

## Моделювання процесів знезалізнення на двошарових фільтрах

*Я.А.Тугай, О.О.Садчиков, Київський національний університет будівництва і архітектури*

Найбільш розповсюдженим методом знезалізнення води є фільтрування через зернисте завантаження з природних чи штучних матеріалів в спеціальних технологічних установках, основними конструктивними елементами яких є фільтр.

При знезалізненні води фільтруванням відбуваються хімічні реакції в фільтруючій воді, фізико-хімічні процеси взаємодії на границях двох фаз, фазові перетворення основних компонентів і як наслідок цього – масообмінні процеси між водою яка очищується та матеріалом завантаження.

В загальному випадку основою для визначення втрат напору може бути гідродинамічна модель фільтрації, яка складається із двох рівнянь – рівняння фільтрації і рівняння нерозривності фільтраційного потоку, складених з врахуванням зміни властивостей середовища.

Як відомо, в умовах жорсткого режиму  $\left(\frac{\partial h}{\partial t} = 0\right)$  напірної фільтрації, коли поперечний переріз фільтра по висоті не змінюється ( $S = const$ ) і коефіцієнт фільтрації  $k(x, y, z) = k_0 = const$  в границях кожного горизонтального шару чистого фільтру, одомірне рівняння фільтрації в кожному однорідному шарі завантаження буде:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{1}{k_0} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

де  $h(x)$  - напір в однорідному завантаженні.

Рішення рівняння (1) у випадку однорідного фільтра при  $x = 0, h = h_0$  і  $x = L, h = 0$  буде:

$$h(x) = h_0 - \frac{h_0}{L} x \quad (2)$$

Так як (згідно закону Дарсі)  $V = -k_0 \frac{\partial h}{\partial x}$ , тоді маємо:

$$V = k_0 \frac{h_0}{L} = k_0 i_0 \quad (3)$$

Таким чином, градієнт напору  $i_0$  та швидкість фільтрування  $V$  в випадку чистого фільтру будуть однаковими у всіх точках області фільтрації.

У випадку двошарового фільтру з параметрами верхнього шару  $L_1, k_{0_1}$  та нижнього шару  $L_2, k_{0_2}$  в результаті рішення рівняння (1) з граничними умовами:

при  $x = 0, h = h_0$ ; при  $x = L_1, h_1 = h_2, k_{0_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} = k_{0_2} \frac{\partial h_2}{\partial x}$ ; при  $x = L, h = 0$ . Таким чином

при  $L_1 = L_2$  маємо:

$$h_1(x) = h_0 \left( 1 - \frac{2k_{0_2}}{k_{0_1} + k_{0_2}} \frac{x}{L} \right),$$

$$h_2(x) = 2h_0 \frac{2k_{0_1}}{k_{0_1} + k_{0_2}} \left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

$$V_1 = -k_{0_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{2k_{0_1} k_{0_2}}{k_{0_1} + k_{0_2}} \frac{h_0}{L},$$

$$V_2 = -k_{0_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{2k_{0_1} k_{0_2}}{k_{0_1} + k_{0_2}} \frac{h_0}{L} = V_1,$$

де  $h_1(x)$  і  $h_2(x)$  - напори в шарах двошарового завантаження.

Розглядається наближена модель фільтрації з врахуванням кольатації завантаження фільтра і утворенням осаду на його поверхні і приймаючи при цьому значення коефіцієнтів фільтрації в зазначених зонах для кожного фільтроцикла роботи фільтра. При визначенні розрахункових осереднених коефіцієнтів фільтрації шару зовнішнього шару зовнішнього осаду і закольматованого фільтра повинні бути враховані зазначені технологічні схеми роботи фільтра. Модель фільтрації передбачає розгляд двох можливих технологічних схем (випадків) фільтрування, а саме при сталому вихідному напорі на фільтрі (постійному перепаді напору) і при додержанні сталої (незмінної) швидкості фільтрування, яка дорівнює початковій для чистого фільтра. В першому випадку з часом зменшується витрата рідини (швидкість фільтрування), яка проходить через фільтр  $Q(t)$ . В другому випадку (технологічній схемі), який в основному використовується при роботі очисних фільтрів, з часом за рахунок збільшення гідравлічного опору у фільтрі для додержання  $V = const$  буде зростати робочий напір на фільтрі  $H_0(t)$ . Як відомо, в зазначених випадках режим фільтрування буде лінійним, який відповідає відомому закону Дарсі, і поперечний переріз фільтра по висоті не змінюється ( $F = const$ ), то в умовах жорсткого режиму напірної фільтрації (рідина і пористе середовище нестисливі) одномірне рівняння фільтрації має вигляд (початок координат  $x = 0$  приймається на виході із фільтра і вісь ординат  $x$  направлена вгору):

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = -\frac{1}{k_i} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

де  $i = 1$  при  $L < x < L + l$ ,  $i = 2$ , при  $0 < x < L$ ,  $Q$  – витрата фільтруючої рідини;  $V$  – швидкість фільтрації;  $k_{1,2}$  - відповідно усереднені коефіцієнти фільтрації першого та другого шарів завантаження фільтра;  $h_{1,2}$  - напір фільтраційного потоку в відповідно в шарах завантаження фільтра.

Рівняння розв'язується при наступних умовах:

1) при  $x = L + l$

$$\Delta \frac{\partial l}{\partial t} = C_1 k_1 \frac{\partial h_1(L+l, t)}{\partial x}, \quad h_1(L+l, t) = H_1 + L = const;$$

2) при  $x = L$   $h_1(L, t) = h_2(L, t)$ ,  $k_1 \frac{\partial h_1(L, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial h_2(L, t)}{\partial x}$ ;

3) при  $x = 0$   $h_2(0, t) = H_b = const$ . Тут  $H_1$  – висота стовпа рідини над верхом фільтра,  $C_1$  – об'ємна середня концентрація завислих частинок в рідині, яка

утворює відкладення зовнішнього осаду  $\Delta_1 = 1 - n_1$ ,  $n_1$  - осереднена пористість зовнішнього осаду.

Значимо, що в першому випадку при роботі фільтра з постійним напором  $H_0 = H_1 + L - H_b = const$  і при швидкості фільтрування  $V(t)$ , яка з часом зменшується, на рухомій границі осаду  $z = L + l(t)$ , тобто:

$$V = \frac{Q}{F} = k_1 \frac{\partial h(L+l, t)}{\partial x} \quad (5)$$

В результаті рішення задачі одержимо для визначення напорів:

$$h_1(x) = \frac{H_1 + L - H_b}{\sigma L + l} x + H_b, \quad h_2(x) = \sigma \frac{H_1 + L - H_b}{\sigma L + l} x + H_b; \quad (6)$$

Для визначення рухомої границі маємо:

$$l(t) = \sqrt{\frac{2C_1 k_1}{\Delta_1} (H_1 + L - H_b) t + (\sigma L)^2} - \sigma L; \quad (7)$$

Для визначення змінних з часом швидкості фільтрації  $V(t)$  і витрати  $Q(t)$  маємо:

$$V(t) = k_1 \frac{H_1 + L - H_b}{\sigma L + l(t)}, \quad (8)$$

$$Q(t) = F \cdot V(t) = F k_1 \frac{H_1 + L - H_b}{\sigma L + l(t)}. \quad (9)$$

У другому випадку (фільтрування при постійній швидкості  $V = V_0 = const$ ) одержуємо:

$$h_1(x) = \frac{V_0}{k_1} (x + \sigma L - L) + H_b, \quad h_2(x) = \frac{V_0}{k_2} x + H_b.$$

Рівняння для рухомої границі має вигляд:

$$l(t) = \frac{C_1 V_0}{\Delta_1} t \quad (10)$$

В запропонованих методах фільтраційного розрахунку перебачається врахування осереднених значень коефіцієнтів фільтрації за період (тривалість) фільтрування (фільтроцикла) в зонах закольматованих двох шарів фільтру. Відомо, що в результаті кальматції (накопичення завислих речовин) у завантаженні фільтра і ущільненні і додаткового забруднення більш дрібними частками шару зовнішнього осаду з часом відбувається зменшення їх коефіцієнтів фільтрації і пористості.

В результаті проведеного аналізу результатів теоретичних і експериментальних досліджень для визначення осереднених коефіцієнтів фільтрації  $k_1$ ,  $k_2$  пропонуються такі наближені залежності:

- при кольматції фільтру порівняно завислими речовинами з еквівалентним діаметром  $d_{екв}$  коефіцієнт фільтрації завантаження технологічно забрудненого фільтра визначається:

$$k_2 = k_{02} \left( 1 - \frac{b_{02}}{n_{02}} \right)^3 \approx 0,125 k_{02} \quad (11)$$

- в шарі осаду із крупних часток також можливе часткове забруднення дрібними частками, які не проникли у фільтр. В цьому випадку коефіцієнт

фільтрації технологічно забрудненого осівшого осаду може бути розрахований за формулою:

$$\bar{k}_1 = k_{01} \left( 1 - \frac{b_{01}}{n_{01}} \right) \quad (12)$$

Приймаємо  $b_{0i} = 0,5 n_{0i}$ ,  $k_{0i}$  – початкові коефіцієнти фільтрації незабруднених шарів завантаження фільтра.

Для визначення розрахункового коефіцієнту фільтрації шару осаду, який утворюється перед фільтром, пропонується також формула:

$$k_1(t) = k_{01} e^{-3\beta t}, \quad (13)$$

де параметр  $\beta$  на підставі численних досліджень в натуральних умовах рекомендується в межах  $\beta = (1,5-3,0) \cdot 10^{-2} \text{ год}^{-1}$ .

Фільтрація у виробничих процесах в більшості випадків відбувається вертикально. Окрім того, вважається, що лінійний закон фільтрації (Дарсі) в при фільтровій зоні при проходженні деформацій пористого завантаження не порушується. Відповідна гідродинамічна модель:

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \gamma(\bar{b}_0 - \varepsilon\bar{b})\bar{C} - \beta\bar{b}, \quad (14)$$

де  $\bar{C}$  – масова концентрація завислих частинок суспензії;  $\bar{b}$  – осереднена об'ємна концентрація частинок зависі, що сорбовані завантаженням фільтру;  $\bar{b}_0$  – осереднена гранична кількість осаду, що може осісти в одиниці об'єму фільтруючого завантаження;  $\varepsilon$  – емпірична константа, що залежить від поруватості завантаження фільтра;  $\gamma$  – коефіцієнт швидкості кальматації;  $\beta$  – коефіцієнт швидкості зворотної масопередачі.

Фільтрація відбувається в двох зонах: в першому шарі завантаження фільтра та в другому.

В результаті діючих схем і підходів, за основу для подальшого розвитку й вивчення приймаємо фізичну концепцію або схему кольматажу фільтраційним потоком в шарі зернистого завантаження. В нашому випадку приймається, що кольматація відбувається одночасно по всій глибині фільтру:

$$(n_0 - b) \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial t} = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \gamma(b_0 - kb)C - \beta b. \quad (16)$$

Вихідна система рівнянь:

$$n_0 \frac{\partial C_1}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial C_1}{\partial x} - K_3 C_1,$$

$$n_0 \frac{\partial C_3}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial C_3}{\partial x} + K^* C_1 - K_2 C_3,$$

де  $K_2 = \gamma(\sigma_{\max} - \sigma_3) = \text{const}$  і  $K_3 = K_1 + K^*$ .

Початкові та граничні умови:

$$C_1(x,0) = C_1^0, \quad C_1(0,t) = C_{01},$$

$$C_3(x,0) = C_3^0, \quad C_3(0,t) = C_{03}.$$

В результаті використання інтегрального перетворення Лапласа по тимчасовій змінній  $t$ :

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt \quad (17)$$

отримуємо в області зображення Лапласа наступну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} V_0 \frac{d\tilde{C}_1}{dx} + (K_3 + sn_0)\tilde{C}_1 &= n_0 C_1^0, \\ V_0 \frac{d\tilde{C}_3}{dx} + (K_2 + sn_0)\tilde{C}_3 - K^* \tilde{C}_1 &= n_0 C_3^0. \end{aligned} \quad (18)$$

з граничними умовами:

$$\tilde{C}_1(0, s) = \frac{C_{0_1}}{s}, \quad \tilde{C}_3(0, s) = \frac{C_{0_3}}{s}.$$

В результаті використання інтегрального перетворення Лапласа по просторовій змінній  $x$ :

$$\tilde{F}(p) = \int_0^{\infty} F(x) e^{-px} dx \quad (19)$$

отримуємо в області зображення Лапласа  $(p, s)$  наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} (V_0 p + sn + K_3)\tilde{C}_1 &= \frac{n_0 C_1^0}{p} + V_0 \frac{C_{0_1}}{s}, \\ (V_0 p + sn + K_2)\tilde{C}_3 - K^* \tilde{C}_1 &= \frac{n_0 C_3^0}{p} + V_0 \frac{C_{0_3}}{s}. \end{aligned} \quad (20)$$

Її рішення має вид:

$$\tilde{C}_1 = \frac{n_0 C_1^0}{p(V_0 p + sn_0 + K_3)} + \frac{C_{0_1} V_0}{s(V_0 p + sn_0 + K_3)}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_3 &= \frac{n_0 C_1^0 K^*}{p(V_0 p + sn_0 + K_3)(V_0 p + sn_0 + K_2)} + \frac{C_{0_1} V_0 K^*}{s(V_0 p + sn_0 + K_3)(V_0 p + sn_0 + K_2)} + \\ &+ \frac{n_0 C_3^0}{p(V_0 p + sn_0 + K_2)} + V_0 \frac{C_{0_3}}{p(V_0 p + sn_0 + K_2)} \end{aligned} \quad (22)$$

В результаті двократного використання оборотного перетворення Лапласа отримуємо:

$$C_1(x, t) = C_1^0 e^{-\frac{K_3 t}{n_0}} - C_1^0 e^{-\frac{K_3 t}{n_0}} \eta\left(t - \frac{n_0}{V_0} x\right) + C_{0_1} e^{-\frac{K_3 x}{V_0}} \eta\left(t - \frac{n_0}{V_0} x\right), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} C_3(x, t) &= \frac{C_1^0 K^*}{K_2 - K_3} \left( e^{-\frac{K_3 t}{n_0}} - e^{-\frac{K_2 t}{n_0}} \right) \left( 1 - \eta\left(t - \frac{n_0}{V_0} x\right) \right) + C_3^0 e^{-\frac{K_2 t}{V_0}} \left( 1 - \eta\left(t - \frac{n_0}{V_0} x\right) \right) + \\ &+ C_{0_1} K^* e^{-\frac{K_3 x}{V_0}} - e^{-\frac{K_2 x}{V_0}} \eta\left(t - \frac{n_0}{V_0} x\right) + C_{0_3} e^{-\frac{K_2 x}{V_0}} \eta\left(t - \frac{n_0}{V_0} x\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Для випадку  $t > \frac{n_0}{V_0} x$  маємо:

$$C_1(x, t) = C_1^0 e^{-\frac{K_3 x}{V_0}}, \quad (25)$$

$$C_3(x,t) = C_{0_1} K^* \frac{e^{-\frac{K_3}{V_0}x} - e^{-\frac{K_2}{V_0}x}}{K_2 - K_3} + C_{0_3} e^{-\frac{K_2}{V_0}x}. \quad (26)$$

Аналіз показав, що надійність і достовірність розрахунку технологічних і конструктивних параметрів очисних фільтрів в зазначених умовах їх роботи в значній мірі залежить від визначення змінних в часі за рахунок кольматації коефіцієнтів фільтрації шарів завантаження. Тому подальше дослідження по їх визначенню необхідно продовжити.