УДК 624.014

С.Ф.ПІЧУГІН, д-р техн. наук, А.В.МАХІНЬКО
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка

ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ СТАЛЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ДІЄЮ НАВАНТАЖЕННЯ, ПРЕДСТАВЛЕНОГО У ВИГЛЯДІ АБСОЛЮТНИХ МАКСИМУМІВ

Розглянуто основні аспекти розрахунку сталевих елементів конструкцій на надійність при дії випадкових навантажень, представлених у формі абсолютних максимумів випадкового процесу. Наводяться узагальнені результати дослідження для даної імовірнісної моделі.

Модель абсолютних максимумів випадкового процесу. Подання навантажень у вигляді неперервних стаціонарних і квазістаціонарних випадкових процесів (ВП), частотно-часовою характеристикою яких є ефективна частота ω_e, дозволяє вирішувати широке коло задач імовірнісного розрахунку конструкцій. При цьому зазвичай використовується оцінка імовірності перевищення нормованого рівня $\gamma = (x - \overline{X}) / \widehat{X}$ (де x – значення навантаження, $\overline{X}$ і $\widehat{X}$ – відповідно математичне сподівання і стандарт навантаження). Однак використання техніки ВП вимагає повного знання його характеру, включаючи розподіл ординати, частотні характеристики, кореляційні й спектральні функції, похідні високих порядків. Тому цілком виправданим є перехід до більш простих моделей навантажень на базі випадкових величин, доповнених відповідними частотними характеристиками. Такі моделі простіші й доступніші, при вдалому виборі та обґрунтуванні вони забезпечують не менш точні вирішення задач надійності конструкцій [6].

Як показали дослідження, більшість навантажень в окремі досить малі проміжки часу значно підвищують свою інтенсивність, створюючи піки, які й визначають відмову конструкцій. У зв’язку з цим в розрахунку надійності можна врахувати не повний випадковий процес, а тільки його пікові значення. На підставі цього В.В.Болотіним [1] на основі моделі нормального стаціонарного ВП була розроблена модель абсолютних максимумів (АМ). Розподіл АМ визначається хвостовою частиною розподілу викидів ВП, що розташована вище рівня характеристичного максимуму γ_0, для якого кількість викидів ВП за час t дорівнює одиниці, тобто

$$N_+(\gamma_0 \mid 0 \le \tau \le t) = 1 . \quad (1)$$

Ця модель дозволяє замість всього ВП розглядати лише його максимуми, приймаючи їх за випадкові величини, а частотно-часовий характер враховувати значенням характеристичного максимуму.

Імовірність перевищення $Q(\gamma\,|\,t)$ рівня γ за час t визначається за формулою [6]

$$Q(\gamma\,|\,t) = \frac{f(\gamma)}{f(\gamma_0)}, \tag{2}$$

де $f(\bullet)$ – щільність розподілу ординати ВП.

Інтегральна і диференціальна функції розподілу АМ тоді запишуться відповідно у вигляді:

$$F(\gamma\,|\,t) = 1 - Q(\gamma\,|\,t) = 1 - \frac{f(\gamma)}{f(\gamma_0)}, \tag{3}$$

$$p(\gamma\,|\,0 \le \tau \le t) = -\frac{1}{f(\gamma_0)}\frac{d}{d\gamma}f(\gamma). \tag{4}$$

Модель АМ при дії на елемент одного навантаження. Серед усіх навантажень, що діють на промислові будівлі й споруди, найбільш впливові та імовірні – це атмосферні й кранові навантаження. Для створення моделей цих навантажень використовують наступні, найбільш поширені закони розподілу: нормальний закон – для опису навантаження від мостових кранів, розподіл Вейбулла – для опису вітрового навантаження, поліномо-експоненційний розподіл – для опису навантаження від снігу. За моделлю АМ імовірність перевищення $Q(\gamma\,|\,t)$ рівня γ за час t визначається за такими формулами, отриманими на підставі виразу (2) (для $\gamma \ge \gamma_0$) [5]:

а) кранове навантаження:

$$Q(\gamma\,|\,t) = \exp[0{,}5(\gamma_0^2 - \gamma^2)], \tag{5}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{2\ln(\omega_e t / 2\pi)}\,; \tag{6}$$

б) вітрове навантаження:

$$Q(\gamma\,|\,t) = \frac{K_{tr1}(\gamma)}{K_{tr1}(\gamma_0)}\exp\{\Gamma(1+\beta^{-1})^{\beta}\left[(\gamma_0 V + 1)^{\beta} - (\gamma V + 1)^{\beta}\right] +$$
$$+\delta(\gamma_0) - \delta(\gamma)\}, \tag{7}$$

де β – параметр форми розподілу; $\Gamma(1+\beta^{-1})$ – гама-функція; $V = \widehat{X} / \overline{X}$ – коефіцієнт варіації; $K_{tr1}(\bullet)$ – коефіцієнт тренда, що враховує сезонну змінність числових характеристик ВП вітрового навантаження,

$$\delta(\gamma) = -\ln\left(0{,}4\beta\sqrt{V}\Gamma(1+\beta^{-1})^{\beta}\right) - (\beta - 0{,}5)\ln\left(\gamma V + 1\right), \qquad (8)$$

$$\gamma_0 = V^{-1}\{\Gamma(1+\beta^{-1})^{-1}[\ln(\omega_e t K_{tr1}(\gamma_0)) - \delta(\gamma_0)]^{1/\beta} - 1\}; \qquad (9)$$

в) снігове навантаження:

$$Q(\gamma \mid t) = \frac{K_{tr2}(\gamma)}{K_{tr2}(\gamma_0)} \exp\left[C_1(\gamma - \gamma_0) + C_2(\gamma^2 - \gamma_0^2) + C_3(\gamma^3 - \gamma_0^3)\right], \quad (10)$$

де C_0, C_1, C_2 і C_3 – параметри полінома; $K_{tr2}(\bullet)$ – коефіцієнт тренда, що враховує сезонну змінність числових характеристик ВП снігового навантаження; γ_0 – характеристичний максимум, що визначається як розв'язок рівняння:

$$\frac{\omega_e t}{\sqrt{2\pi}} K_{tr2}(\gamma_0) \exp[C_0 + C_1\gamma_0 + C_2\gamma_0^2 + C_3\gamma_0^3] = 1. \qquad (11)$$

Слід зауважити, що питання оцінки надійності конструкцій під дією кранового навантаження, поданого у вигляді АМ, досліджувались в роботі [3].

Модель АМ при дії на елемент декількох навантажень. При дії на елемент більше ніж одного навантаження для отримання оцінки $Q(\gamma \mid t)$ треба вирішувати такі питання [7]:

а) обчислення характеристичних максимумів кожного з навантажень; для стаціонарних ВП з розподілом похідної за нормальним законом характеристичний максимум знаходять як корінь рівняння

$$f(\gamma_0) = \sqrt{2\pi}/(\omega_e t); \qquad (12)$$

б) побудова композиції розподілів поєднуваних навантажень, що розглядалася в роботах [4, 5], де була розроблена чисельно-аналітична процедура на основі формул згортки (деякі формули наводяться в таблиці з літерою „а”);

в) обчислення характеристичного максимуму суми навантажень, який для суми двох вихідних параметрів $\gamma_{0(12)}$ знаходять як корінь рівняння [5]:

$$[f_{12}(\gamma_{0(12)})]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\{[f_1(\gamma_{0(1)})]^{-2} + p^2[f_2(\gamma_{0(2)})]^{-2}\}^{1/2}. \quad (13)$$

Тут $p = \widehat{X}_2 \widehat{X}_1$ – відношення стандартів поєднуваних навантажень.

Характеристичний максимум суми декількох вихідних параметрів знаходять шляхом послідовного використання формули (13) для двох складових;

Щільності розподілів абсолютних максимумів сумарного ВП

Ф-ла	**Нормовані щільності розподілів АМ суми двох ВП з розподілами ординат за законами:**
	нормальним (1) *і поліномо-експоненційним* (2)
14	$p(\gamma \mid t) = -\frac{K_{tr2}(\gamma)}{K_{tr2}(\gamma_0) f_{12}(\gamma_0)} \frac{D_{12}^2 p_{12}^2}{\sqrt{2\pi}} \Big[\int_{Z_1}^{Z_2} (C_1 + 2C_2E + 3C_3E^2) \exp[-0.5Z^2 + C_0 +$ $+ C_1E + C_2E^2 + C_3E^3] dZ + p_{12}^{-1} \exp[-0.5Z_2^2 + C_0 - C_1V_2^{-1} + C_2V_2^{-2} - C_3V_2^{-3}] \Big]$
14а	$f_{12}(\gamma) = \frac{\mathrm{D}_{12}\ p_{12}}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} \exp\left[\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1\ E + \mathrm{C}_2\ E^2 + \mathrm{C}_3\ E^3 - 0.5Z^2\right] dZ$; $E = p_{12}(D_{12}\gamma - Z)$; $Z_1 = -\frac{1}{V_1}$; $Z_2 = D_{12}\gamma + \frac{1}{p_{12}V_2}$
	нормальним (1) *і Вейбулла* (2)
15	$p(\gamma \mid t) = \frac{K_{tr1}(\gamma) D_{12}^2 \beta V_2 \Gamma(1+\beta^{-1})}{K_{tr1}(\gamma_0) f_{12}(\gamma_0) \sqrt{2\pi}} \Big[\int_{Z_1}^{Z_2} Q^{\beta-1} E \exp\left[-0.5E^2 - Q^{\beta}\right] dZ -$ $- p_{12}[(1+Z_2V_2)\Gamma(1+\beta^{-1})]^{\beta-1} \exp\{-0.5V_1^{-2} - [(1+Z_2V_2)\Gamma(1+\beta^{-1})]^{\beta}\} \Big]$
15а	$f_{12}(\gamma) = \frac{D_{12} \beta V_2 \Gamma(1+\beta^{-1})}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} Q^{\beta-1} \exp[-0.5E^2 - Q^{\beta}] dZ$; $Q = (1+ZV_2)\Gamma(1+\beta^{-1})$; $E = D_{12}\gamma - \frac{Z}{p_{12}}$; $Z_1 = -\frac{1}{V_2}$; $Z_2 = p_{12}\left(D_{12}\gamma + \frac{1}{V_1}\right)$
	поліномо-експоненційним (1) і *Вейбулла* (2)
16	$p(\gamma \mid t) = -\frac{K_{tr1}(\gamma) K_{tr2}(\gamma) D_{12}^2 \beta V_2 \Gamma(1+\beta^{-1})}{K_{tr1}(\gamma_0) K_{tr2}(\gamma_0) f_{12}(\gamma_0)} \Big[\int_{Z_1}^{Z_2} Q^{\beta-1} (C_1 + 2C_2E + 3C_3E^2) \times$ $\times \exp[C_0 + C_1E + C_2E^2 + C_3E^3 - Q^{\beta}] dZ + p_{12}[(1+Z_2V_2)\Gamma(1+\beta^{-1})]^{\beta-1} \times$ $\times \exp\{C_0 - C_1V_1^{-1} + C_2V_1^{-2} - C_3V_1^{-3} - [(1+Z_2V_2)\Gamma(1+\beta^{-1})]^{\beta}\} \Big]$
16а	$f_{12}(\gamma) = D_{12} \beta V_2 \Gamma(1+\beta^{-1}) \int_{Z_1}^{Z_2} Q^{\beta-1} \exp[C_0 + C_1E + C_2E^2 + C_3E^3 - Q^{\beta}] dZ$; $Q = (1+ZV_2)\Gamma(1+\beta^{-1})$; $E = D_{12}\gamma - \frac{Z}{p_{12}}$; $Z_1 = -\frac{1}{V_2}$; $Z_2 = p_{12}\left(D_{12}\gamma + \frac{1}{V_1}\right)$

Продовження таблиці

$p_{12}=\dfrac{\widehat{X}_1}{\widehat{X}_2}$;	$V_1=\dfrac{\widehat{X}_1}{\overline{X}_1}$;	$V_2=\dfrac{\widehat{X}_2}{\overline{X}_2}$;	$D_{12}=\sqrt{1+p_{12}^{-2}}$

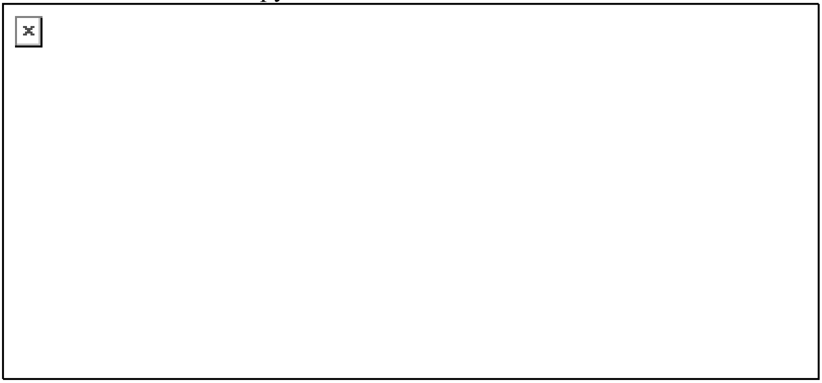
г) побудова щільності розподілу АМ сумарного ВП. Побудову розподілу АМ сумарного ВП в загальному випадку виконують шляхом диференціювання інтегральної функції цього процесу при $\gamma \geq \gamma_0$. Вирази щільностей розподілів АМ суми двох ВП з найбільш поширеними законами розподілу ординати, отримані за допомогою перетворення Лейбніца, наведені у таблиці. Слід зазначити, що ця задача може бути також вирішена шляхом композиції вихідних розподілів АМ, при цьому вона значно спрощується апроксимуванням вихідних розподілів АМ простими аналітичними законами.

Приклад. Розглянемо два випадкові процеси – кранового (режим роботи 4К) і снігового навантаження (І район) при терміні його дії $t=10$ років і відношенні стандартів цих навантажень $p_{12}=0{,}5$. Згідно з [5] ефективні частоти цих процесів відповідно становлять $\omega_{e(1)}=71$ год$^{-1}$ та $\omega_{e(2)}=0{,}141$ доб$^{-1}$, а розподіли ординат підпорядковуються нормальному (рисунок, *а*, поз.1) та поліномо-експоненційному (рисунок, *б*, поз.2) законам.

Характеристичний максимум кожного з навантажень знаходимо за формулою (12): для кранового навантаження він складає $\gamma_{0(1)}=5{,}254$, для снігового – $\gamma_{0(2)}=3{,}526$. Побудову щільностей розподілів АМ заданих навантажень виконуємо на підставі формули (4) (рисунок, *б*, поз.4, 5) при $\gamma \geq \gamma_0$. Сумісну щільність розподілу $f_{12}(\gamma)$ (рисунок, *а*, поз.3) будуємо за допомогою формули (14а), після чого знаходимо характеристичний максимум суми заданих навантажень згідно з виразом (13). У даному випадку він дорівнює $\gamma_{0(12)}=4{,}976$. На останньому етапі за формулою (15) виконуємо побудову щільності розподілу АМ суми вихідних ВП (рисунок, *б*, поз.6). Після чого проводимо оцінку надійності шляхом обчислення площі під кривою 6 (рисунок, *б*), обмеженої ліворуч рівнем $\gamma_{0(12)}$, а праворуч – заданим рівнем надійності γ.

Таким чином, з вищесказаного виходить, що завдання визначення надійності конструкцій має досить просте чисельно-аналітичне вирішення, якщо навантаження подані у формі абсолютних максимумів

ВП, що дає змогу застосовувати цю модель для розв'язання багатьох задач надійності конструкцій.



а *б*

Нормовані щільності розподілів суми двох ВП з розподілами ординат
за нормальним і поліномо-експоненційним законами:
а – щільності розподілу ординат випадкових процесів; *б* – щільності розподілу абсолютних максимумів випадкових процесів при терміні дії навантаження *t*=10 років;
1 – нормальний розподіл; 2 – поліномо-експоненційний розподіл; 3 – композиція розподілів 1 і 2; 4 – розподіл АМ нормального ВП; 5 – розподіл АМ поліномо-експоненційного ВП; 6 – розподіл АМ сумарного випадкового процесу

1.Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. – М.: Стройиздат, 1961. – 202 с.

2.Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1971. – 255 с.

3.Пічугін С.Ф., Северин В.О. Оцінка надійності сталевих елементів під дією кранового навантаження, представленого у вигляді абсолютних максимумів // Современные строительные конструкции из металла и древесины: Сб. науч. тр. – Одесса: ОГАСА, 2001. – С.178-186.

4.Пичугин С. Ф. Вероятностный расчет стальных элементов на совместное действие нагрузок // Изв. вузов. Сер. стр-во. − 1995. − № 5, 6. − С. 23-29.

5.Пичугин С. Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. − К.: КГТУСА, 1994. − 32 с.

6.Пичугин С. Ф. Вероятностное представление нагрузок, действующих на строительные конструкции // Изв. вузов. Сер. строит-во. − 1995. − №4. − С.12-18.

7.Пичугин С.Ф. Оценки надежности стальных элементов, полученные в различной вероятностной технике // Реконструкция и совершенствование несущих элементов зданий и сооружений транспорта. – Новосибирск, 1995. – С. 22-26.

Отримано 17.12.2002