phi(5)-\Phi(-1,25)=\Phi(5)+\Phi(1,25) \ ,$$

а потім у ***Додатку В*** знайти відповідні значення функції. В результаті отримаємо:

$$P(75;100)=\Phi(5)-\Phi(-1,25)=0.5-0,3944=0,8944 .$$

Приклад 12. Ймовірність того, що пасажир запізниться на потяг, дорівнює 0,22. Знайти найімовірніше число тих, що запізняться на потяг, якщо загальне число пасажирів становить 855.

Розв'язання. Проводиться n = 855 незалежних випробувань з постійною ймовірністю (p = 0,02) появи події A (запізнення пасажира на потяг) в кожному з них. Найімовірніше число настання події A слід визначається за допомогою подвійної нерівності (14):

$$np+p-1\le k_o\le np+p ;$$

$$855\cdot 0,02+0,02-1\le k_o\le 855\cdot 0,02+0,02 ;$$

$$16,12\le k_o\le 17,12 .$$

Найімовірніше число настання подій – це ціла величина. У діапазоні (14), знаходиться одне ціле число, якщо тільки твір np не є цілим. Тому шукане число $k_o=17$.

Приклад 13. Скільки потрібно узяти деталей, щоб серед них найімовірніше число стандартних деталей дорівнювало 50, якщо ймовірність вибору навмання бракованою деталі становить 0,1?

Розв'язання. Ймовірність того, що деталь є стандартною, визначимо як ймовірність протилежної події: p = 1 – 0,1 = 0,9. Для визначення шуканої величини n (загальна кількість деталей, серед яких найімовірніше знаходяться 50 придатних) скористаємося формулою найімовірнішого числа появ подій (14), підставивши в неї $k_o=50$ і $p=0,9$:

$$n\cdot 0,9+0,9-1\le 50\le n\cdot 0,9+0,9 .$$

Розв'яжемо двосторонню нерівність відносно n:

$$\begin{cases} n\cdot 0,9+0,9-1\le 50 , \\ 50\le n\cdot 0,9+0,9 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\cdot 0,9\le 50,1 , \\ n\cdot 0,9\le 49,1 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\le 55,5 , \\ n\le 54,5 ; \end{cases}$$

$$54,5 \le n \le 55,5 .$$

Шукане рішення є цілою величиною, тому $n=55$.

Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики. Неперервні випадкові величини

Випадковою величиною називають величину, яка в результаті експерименту приймає заздалегідь невідоме значення.

Дискретною випадковою величиною називають випадкову величину, можливі значення якої належать доліченої множини (скінченої або нескінченої).

Неперервною випадковою величиною називають випадкову величину, можливі значення якої належать до Неперервної множини (обмеженої або необмеженої).

Закон розподілу – це вичерпна характеристика випадкової величини, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

Закон розподілу дискретної випадкової величини може бути заданий у вигляді *ряду розподілу* або *інтегральної функції розподілу*.

Ряд розподілу – таблиця, що складається з двох рядків. У першому рядку перераховуються всі можливі значення випадкової величини в порядку їх зростання, а в другій – відповідна ймовірність:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Властивість ряду розподілу для будь-якої дискретної випадкової величини:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (15)$$

Інтегральна функція розподілу випадкової величини *X* – це така функція *F(x)*, яка при кожному значенні свого аргументу *x* чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина *X* опиниться менше значення аргументу *x:*

$$F(x) = P\{X < x\}. \qquad (16)$$

Аналітичний запис інтегральної функції розподілу *F(x)* має вигляд:

Закон розподілу Неперервної випадкової величини може бути заданий *інтегральній функції розподілу* (16) або *щільністю розподілу*.

Щільність розподілу ймовірності є першою похідною від інтегральною функції розподілу:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}. \qquad (17)$$

Властивості щільності розподілу:

$$f(x) \ge 0\,; \qquad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (19)$$

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ може бути виражена через щільність розподілу (зворотне перетворення):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (20)$$

Властивості інтегральної функції розподілу:

$$F(-\infty)=0\,; \tag{21}$$

$$F(\infty)=1\,; \tag{22}$$

$$\text{якщо} \quad x_2 > x_1, \quad \text{то} \quad F(x_2) \geq F(x_1)\,. \tag{23}$$

Ймовірність влучення неперервної випадкової величини на задану ділянку $[\alpha, \beta)$:

$$P\{\alpha \leq X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,. \tag{24}$$

Основні числові характеристики:

математичне сподівання дискретної випадкової величини:

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,; \tag{25}$$

математичне сподівання Неперервної випадкової величини:

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx\,; \tag{26}$$

дисперсія дискретної випадкової величини:

$$D_x = D[X] = \sum (x_i - m_{x[})^2\, p_i\,; \tag{27}$$

дисперсія Неперервної випадкової величини:

$$D_x = D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_{[})^2\, p_i\,; \tag{28}$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}\,; \tag{29}$$

другий початковий момент дискретної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\,; \tag{30}$$

другий початковий момент Неперервної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx\,. \tag{31}$$

Формула зв'язку дисперсії з другим початковим моментом і математичним очікуванням:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2\,. \tag{32}$$

Приклад 13. Схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,8. Розглядається випадкова величина X – число насінин, що зійшли, серед п'яти посіяних. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу. Побудувати графік інтегральної функції розподілу $F(x)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення σ_x випадкової величини *X*. Знайти також імовірність влучення випадкової величини *X* в інтервал значень (-5; 3,5).

Розв'язання. Випадкова величина *X* в умовах цієї задачі може приймати одне з числових значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Для побудови ряду розподілу залишається визначити тільки відповідні ймовірності. У різних задачах ця ймовірності визначаються за різними методиками, розглянутими в попередніх розділах курсу. В умовах даної задачі найбільш доцільним способом визначення шуканих ймовірностей є формула Бернуллі (11), в якій n = 5; p = 0,8. Підставляючи замість k послідовно всі можливі значення випадкової величини, отримаємо відповідні ймовірності: для $x_1 = 0$ – $p_1 = 0{,}00032$; для $x_2 = 1$ – $p_2 = 0{,}0064$; для $x_3 = 2$ – $p_3 = 0{,}0512$; для $x_4 = 3$ – $p_4 = 0{,}2048$; для $x_5 = 4$ – $p_5 = 0{,}4096$; для $x_6 = 5$ – $p_6 = 0{,}32768$. Шуканий ряд розподілу має вигляд:

xi	0	1	2	3	4	5
pi	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4086	0,32768

Ряд розподілу містить вичерпну інформацію про випадкову величину, тому його можна використовувати для знаходження відповідей на решту питань задачі. Зокрема – для побудови графіка інтегральної функції *F(x)*.

При побудові графіка *F(x)* вісь абсцис розбивається можливими значеннями випадкової величини на $(n+1)$ діапазон: 1-й діапазон – $x^{I} \le 0$; 2-й – $0 < x^{II} \le 1$; 3-й – $1 < x^{III} \le 2$; 4-й – $2 < x^{IV} \le 3$; 5-й – $3 < x^{V} \le 4$; 6-й – $4 < x^{VI} \le 5$; 7-й – $3 < x^{VII}$. У кожному з таких діапазонів функція *F(x)* має постійне значення (рис.1).

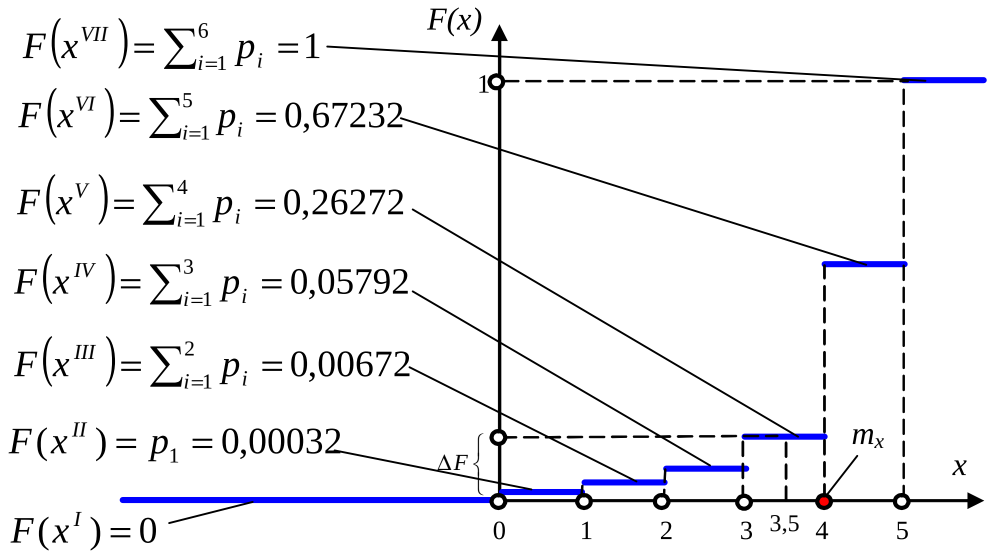

Рис. 1. Графік інтегральної функції розподілу *F(x)*

Математичне сподівання *mx* випадкової величини *X* визначається за формулою (25) при *n* = 6:

$$m_x = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 =$$
$$= 0 \cdot 0{,}00032 + 1 \cdot 0{,}0064 + 2 \cdot 0{,}0512 + 3 \cdot 0{,}2048 +$$
$$+ 4 \cdot 0{,}4096 + 5 \cdot 0{,}32768 = 4\,.$$

Математичне сподівання m_x є числовою характеристикою випадкової величини *X*, лежить в області визначення останньою і зображується крапкою на осі абсцис (див. рис. 1).

Дисперсія D_x випадкової величини X визначається по формулі (27) при $n = 6$:

$$D_x = \sum_{i=1}^{6}(x_i - m_x)^2 p_i = (0-4)^2 0{,}00032 + (1-4)^2 0{,}0064 + (2-4)^2 0{,}0512 +$$
$$+ (3-4)^2 0{,}2048 + (4-4)^2 0{,}4096 + (5-4)^2 0{,}32768 = 0{,}8.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X визначається по формулі (29): $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}8944$.

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал значень від $x1$ = -5 до x_2 = 2,7 можна визначити двома способами:

а) за допомогою графіка інтегральної функції *F(x):*

$P(-5 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(-5) = 0{,}26272 - 0 = 0{,}26272$. На рис. 1 цій ймовірності відповідає відрізок ΔF.

б) за допомогою основних теорем теорії ймовірності як ймовірність складної події:

$$P(-5 < X < 3{,}5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
$$= 0{,}00032 + 0{,}0064 + 0{,}0512 + 0{,}2048 = 0{,}26272 .$$

Приклад 14. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;1]; \\ cx & \text{при} \quad x \in [0;1]. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини c, математичний вираз інтегральної функції розподілу *F(x).* Побудувати графік щільності розподілу *f(x)* і графік інтегральної функції розподілу *F(x).* Визначити математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0; 0,5).

Розв'язання. Постійна величина c визначається за допомогою 2-ої властивості щільності розподілу (19). Обчислюється визначний інтеграл в нескінчених межах від заданої функції щільності розподілу *f(x)* і прирівнюється одиниці. Отримане рівняння вирішується відносно постійної *c*.

Оскільки задана *f(x)* – кусково-неперервна функція, то інтеграл від неї розпадається на три інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} c\,x\,dx \int_0^1 cxdx + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot dx = 0 + \left.\frac{cx^2}{2}\right|_0^1 + 0 = \frac{c}{2}.$$

Прирівнюючи отриманий вираз одиниці, отримуємо рівняння $\frac{c}{2} = 1$, з якого $c = 2$.

З урахуванням знайденої константи щільність розподілу набуде вигляду:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;1]; \\ 2x & \text{при} \quad x \in [0;1]. \end{cases}$$

Математичний вираз інтегральної функції розподілу $F(x)$ знаходиться за допомогою зворотного перетворення (20), при цьому перетворення здійснюється для кожного «відрізку» функції $F(x)$ окремо:

при $x \le 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$;

при $0 < x \le 1 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int\limits_{0}^{x} 2t \cdot dt = 0 + t^2 \Big|_0^x = x^2$;

при $1 < x \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int\limits_{0}^{1} 2t \cdot dt + \int\limits_{1}^{x} 0 \cdot dt = 0 + t^2 \Big|_0^1 + 0 = 1.$

Остаточно отримуємо: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ x^2, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$

Графіки *f(x)* і *F(X)* будуються за методиками, відомими в «Математичному аналізі». В умовах цієї задачі шукані графіки *f(x)* і *F(X)* мають вигляд, показаний відповідно на рис. 2 і рис. 3.

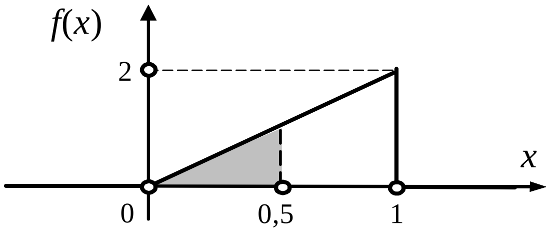

Рис. 2. Графік щільності розподілу *f(x)*

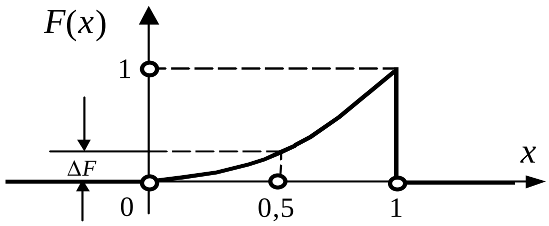

Рис. 3. Графік інтегральної функції розподілу *F(x)*

Математичне сподівання m_x неперервної випадкової величини X визначається за формулою (26). При цьому інтеграл від кусково-неперервної функції *f(x)* в нескінченних межах розпадається на три інтеграли відповідно до числа «кусків» підінтегральної функції:

$$m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} x \cdot 2x\, dx + \int\limits_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 + 0 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію D_x неперервної випадкової величини X доцільно визначати за допомогою формули (32), для чого заздалегідь знаходять другий початковий момент за формулою (31):

$$\alpha_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot 2x\, dx + \int\limits_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{2x^4}{4}\Bigg|_0^1 + 0 = \frac{1}{2};$$

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Середньоквадратичне відхилення випадкової величини X визначається за формулою (29):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\tfrac{1}{18}} = \tfrac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}2357 .$$

Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий інтервал значень від $x_1 = 0$ до $x_2 = 0{,}5$ можна визначити двома способами: *а*) за допомогою інтегральної функції; *б*) за допомогою щільності розподілу.

а) $P(0 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \tfrac{1}{4}$. На рис. 3 цій ймовірності відповідає відрізок вісі ΔF .

б) $P(-5 < X < 3{,}5) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx = x^2\Big|_0^{\frac{2}{2}} = \tfrac{1}{4}$. На рис. 2 цій ймовірності відповідає площа, що виділена сірим фоном.

Приклад 15. Неперервна випадкова величина *X* задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ c(1-\cos x), & \text{якщо} \quad 0 < x \le \pi; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знайти значення константи *c*, математичний вираз щільності розподілу *f(x).* Побудувати графік інтегральної функції розподілу *F(x)* і графік щільності розподілу *f(x).* Визначити математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Постійна величина *c* визначається за допомогою 2-ої властивості інтегральної функції розподілу (22): $F(\infty) = 1$. В умовах задачі рівність (22) еквівалентна рівності $F(\pi) = 1$. Замінюючи в останній рівності $F(\pi)$ відповідним значенням, отримаємо рівняння

$$c(1 - \cos\pi) = 1,$$

з якого $c = 0{,}5$.

Щільність розподілу ймовірності *f(x)* визначається як похідна від *F(x):*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ 0{,}5 \cdot \sin x, & \text{якщо} \quad 0 < x \le \pi; \\ 0, & \text{якщо} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Графіки *f(x)* і *F(X)* будуються за методиками, відомими в «Математичному аналізі». В умовах даної задачі шукані графіки *F(X)* і *f(x)* мають вигляд, показаний відповідно на рис. 4 і рис. 5.

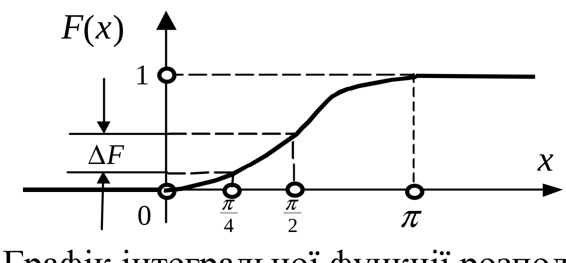

Рис. 4. Графік інтегральної функції розподілу *F(x)*

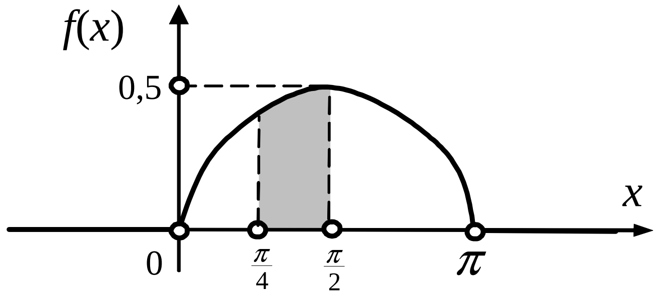

Рис. 5. Графік щільності розподілу *f(x)*

Математичне сподівання m_x випадкової величини X (через симетричність закону розподілу) рівно $0{,}5\pi$. Цього ж значення можна набути за формулою (29). При цьому інтеграл від кусково-неперервної функції *f(x)* в нескінченних межах розпадається на три інтеграли відповідно до числа «кусків» підінтегральної функції:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} x \cdot 0{,}5 \sin x \, dx + \int_{\pi}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} x \cdot 0{,}5 \sin x \, dx .$$

Інтегруючи по частинах (за формулою $\int_0^\pi U dV = UV\Big|_0^\pi - \int_0^\pi V dU$), отримуємо

$$m_x = 0{,}5\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx = -0{,}5x \cos x\Big|_0^\pi - 0{,}5\int_0^\pi (-\cos x)\, dx =$$

$$= -0{,}5 \cos x\Big|_0^\pi + 0{,}5 \sin x\Big|_0^\pi = 0{,}5\pi .$$

Дисперсію D_x випадкової величини X доцільно визначати за допомогою формули (32), для чого спочатку визначають другий початковий момент: $\alpha_2 = 0{,}5\int_0^\pi x^2 \cdot \sin x \, dx$. Інтегруючи двічі по частинах, знаходимо:

$$\alpha_2 = 0{,}5\int_0^\pi x^2 \cdot \sin x \, dx = 0{,}5\left(\pi^2 - 4\right)\cdot$$

Тоді $D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 0{,}5\left(\pi^2 - 4\right) - \left(0{,}5\pi\right)^2 \approx 0{,}4649$.

Середньоквадратичне відхилення випадкової величини X визначається по формулі (30):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}4649} \approx 0{,}6818 .$$

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал значень від $x_1 = \frac{\pi}{4}$ до $x_2 = \frac{\pi}{2}$ можна визначити двома способами: *а*) за допомогою інтегральної функції; *б*) за допомогою щільності розподілу.

а) $P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}3536$. На рис. 4 цій ймовірності відповідає відрізок вісі ΔF.

б) $P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 0{,}5 \sin x \, dx = -0{,}5 \cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0{,}3536$. На рис. 5 цій ймовірності відповідає площа, виділена сірим фоном.

Математичне програмування
Предмет математичного програмування

Загальна постановка оптимізаційної задачі.

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого (максимального) або найменшого (мінімального) значення цільової функції $Y(x_1, x_2, ..., x_n) = Y(\overline{x})$ за умов $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \ \ (i = \overline{1,m})$ де Y і f_i – задані функції, а b_i – дійсні числа

$$Y(\overline{x}) \to \underset{\overline{x} \in \Omega}{opt}$$

$$\Omega : \begin{cases} f_i\left(\overline{x}\right) \le b_i \ , \\ f_i\left(\overline{x}\right) = b_i, \\ f_i\left(\overline{x}\right) \ge b_i \ , \\ \left(i = \overline{1,m}\right) \end{cases}$$

Для побудови математичної моделі задачі необхідно:

- Визначити *невідомі*;
- Скласти *цільову функцію* $Y\left(\overline{x}\right)$;
- Записати *систему обмеженнь* Ω .

Побудуємо математичні моделі задач лінійного й нелінійного програмування .

Задача організації виробництва.

Для виготовлення трьох видів виробів A, B, C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу на фрезерному обладнанні складають для виробу A – 3, B – 6, C – 5 верстато-год відповідно; на токарному обладнанні для виробу A – 2, B – 7, C – 3 верстато-год ; на зварювальному обладнанні для виробу A – 6, B – 5, C – 7 верстато-год ; на шливовальном обладнанні для виробу A – 5, B – 8, C – 6 верстато-год. Загальний фонд робочого часу фрезерного обладнання складе 130 од, токарного, – 220 од, зварювального, – 210 од, шліфувального, – 260 од. Прибуток від реалізації одного виробу A складе 9 грн, B - 12 грн, C - 11 грн.

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний. Всі дані відображені в табл.1.

Таблиця 1

Тип обладнання	Витрати часу на обробку одного виробу, *станко-г*			Загальний фонд робочого часу обладнання, г
	A	B	C	
Фрезерне	3	6	5	130
Токарне	2	7	3	220
Зварювальне	6	5	7	210
Шліфувальне	5	8	6	260
Прибуток, грн.	9	12	11	–

Побудова математичної моделі задачі.

Дана змістовна постановка задача організації виробництва. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі* – x_1, x_2, x_3. Буде виготовлено $\tilde{o}_1$ одиниць виробів виду *A*, x_2 – виду *B* та x_3 – виду *C*.
2. Скласти цільову *функцію* $Y(\bar{x})$. Якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 – виду *B* і x_3 – виду С, то прибуток складе

$$Y(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \to \max_{x \in \Omega}$$

3. Записати систему обмежень **Ω**. Для виробництва такої кількості виробів потрібно буде витратити $3x_1 + 6x_2 + 5x_3$ станко-г. фрезерного обладнання. Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 130, повинна виконуватися нерівність $3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 130$.

Аналогічні міркування щодо можливого використання токарного, зварювального і шліфувального обладнання приведуть до наступних нерівностей: $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 220$;

$$6x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 210;$$

$$5x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 260.$$

При цьому кількість виробів, що виготовляються, не може бути негативною: $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$; $x_3 \ge 0$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд

$$Y(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1(\bar{x}) = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 130 \\ f_2(\bar{x}) = 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 220 \\ f_3(\bar{x}) = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 210 \\ f_4(\bar{x}) = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 260 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача планування випуску продукції.

На швейній фабриці тканина може бути розкроєна чотирма способами A, B, C, D для виготовлення виробів двох видів. У табл. 2. наведені кількості *виробів і–го виду (і =1, 2) і величина відходів при j-му варіанті (j = 1, 2, 3, 4) розкрою 1 м^2. У ній же вказані необхідні кількості кожного виду виробів, які необхідно виготовити фабриці в плановому періоді. Потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано задану кількість виробів кожного виду при мінімальних загальних відходах.*

Таблиця 2

Вид виробу	**Кількість виробів з 1 м^2 тканини**				**Планова кількість виробів (м^2)**
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	3	4	2	380
II	4	3	1	3	210
Величина відходів	0,1	0,3	0,2	0,4	

Побудова математичної моделі задачі.

Дана змістовна постановка задачі планування випуску продукції. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі*. Позначимо через x_j кількість тканини (м^2), яка розкроюється по j–му варіанту $j=\overline{1,4}$.

$$\overline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

2. Скласти цільову *функцію* $Y(\overline{x})$.

$Y(\overline{x})=0,1x_1+0,3x_2+0,2x_3+0,4x_4 \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$.

3. Записати систему обмежень **Ω**. При цьому кількості виробів обох видів повинні відповідати плану:

$$f_1(\overline{x})=x_1+3x_2+4x_3+2x_4=380;$$

$$f_2(\overline{x})=4x_1+3x_2+x_3+3x_4=210.$$

Кількість тканини x_j , що розкроїли кожним способом, є позитивною величиною, тобто

$$x_j \geq 0 \quad j=\overline{1,4}$$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y(\overline{x})=0,1x_1+0,3x_2+0,2x_3+0,4x_4 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} f_1(\overline{x})=x_1+3x_2+4x_3+2x_4=380 \\ f_2(\overline{x})=4x_1+3x_2+x_3+3x_4=210 \\ x_1\geq 0; \quad x_2\geq 0; \quad x_3\geq 0; \quad x_4\geq 0. \end{cases}$$

Лінійне програмування

Математична постановка задачі лінійного програмування

Форми запису задачі лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: знайти оптимум лінійної цільової функції $y(\bar{x})$, якщо обмеження f_i лінійні і змінні $\bar{x}$ позитивні.

Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \qquad (1)$$

$$\Omega : \begin{cases} A_1\bar{x} + \bar{b}_1 \le 0; \\ A_2\bar{x} + \bar{b}_2 = 0; \\ A_3\bar{x} + \bar{b}_3 \ge 0; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \qquad (2)$$

Задачу, подану вище, називають *стандартною* задачею лінійного програмування (ЗЛП).

ЗЛП, в якій обмеження записані у вигляді рівностей і змінні позитивні , називається ЗЛП в ***канонічній*** формі. *Канонічна,* або *основна* задача лінійного програмування має вигляд $y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}$, (3)

$$\Omega : \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \qquad (4)$$

де $\grave{A}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\bar{b}$ – вектор вільних членів обмежень розмірності $m \times 1$.

Перетворення стандартної ЗЛП до канонічної ЗЛП розглянемо на прикладах.

Приклад 1. *Перетворити в канонічну форму наступну задачу лінійного програмування*:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \underset{\tilde{o}_j\in\Omega\subset\mathbf{R}^5}{\min}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 \le 3 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання

1. Обмеження-нерівність типу "$\le$" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад, { $x_1 - x_3 + x_5 \le 3$ } стане { $x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3$ };

2. Обмеження-нерівність типу "$\ge$" перетвориться в обмеження-рівність відніманням з його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад { $x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8$ } стане { $x_1 + x_4 - 5x_5 - x_7 = 8$ }.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min_{\tilde{o}_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_7 = 8 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Приклад 2. *Перетворити в канонічну форму і записати у векторно-матричній формі наступну задачу лінійного програмування*:

$$y(x) = 6x_1 - 4x_2 - 7x_4 + x_5 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5},$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 \leq 8; \\ 9x_1 - x_3 + 2x_5 \leq 5; \\ x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 \geq 3;; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання

1. Нерівності типу "$\leq$" (f_1, f_2) перетворимо в рівність шляхом додавання до їх лівих частин двох додаткових змінних x_6, x_7. Отримаємо $f_1 = 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 + x_6 = 8$; $\Delta_1 < 0$.

2. Нерівність типу "$\geq$" (f_3) перетворимо в рівність шляхом віднімання з його лівої частини додаткової змінної x_8. Отримаємо $f_3 = x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 - x_8 = 3$.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = 6x_1 - 4x_2 - 7x_4 + x_5 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 + x_6 = 8; \\ 9x_1 - x_3 + 2x_5 + x_7 = 5; \\ x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 - x_8 = 3;; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,8} \end{cases}$$

Векторно-матрична форма запису початкової задачі:

$$y(x) = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{x} \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}; \\ \overline{x} \geq 0. \end{cases}$$

Застосування симплекс-методу в економічних задачах

Розглянемо застосування симплекс методу в економічних задачах на конкретних прикладах.

Приклад 3. *Підприємство має наступні виробничі ресурси (сировина, обладнання, електроенергія) і може організувати виробництво продукції двома різними способами. Витрати ресурсів і амортизація обладнання за один місяць і загальний ресурс при кожному способі задані в табл. 2.1 (у грош. од).*

При першому способі виробництва підприємство випускає за один місяць 3 тис. виробів , при другому - 4 *тис. виробів .*

Таблиця 2.1

Виробничий ресурс	*Витрати ресурсів за 1 місяць при роботі*		*Загальний ресурс*
	по 1 способу	*по 2 способу*	
Сировина	*1*	*2*	*4*
Обладнання	*1*	*1*	*3*
Електроенергія	*2*	*1*	*8*

Скільки місяців повинно працювати підприємство кожним з цих способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продукції ?

Розв'язання.

Позначимо:

x_1 - *час роботи* підприємства першим способом;

x_2 - *час роботи* підприємства другим способом.

Математична модель задачі матиме вигляд*:*

$$y\left(\bar{x}\right) = 3x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми *:*

$$y\left(\bar{x}\right) = 3x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Як базис виберемо змінні x_3, x_4, x_5. Далі заповнюємо симплекс-таблицю:

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	1	2	1	0	0	$4/2$
x_4	0	3	1	1	0	1	0	$3/1$
x_5	0	8	2	1	0	0	1	$8/1$
Δ_j		$\Delta_0=0$	-3	-4	0	0	0	

1. Визначаємо початкове опорне рішення. Тобто незалежні змінні дорівнюють 0, а базисні (залежні) змінні дорівнюють правим частинам обмежень задачі. Знаходимо значення цільової функції на даному опорному плані

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i^{баз} \cdot b_i = 0\cdot 4 + 0\cdot 3 + 0\cdot 8 = 0$$

Визначаємо оцінки цільової функції $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_i^{баз} \cdot a_{ij} - C_j$

$\Delta_1 = 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 2 - 3 = -3;\ \Delta_2 = 0\cdot 2 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 - 4 = -4;\ \Delta_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0;$

$\Delta_4 = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 - 0 = 0;\ \ \Delta_5 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0;$

Перше опорне рішення не є оптимальним, оскільки $\Delta_j < 0,\ j = \overline{1,5}$.

Критерій оптимальності: мінімум цільової функції досягнутий, якщо для деякого опорного рішення $\overline{x}_{оп}' = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n+m})$ *всі оцінки* $\Delta_j \le 0 \quad (j = \overline{1, n+m})$, а *максимум* цільової функції досягнутий, якщо для деякого опорного рішення $\overline{x}_{оп}' = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n+m})$ *всі оцінки* $\Delta_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n+m})$.

2. Виберемо *направляючий стовпець*. Оскільки дана задача на максимум, то для поліпшення рішення серед оцінок Δ_j потрібно вибрати найменшу, в даному випадку $\Delta_2 = -4$. Виділяємо направляючий стовпець. У базис необхідно ввести змінну x_2.

3. Знайдемо *направляючий рядок*. Для цього підрахуємо симплекс-відношення $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ir}}$.

Вибираємо другий рядок k=2, оскільки $\theta_k = \min\left\{4/2; 3/1; 8/1\right\} = 2$. Виділяємо направляючий рядок сірим кольором, а змінну x_3 необхідно вивести з базису.

4. Заповнюємо симплекс таблицю 2-го шагу. У стовпець "Базис" замість змінної x_3, яку вивели з базису, вказуємо x_2, яку ввели в базис.

У стовпець $\overline{C}^{баз}$ вносимо зміни – навпроти x_2 записуємо значення коефіцієнта цільової функції $C_2 = 4$.

Далі симплекс-таблицю заповнюємо в наступному порядку:

1. У стовпцях x_2, x_4, x_5, відповідаючи базисним змінним, записуємо

одиничні вектори $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$

2. Всі елементи направляючого рядка (окрім $\overline{C}^{баз}$) ділимо на головний елемент (на 2).

3. Елементи таблиці, що залишилися, перераховуємо за формулою жорданових виключень (за четвертим правилом) $a_{ij}^{ное} = a_{ij} - \frac{a_{ir} \cdot a_{kj}}{a_{kr}}$.

Отримана таблиця має наступний вигляд.

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	4	2	1/2	1	1/2	0	0	4
x_4	0	1	1/2	0	-1/2	1	0	2
x_5	0	6	3/2	0	-1/2	0	1	4
Δ_j		$\Delta_0=8$	-1	0	2	0	0	

1. *Друге опорне рішення* $\overline{x'} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 6)$ не є оптимальним оскільки $\Delta_1 < 0$.

2. Виберемо *направляючий стовпець*. Оскільки серед всіх Δ_j тільки $\Delta_1 < 0$ направляючим стовпцем буде перший стовпець, а змінну x_1 необхідно ввести в базис.

3. Знайдемо *направляючий рядок*. Для цього підрахуємо симплекс-відношення θ_i. Вибираємо другий рядок k=2, оскільки $\theta_k = \min\{4;2;4\} = 2$. Направляючий рядок виділяємо сірим кольором, а змінну x_4 необхідно вивести з базису.

4. Заповнюємо симплекс таблицю 3-го кроку.

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	4	1	0	1	1	-1	0	
x_1	3	2	1	0	-1	2	0	
x_5	0	3	0	0	1	-3	1	
Δ_j		$\Delta_0=10$	0	0	1	2	0	

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то отримане опорне рішення є оптимальним $\overline{x'}* = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3)$, а максимум функції рівний $y(\overline{x}*) = 10$.

Максимальний випуск продукції складе 10 тис. од., при цьому за першим способом підприємство повинне працювати два місяці, за другим - один місяць.

Двоїстість у лінійному програмуванні

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, яку називають ***двоїстою*** по відношенню до даної (початкової) задачі. Початкова і двоїста задачі тісно зв'язані між собою і утворюють *єдину пару* двоїстих задач, причому задача, двоїста по відношенню до двоїстої задачі, збігається з початковою.

Залежно від структури моделі вихідної задачі розрізняють симетричні, несиметричні та змішані двоїсті задачі.

Симетричні двоїсті задачі.

Симетрична пара двоїстих задач.

Початкова задача	**Двоїста задача**
$y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$	$d(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to \min$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j,\ j = \overline{1,n}; \\ z_i \ge 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$

Порівнюючи форми запису прямої та двоїстої задач, можна встановити між ними наступні взаємозв'язки.

- Кожному і-*му* обмеженню вихідної задачі відповідає змінна z_i двоїстої задачі й, навпаки, кожному j-*му* обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна x_j вихідної задачі.
- Вільні члени обмежень однієї із задач є коефіцієнтами при відповідних змінних у цільовій функції іншої задачі. При цьому максимізація міняється на мінімізацію, і навпаки.
- Матриці систем обмежень двоїстої пари задач взаємно транспоновані. Отже, рядок коефіцієнтів a_{ij} в j-*м* обмеженні двоїстої задачі є стовпець коефіцієнтів при x_j в обмеженнях вихідної задачі й навпаки. Знаки нерівностей змінюються на протилежні. Вільними членами обмежень є коефіцієнти при відповідних змінних у цільовій функції задачі.
- Всі змінні двоїстої задачі позитивні.

Несиметричні двоїсті задачі

Несиметрична пара двоїстих задач

Початкова задача	**Двоїста задача**
1. $y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ 2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m};$ 3. $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$	1. $d(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to \min$ 2. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n};$ 3. z_i – *довільні по знаку,* $i = \overline{1,m};$

Взаємозв'язки між прямою та двоїстою задачами такі ж самі, як в парі симетричних задач, але треба врахувати наступні особливості:

- Обмеженнями двоїстої задачі будуть нерівності. У задачах обмеження-нерівності варто записувати зі знаком "≤ " при максимізації та зі знаком "≥ "

при мінімізації.

• Змінні z_i довільні по знаку, тобто можуть набувати як позитивних, так і негативних значень.

Змішані двоїсті задачі

Математична модель вихідної задачі має умови симетричних та несиметричних задач. Якщо необхідно побудувати двоїсту задачу, треба виконувати правила симетричних і несиметричних задач.

Розберемо декілька прикладів побудови двоїстих задач.

Приклад 4. Побудувати двоїсту задачу до заданої:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 7 & z_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 10 & z_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \ x_3 \ge 0 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 7z_1 + 10z_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} z_1 + 2z_2 \ge 2 \\ -2z_1 + 3z_2 \ge -2 \\ z_1 - 2z_2 \ge 1 \\ z_1 \ge, z_2 \ge 0 \end{cases}$$

Дана задача є симетричною.

Приклад 5. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 & z_1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 & z_2 \\ x_j \ge 0, j = 1,4 \end{cases}$$

Розв'язання.

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 9z_1 + 6z_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2z_1 + z_2 \le 3 \\ -2z_1 + z_2 \le 1 \\ 3z_1 - 6z_2 \le 3 \\ -z_1 - z_2 \le 1 \end{cases}$$

$$z_i - \textit{довільні по знаку}, \quad i = \overline{1,2};$$

Дана задача є несиметричною.

Приклад 6. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 & z_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4 & z_2 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8 & z_3 \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0 & \end{cases}$$

Розв'язання.

Перш ніж приступити до побудови двоїстої задачі, необхідно упорядкувати запис початкової задачі. Оскільки цільова функція мінімізується, то нерівності мають бути записані у вигляді "$\ge$". Для цього другу нерівність помножимо на -1, після чого вона запишеться у вигляді

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \ge -4$$

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 6z_1 - 4z_2 + 8z_3 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} z_1 - 2z_2 + z_3 \le 1 \\ -2z_1 - 3z_2 = -2 \\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 \le 1 \\ 3z_1 + z_2 = -1 \\ -2z_1 - z_2 - 4z_3 \le 1 \\ z_2 \ge 0, z_3 \ge 0 \end{cases}$$

Друге і четверте обмеження виражені у вигляді рівностей, оскільки відповідні їм змінні x_2 та x_4 не підпорядковані умовам позитивності. Умови позитивності в двоїстій задачі накладені тільки на змінні z_2 та z_3, оскільки їм відповідають в початковій задачі обмеження у вигляді нерівностей.

Дана задача є змішаною.

Приклад 7. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 & z_1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le 11 & z_2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 9 & z_3 \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 & \end{cases}$$

Розв'язання.

Оскільки початкова задача на максимум, то третю нерівність потрібно привести до вигляду « $\le$», для чого помножимо її на "-1", отримаємо: $-4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \le -9$.

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 , z_3 та записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 12z_1 + 11z_2 - 9z_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3z_1 + 2z_2 - 4z_3 \ge 1; \\ z_1 + 2z_2 - z_3 = 4; \\ 2z_1 - z_2 - 3z_3 \ge 3; \\ z_1 + 2z_2 + z_3 \ge 2; \\ z_2 \ge 0, \quad z_3 \ge 0. \end{cases}$$

Друге обмеження двоїстої задачі записане у вигляді рівності, оскільки відповідна йому змінна x_2 в початковій задачі може бути будь-якою. На змінну z_1 не накладається обмеження позитивності, оскільки відповідно їй перше обмеження в початковій задачі має вид строгої рівності.

Дана задача є змішаною.

Застосування теорії двоїстості в економіці

Приклад 8. *Фірма випускає три види виробів, маючи в своєму розпорядженні сировину чотирьох типів А, Б, В, Г, відповідно, в кількостях 18, 16, 8 і 6 т. Норми витрат кожного типу сировини на 1од. виробу першого виду складають, відповідно, 1, 2, 1, 0, другого виду 2, 1, 1, 1 і третього виду - 1, 1, 0, 1. Прибуток від реалізації 1 од. виробу першого виду 3 грош. од., другого - 4 грош. од., третього - 2 грош. од.*

1. *Скласти план виробництва трьох видів виробів, щоб отримати максимальний прибуток.*
2. *По вихідним даним задачі сформулювати другу економічну задачу (двоїсту до даної).*
3. *Знайти оптимальне рішення двоїстої задачі.*
4. *Визначити дефіцитність сировини.*

Розв'язання.

1. Позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ план виробництва виробів трьох видів. Математична модель задачі матиме вигляд:

2.

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16; \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 + x_3 \le 6; \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічної форми, введемо додаткові змінні x_4, x_5, x_6, x_7.

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 16; \\ x_1 + x_2 + x_6 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_7 = 6; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Розв’язуємо задачу симплекс-методом.

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0	9
x_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0	16
x_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0	8
x_7	0	6	0	1	1	0	0	0	1	6
Δ_j		$\Delta_0=0$	-3	-4	-2	0	0	0	0	

Наступні таблиці будуть мати вигляд:

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2	6
x_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1	5
x_6	0	2	1	0	-1	0	0	1	-1	2
x_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1	
Δ_j		$\Delta_0=24$	-3	0	2	0	0	0	4	

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	4	0	0	2	1	0	-1	-1	
x_5	0	6	0	0	-1	0	1	-2	1	3
x_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1	
x_2	4	6	0	1	1	1	0	0	1	4
Δ_j		$\Delta_0=30$	0	0	-1	0	0	3	4	

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1	
x_3	2	3	0	0	1	0	$1/2$	-1	$1/2$	
x_1	3	5	1	0	0	0	$1/2$	0	$-1/2$	
x_2	4	3	0	1	0	0	$-1/2$	1	$1/2$	
Δ_j		$\Delta_0=33$	0	0	0	0	$1/2$	2	$3/2$	

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то отримане опорне рішення є оптимальним $\overline{x}'* = (5 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, а максимум функції рівний $y(\overline{x}*) = 33$.

Оптимальний план виробництва трьох видів виробів: 5 виробів I виду, 3 – II виду, 3 – III виду, максимальний прибуток складе 33 грош. од.

3. Сформулюємо двоїсту задачу до даної:

$$d(\overline{z}) = 18z_1 + 16z_2 + 8z_3 + 6z_4 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} z_1 + 2z_2 + z_3 \geq 3 \\ 2z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 4 \\ z_1 + z_2 + z_4 \geq 2 \\ z_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}; \end{cases}$$

У двоїстій задачі треба знайти оптимальні ціни z_1, z_2, z_3, z_4 за сировину і мінімізувати загальну вартість всієї сировини $d(\overline{z}) \to \min\limits_{\overline{x}\in\Omega}$.

4. Якщо вихідна задача розв'язана симплекс методом, то рішення двоїстої задачіможе бути знайдено за допомогою формули

$$\overline{z}' = \overline{c}' A^{-1}$$

де $\overline{c}'$ – вектор-рядок коефіцієнтів при базисних змінних цільової функції в оптимальному рішенні початкової задачі ;

A^{-1} – зворотна матриця для матриці A, яка є матрицею коефіцієнтів базисних змінних системи обмежень початкової задачі в оптимальному рішенні.

Базисними змінними в оптимальному рішенні є x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\overline{c}' = [3 \quad 4 \quad 2 \quad 0] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}' = \bar{c}' A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Оптимальне рішення $\bar{z}' = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, а мінімум функції, згідно з теоремою двоїстості $y(x)_{\max} = d(\bar{z})_{\min}$, дорівнює $d(\bar{z}) = 33$.

5. Найбільш дефіцитною є сировина типу В , для якої подвійна оцінка $z_3 = 2$. Менш дефіцитна сировина типу Б , для якої $z_2 = 1/2$. Зовсім недефіцитною є сировина типу А, $z_1 = 0$.

Транспортна задача.
Постановка, методи розв'язання та аналізу

Транспортна задача є однією з найпоширеніших спеціальних задач лінійного програмування. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення надмірно дальніх, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час просування товарів, зменшує витрати підприємств, пов'язані із здійсненням процесів забезпечення сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням і т.д.

В загальному вигляді транспортну задачу можна подати наступним чином: у m пунктах виробництва $A_1, A_2, .., A_m$ роблять деякий однорідний продукт у кількостях, відповідно, $a_1, a_2 .... a_m$. Даний продукт споживають у n пунктах $B_1, ..., B_n$ у кількостях, відповідно, $b_1, b_2 .... b_n$. Припустимо, що з кожного пункту виробництва можливе транспортування продукту в будь-який пункт споживання. Транспортні витрати по перевезенню з пункту A_i у пункт B_j одиниці продукції рівні c_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, при якому запити всіх споживачів цілком задоволені, весь продукт із пунктів виробництва вивезений і сумарні транспортні витрати мінімальні.

У залежності від співвідношення між сумарним обсягом виробництва (запасами вантажу) та сумарним споживанням, транспортні задачі бувають *закриті і відкриті.*

Закрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то транспортна задача зветься закритою.

Відкрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва не дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то транспортна задача зветься відкритою.

Розглянемо ***закриту транспортну задачу.*** Умови транспортної задачі зручно представити у вигляді :

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**					
		B_1	B_2	…	B_j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Для складання математичної моделі задачі введемо змінні $x_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, що позначають кількість вантажу, перевезеного з i-го пункту виробництва в j-й пункт споживання.

Математична модель транспортної задачі матиме вигляд:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min_{x_{ij}\in\Omega} \qquad (5)$$

$$\Omega: \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (\mathrm{i} = 1, 2, ..., \mathrm{m};) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (\mathrm{j} = 1, 2, ..., \mathrm{n};) \\ x_{ij} \geq 0; i = \overline{1,\mathrm{m}},\ j = \overline{1,\mathrm{n}}. \end{cases} \qquad (6)$$

Умови (6) гарантують повний вивіз продукту з усіх пунктів виробництва та повне задоволення попиту у всіх пунктах споживання.

Транспортна задача являє собою задачу лінійного програмування із $(m \times n)$ числом змінних x_{ij}, і $(m+n)$ числом обмежень-рівностей.

Змінні x_{ij} нумеруються за допомогою двох індексів і тому записують у вигляді матриці:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{m1} & x_{m2} & . & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрицю X називають планом перевезень транспортної задачі, а змінні x_{ij} — перевезеннями.

Матриця C = $\| c_{ij} \|$ називається матрицею транспортних витрат. Оптимальним рішенням задачі є матриця

$$X_{opt} = (x_{ij})_{m \times n},$$

яка задовольняє системі обмежень і надає мінімум цільовій функції. Існують ручні і машинні методи рішення транспортної задачі. До ручного відносяться розподільний метод, метод потенціалів. До машинних – угорський метод, метод диференціальних стрічок.

Розв'язання транспортної задачі за допомогою ручних методів складається з наступних етапів:

- визначення початкового опорного рішення задачі;
- перевірка цього рішення на оптимальність;
- перехід від одного опорного рішення до другого.

Розглянемо рішення транспортної задачі на прикладі.

Приклад 9.

Три постачальники A_1, A_2, A_3 мають запаси продукції в кількостях 60, 50, 50 т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3, B_4 повинні отримати цю продукцію в кількостях 40, 40, 30, 50 т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{(грош. од.)}$$

Розв'язання.

Всі результати по знаходженню початкового опорного плану *методом мінімальної вартості* наведені в таблиці. 9.

Таблиця 1

Пункти відправ.	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3	3	2 **30**	2 **30**
A_2	**50**	3	4 **40**	2	4 **10**
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**

Ми одержали перший початковий опорний план.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & 30 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо значення цільової функції:

$$L(X) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 10 = 440.$$

В наступних таблицях наведено рішення задачі методом *потенціалів*.

Таблиця 2

Пункти відправ.	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3	2 **30** **-**	2 **30** **+**	0
A_2	**50**	3	4 **40**	2 +	4 **10** **-**	2
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**	2
β_j		0	2	2	2	

Таблиця 3

Пункти відправ.	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3	2 **20** **-**	2 **40** **+**	0
A_2	**50**	3	4 **40** **-**	2 **10** **+**	4	0
A_3	**50**	2 **40**	4 **+**	3	4 **10** **-**	2
β_j		0	4	2	2	

$$X_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \qquad L(X)=420$$

Таблиця 4

Пункти відправ.	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 **+**	2 **10** **-**	2 **50**	0
A_2	**50**	3	4 **30** **-**	2 **20** **+**	4	0
A_3	**50**	2 **40**	4 **10**	3	4	0
β_j		2	4	2	2	

$$X_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \qquad L(X)=400$$

Таблиця 5

Пункти відправ.	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 **10**	2	2 **50**	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 **40**	4 **10**	3	4	1
β_j		1	3	1	2	

Таким чином, знайдено оптимальний план $X^*=\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Цільова функція набуває оптимального значення $L(X)=390$

Додаток А

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	+ 0,00	+ 0,01	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,05	+ 0,06	+ 0,07	+ 0,08	+ 0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3032	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0774	0,0759	0,0745	0,0731	0,0718	0,0705	0,0692	0,0680	0,0668
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

x	+ 0,00	+ 0,01	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,05	+ 0,06	+ 0,07	+ 0,08	+ 0,09
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток В

Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3061	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,59	0,1879	0,92	0,3211	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4665	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,2086	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4780	2,78	0,4973
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382	1,97	0,4756	2,80	0,4974
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4975

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2640	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,4986
0,36	0,1406	0,79	0,2862	1,22	0,3883	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,4993
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,4997
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,4998
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,4999
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,5
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,5
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,5

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

Варіант 1.

1. З 18 стрільців 5 влучають в мішень з імовірністю 0,8; 7 – з імовірністю 0,5; 6 – з імовірністю 0,6. Навмання вибраний стрілець зробив постріл, але в мішень не влучив. До якої групи найімовірніше належить цей стрілець?

2. У цеху працюють сім чоловіків і три жінки. За табельними номерами навмання відібрано 3 людини. Розглядається випадкова величина X – число чоловіків серед відібраних. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-2;\\ c & \text{при} \quad -2\le x\le 3;\\ 0 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(-1\le X<3)$.

Варіант 2.

1. З автовокзалу відправилися два автобуси в аеропорт. Ймовірність своєчасного прибуття кожного автобуса в аеропорт дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що: *а*) обидва автобуси прибудуть вчасно; *б*) обидва автобуси запізняться; *в*) тільки один автобус прибуде вчасно.

2. Робочий обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години уваги робочого зажадає перший верстат, дорівнює 0,8; другий – 0,6; третій – 0,5. Розглядається випадкова величина X – число верстатів, що зажадали уваги робочого протягом години. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ cx^3 & \text{при} \quad 0\le x\le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність вилучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0\le X<1)$.

Варіант 3.

1. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,05. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб найімовірніше число нестандартних деталей в ній було 63. Знайти ймовірність того, що серед 100 деталей опиниться: *а*) 20 нестандартних; *б*) не більше 20 нестандартних.

2. Три студенти складають іспит. Ймовірність скласти іспит для першого студента дорівнює 0,95; для другого – 0,9; для третього – 0,85. Розглядається випадкова величина X – число студентів, що склали іспит. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1;\\ cx-\frac{1}{2} & \text{при} \quad 1\le x\le 2;\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(-0{,}5\le X<1{,}5)$.

Варіант 4.

1. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Яка ймовірність того, що серед 10 новонароджених будуть: *а*) 4 дівчинки? *б*) не менше 7 хлопчиків?

2. З п'яти карток з буквами З, А, К, О, Н вибирають одну за іншою до першої голосної. Розглядається випадкова величина X – число вийнятих карток. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0{,}5;\\ cx-0{,}5 & \text{при} \quad 0{,}5\le x\le 1{,}5;\\ 1 & \text{при} \quad x>1{,}5.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини

c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини *X* на задану ділянку значень $P(1 \le X < 1{,}5)$.

Варіант 5.

1. Посіяно 28 насінин з ймовірністю схожості кожної 0,8. Знайти найімовірніше число насінин, що зійшли. Визначити ймовірність того, що зійде: *а*) точне 20 насінин; *б*) не менше 20 та не більше 25 насінин.

2. З десяти карток з цифрами 0, 1, ... , 9 вибирають навмання три. Розглядається випадкова величина *X* – число вибраних карток з цифрами менше 5. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина *X* подана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [-1;1]; \\ cx^2 & \text{при} \quad x \in [-1;1]. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини *X* на задану ділянку значень $P(0 \le X < 1)$.

Варіант 6.

1. У ящику знаходяться 12 тенісних м'ячів, серед них 6 нових. Для першої гри навмання беруть 3 м'ячі, після гри їх повертають назад. Знайти ймовірність того, що після другої гри неграних м'ячів не залишиться.

2. В урні – п'ять однакових куль з цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Витягують три кулі. Розглядається випадкова величина *X* – число витягнутих куль з непарними цифрами. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина *X* подана інтегральною функцією розподілу $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ cx & \text{при} \quad 0 \le x \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини *X* на задану ділянку значень $P(0{,}5 \le X < 1)$.

Варіант 7.

1. Верстати *A*, *B*, *З* проводять відповідно 25%, 30%, 40% всіх виробів. При цьому брак на першому верстаті складає 5%, на другому – 4%, на третьому – 2%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний виріб виявиться бракованим? Яка ймовірність того, що виріб виготовлений на верстаті *A*, якщо він виявився дефектним?

2. З п'яти карток з буквами *О, О, К, Р, У, К* вибирають одну за іншою, поки не з'явиться картка з буквою К. Розглядається випадкова величина X – число вийнятих карток. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ cx^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 2; \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0 \le X < 1)$.

Варіант 8.

1. У магазин поступила партія взуття одного фасону та розміру, але різного кольору. Партія складається з 40 пар взуття чорного кольору; 26 – коричневого; 22 – червоного; 12 – жовтого. Яка ймовірність того, що навмання узята коробка опиниться з взуттям червоного або жовтого кольору?

2. Є п'ять квитків вартістю 1 гривна, 3 квитки вартістю 3 гривни і 2 квитки вартістю 5 гривень. Вибирають навмання два квитки. Розглядається випадкова величина X – сумарна вартість вийнятих квитків. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ cx & \text{при} \quad 0 \le x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0 \le X < 1)$.

Варіант 9.

1. Стрілець зробив 30 пострілів з ймовірністю влучення при кожному 0,3. Знайти найімовірніше число влучень. Визначити ймовірність того, що буде: *а*) 8 влучень; *б*) не менше 10 влучень.

2. При розподілі на роботу випускників інституту з'ясувалося, що кожен четвертий одружений. На підприємство *А* послано трьох випускників. Розглядається випадкова величина X – число одружених випускників, серед посланих на підприємство *А*. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\notin[0;1];\\ c6x(1-x) & \text{при} \quad x\in[0;1].\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0{,}5\le X<1)$.

Варіант 10.

1. Фабрика випускає в середньому 70% продукції 1-го сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 1000 виробів число першосортних становить: *а*) точно 680? *б*) від 680 до 700? Знайти найімовірніше число першосортних деталей в цій партії.

2. Ймовірність хоча би одного влучення в мішень в результаті двох пострілів дорівнює 0,96. Розглядається випадкова величина X – число влучень в результаті трьох пострілів. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ cx & \text{при} \quad 0\le x\le 3;\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0\le X<1)$.

Варіант 11.

1. При реєстрації 420 учасників зборів виявилось, що початковою буквою прізвища у десять учасників була «А», у шістьох – «Е», у дев'яти – «І», у дванадцяти – «О», у п'яти – «У», у трьох – «Ю». У решти учасників прізвище починалося з приголосної букви. Знайти ймовірність того, що прізвище вибраного навмання учасника зборів починається з голосної букви.

2. Робочий обслуговує 3 верстати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат зажадає уваги робочого, дорівнює 0,9; другий – 0,8; третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом години зажадають уваги: *а*) всі верстати; *б*) два верстати.

3. З першого верстата на збірку поступає 40% всіх деталей, з другого – 30%, з третього – 20%, з четвертого – 10%. Серед деталей з першого верстата – 0,1 бракованих, з другого – 0,2%, з третього – 0,25%, з четвертого – 0,5%. На збірку поступила бракована деталь. Яка ймовірність того, що вона поступила з другого верстата?

Варіант 12.

1. На електростанції працює 15 змінних інженерів, з яких три – жінки. У зміну зайнято три людини. Знайти ймовірність того, що у випадково вибрану зміну працюватимуть не менше двох чоловіків.

2. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що за зміну не буде випущено жодної бракованої деталі, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що не буде браку протягом: *а*) двох змін; *б*) трьох змін.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<2;\\ cx-1 & \text{при} \quad 2\le x\le 4;\\ 1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(3\le X<4)$.

Варіант 13.

1. Підприємство в середньому випускає 21% продукції вищого сорту та 70% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що випадково узятий виріб виявиться першого або вищого сорту.

2. Три студенти складають іспит. Ймовірність скласти іспит для першого студента становить 0,95; для другого – 0,9; для третього – 0,85. Знайти ймовірність того, що іспит складуть: *а*) два студенти: *б*) всі три студенти.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\notin[0;1];\\ 2cx & \text{при} \quad x\in[0;1].\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0{,}5\le X<1)$.

Варіант 14.

1. Для виробничої практики 30 студентів надано 15 місць в Мінську; 8 – в Гомелі; 7 – у Вітебську. Яка ймовірність того, що два певні студенти потраплять на практику в одне місто?

2. Три студенти складають іспит. Ймовірність скласти іспит для першого студента становить 0,8; для другого – 0,65; для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що іспит здасть: *а*) хоча би один студент; *б*) тільки один студент.

3. Третя частина однієї з трьох партій є другорядною, решта деталей у всіх партіях – першого сорту. Деталь, що узята з однієї партії, виявилася першосортною. Знайти ймовірність того, що деталь була узята з партії, яка має другорядні деталі.

Варіант 15.

1. Для 12 робочих виділені путівки в чотири будинки відпочинку: 3 – в перший; 3 – в другій; 2 – в третій; 4 – в четвертий. Яка ймовірність того, що три певних робочих поїдуть в один будинок відпочинку?

2. Проводиться вибірка трьох карт з преферансової колоди (32 карти).

Розглядається випадкова величина X – число королів у вибірці. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1;\\ cx & \text{при} \quad 1\le x\le 4;\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(1\le X<4)$.

Варіант 16.

1. На 30-и однакових жетонах написані 30 двозначних чисел від 11 до 40. Жетони поміщені в пакет і ретельно перемішані. Яка ймовірність вийняти навмання жетон з номером, кратним 3 або 2?

2. Робочий встановлює в механізм дві однакові деталі, беручи їх випадковим чином з десяти наявних. Серед деталей – дві нестандартні. Механізм не працюватиме, якщо обидві встановлені деталі виявляться нестандартними. Знайти ймовірність того, що механізм працюватиме.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1;\\ cx+\frac{1}{3} & \text{при} \quad -1\le x\le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0\le X<1)$.

Варіант 17.

1. Робочий обслуговує 3 верстати. Ймовірність того, що протягом години перший верстат зажадає уваги робочого, дорівнює 0,8; другий – 0,6; третій – 0,5. Знайти ймовірність того, що протягом години уваги робочого: *а*) не зажадає жоден верстат; *б*) зажадають два верстати

2. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,1. Знайти найімовірніше число стандартних серед 150 деталей. Визначити ймовірність того, що серед 200 деталей буде: *а*) 30 нестандартних; *б*) не більше ніж 30 нестандартних.

3. Гральна кістка кинута 2 рази. Розглядається випадкова величина X – сума очок, що випала. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

Варіант 18.

1. При штампуванні металевих клем виходять 90% придатних. Знайти найімовірніше число придатних клем з 900 відібраних. Визначити ймовірність того, що серед відібраних виявиться: *а*) 105 бракованих; *б*) не менше 105 та не більше 110 бракованих.

2. Три спортсмени беруть участь у відбіркових змаганнях. Ймовірність зарахування в збірну команду першого спортсмена дорівнює 0,8; другого – 0,7; третього – 0,6. Розглядається випадкова величина X – число спортсменів, що потрапили в збірну. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-2; \\ c(x+2) & \text{при} \quad -2\le x\le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0\le X<1)$.

Варіант 19.

1. Три стрільці стріляють в ціль незалежно один від одного. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця становить 0,6; другого – 0,7; третього – 0,75. Знайти ймовірність, принаймні, одного попадання в ціль, якщо кожен стрілець зробить по одному пострілу?

2. У ящику серед 100 зовні однакових деталей – 80 стандартних. Узято дві деталі. Знайти ймовірність можливих при цьому результатів.

3. Серед деталей, що поступають на збірку, з першого верстата – 0,1% бракованих, з другого – 0,2%, з третього – 0,25%, з четвертого – 0,5%. Продуктивності верстатів співвідносяться як 4 : 3 : 2 : 1 відповідно. Деталь, що поступила на збірку, виявилася стандартною. Знайти ймовірність, що вона виготовлена: *а*) на першому верстаті; *б*) на четвертому верстаті.

Варіант 20.

1. У грошово-речової лотереї на 1000 квитків доводиться 24 грошових і 10 речових виграшів. Купується два квитки. Яка ймовірність виграти: *а*) хоча би по одному квитку; *б*) по першому квитку грошей, а по другому – речей.

2. Троє мисливців одночасно проводять по одному пострілу по вепрові. Ймовірність влучення для першого мисливця становить 0,2; для другого – 0,4; для третього – 0,6. Розглядається випадкова величина X – число влучень. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1;\\ c(x+1) & \text{при} \quad -1\le x\le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0\le X<1)$.

Варіант 21.

1. Прилад складається з трьох вузлів, що працюють незалежно один від одного. Несправність хоча би одного вузла виводить прилад з ладу. Ймовірність безвідмовної роботи протягом доби першого вузла становить 0,9; другого – 0,95; третього – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом доби прилад працюватиме безвідмовно.

2. Ймовірність запізнення пасажира на потяг становить 0,02. Знайти найімовірніше число пасажирів з 85 таких, що запізнилися. Визначити ймовірність того, що число пасажирів, що запізнилися: *а*) буде точно 5; *б*) не перевищить 5.

3. З 16 лотерейних квитків – виграшних 4. Придбано 3 квитки. Розглядається випадкова величина X – число програшних квитків серед придбаних. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу таі у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

Варіант 22.

1. При виготовленні деталі заготівка повинна пройти чотири операції. Знайти ймовірність виготовлення стандартної деталі, якщо ймовірність браку на першій операції дорівнює 0,02; на другій – 0,01; на третій – 0,02; на четвертій – 0,03.

2. Два стрільці роблять по одному пострілу в ціль. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,7; для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що в ціль: а) влучать обидва стрільці; б) влучить лише один.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<4;\\ cx-2 & \text{при} \quad 4\le x\le 6;\\ 1 & \text{при} \quad x>6.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(4\le X<5)$.

Варіант 23.

1. Ймовірність померти на 61-му році життя дорівнює 0,09. Яка ймовірність того, що з трьох чоловік у віці 60 років через рік: *а*) всі три будуть живі? *б*) принаймні, один буде живий?

2. У мішку змішані тенісні м'ячі, серед яких 30% білого і 70% жовтого кольорів. Знайти ймовірність того, що вийняті навмання два м'ячі будуть різного кольору.

3. У приймачі є 14 транзисторів двох типів. З них 6 – першого типу, 8 – другого. Ймовірність виходу з ладу протягом гарантійного терміну транзистора першого типу дорівнює 0,002; другого – 0,004. Приймач виходить з ладу в результаті виходу з ладу будь-якого транзистора. Відомо, що протягом гарантійного терміну приймач вийшов з ладу. Яка ймовірність того, що цьому сприяв вихід з ладу транзистора першого типу?

Варіант 24.

1. Проведено залп по цілі з 2-х гармат. Ймовірність влучення з першої гармати становить 0,85; з другої – 0,91. Знайти ймовірність ураження цілі.

2. Ймовірність влучення в ціль при скидання бомби дорівнює 0,7. Ймовірність того, що бомба не вибухне, дорівнює 0,08. Знайти ймовірність руйнування об'єкту, якщо буде скинута одна бомба.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0; \\ cx & \text{при} \quad 0\le x\le 5; \\ 1 & \text{при} \quad x>5. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(2\le X<4)$.

Варіант 25.

1. Робочий обслуговує 3 верстати. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не зажадає уваги робочого, дорівнює 0,9; другий – 0,8; третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом години уваги робочого зажадають: *а*) всі верстати; *б*) жоден з верстатів.

2. У речової лотереї розігруються дві речі вартістю по 10 гривень і одна вартістю 30 гривень. Суб'єкт A купує одного квитка вартістю 1 гривна. Всього продано 50 квитків. Розглядається випадкова величина X – сума чистого виграшу для суб'єкта A. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1; \\ cx^3 & \text{при} \quad 1\le x\le 2; \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(1\le X<1{,}5)$.

Варіант 26.

1. Робочий обслуговує 4 верстати. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не зажадає уваги робочого, дорівнює 0,7; другий – 0,8; третій – 0,9; четвертий – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом години уваги робочого зажадає, принаймні, один верстат.

2. Професор викликав через старосту на консультацію трьох студентів з семи, що відстають. Староста забув прізвища, що були названі професором, і послав трьох студентів навмання. Розглядається випадкова величина X – число студентів, що були послані старостою та співпадають із запрошеними професором. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-3; \\ cx+\frac{3}{5} & \text{при} \quad -3\le x\le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0\le X<1)$.

Варіант 27.

1. У студентській групі 28 чоловік. Серед них 20 студентів старше 19 років і 8 студентів старше за 22 роки. Яка ймовірність того, що навмання обраний студент з групи виявиться: *а*) старше 19 років або старше за 22 роки; *б*) старше 19 років, але не старше за 22 роки; *в*) старше за 22 роки.

2. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти ймовірність одного влучення при трьох пострілах.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\notin[-2;-1]; \\ c(x+3) & \text{при} \quad x\in[-2;-1].\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(-1{,}5\le X<-1)$.

Варіант 28.

1. Ймовірність ураження цілі при чотирьох пострілах дорівнює 0,9919. Знайти ймовірність ураження цілі при одному пострілі.

2. Ймовірність того, що в бібліотеці необхідна студентові книга вільна, дорівнює 0,3. Розглядається випадкова величина X – число бібліотек, які відвідав студент у пошуках потрібної книги, якщо в місті є чотири бібліотеки. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1;\\ c(x-1) & \text{при} \quad 1\le x\le 5;\\ 1 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(2\le X<4)$.

Варіант 29.

1. Ймовірність того, що перший з чотирьох верстатів протягом години не зажадає уваги робочого, дорівнює 0,7; другий – 0,4; третій – 0,3. Ймовірність того, що протягом години хоча би один верстат зажадає уваги робочого, дорівнює 0,9822. Знайти ймовірність того, що четвертий верстат протягом години не зажадає уваги робочого.

2. Розрив зв'язку відбувся на одній з п'яти ланок телефонного кабелю. Монтер послідовно перевіряє ланки на предмет розриву. Розглядається випадкова величина X – число перевірених ланок до виявлення розриву, якщо ймовірність розриву однакова для всіх ланок. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ cx^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1;\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік *f(x)*. Визначити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(0{,}5\le X<0{,}8)$.

Варіант 30.

1. У студентській групі 10 дружинників: 7 хлопців і 3 дівчини. Знайти ймовірність того, що з трьох дружинників, вибраних навмання, двоє будуть дівчатами та один хлопцем.

2. Є п'ять різних ключів, з яких тільки один підходить до замку. Розглядається випадкова величина X – число спроб відкрити замок. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x і дисперсію D_x.

3. Неперервна випадкова величина X подана інтегральною функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<2;\\ cx^2-\frac{1}{3} & \text{при} \quad 2\le x\le 4;\\ 1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$ Знайти значення постійної величини c і побудувати графік $F(x)$. Визначити щільність розподілу *f(x)* і побудувати її графік. Знайти математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середньоквадратичне відхилення σ_x і ймовірність влучення випадкової величини X на задану ділянку значень $P(2 \le X < 3)$.

Завдання 2

1. За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування.
2. За вихідними даними задачі сформулювати другу економічну задачу (двоїсту до даної).
3. Знайти оптимальне рішення двоїстої задачі.

Варіант 1.

$$y(\overline{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2.

$$y(\overline{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + x_2 \ge -3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 3.

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 4.

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ 3x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 5.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 6.

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 7.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 8

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 9.

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 10.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 11.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}2x_1+x_2\le 3\\ x_1-2x_2\le 4\\ x_1-x_2\le 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 12.

$$y(\overline{x})=x_1+2x_2\to\max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}-2x_1+x_2\le 4\\ -x_1+x_2\le 6\\ x_1+x_2\le 8\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 13.

$$y(\overline{x})=3x_1+2x_2\to\max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}x_1+x_2\le 3\\ x_1-x_2\ge -6\\ 2x_1-x_2\ge -4\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 14.

$$y(\overline{x})=2x_1+2x_2\to\max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}x_1+x_2\le 8\\ 2x_1-x_2\le 6\\ x_1-2x_2\le 4\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 15.

$$y(\overline{x})=2x_1+x_2\to\max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}x_1-x_2\le 8\\ x_1+x_2\le 8\\ 2x_1-3x_2\le 10\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 16.

$$y(\overline{x})=-7x_1+2x_2\to\max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}x_1-x_2\le 6\\ x_1-2x_2\le 4\\ -2x_1+x_2\le 3\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 17.

$$y(\overline{x})=2x_1+3x_2\to\max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 18.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 19.

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 20.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 21.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 22.

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 23.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 - 4x_2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}-x_1+x_2\le 3\\ 5x_1+3x_2\le 27\\ -3x_1-2x_2\le 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 24.

$$y(\bar{x})=x_1+2x_2\to\max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}2x_1-x_2\ge -4\\ -x_1+x_2\le 6\\ x_1+x_2\le 3\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 25.

$$y(\bar{x})=2x_1+3x_2\to\max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}x_1-2x_2\le 4\\ 2x_1-3x_2\le 10\\ 2x_1+x_2\le 3\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 26.

$$y(\bar{x})=2x_1+5x_2\to\max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}-2x_1+x_2\le 3\\ x_1-2x_2\le 5\\ x_1+x_2\le 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 27.

$$y(\bar{x})=-7x_1+2x_2\to\max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}x_1+x_2\ge -1\\ 5x_1+x_2\ge -3\\ -3x_1+x_2\le 3\\ 2x_1+x_2\le 4\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 28.

$$y(\bar{x})=x_1+2x_2\to\max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}x_1-x_2\ge -6\\ 2x_1-x_2\ge -4\\ x_1+x_2\le 8\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Варіант 29.

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 30.

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Завдання 3

Постачальники A_1, A_2, A_3......A_m мають запаси продукції в кількостях $a_1, a_2....a_m$. т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3......B_n повинні отримати цю продукцію в кількостях $b_1, b_2.......b_n$. т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані в таблиці:

Варіант № 1

a_i \ b_j	80	140	110
60	4	3	5
150	10	1	2
80	3	8	6
40	6	4	9

Варіант № 2

a_i \ b_j	70	120	105	125	110
120	14	8	17	5	3
180	21	10	7	11	6
230	3	5	8	4	9

Варіант № 3

a_i \ b_j	80	60	30	90
70	3	7	5	2
45	5	3	4	7
90	2	1	8	5
55	5	7	2	8

Варіант № 4

b_j / a_i	120	150	130
140	5	8	4
110	3	1	8
50	7	3	6
100	4	9	6

Варіант № 5

b_j / a_i	150	130	120
125	6	3	4
115	4	7	2
130	8	5	9
120	3	7	2

Варіант № 6

b_j / a_i	80	70	90	60	70
120	7	4	15	9	14
150	11	2	7	3	10
100	4	5	12	8	17

Варіант № 7

b_j / a_i	112	105	108
107	7	5	4
103	4	9	5
35	8	6	2
80	3	5	1

Варіант № 8

b_j / a_i	110	135	120
120	7	2	4
125	3	8	9
80	1	3	9
40	6	4	2

Варіант № 9

b_j / a_i	140	145	45
70	7	4	1
145	5	9	8
55	3	8	3
60	3	1	4

Варіант № 10

b_j / a_i	120	170	110
90	6	4	2
100	3	5	7
80	1	4	6
130	5	6	8

Варіант № 11

b_j / a_i	16	14	10
17	2	1	3
11	4	2	4
5	1	3	5
7	4	7	1

Варіант № 12

b_j / a_i	10	16	14
8	3	7	3
10	2	1	5
7	2	5	1
15	4	2	7

Варіант № 13

b_j / a_i	300	280	330	290	100
370	21	18	14	3	4
450	7	11	10	5	12
480	4	8	16	9	13

Варіант № 14

b_j / a_i	7	8	15	10
16	2	5	5	4
18	4	7	2	9
6	3	2	1	2

Варіант № 15

b_j / a_i	19	13	18
17	3	1	2
10	4	2	6
12	2	3	4
11	3	7	1

Варіант № 16

b_j / a_i	11	10	19
6	9	5	3
13	4	1	9
12	3	2	1
9	4	5	6

Варіант № 17

b_j / a_i	10	17	18
10	3	5	2
9	2	6	9
14	5	2	8
12	4	1	3

Варіант № 18

b_j / a_i	115	119	111
117	2	1	6
50	1	7	4
110	4	2	8
68	3	1	2

Варіант № 19

b_j / a_i	120	130	140
115	3	2	6
125	8	7	2
50	4	1	7
100	3	5	1

Варіант № 20

b_j / a_i	120	130	140
115	6	7	5
100	3	7	1
125	2	3	4
50	8	2	1

Варіант № 21

b_j / a_i	130	230	190	160	120
260	2	4	11	5	3
300	8	17	13	7	6
270	14	10	5	8	9

Варіант № 22

a_i \ b_j	90	120	110	130	70
175	12	9	7	11	6
165	4	3	12	2	8
180	5	17	9	4	11

Варіант № 23

a_i \ b_j	20	25	35	40
25	12	15	14	10
50	16	20	28	17
45	19	21	16	13

Варіант № 24

a_i \ b_j	120	50	190	110
160	7	8	1	2
140	4	5	9	8
170	9	2	3	6

Варіант № 25

a_i \ b_j	100	90	160	150	80
150	2	10	15	14	4
170	3	7	12	5	8
260	1	18	6	13	16

Варіант № 26

a_i \ b_j	100	110	80	210
120	11	4	15	7
130	9	7	14	5
150	8	3	6	10

Варіант № 27

a_i \ b_j	100	110	120	130
220	11	2	3	9
150	12	4	10	20
90	18	5	1	6

Варіант № 28

a_i \ b_j	45	55	75	85
120	4	5	2	6
60	1	4	8	3
80	5	6	1	9

Варіант № 29

b_j / a_i	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

Варіант № 30

b_j / a_i	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ,
ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
І ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА.
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА.**

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

*(для студентів 1 курсу заочної форми навчання
напряму підготовки 6.020107 – Туризм)*

Укладачі: **Самойленко** Микола Іванович,
Штельма Ольга Миколаївна

Відповідальний за випуск *О. Б. Костенко*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *О. А. Балашова*

План 2012, поз. 439м

Підп. до друку 28.12.2012 Формат 60х84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,7
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.