

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

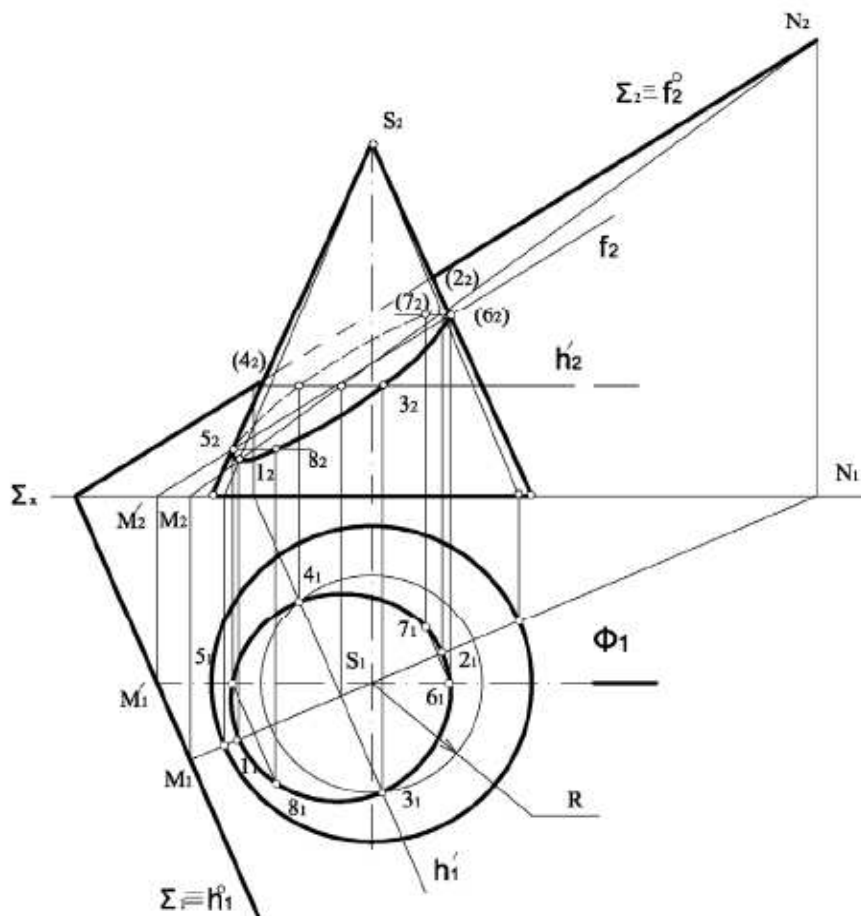
Т. Є. КИРКАЧ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу

**ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА**

*(для студентів I курсу денної та заочної форм навчання  
за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)*



Харків  
ХНАМГ  
2012

**Киркач Т. Є.** Конспект лекцій з курсу «Інженерна графіка» (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво») / Т. Є. Киркач; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. — Х.: ХНАМГ, 2012. — 128 с.

Автор: Т. Є. Киркач

Рецензент: к.т.н., проф. каф. ІКГ В. І. Лусь

Рекомендовано кафедрою інженерної та комп'ютерної графіки,  
протокол № 3 від 26.10.2011 р.

## ЗМІСТ

Умовні позначення .....	5
Вступ.....	6
Лекція 1	
1.	
Метод проєкціювання.....	6
1.1 Центральне проєкціювання .....	7
1.2 Паралельне проєкціювання. Основні властивості.....	7
1.3 Просторова система координат .....	10
1.4 Проєкціювання на дві площини проєкцій.....	12
1.5 Проєкціювання на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій .....	14
Лекція 2	
2.	
Проєкціювання відрізка прямої лінії .....	15
2.1 Розташування відрізка прямої відносно площин проєкцій .....	15
2.2 Правило прямокутного трикутника .....	19
2.3 Взаємне розташування прямих.....	20
2.4 Проєкціювання прямого кута .....	23
2.5 Точка на прямій. Сліди прямої .....	25
Лекція 3	
3.	
Площина.....	26
3.1 Задання площини на комплексному кресленні.....	26
3.2 Положення площини відносно площин проєкцій .....	30
3.3 Належність точки і прямої площині .....	37
3.4 Головні лінії площини.....	39
Лекція 4–5	
4.	
Позиційні задачі .....	43
4.1 Паралельність площин .....	43
4.2 Перетин площин .....	45
4.3 Паралельність прямої і площини .....	48
4.4 Перетин прямої і площини.....	50
4.5 Перпендикулярність прямої і площини.....	54
4.6 Перпендикулярність прямих загального положення .....	56
4.7 Перпендикулярність площин.....	57
Лекція 6–7	

5.		
	Методи перетворення ортогональних проєкцій.....	59
	5.1 Спосіб заміни площин проєкцій.....	59
	5.2 Обертання навколо проєкціовальних осей.....	63
	5.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення .....	64
	5.4 Спосіб обертання навколо прямих рівня.....	65
	5.5 Спосіб обертання навколо сліду площини .....	66
	Лекція 8	
6.		
	Криві лінії.....	69
	6.1 Комплексне креслення кривої лінії .....	70
	6.2 Плоскі криві другого порядку.....	71
	6.3 Апарат аналізу кривої лінії.....	74
	6.4 Визначення довжини відрізка просторової кривої .....	75
	Лекція 9–10	
7.		
	Поверхні .....	76
	7.1 Визначення, утворення, задання.....	76
	7.2 Класифікація поверхонь .....	77
	Лекція 11–12	
8.		
	Гранні поверхні .....	83
	8.1 Переріз гранних поверхонь площиною .....	88
	8.2 Побудування точок перетину лінії з поверхнею .....	91
	8.3 Розгортки гранних поверхонь.....	94
	8.4 Побудування лінії взаємного перетину гранних поверхонь ....	97
	Лекція 13–16	
9.		
	Криві поверхні .....	101
	9.1 Точки і лінії на поверхнях .....	101
	9.2 Переріз кривих поверхонь площиною .....	105
	9.3 Побудова точок перетину лінії з поверхнею .....	110
	9.4 Побудова лінії взаємного перетину кривих поверхонь.....	113
	Список джерел.....	127

### Умовні позначення

A, B, C, D, ... 1, 2, 3, 4, ... – точки;

a, b, c, d ... – прямі та криві лінії;

h – горизонталь;

f – фронталь;

p – профільна пряма;

$\theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Gamma$ ,  $\Phi$  – поверхні (площини);

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ... –кути;

$\Pi_1$  – горизонтальна площина проєкцій;

$\Pi_2$  – фронтальна площина проєкцій;

$\Pi_3$  – профільна площина проєкцій;

$A \in \Phi$  – точка A належить фігурі  $\Phi$ ;

$A \notin$  – точка A не належить фігурі  $\Phi$ ;

$\Phi_k \equiv \Phi_l$  – фігури  $\Phi_k$  та  $\Phi_l$  - збігаються;

$\Phi_k \cup \Phi_l$  – об'єднання фігур  $\Phi_k$  та  $\Phi_l$ ;

$\Phi_k \cap \Phi_l$  – перетин фігур  $\Phi_k$  та  $\Phi_l$ ;

$\supset$  – проходить через ...;

$\subset$  –лежить на ...;

$\Rightarrow$  – логічний наслідок;

$\parallel$  –паралельно;

$\perp$  – перпендикулярно;

$\angle$  – плоский або двогранний кут;

x, y, z – осі проєкцій. Індеси при x, y, z означають відповідно площини проєкцій. Наприклад, вісь  $x_{12}$  означає, що вісь x поділяє поле горизонтальних проєкцій (індекс 1) і поле фронтальних проєкцій (індекс 2). Позначення проєкцій фігур таке саме, як і написання відповідного індексу.

Інженерна діяльність пов'язана з проектуванням, виготовленням та експлуатацією машин, механізмів, різних споруд та інших просторових об'єктів. Тому для успішної практичної діяльності інженер повинен мати розвинену просторову уяву і володіти вмінням та навичками зі створення креслення, яке є основним документом при вирішенні інженерних задач і містить у собі всю необхідну для цього інформацію: зображення об'єкта, його розміри, відомості про матеріал, вимоги до чистоти обробки поверхонь та інше. Очевидно, що вся ця інформація, в тому числі й зображення об'єкта, має наноситись на креслення у відповідності з деякими загальними для цього правилами.

Характерною рисою просторових об'єктів є їх форма. Форма об'єктів може бути найрізноманітнішою: від простої до надзвичайно складної. При цьому об'єкти з складною формою можна розглядати як сукупність об'єктів з більш простою формою, тим чи іншим чином розташованих відносно один одного. Таким чином, форми об'єктів та їх взаємне положення являють собою надзвичайний практичний інтерес і тому потребують вивчення. Наука, яка вивчає ці питання, є розділом математики і називається геометрією. У залежності від аналітичного апарату, який для цього застосовується, геометрія включає в себе ряд самостійних розділів. Наприклад, розділ, який вивчає ці питання за допомогою алгебри, називають аналітичною геометрією, розділ, який вивчає ці питання за допомогою апарату диференційного числення – диференційною геометрією, розділ, який вивчає ці питання за допомогою проєкційного методу – нарисною геометрією тощо. Таким чином, нарисна геометрія – це розділ геометрії, який вивчає форми та взаємовідношення між ними проєкційним методом. Інакше кажучи, нарисна геометрія вивчає правила побудови зображень просторових об'єктів.

## Лекція 1

### 1. МЕТОД ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Для побудови зображення необхідно мати об'єкт (оригінал), картинну площину та алгоритм (правило) побудови зображення. Під об'єктом (оригіналом) розуміють будь-який реальний або уявний об'єкт (виріб, деталь). У процесі побудови зображення становлять інтерес тільки його геометричні властивості, тобто характер і ступінь складності поверхонь, що його обмежують, а також належні цим поверхням окремі лінії та точки. Для зручності цю сукупність геометричних особливостей оригіналу називають геометричним образом.

Геометричний образ може бути досить складним. Тому для зручності вивчення його умовно поділяють на більш прості геометричні образи: точки, лінії, поверхні.

Для побудови зображення об'єкта його геометричний образ необхідно спочатку задати, тобто описати таким чином, щоб можна було побудувати будь-яку його точку, а також зафіксувати його положення в просторі. Це двоєдине завдання вирішується за допомогою визначника геометричного образу. Під визначником розуміють мінімальну сукупність незалежних умов, що однозначно задають геометричний образ.

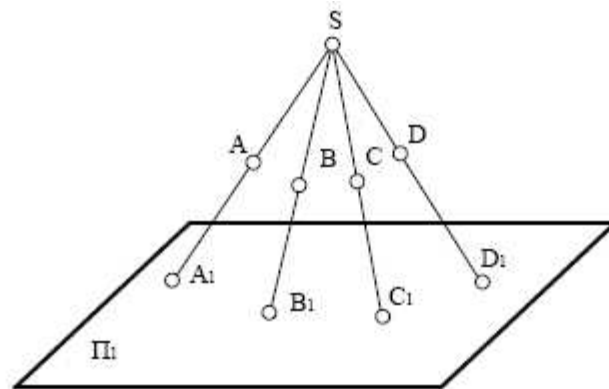
В основі побудовування зображень, які розглядаються в нарисній геометрії

та застосовуються в технічному кресленні, лежить метод проєкціювання.

Апарат проєкціювання включає в себе проєкціювальні промені і площину проєкцій.

### 1.1 Центральне проєкціювання

Якщо всі промені, що проєкціюють об'єкт, виходять із однієї точки, званої центром, таке проєкціювання називається **центральним** (рис. 1.1).



A, B, C, D – об'єкти проєкціювання;

S – центр проєкцій;

$\Pi_1$  – площина проєкцій;

$A_1, B_1, C_1, D_1$  – проєкції точок на площині  $\Pi_1$

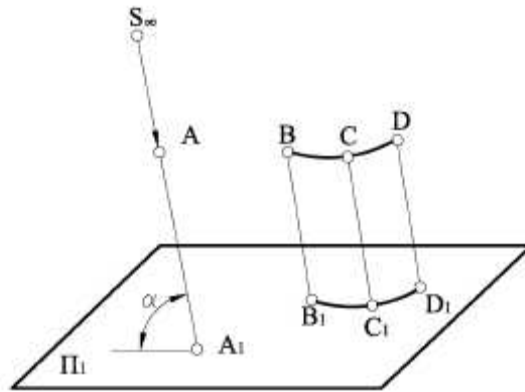
Рис. 1.1

Проекціями заданих точок A, B, C, D є точки перетину проєкціювальних променів, що проходять через відповідні точки, з площиною проєкцій.

Центральне проєкціювання застосовується для наочного зображення предметів, але для технічного креслення не застосовується.

### 1.2 Паралельне проєкціювання. Основні властивості

Якщо центр проєкцій помістити у нескінченність, усі проєкціювальні промені стають паралельними, таке проєкціювання називається **паралельним** (рис. 1.2).



$A, B, C, D$  – об'єкти проєкціювання;  
 $S_{\infty}$  – заданий напрямок проєкціювання;  
 $\Pi_1$  – площина проєкцій;  
 $A_1 B_1 C_1 D_1$  – проєкції точок  $A, B, C, D$ ;

$\alpha$  – кут нахилу проєкційовальних променів відносно площини проєкцій  $\Pi_1$

Рис. 1.2

Розглянемо його основні властивості.

1. Проекцією точки є точка. Ця властивість впливає із самого методу проєкціювання.

2. Проекцією прямої лінії є пряма лінія. Як відомо, через пряму  $a$  можна провести безліч площин. Серед них можна виділити площину  $T$ , паралельну до заданого напрямку проєкціювання  $s$  (рис. 1.3). Але відомо, що дві площини перетинаються по прямій. Тому лінією перетину площин  $\Pi_2$  і  $T$  буде пряма  $a_2$ . А оскільки ця пряма одночасно належить обом згаданим площинам, вона буде проекцією прямої  $a$ . Цю властивість називають властивістю прямолінійності.

3. Проекцією точки, яка належить деякій прямій, є точка, що належить проекції даної прямої. Дійсно, якщо взяти на прямій  $a$  точку  $B$  (рис. 1.3) і через цю точку провести проєкціюючу пряму, – остання буде належати проєкціюючій площині  $T$  і перетинати площину проєкцій  $\Pi_2$  в точці  $B_2$ , яка належить лінії перетину цих площин  $a_2$ . Цю властивість називають властивістю належності.

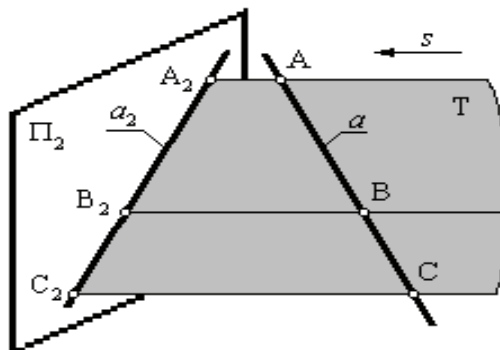


Рис. 1.3

4. Проекціями паралельних прямих є паралельні прямі. Дійсно, якщо прямі  $a$  і  $b$  паралельні (рис. 1.4), – будуть паралельними і проєкціюючі їх



площини  $T^1$  та  $T^2$  (тому що вони мають по парі відповідно паралельних прямих  $a \parallel b$  і  $AA_2 \parallel DD_2$ , які перетинаються). Із цього виходить, що прямі  $a_2$  і  $b_2$  паралельні як прямі, отримані при перетині двох паралельних площин третьою. Ця властивість отримала назву властивості збереження паралельності.

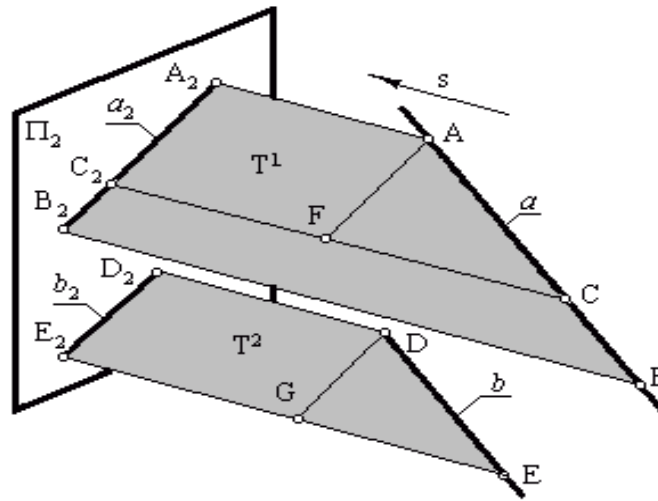


Рис. 1.4

5. Відношення проекцій відрізків, що належать паралельним прямим або одній прямій, дорівнює відношенню самих відрізків. Нехай  $AB$  і  $DE$  (рис. 1.4) – відрізки, що належать прямим  $a$  і  $b$ , а  $A_2B_2$  і  $D_2E_2$  – їх проекції. Проведемо в проекціюючих площинах  $T^1$  і  $T^2$  відрізки  $AF$  і  $DG$  відповідно паралельні до відрізків  $A_2B_2$  і  $D_2E_2$ . Тоді  $AF = A_2C_2$ , а  $DG = D_2E_2$ . Отже, трикутник  $ACF$  подібний до трикутника  $DEG$ . Але з цього виходить, що  $A_2C_2 : D_2E_2 = AF : DG = AC : DE$ . Якщо задані відрізки належать одній прямій, наприклад  $AC$  і  $BC$ , аналогічно можна отримати, що  $A_2C_2 : B_2C_2 = AC : BC$ . У відповідності з цією властивістю виходить, що спотворення для всіх паралельних відрізків є постійним і що, зокрема, середина відрізка проектується в середину проекції відрізка.

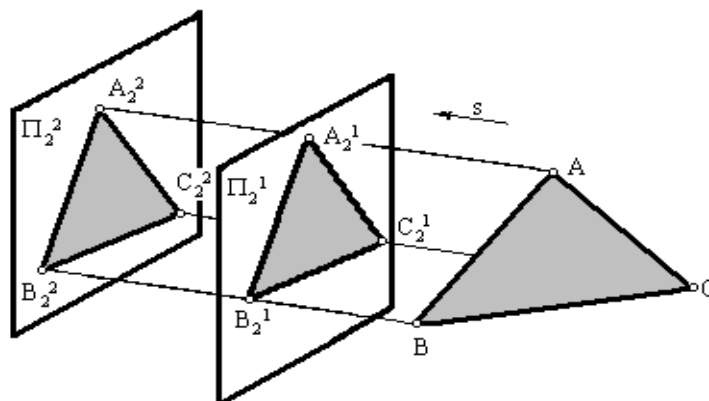


Рис. 1.5

6. Проекція оригіналу не змінюється при паралельному переносі площин проекцій. Спроекціюємо трикутник  $ABC$  в напрямі  $s$  на паралельні між собою площини проекцій  $\Pi_2^1$  та  $\Pi_2^2$  (рис. 1.5). Через те, що відрізки  $A_2^1A_2^2 = B_2^1B_2^2 = C_2^1C_2^2$  рівні й паралельні один одному, чотирикутники  $A_2^1B_2^1B_2^2A_2^2$ ,  $B_2^1C_2^1C_2^2B_2^2$

і  $C_2^1 A_2^1 A_2^2 C_2^2$  є паралелограмами. Тому в трикутників  $A_2^1 B_2^1 C_2^1$  і  $A_2^2 B_2^2 C_2^2$  відповідні сторони рівні, і, отже, трикутники рівні між собою. Очевидно, що наведені міркування будуть справедливими й для будь-якої іншої геометричної фігури.

Як поставити за умову, щоби напрям проєкціювання  $s$  був перпендикулярним до площини проєкцій  $\Pi$ , отримаємо так звану паралельну ортогональну проєкцію або просто – ортогональну проєкцію. При цьому всі розглянуті вище властивості зберігаються, більш того, додається ще одна властивість, специфічна тільки для ортогональної проєкції.

7. Якщо напрям проєкціювання  $s$  складає з площиною проєкцій  $\Pi_2$  прямий кут, – довжина проєкції відрізка дорівнює довжині самого відрізка, помноженій на  $\cos \delta$ , де  $\delta$  – кут нахилу відрізка до площини проєкцій. Дійсно, якщо через точку  $B$  (рис. 1.6) провести відрізок  $BC$ , паралельний до відрізка  $A_2 B_2$ , то із трикутника  $ABC$  отримаємо, що  $BC = AB \cos \delta$ . Але  $A_2 B_2 = BC$ , тому  $A_2 B_2 = AB \cos \delta$ . Із наведеного виходить, що коли напрям проєкціювання  $s$  складає з площиною проєкцій прямий кут, то відрізки прямих і відсіки площин, паралельних до площини проєкцій, проєкціюються на останню в дійсну величину.

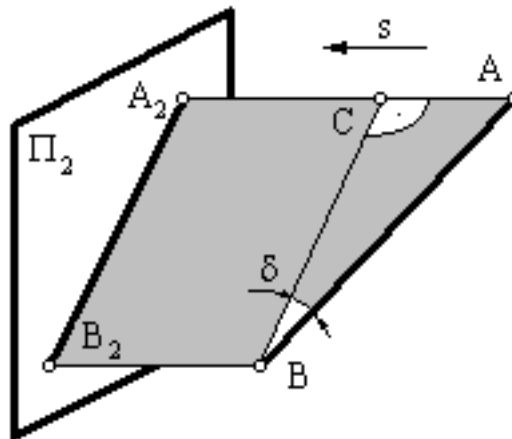


Рис. 1.6

### 1.3 Просторова система координат

Паралельна ортогональна проєкція з точки зору техніки побудови зображень має значні переваги перед іншими проєкціями. Основною з них є простота побудови проєкції за заданим оригіналом, тобто простота розв'язання прямої задачі. Але в той же час ця проєкція має і суттєвий недолік: вона не дозволяє за даною проєкцією однозначно відтворити (реконструювати) оригінал, тобто не дозволяє розв'язувати зворотну задачу. Це пояснюється тим, що проєкція точки не несе інформації про відстань самої точки від площини проєкцій. Тому, щоби скористатись паралельною ортогональною проєкцією, треба якимось чином компенсувати цей недолік методу проєкціювання. Однією з таких можливостей є проєкціювання об'єкта на декілька площин проєкцій. Очевидно, що їх має бути якомога менше, але досить для однозначного відтворення за ними оригіналу. Цій вимозі відповідає наявність трьох проєкцій оригіналу, розташованих у перпендикулярних одна до одної площинах. А це приводить до висновку, що найзручнішою буде прямокутна просторова система

координат. При цьому логічно розташувати площини проекцій у просторі так, як це зручно для спостерігача. Домовились, що першою з них буде площина, на якій перебуває спостерігач. Цю площину назвали горизонтальною і дали їй позначення  $\Pi_1$ . Другу площину розташували перед спостерігачем і назвали фронтальною ( $\Pi_2$ ), третю, профільну площину проекцій  $\Pi_3$ , розташували праворуч від спостерігача.

Перераховані площини проекцій взаємно перетинаються і утворюють просторову систему координат (рис. 1.7). Її початком (центром) є точка  $O$ , в якій перетинаються всі три площини. Перетинаючись попарно, вони утворюють координатні осі: горизонтальна площина проекцій  $\Pi_1$  і фронтальна  $\Pi_2$  – вісь абсцис  $x$ , горизонтальна площина проекцій  $\Pi_1$  і профільна  $\Pi_3$  – вісь ординат  $y$ , фронтальна площина проекцій  $\Pi_2$  і профільна  $\Pi_3$  – вісь аплікату  $z$ . Позитивним для осі  $x$  домовились вважати напрям вліво від спостерігача, для осі  $y$  – до спостерігача, для осі  $z$  – угору.

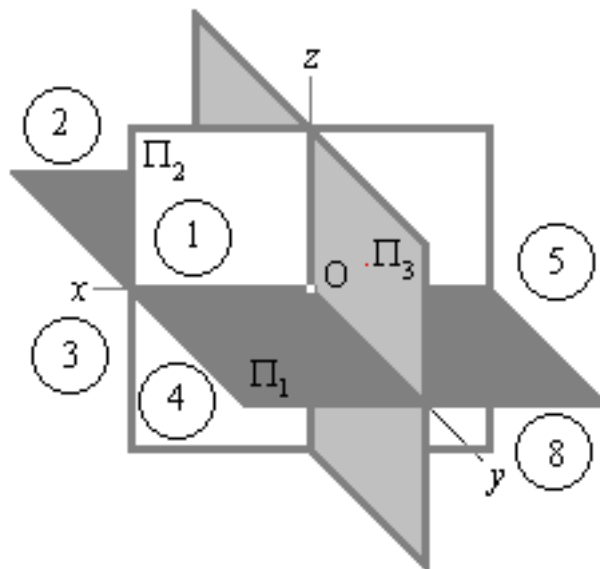


Рис. 1.7

Перетинаючись між собою, площини проекцій поділяють простір на 8 частин, які отримали назву октантів. Нумерація октантів наведена на рис. 1.7.

У ряді випадків можна обмежитись двома площинами проекцій (при цьому, як правило, вилучають профільну площину проекцій). Тоді залишається реальною тільки одна координатна вісь –  $x$  (рис.1.8), а простір поділяється на 4 частини, які отримали назву чвертей (їх нумерація збігається з нумерацією перших чотирьох октантів). Але оскільки положення точки в тривимірному просторі визначається трьома координатами, початок системи координат вибирається довільно.

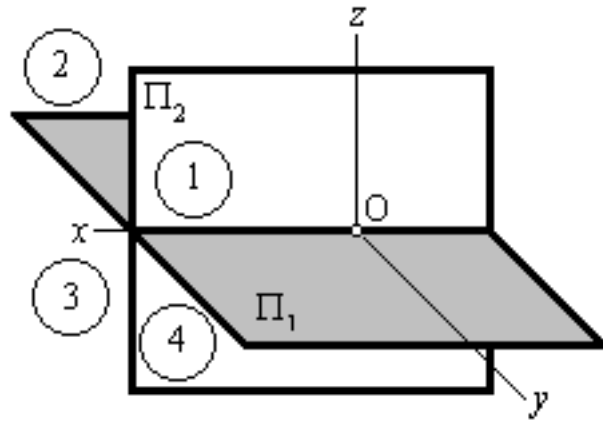


Рис. 1.8

Для побудови проєкцій немає значення, у якій частині простору розташовано оригінал. Тому його розташування в просторі вибирають, виходячи з міркувань зручності побудови проєкцій. Як правило, оригінал розташовують у першому октанті або першій чверті простору.

#### 1.4 Проекціювання на дві площини проєкцій

Метод побудови комплексного креслення на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій узагальнив і обґрунтував Гаспар Монж.

За цим методом площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  взаємно перпендикулярні, а центри проєкціювання віддалені в нескінченність у напрямі, перпендикулярному до площин проєкцій. Сукупність кількох пов'язаних між собою проєкцій фігури (мінімум двох) називають **системою прямокутних (ортогональних) проєкцій**.

Точку  $A$  в просторі ортогонально проєкціюють на обидві площини проєкцій:

$$AA_1 \perp \Pi_1; AA_1 \cap \Pi_1 = A_1;$$

$$AA_2 \perp \Pi_2; AA_2 \cap \Pi_2 = A_2.$$

Проекціювальні промені  $AA_1$  і  $AA_2$  взаємно перпендикулярні й створюють у просторі проєкціювальну площину  $A_1 A A_2$ , перпендикулярну до обох площин проєкцій. Ця площина перетинає площини проєкцій по лініях, які проходять через проєкції точки  $A$  (рис. 1.9).

Щоб отримати плоске креслення, сумістимо горизонтальну площину проєкцій  $\Pi_1$  із фронтальною площиною  $\Pi_2$  обертанням навколо осі  $\Pi_2/\Pi_1$ , (рис. 1.10). Тоді обидві проєкції точки виявляються на одній лінії, перпендикулярній до осі  $\Pi_2/\Pi_1$ . Пряма, що з'єднує горизонтальну  $A_1$  і фронтальну  $A_2$  проєкції точки, називається **вертикальною лінією зв'язку**.

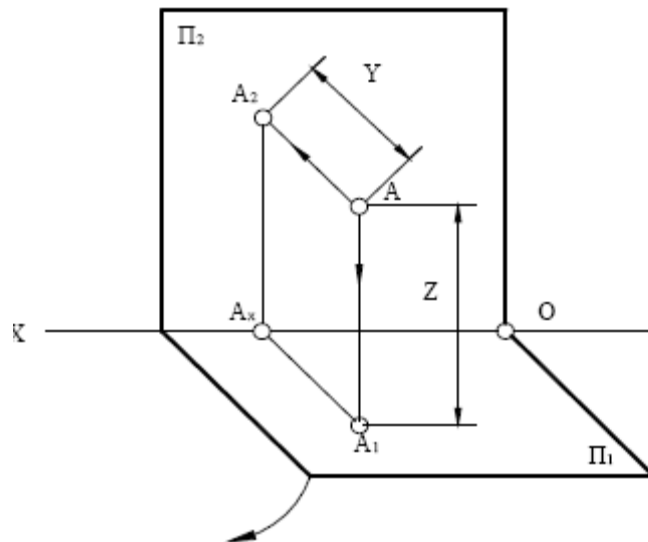


Рис. 1.9

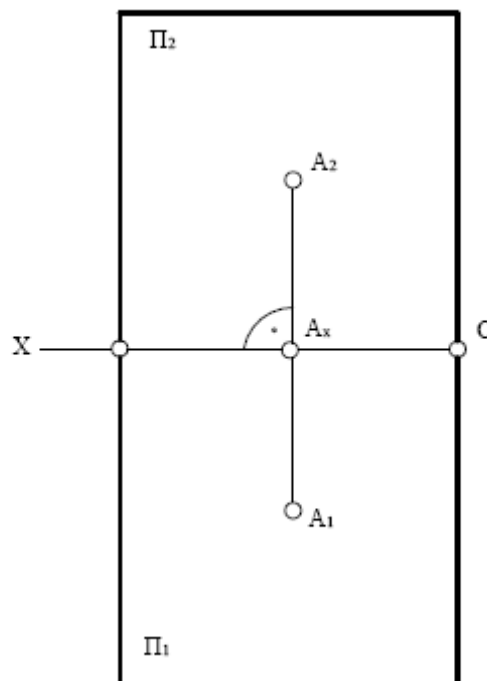


Рис. 1.10

Дві пов'язані між собою ортогональні проекції точки однозначно визначають її положення відносно площин проекцій.

Якщо визначити положення точки  $A$  відносно цих площин (рис. 1.9) її висотою  $AA_1 = z$  і глибиною  $AA_2 = y$ , ці величини на комплексному кресленні існують як відрізки вертикальної лінії зв'язку (рис. 1.11). Ця обставина дозволяє легко реконструювати креслення, тобто визначити за кресленням положення точки відносно площин проекцій.

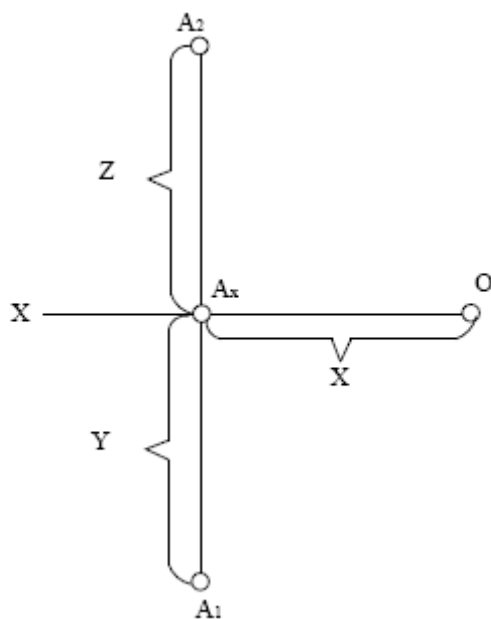


Рис. 1.11

### 1.5 Проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій

У залежності від складності фігури може виникнути необхідність у побудові ще одного зображення предмета на третій профільній площині проєкції  $\Pi_3$ . Цю площину розташовують праворуч від спостерігача перпендикулярно одночасно до горизонтальної  $\Pi_1$  і фронтальної  $\Pi_2$  площин проєкцій (рис. 1.12).

Лінія перетину площин  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$  – нова вісь  $\Pi_2/\Pi_3$ , яка розташовується на плоскому кресленні (рис. 1.10) паралельно до вертикальної лінії зв'язку  $A_1A_2$ . Третя проєкція точки  $A_3$  профільна, виявляється пов'язаною з фронтальною проєкцією  $A_2$  новою лінією зв'язку – горизонтальною. Причому  $A_2A_3 \perp A_2A_1$  і  $A_2A_3 \perp \Pi_2/\Pi_3$ . Оскільки глибина точки  $AA_2$  проєціюється без спотворень і на площину  $\Pi_1$ , і на площину  $\Pi_3$  (рис. 1.12), ця обставина дозволяє побудувати профільну проєкцію точки за її горизонтальною і фронтальною проєкціями (рис. 1.13).

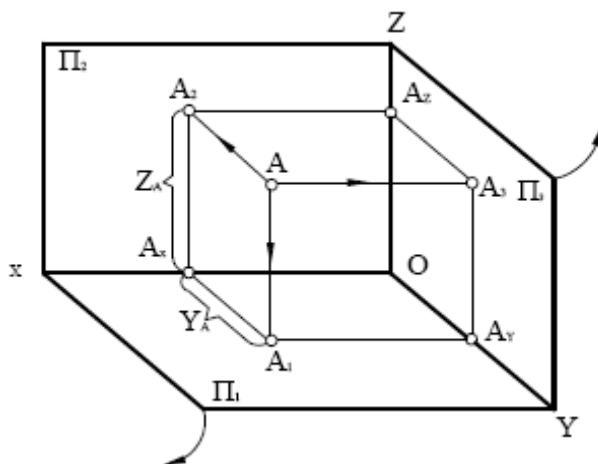


Рис. 1.12

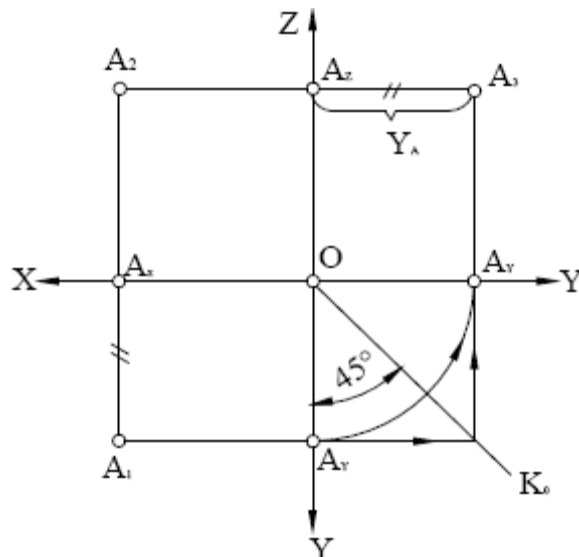


Рис. 1.13

Через фронтальну проекцію проводять горизонтальну лінію зв'язку перпендикулярно до осі  $Z$  і від осі відміряють координату  $Y_a$  (відрізок  $A_x A_1$ ).

Цю побудову можна виконати за допомогою дуги кола, проведеного із центра  $O$ , або з допомогою прямої, проведеної під кутом  $45^0$  до осі  $Y$

Лекція 2

## 2. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

### 2.1 Розташування відрізка прямої відносно площин проекцій

Відомо, що пряма лінія в просторі визначається положенням двох її точок. Таким чином, досить виконати комплексне креслення цих двох точок, а потім з'єднати однойменні проекції точок прямими лініями, й отримаємо відповідно горизонтальну, фронтальну і профільну проекції прямої.

Відносно площин проекцій пряма може займати різні положення. Прямі, паралельні до одної із площин проекцій, називають **прямими рівня**.

Назва їх залежить від того, якій площині вони паралельні. Пряму, паралельну до горизонтальної площини проекцій, називають **горизонталлю** і позначають на кресленнях через  $h$  (рис. 2.1)  $h_2 \parallel x$ ,  $A_1 B_1 = [AB]$ ,  $\beta$  – кут нахилу прямої  $AB$  до площини  $\Pi_2$ .

Пряму, паралельну до фронтальної площини проекцій, називають **фронталлю** і позначають через  $f$  (рис. 2.2).

$f_1 \parallel x$ ,  $C_2 D_2 = [CD]$ ,  $\alpha$  – кут нахилу прямої  $CD$  до площини  $\Pi_1$ .

Пряму, паралельну профільній площині проекцій, називають **профільною прямою** і позначають через  $p$  (рис. 2.3).

$p_2 \perp x$ ,  $p_1 \perp x$ ,  $E_3 F_3 = [EF]$ ,  $\alpha$  та  $\beta$  – кути нахилу прямої  $EF$  до площин  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ .

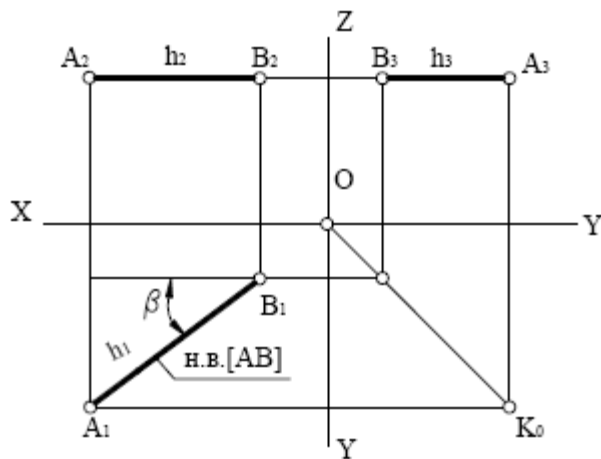


Рис. 2.1

$h \parallel \Pi_1$   
 $h_2 \parallel OX$   
 $h_3 \parallel OY$   
 $A_1B_1 = [AB]$   
 $\beta = OX \wedge A_1B_1 = AB \wedge \Pi_2$

Прямі, перпендикулярні до одної із площин проєкцій, називаються **проєкційними**, при цьому вони одночасно паралельні до двох інших площин проєкцій. У проєкційних прямих одна проєкція вироджується в точку, а дві інші проєкції паралельні до самої прямої і збігаються з напрямом лінії зв'язку.

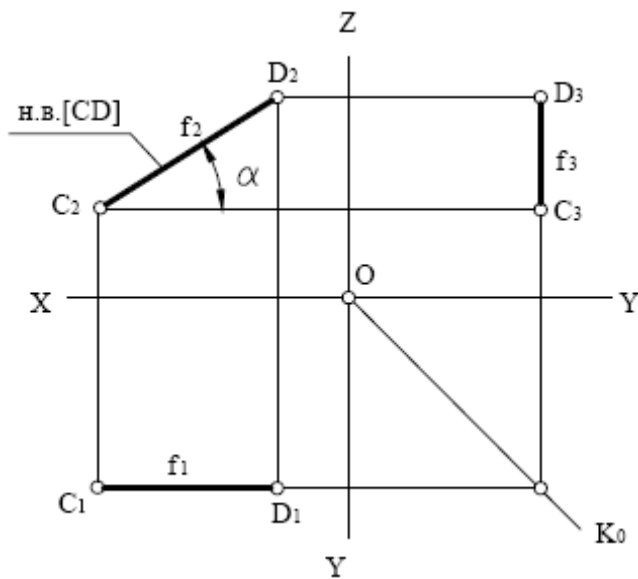


Рис. 2.2

$f \parallel \Pi_2$   
 $f_1 \parallel OX$   
 $f_3 \parallel OZ$   
 $C_2D_2 = [CD]$   
 $\alpha = OX \wedge C_2D_2 = CD \wedge \Pi_1$



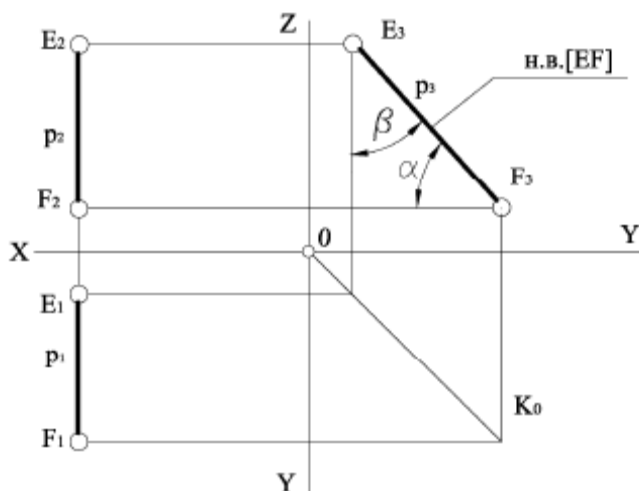


Рис. 2.3

$p \parallel \Pi_3$   
 $p_2 \perp OX$   
 $p_1 \perp OX$   
 $E_3F_3 = [EF]$   
 $\alpha = OY \wedge P_3 = EF \wedge \Pi_1$   
 $\beta = OZ \wedge P_3 = EF \wedge \Pi_2$

Пряму, перпендикулярну до горизонтальної площини проекції  $\Pi_1$  і одночасно паралельну до фронтальної  $\Pi_2$  і профільної  $\Pi_3$  площинам проекцій, називають **горизонтально проекційною** (рис. 2.4)

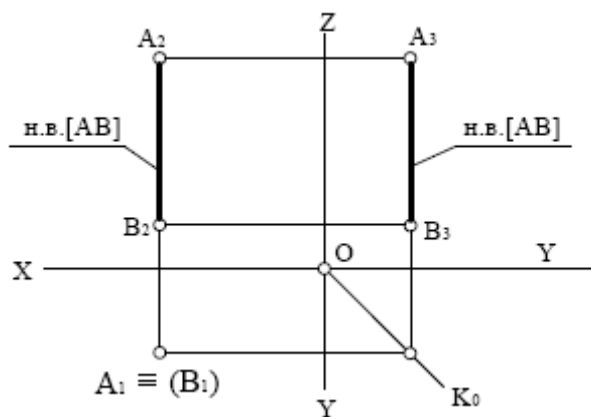


Рис. 2.4

$AB \perp \Pi_1$   
 $AB \parallel \Pi_2, AB \parallel \Pi_3$   
 $A_2B_2 \parallel OZ$   
 $A_3B_3 \parallel OZ$   
 $A_1 \equiv (B_1) - \text{точка}$

Пряму, перпендикулярну до фронтальної площини проекцій  $\Pi_2$  і одночасно паралельну до горизонтальної  $\Pi_1$  та профільної  $\Pi_3$  площин проекцій, називають **фронтально проекційною** (рис. 2.5).

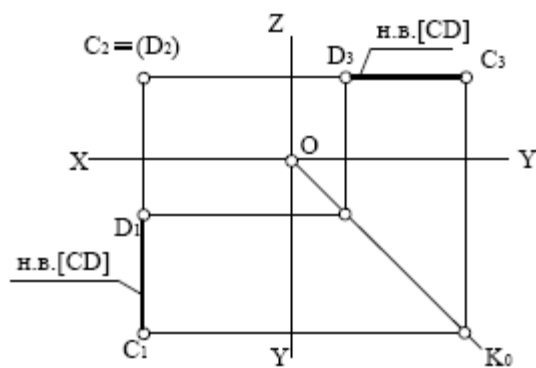


Рис. 2.5

$CD \perp \Pi_2$   
 $CD \parallel \Pi_1$   
 $CD \parallel \Pi_3$   
 $C_1D_1 \parallel OY$   
 $C_3D_3 \parallel OY$   
 $C_2 \equiv (D_2) - \text{точка}$

Пряму, перпендикулярну до профільної площини проєкцій  $\Pi_3$  і одночасно паралельну до горизонтальної  $\Pi_1$  та фронтальної  $\Pi_2$  площин проєкцій, називають **профільно проєкційною** (рис. 2.6)

Пряму, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проєкцій, називають **прямою загального положення**. Приклад такої прямої наведено на рис. 2.7. Відрізок  $[AB]$  прямої на жодну із площин проєкцій не відображається в натуральну величину, тобто  $[A_1B_1] < [AB]$ ,  $[A_2B_2] < [AB]$ ,  $[A_3B_3] < [AB]$ . Пряма загального положення має різні кути нахилу до площин проєкцій. Під кутом нахилу прямої до площини проєкцій розуміють такий кут, який утворюється між самою прямою та її відповідною проєкцією.

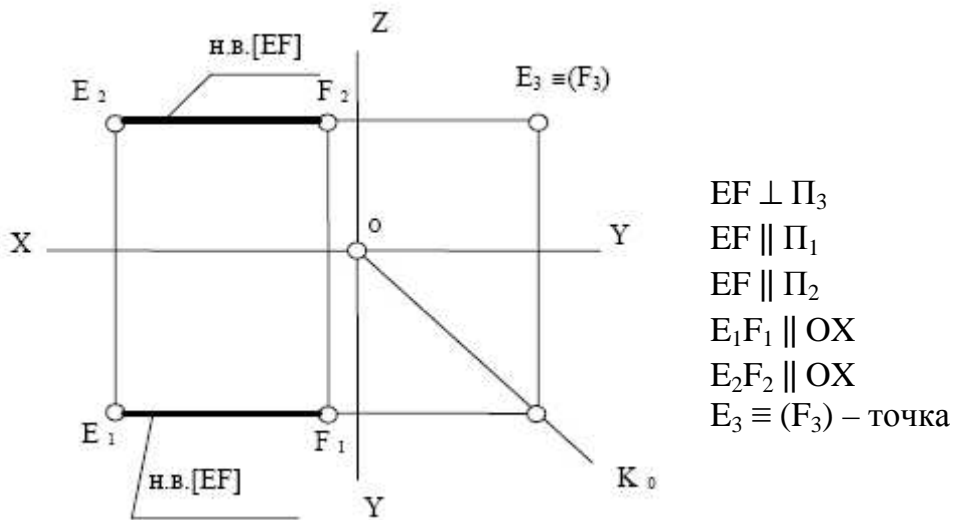


Рис. 2.6

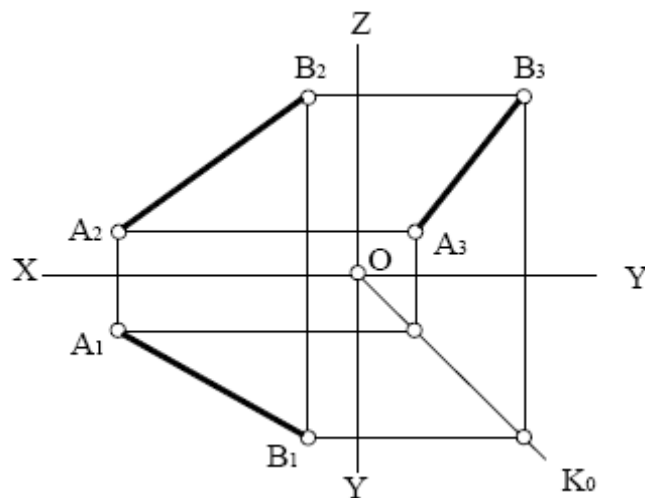


Рис. 2.7

## 2.2 Правило прямокутного трикутника

Для прямої загального положення виникає потреба у визначенні натуральної величини відрізка та кутів нахилу до площин проекцій. Розглянемо рис. 2.8, із якого випливає правило прямокутного трикутника.

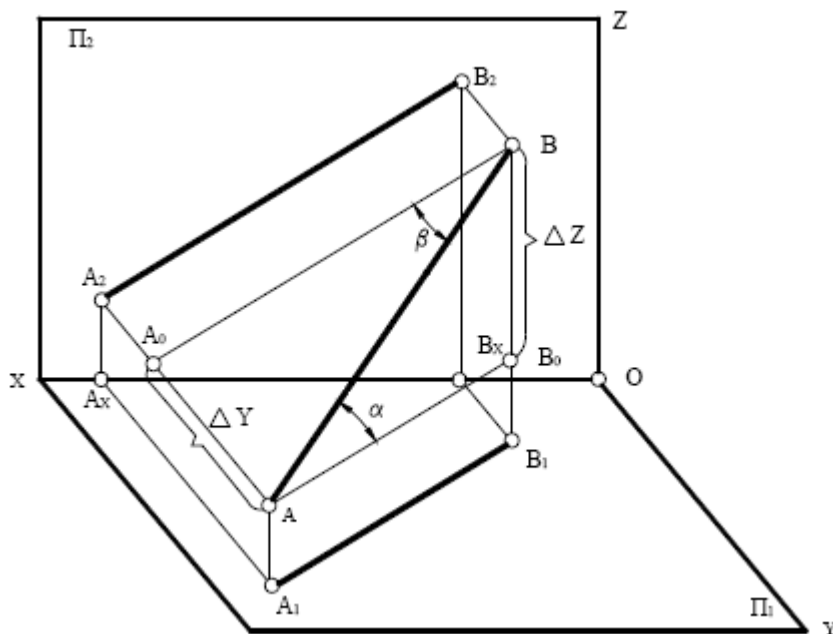


Рис. 2.8

Візьмемо відрізок  $AB$  і побудуємо його ортогональну проекцію на горизонтальну і фронтальну площини проекцій. Дістанемо два прямокутних трикутники  $\triangle AB_0V$  і  $\triangle AA_0V$ , у яких  $[AB]$  – гіпотенуза є натуральною величиною,  $\alpha = \angle BAV_0$  – кут нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій  $\Pi_1$ ,  $\beta = \angle ABA$  – кут нахилу прямої до фронтальної площини проекцій  $\Pi_2$ . Для трикутника  $\triangle AB_0V$  катет  $AB_0$  дорівнює величині горизонтальної проекції  $A_1V_1$  відрізка  $[AB]$ , другий катет  $VB_0$  дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка (точки  $A$  і  $B$ ) до горизонтальної площини проекцій, тобто  $\Delta Z$ .

Аналогічні висновки випливають також із розгляду трикутника  $\triangle AA_0V$ .

Для визначення натуральної величини відрізка прямої та кута нахилу прямої до певної площини проекції потрібно на комплексному кресленні (рис. 2.9) побудувати прямокутний трикутник на тій площині проекцій, відносно якої визначається кут нахилу прямої, тоді натуральна величина відрізка прямої дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, одним катетом якого є проекція відрізка на тій площині проекцій, другим катетом є різниця відстаней від кінців відрізка до тієї самої площини проекцій, а кут між відповідною проекцією цього відрізка та його гіпотенузою дорівнює куту нахилу прямої до цієї площини проекцій.

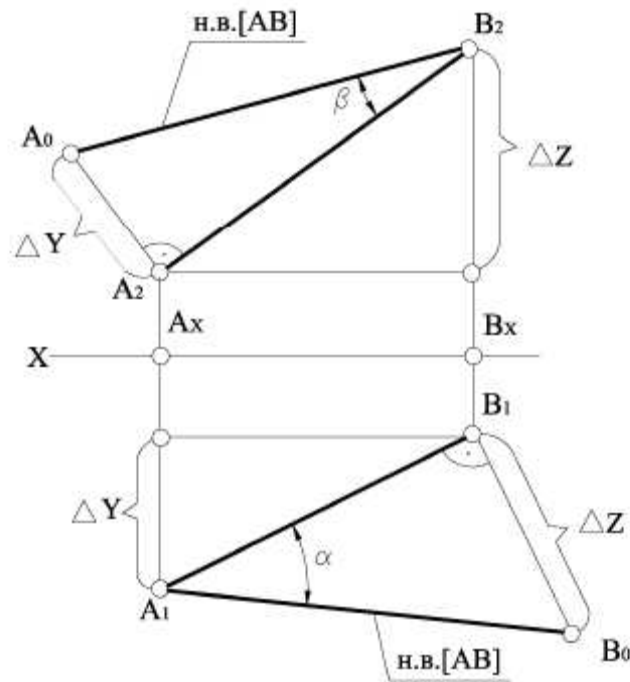


Рис. 2.9

### 2.3 Взаємне розташування прямих

Дві прямі в просторі можуть співпадати ( $a \equiv b$ ), бути паралельними ( $c \parallel d$ ), перетинними ( $m \cap n$ ), мимобіжними ( $k-1$ ).

Якщо дві прямі перетинаються в деякій точці  $K$ , проекції цієї точки мають належати однойменним проекціям прямих, тобто точки перетину однойменних проекцій перетинних прямих мають лежати на одній лінії зв'язку (рис. 2.10).

Якщо дві прямі паралельні, на комплексному кресленні їхні однойменні проекції паралельні (рис. 2.11) або збігаються на одній із площин проекцій (рис. 2.12).

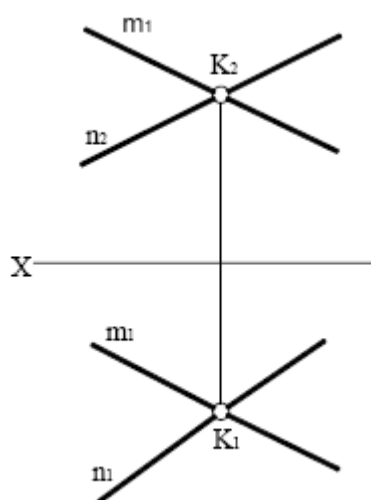
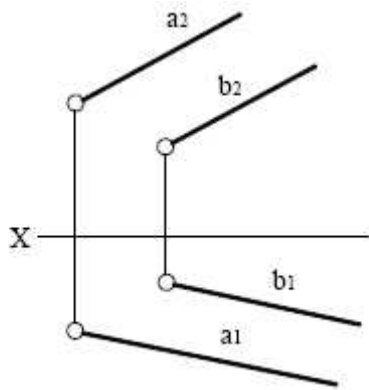


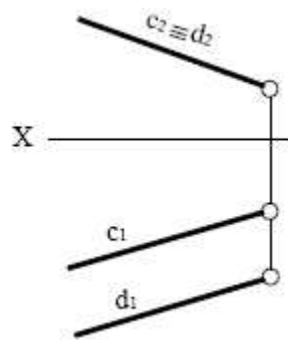
Рис. 2.10

$$m \cap n = K \begin{cases} m_1 \cap n_1 \\ m_2 \cap n_2 \end{cases}$$



$$a \parallel b \quad \begin{cases} a_2 \parallel b_2 \\ a_1 \parallel b_1 \end{cases}$$

Рис. 2.11



$$c \parallel d \quad \begin{cases} c_2 \equiv d_2 \\ c_1 \parallel d_1 \end{cases}$$

Рис. 2.12

Якщо прямі паралельні одній із площин проєкцій, їх паралельність визначається на площині, до якої прямі паралельні. У наведених нижче прикладах (рис. 2.13, рис. 2.14) прямі АВ та CD паралельні до профільної площини проєкцій, таким чином, їх взаємопаралельність визначається на площині  $\Pi_3$ . На рис. 2.13 АВ та CD паралельні між собою, а на рис. 2.14 – не паралельні.

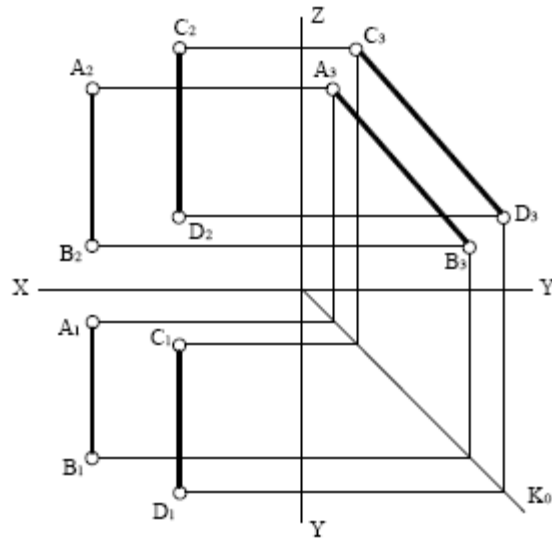


Рис. 2.13

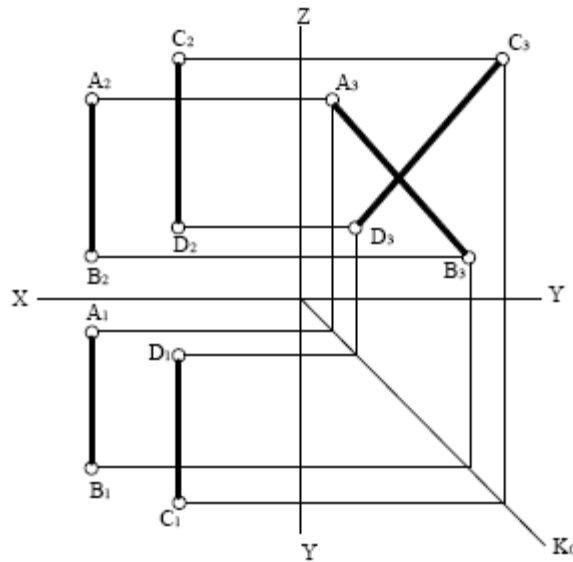


Рис. 2.14

Якщо дві прямі спільних точок не мають і вони не паралельні, їх називають мимобіжними.

На рис. 2.15 зображено дві мимобіжні прямі  $m$  і  $n$ . Фронтальні проекції їх перетинаються в точці  $3_2 \equiv (4_2)$ , а горизонтальні – у точці  $1_1 \equiv (2_1)$ . Для визначення «перекривання» відрізків на проекціях застосовують конкуруючі точки, які лежать на одному проєкціювальному промені, належать різним прямим і на одній площині проекцій збігаються.

На рис. 2.15 – дві пари конкуруючих точок: 1 і 2 відносно поля  $\Pi_1$  та 3 і 4 – відносно поля  $\Pi_2$ . При цьому точки 1 і 4 належать відрізку  $m$ , а точки 2 і 3 – відрізку  $n$ . Оскільки точка 1 розміщена вище від точки 2 на полі  $\Pi_1$ , відрізок  $m$  «перекриває» відрізок  $n$ , невидиму проекцію точки  $2_1$  беруть у дужки.

Точка 3 лежить ближче до спостерігача, ніж точка 4, тому на полі  $\Pi_2$  відрізок  $n$  «перекриває» відрізок  $m$ , невидиму проекцію точки  $4_2$  беруть у дужки.

На рис. 2.16 зображені дві мимобіжні прямі  $a$  і  $b$ . Фронтальні проекції їх перетинаються в точці  $1_2 \equiv (2_2)$ , а на горизонтальній площині проекцій видно, що точка  $1_1$  належить  $a_1$ , а точка  $2_1$  належить  $b_1$ .

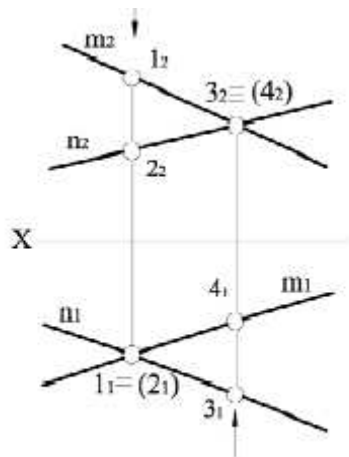


Рис. 2.15

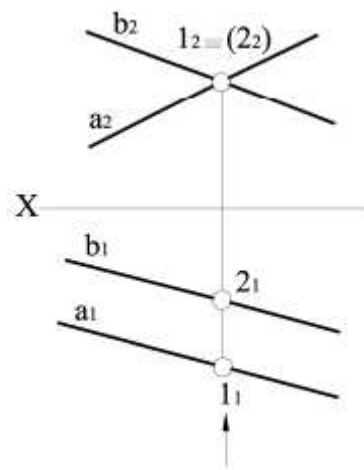


Рис. 2.16

## 2.4 Проекціювання прямого кута

Якщо одна сторона прямого кута паралельна до площини проєкцій, а друга до неї не перпендикулярна, при ортогональному проєкціюванні прямий кут проєкціюється на цю площину проєкцій без спотворень.

На рис. 2.17 зображено прямий кут  $ABC$ , у якого сторона  $AB$  паралельна до площини  $\Pi_1$ . Проекційна площина  $\Sigma$  ( $BCC_1B_1$ ) перпендикулярна до площини  $\Pi_1$ .  $AB \perp \Sigma$ , оскільки  $AB \perp BC$  та  $AB \perp BB$ , тому  $AB \perp B_1C_1$ . Оскільки  $AB \parallel A_1B_1$ ,  $A_1B_1 \perp B_1C_1$ .

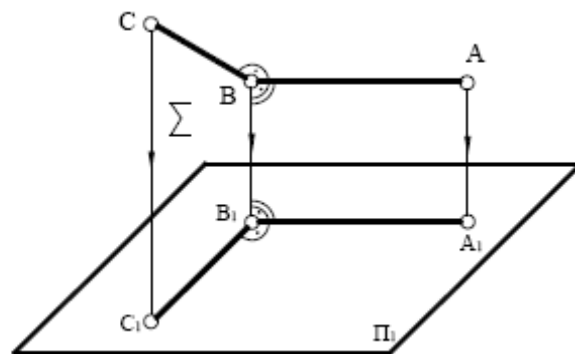


Рис. 2.17

На рис. 2.18 наведено приклад проєкціювання прямого кута, однією стороною якого є горизонтальна пряма рівня  $h$ .

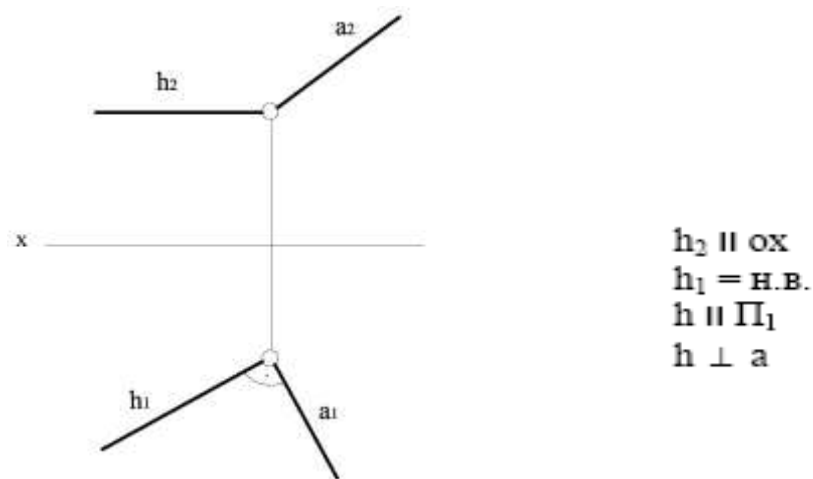


Рис. 2.18

На рис. 2.19 наведено приклад проєкціювання прямого кута, однією стороною якого є фронтальна пряма рівня  $f$ , яка є паралельною до  $\Pi_2$ , тому на цю площину прямий кут проєкціюється без спотворення.

Правило проєкціювання прямого кута використовується при розв'язанні задач по знаходженню відстані від точки до прямої особливого положення. На рис. 2.20 наведено приклад по знаходженню відстані від точки  $C$  до горизонтальної прямої рівня  $h$ .

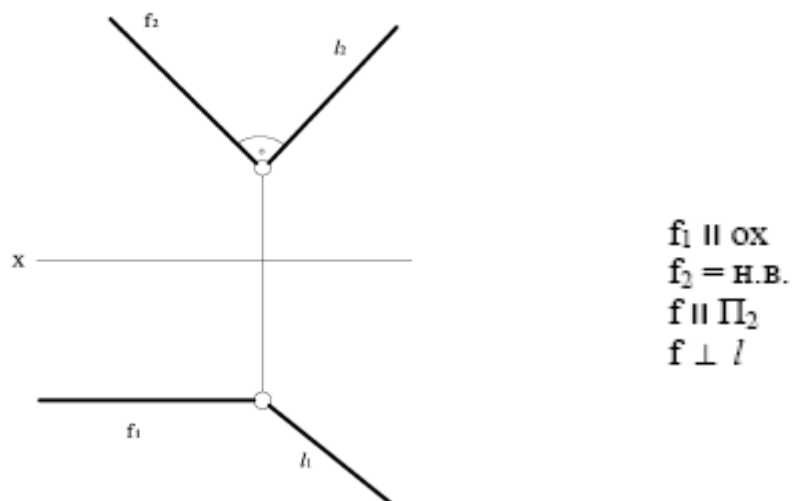


Рис. 2.19



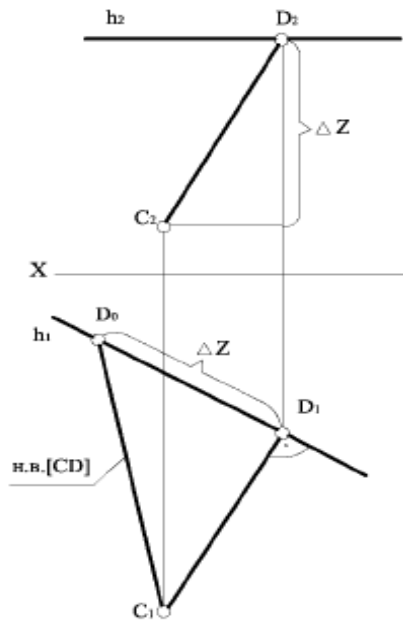


Рис. 2.20

Із точки С необхідно опустити перпендикуляр на пряму  $h$ . Оскільки  $h \parallel \Pi_1$ , прямий кут спроекціюється на  $\Pi_1$  без спотворень. Натуральну величину ( $CD$ ) знаходимо методом прямокутного трикутника.

## 2.5 Точка на прямій. Сліди прямої

Якщо в просторі точка належить прямій, проекції цієї точки лежать на однойменних проекціях цієї прямої та на спільній лінії проекційного зв'язку.

На рис. 2.21 зображена точка А, що належить прямій  $l$ , бо її проекції  $A_1$  і  $A_2$  розташовані відповідно на горизонтальній  $l_1$  і фронтальній  $l_2$  проекціях прямої.

Точка не належить прямій лінії, якщо жодна з проекцій точки не належить відповідній проекції прямої (наприклад точка С), або тільки одна з проекцій точки належить однойменній проекції прямої лінії (наприклад точка В).

Точка перетину прямої з площиною проекцій називається **слідом прямої**.

Точка М ( $M_1, M_2, M_3$ ) перетину прямої  $l$  із горизонтальною площиною проекцій  $\Pi_1$  має назву **горизонтального сліду**; точка N ( $N_1, N_2, N_3$ ) перетину прямої  $l$  з фронтальною площиною проекцій  $\Pi_2$  має назву **фронтального сліду**; точка Р ( $P_1, P_2, P_3$ ) перетину прямої  $l$  з профільною площиною проекцій  $\Pi_3$  має назву **профільного сліду**.

На рис. 2.22 наведено приклад побудови горизонтального і фронтального сліду для прямої  $l$ . Для знаходження горизонтального сліду прямої необхідно продовжити фронтальну проекцію  $l_2$  до перетину з віссю  $OX$ . Далі з точки перетину  $M_2$  – фронтальної проекції горизонтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з горизонтальною проекцією прямої. Точка перетину  $M_1$  – горизонтальна проекція горизонтального сліду, яка збігається з самим горизонтальним слідом М.

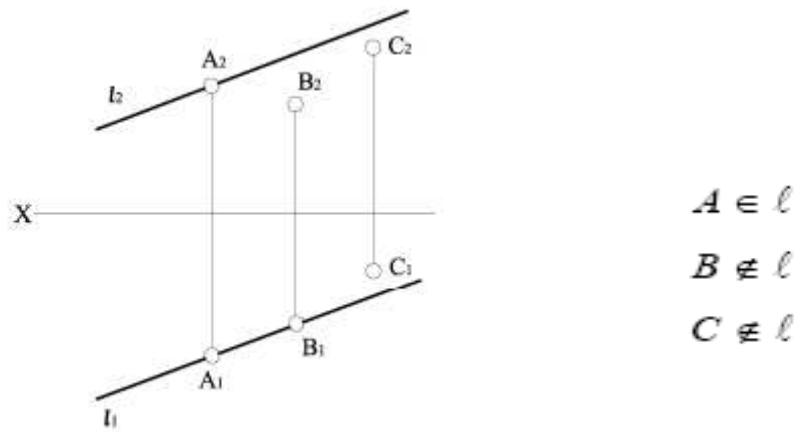


Рис. 2.21

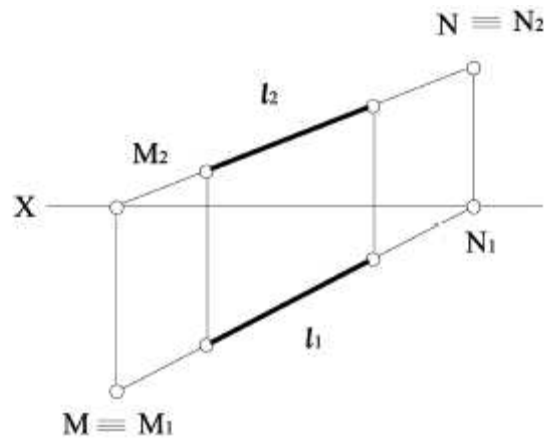


Рис. 2.22

Для знаходження фронтального сліду прямої  $l$  необхідно продовжити горизонтальну проекцію прямої  $l_1$  до перетину з віссю  $OX$ . Далі з точки перетину  $N_1$  – горизонтальної проекції фронтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з фронтальною проекцією прямої. Точка перетину  $N_2$  – фронтальна проекція фронтального сліду, яка збігається з самим фронтальним слідом  $N$ .

Лекція 3

### 3. ПЛОЩИНА

#### 3.1 Задання площини на комплексному кресленні

Площина є найпростішою поверхнею. **Площиною** називається поверхня, яка має таку властивість: якщо будь-яка пряма має з нею спільні точки, вона цілком їй належить. Із геометричної точки зору площину  $\Sigma$  (рис. 3.1) можна подати у вигляді нескінченної множини прямої лінії  $a$ , яка плоскопаралельно переміщується по напрямній прямій  $l$ .

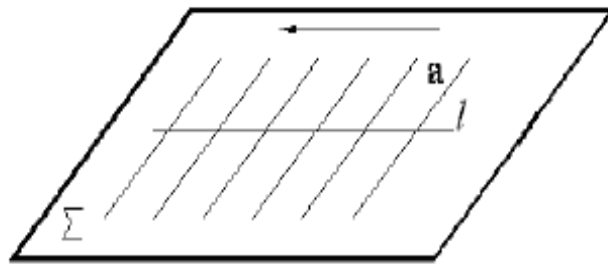


Рис. 3.1

Площину можна задавати 6 способами.

1. Трьома точками A, B і C, які не належать одній прямій (рис. 3.2).

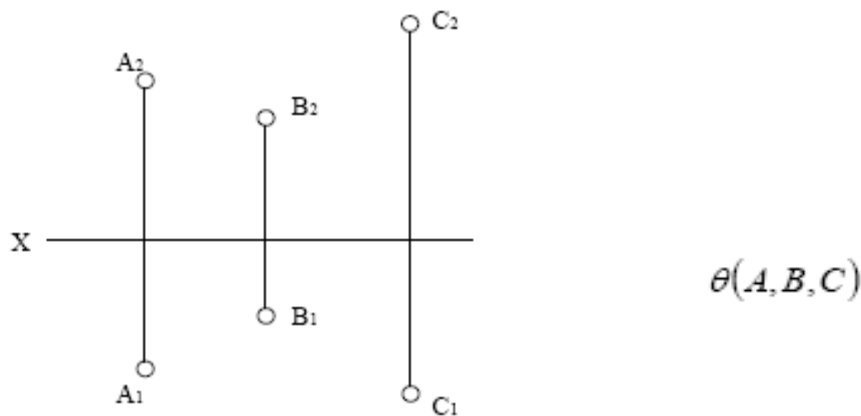


Рис. 3.2

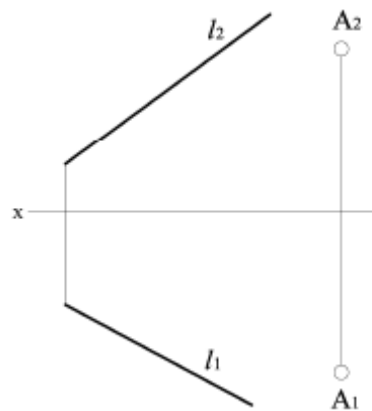
2. Прямою і точкою, яка не належить цій прямій (рис. 3.3).

3. Двома прямими, які перетинаються (рис. 3.4).

4. Двома паралельними прямими (рис. 3.5).

5. Будь-якою плоскою фігурою, наприклад трикутником (рис. 3.6).

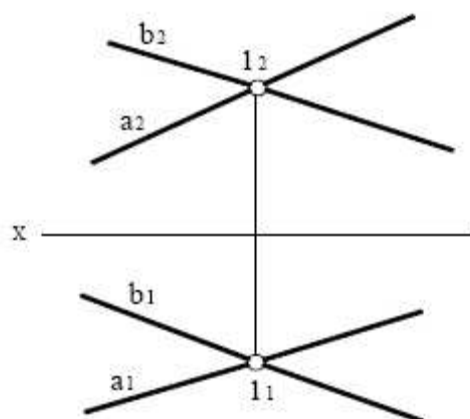
6. Слідами площини, що являють собою прямі лінії, по яких вона перетинає відповідні площини проекцій (рис. 3.7).



$$\theta(\ell, A)$$

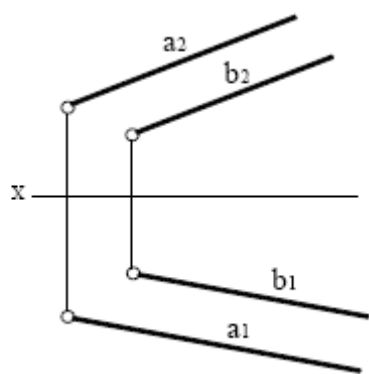
$$A \notin \ell$$

Рис. 3.3



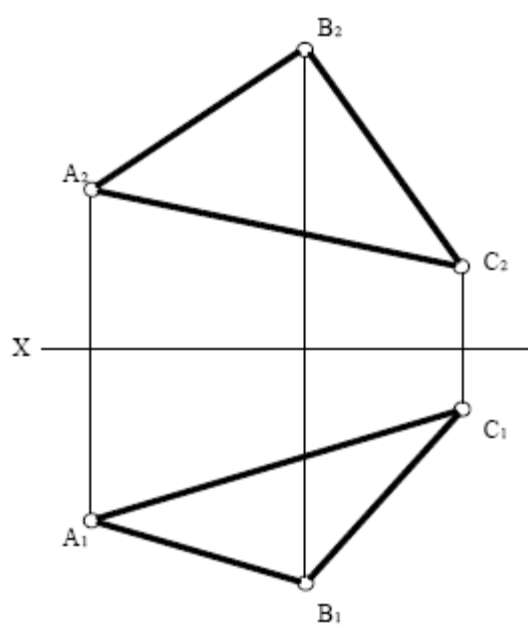
$$\theta(a \cap b)$$

Рис. 3.4



$$\theta(a \parallel b)$$

Рис. 3.5



$$\theta(ABC)$$

Рис. 3.6

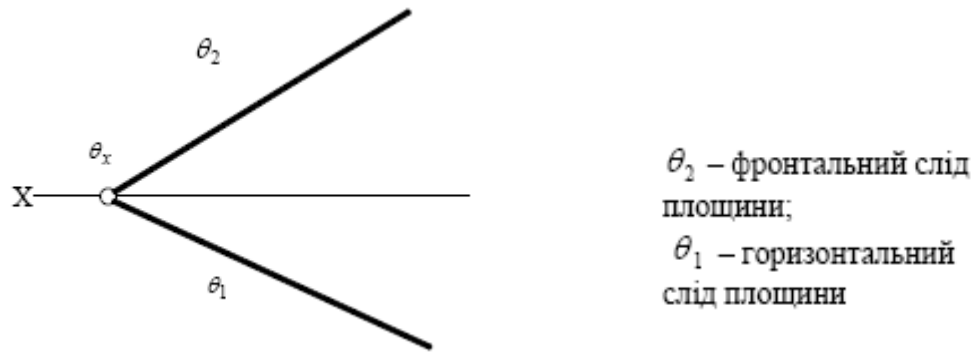


Рис. 3.7

На комплексному кресленні проекції площини не обмежуються проекціями елементів, це означає, що площина вважається нескінченною.

### 3.2 Положення площини відносно площин проекцій

Площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій, називається **площиною загального положення**. Приклади таких площин наведені на рис. 3.2–3.7.

На рис. 3.8 наведено приклад площини  $\theta$  загального положення, яка перетинає всі три площини проекцій.

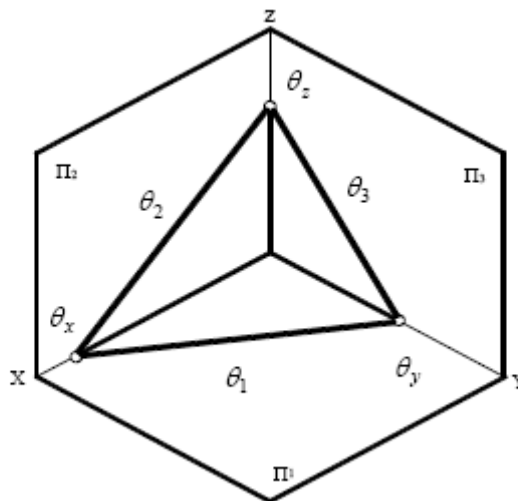


Рисунок 3.8

Відповідні сліди площини  $\theta$  позначають:

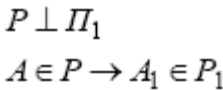
$\theta_1 = \theta \cap \Pi_1$  – горизонтальний слід площини  $\theta$ ;

$\theta_2 = \theta \cap \Pi_2$  – фронтальний слід площини  $\theta$ ;

$\theta_3 = \theta \cap \Pi_3$  – профільний слід площини  $\theta$ .

Точки  $\theta_x = \theta_2 \cap \theta_1$ ,  $\theta_y = \theta_1 \cap \theta_3$ ,  $\theta_z = \theta_2 \cap \theta_3$ , в яких перетинаються два сліди площини, отримали назву точок збігу слідів.





Горизонтальні проєкції точок, прямих, плоских фігур, які належать горизонтально проєкційній площині, збігаються з горизонтальним слідом цієї площини.

На рис. 3.12 наведено приклад комплексного креслення горизонтально проєкційної площини, яка задана трикутником  $\theta(ABC)$ .

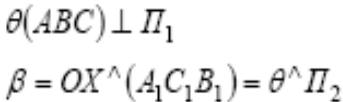
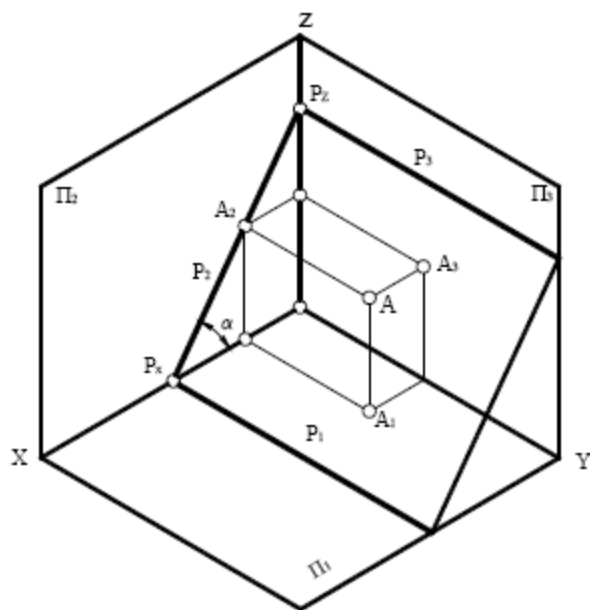


Рис. 3.12

Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій називається **фронтально проєкційною площиною** (рис. 3.13).

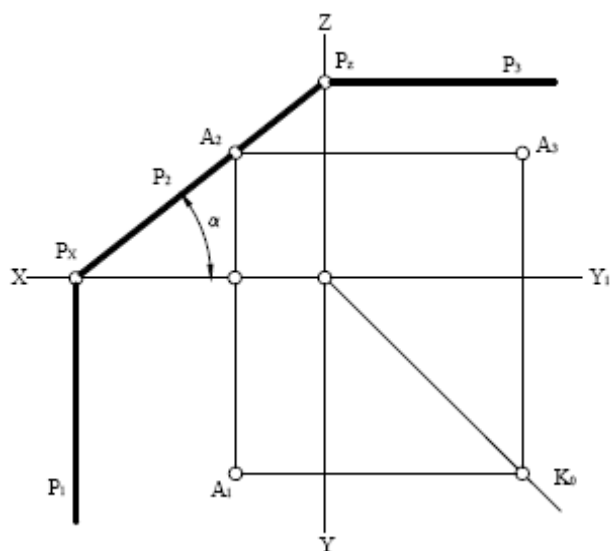




$$\begin{aligned}
 &P \perp \Pi_2 \\
 &A \in P \rightarrow A_2 \in P_2 \\
 &P_1 \perp OX \\
 &P_3 \perp OZ \\
 &\alpha = OX \wedge P_2 = P \wedge \Pi_1
 \end{aligned}$$

Рис. 3.13

На рис. 3.14 наведено приклад комплексного креслення фронтально проекційної площини  $P \perp \Pi_2$ .

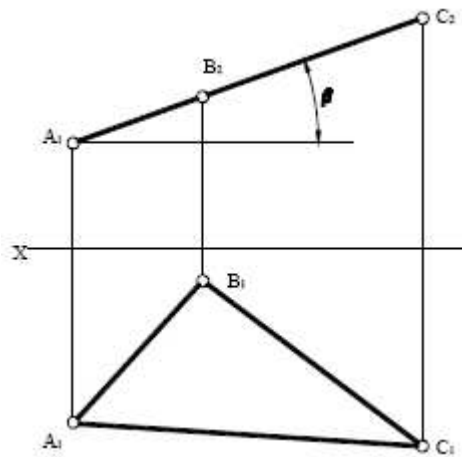


$$\begin{aligned}
 &P \perp \Pi_2 \\
 &P_1 \perp OX \\
 &P_3 \perp OZ \\
 &A \in P \rightarrow A_2 \in P_2
 \end{aligned}$$

Рис. 3.14

Фронтальні проекції точок, прямих, плоских фігур, які належать до фронтально проекційної площини, збігаються з фронтальним слідом цієї площини.

На рис. 3.15 наведено приклад комплексного креслення фронтально проекційної площини, яка задана відріком площини  $\theta(ABC)$ .

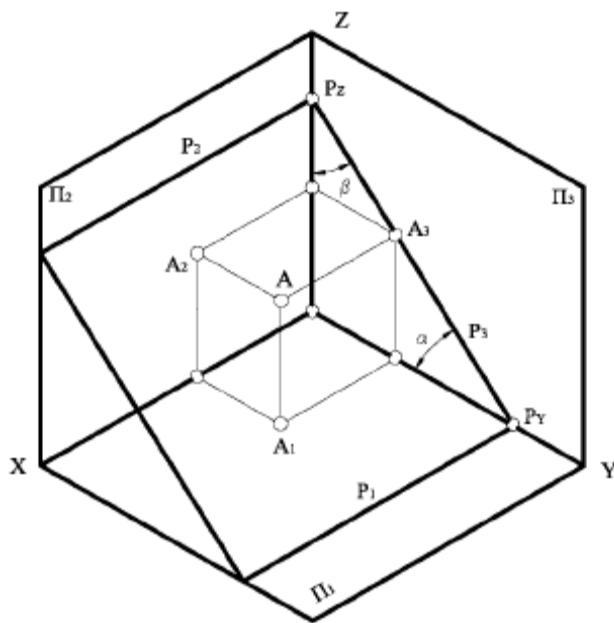


$$\theta(ABC) \perp \Pi_2$$

$$\beta = OX \wedge A_2 B_2 C_2 = \theta \wedge \Pi_1$$

Рис. 3.15

Площина, яка перпендикулярна до профільної площини проєкцій, називається **профільно проєкційною площиною** (рис. 3.16).



$$P \perp \Pi_3$$

$$P_1 \perp OY$$

$$P_2 \perp OZ$$

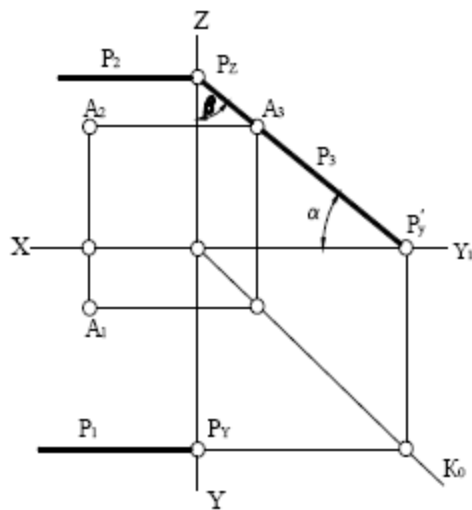
$$\alpha = OY \wedge P_3 = P \wedge \Pi_1$$

$$\beta = OZ \wedge P_3 = P \wedge \Pi_2$$

$$A \in P \rightarrow A_3 \in P_3$$

Рис. 3.16

На рис. 3.17 наведено приклад комплексного креслення профільно проєкційної площини  $P \perp \Pi_3$ .

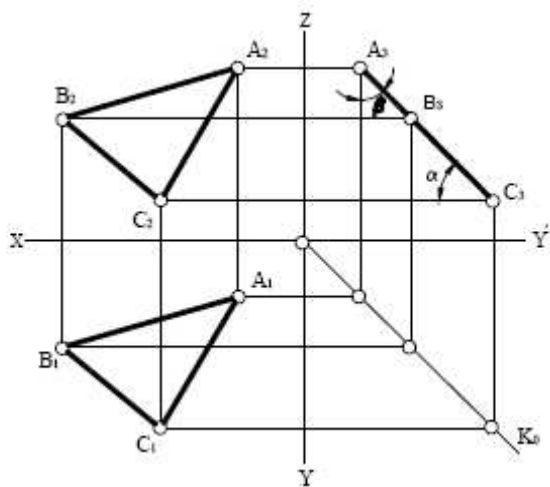


$$A \in P \rightarrow A_3 \in P_3$$

Рис. 3.17

Профільні проекції точок, прямих, плоских фігур, які належать до профільно проекційної площини, збігаються з профільним слідом цієї площини.

На рис. 3.18 наведено приклад комплексного креслення профільно проекційної площини, яка задана трикутником  $\theta(ABC)$ .



$$\theta(ABC) \perp P_3$$

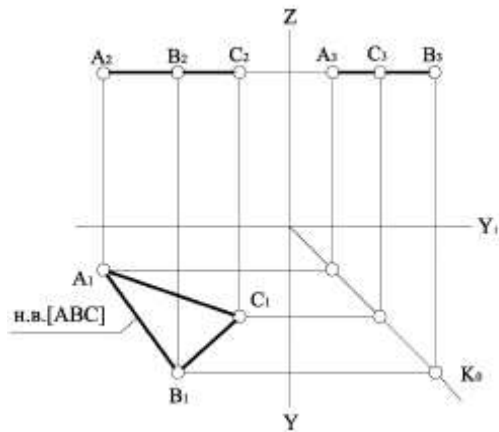
$$\alpha = OY \wedge (A_3B_3C_3) = \theta \wedge P_1$$

$$\beta = OZ \wedge (A_3B_3C_3) = \theta \wedge P_2$$

Рис. 3.18

Площини, які одночасно перпендикулярні до двох площин проекцій, називаються площинами рівня (або подвійно проекційними), як наслідок, вони паралельні до третьої площини проекцій.

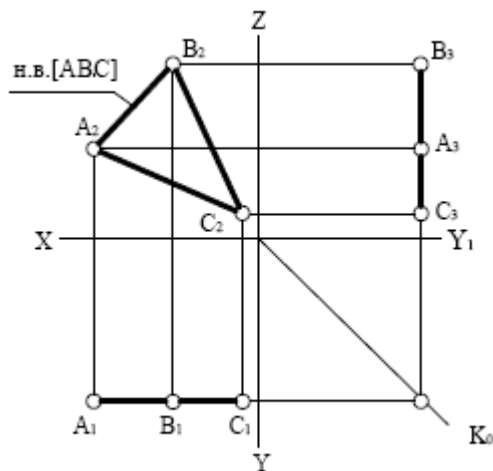
Площина, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається **горизонтальною площиною рівня**. На рис. 3.19 приведено комплексне креслення цієї площини, яка задана відрізком площини  $\theta(ABC)$ .



$$\begin{aligned}
 &A_2B_2C_2 \perp OZ \\
 &A_3B_3C_3 \perp OZ \\
 &(A_1B_1C_1) - \text{н.в.}[ABC] \\
 &\theta(ABC) \perp \Pi_2 \\
 &\theta(ABC) \perp \Pi_3
 \end{aligned}$$

Рис. 3.19

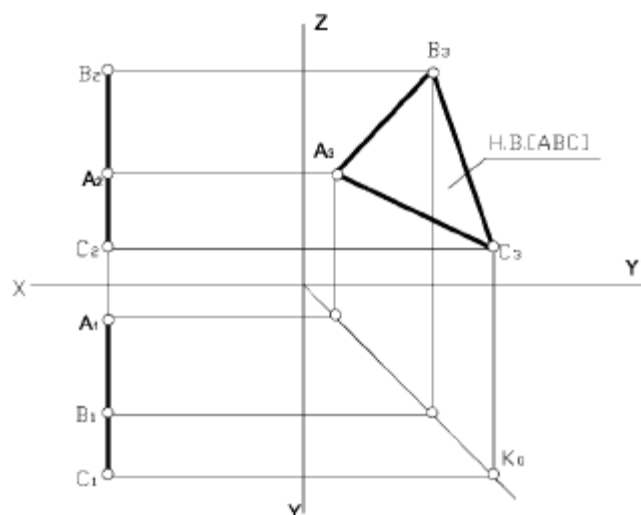
Площина, яка паралельна фронтальній площині проєкцій, називається **фронтальною площиною рівня**. На рис. 3.20 наведено приклад комплексного креслення цієї площини, яка задана відсіком площини  $\Phi$  (ABC).



$$\begin{aligned}
 &\Phi(ABC) \perp \Pi_1 \\
 &\Phi(ABC) \perp \Pi_3 \\
 &\Phi(ABC) \parallel \Pi_2 \\
 &A_1B_1C_1 \parallel OX \\
 &B_3A_3C_3 \parallel OZ \\
 &(A_2B_2C_2) = \text{н.в.}[ABC]
 \end{aligned}$$

Рис. 3.20

Площина, яка паралельна профільній площині проєкцій, називається **профільною площиною рівня**. На рис. 3.21 наведено приклад комплексного креслення цієї площини, яка задана відсіком площини  $\Sigma$  (ABC).

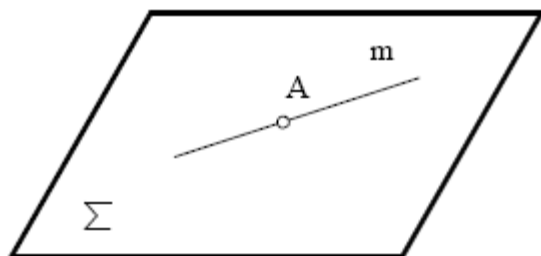


$$\begin{aligned} \Sigma(ABC) \parallel \Pi_3 \\ \Sigma(ABC) \perp \Pi_1 \\ \Sigma(ABC) \perp \Pi_2 \\ A_1B_1C_1 \perp oX \\ B_2A_2C_2 \perp oY \\ (A_3B_3C_3) = n.e.[ABC] \end{aligned}$$

Рис. 3.21

### 3.3 Належність точки і прямої площині

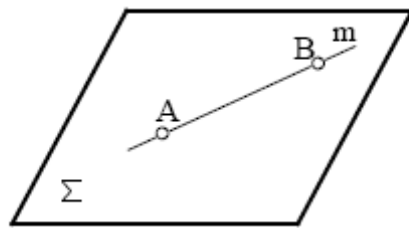
Точка належить площині, якщо вона належить якійсь прямій лінії, яка належить цій площині (рис. 3.22).



$$\begin{aligned} m \in \Sigma \\ A \in m \Rightarrow A \in \Sigma \end{aligned}$$

Рис. 3.22

Пряма лінія належить площині, якщо вона проходить через дві точки цієї площини (рис. 3.23).

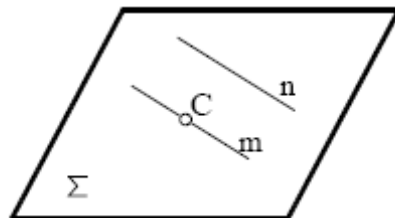


$$A \in \Sigma, B \in \Sigma$$

$$m \supset A, B \Rightarrow m \in \Sigma$$

Рис. 3.23

Пряма лінія належить площині, якщо вона проходить через одну точку цієї площини і паралельна до будь-якої прямої, розташованої у цій площині (рис. 3.24).



$$C \in \Sigma, n \in \Sigma$$

$$m \supset C, m \parallel n \Rightarrow n \in \Sigma$$

Рис. 3.24

Якщо пряма лінія належить площині, її відповідні сліди належать відповідним слідам площини (рис. 3.25).

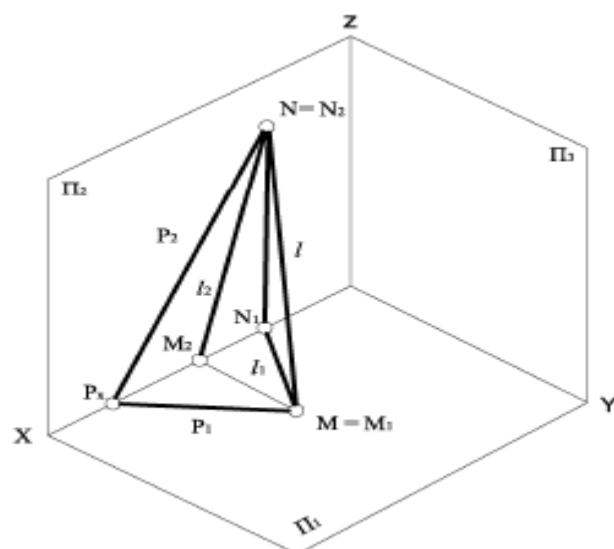


Рис. 3.25

На рис. 3.26 наведено приклад комплексного креслення площини загального положення  $P$ , яка задана слідами  $P_1$  та  $P_2$ , та прямої  $l$ , що належить цій площині.

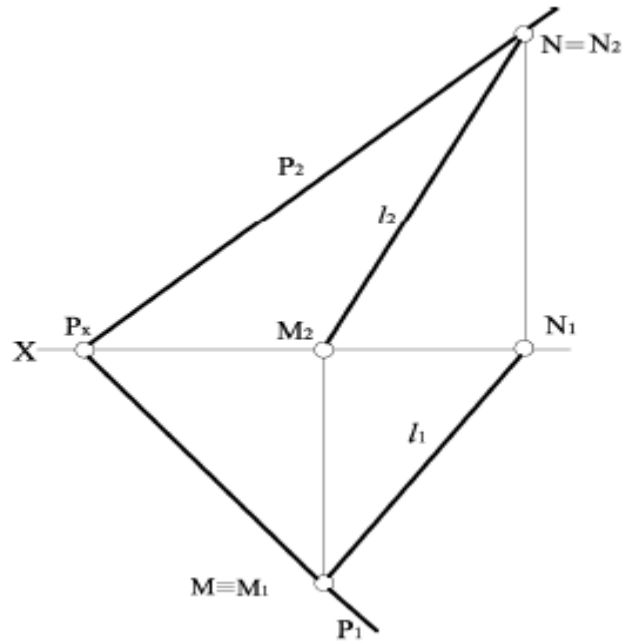


Рис. 3.26

### 3.4 Головні лінії площини

**Лініями рівня площини** називають лінії, що належать даній площині та паралельні до одної з площин проекцій, – це горизонтальні  $h$ , фронтальні  $f$  і профільні  $p$  (рис. 3.27).

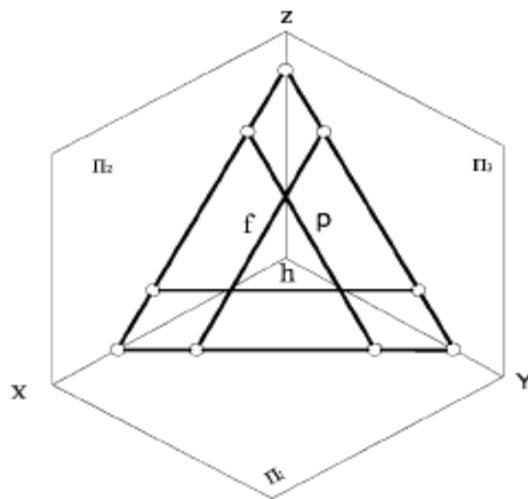
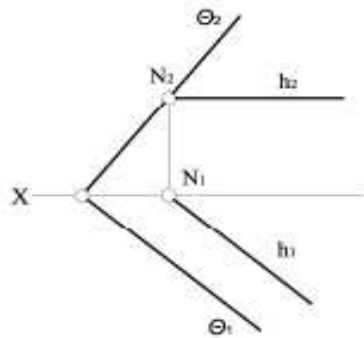


Рис. 3.27

Лінії перетину площини з площинами проекцій – сліди площини – також є горизонтальною  $h$ , фронтальною  $f$  та профільною  $p$  прямими. Їх у цьому випадку називають **нульовими**:  $h^0, f^0, p^0$ .

На рис. 3.28 наведено приклад комплексного креслення горизонтальної прямої площини  $\theta$ , яка задана слідами.

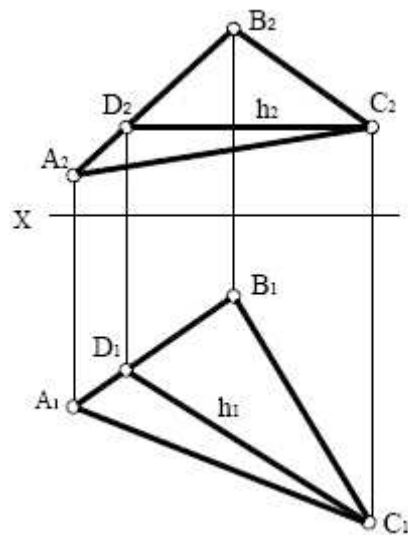
**Горизонталь** – це лінія, що належить площині й паралельна горизонтальній площині проєкцій  $\Pi_1$ .



$$\begin{aligned} (h \in \theta) \wedge (h \parallel \Pi_1) \\ h_2 \parallel oX \\ h_1 \parallel \theta_1 \end{aligned}$$

Рис. 3.28

На рис. 3.29 наведено приклад комплексного креслення горизонтальної прямої площини  $\Sigma$  (ABC), яка задана відсіком площини.



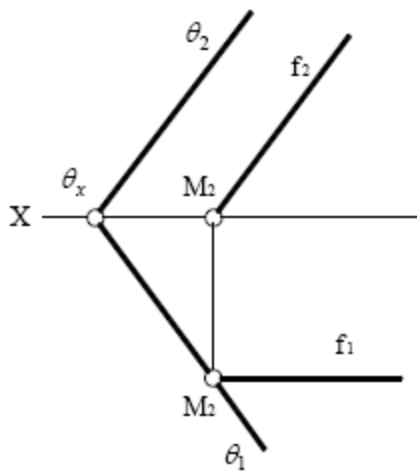
$$\begin{aligned} \Sigma(ABC) \\ (h \in \Sigma) \wedge (h \parallel \Pi_1) \\ h_2 \parallel oX \\ h_2 = D_2C_2 \\ h_1 = D_1C_1 \end{aligned}$$

Рис. 3.29

**Фронталь** – це лінія, що належить площині та паралельна фронтальній площині проєкцій  $\Pi_2$ .

На рис. 3.30 наведено приклад комплексного креслення фронтальної прямої площини  $\theta$ , яка задана слідами.





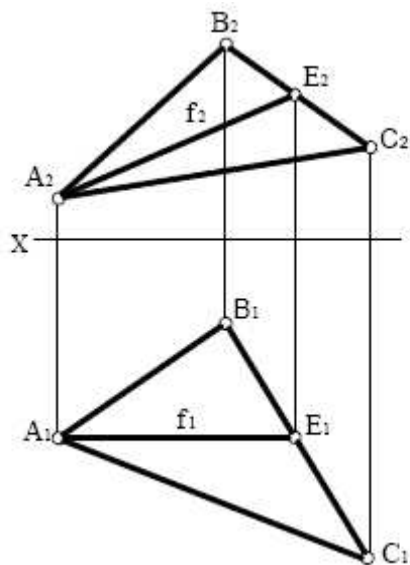
$$(f \in \theta) \wedge (f \parallel \Pi_2)$$

$$f_1 \parallel OX$$

$$f_2 \parallel \theta_2$$

Рис. 3.30

На рис. 3.31 наведено приклад комплексного креслення фронтальної прямої площини  $\Sigma(ABC)$ , яка задана відсіком площини.



$$\Sigma(ABC)$$

$$(f \in \Sigma) \wedge (f \parallel \Pi_2)$$

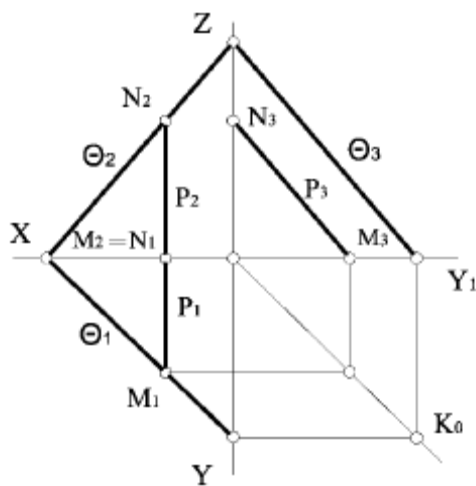
$$f_1 \parallel OX$$

$$f_1 = A_1E_1$$

$$f_2 = A_2E_2$$

Рис. 3.31

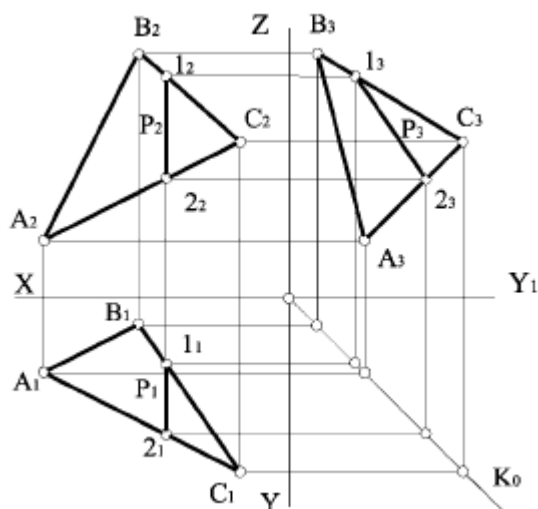
**Профільна пряма** – це лінія, що належить площині та паралельна до профільної площини проєкцій  $\Pi_3$ . На рис. 3.32 наведено приклад комплексного креслення профільної прямої площини  $\theta$ , яка задана слідами.



$$\begin{aligned} (P \in \theta) \wedge (P \parallel \Pi_3) \\ (P_1 \wedge P_2) \perp OX \\ P_3 \parallel \theta_3 \end{aligned}$$

Рис. 3.32

На рис. 3.33 наведено приклад комплексного креслення профільної прямої площини  $\Sigma(ABC)$ , яка задана відсіком площини.



$$\begin{aligned} \Sigma(ABC) \\ (P \in \Sigma) \wedge (P \parallel \Pi_3) \\ (P_1 \wedge P_2) \perp OX \\ P_1 = 1_1 2_1 \\ P_2 = 1_2 2_2 \\ P_3 = 1_3 2_3 \end{aligned}$$

Рис. 3.33

До особливих ліній площини належать лінії найбільшого нахилу площини до відповідної площини проєкцій – це лінії, які належать площині й перпендикулярні або до горизонтальної, або до фронтальної, або до профільної прямої площини. Ця умова використовується в тих випадках, коли площина задана не слідами. Якщо площина задана слідами, замість горизонтальної, фронтальної або профільної прямої використовують відповідні сліди.

Лінія найбільшого нахилу використовується для визначення натуральної величини кута нахилу площини до заданої площини проєкцій.

На комплексному кресленні (рис. 3.34) наведено приклад побудови лінії найбільшого нахилу  $m$  площини  $\theta$ , заданої слідами площини, до горизонтальної площини проєкцій, а також знаходження кута  $\alpha$  нахилу площини  $\theta$  до  $\Pi_1$ . У лінії

найбільшого нахилу  $m$  на комплексному кресленні горизонтальна проекція  $m_1$  завжди перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі або горизонтального сліду  $\theta_1$ .

Фронтальна проекція  $m_2$  визначається за умовою її належності до площини  $\theta$ , тобто горизонтальний слід  $M (M_1, M_2)$  і фронтальний слід  $N (N_1, N_2)$  цієї прямої мають належати однойменним слідам площини.

Кут, що утворюється між лінією  $m$  і її горизонтальною проекцією  $m_1$ , є кутом нахилу площини  $\theta$  до горизонтальної площини проекцій, тобто кутом  $\alpha$ . Натуральну величину цього кута на комплексному кресленні (рис. 3.34) знаходимо методом прямокутного трикутника.

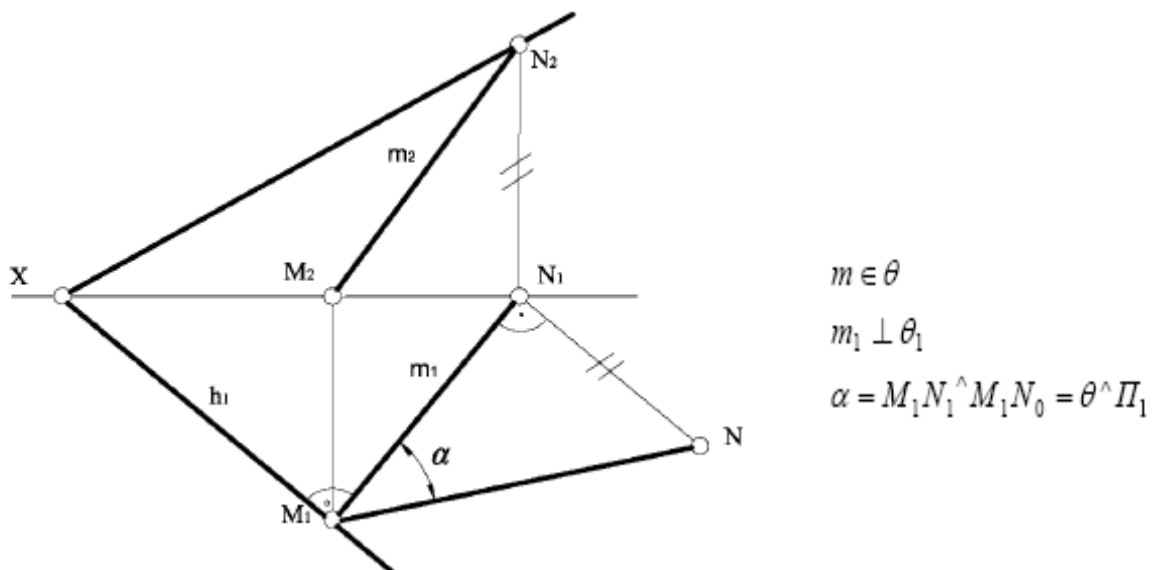


Рис. 3.34

Лекція 4 – 5

## 4. ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

### 4.1 Паралельність площин

Якщо дві прямі перетину однієї площини відповідно паралельні до двох прямих перетину другої площини, – площини паралельні.

Якщо площини задані слідами і відповідні сліди площин паралельні, то і площини паралельні.

$$(\theta_1 \parallel \Sigma_1) \wedge (\theta_2 \parallel \Sigma_2) \wedge (\theta_3 \parallel \Sigma_3) \Leftrightarrow \theta \parallel \Sigma.$$

Із рівняння випливає, що як хоча б одна пара відповідних слідів перетинається, то і площини перетинаються.

На рис. 4.1 наведено приклад побудови через точку  $A$  площини  $\Sigma(l \cap m)$ , паралельної заданій  $\theta (a \cap b)$ .

На рис. 4.2 наведено приклад побудови через точку А площини  $\Sigma(l \cap m)$ , паралельної заданій  $\theta$  ( $a \parallel b$ ). Для цього в площині  $\theta$ , яка задана паралельними прямими, будемо додаткову пряму  $n$ , яка належить цій площині, тому що проходить через дві точки цієї площини.

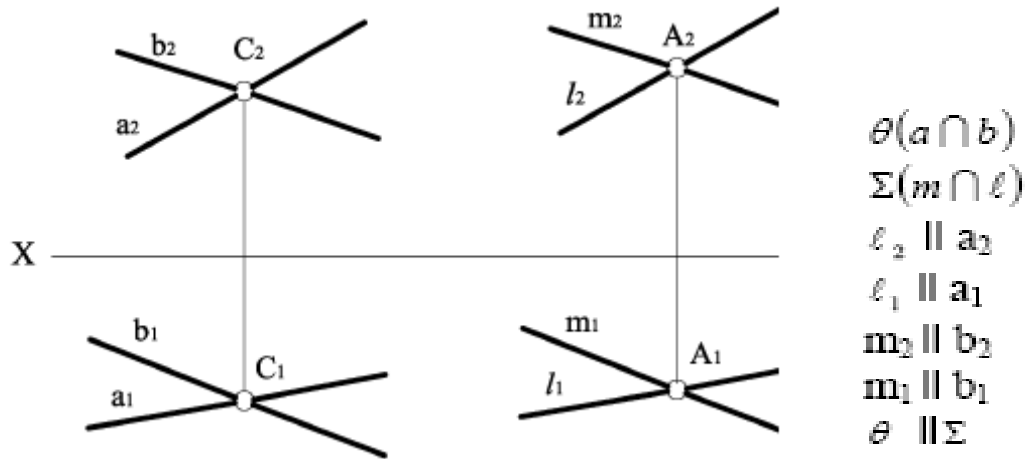


Рис. 4.1

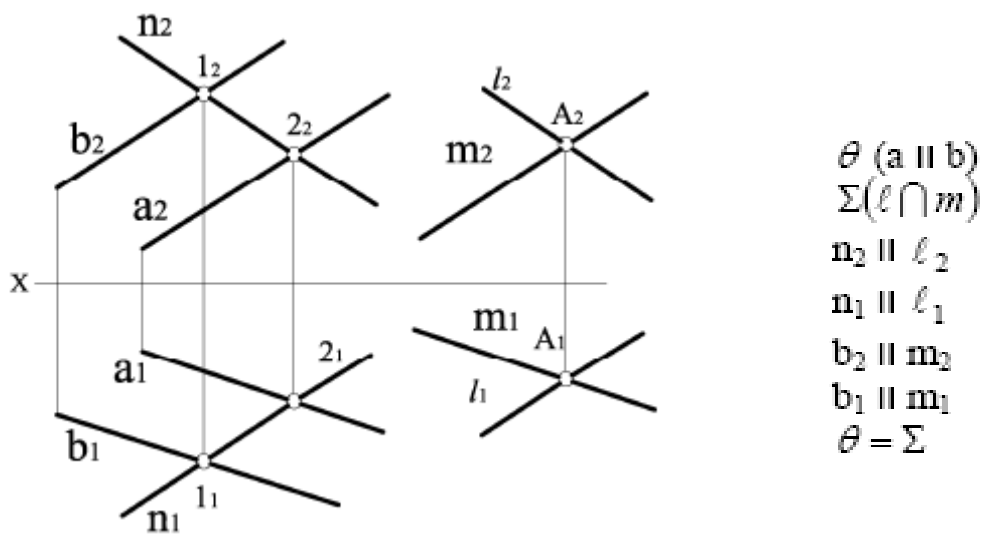
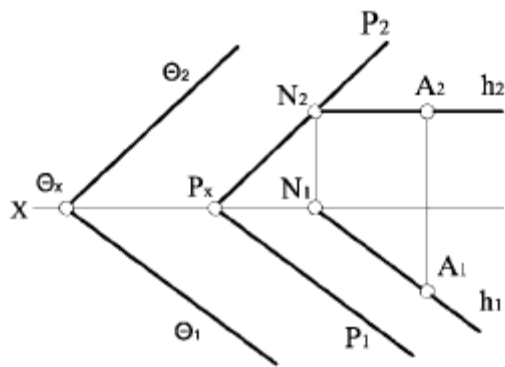


Рис. 4.2

На рис. 4.3 наведено приклад комплексного креслення двох паралельних площин загального положення, які задані слідами, а також приклад побудови точки А, яка належить площині Р, за допомогою горизонтальної прямої цієї площини.



$$\theta_2 \parallel P_2$$

$$\theta_1 \parallel P_1$$

$$\theta \parallel P$$

$$h_2 \parallel ox$$

$$A_2 \in h_2$$

$$A_1 \in h_1$$

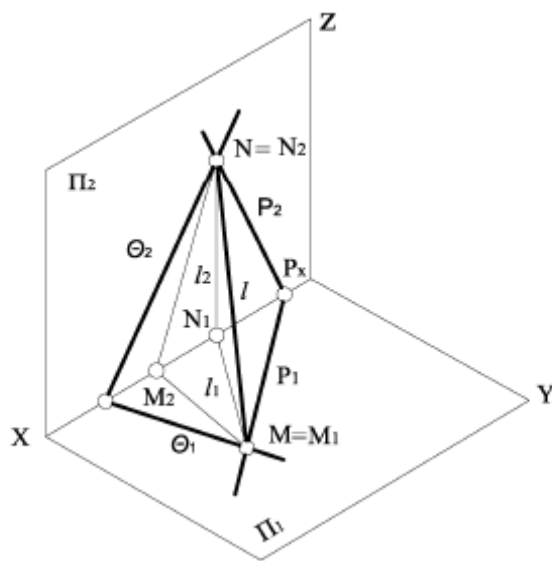
$$(h \in P) \Rightarrow (A \in P)$$

Рис. 4.3

## 4.2 Перетин площин

Дві площини перетинаються по прямій лінії, тому необхідно визначити будь-які дві точки, спільні для цих площин, або одну точку і напрям лінії перетину.

Якщо площини задані слідами і сліди перетинаються в межах креслення, то необхідно визначити точки перетину відповідних слідів площин. Ці точки спільні для двох площин. Вони є слідами лінії перетину цих площин (рис. 4.4).



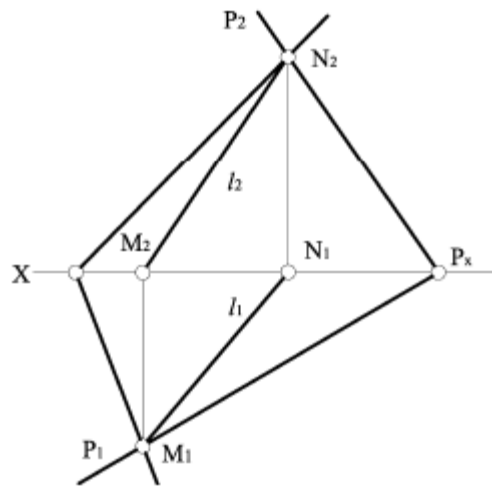
$$\theta_2 \cap P_2 = N_2$$

$$\theta_1 \cap P_1 = M_1$$

$$\theta \cap P = l$$

Рис. 4.4

На рис. 4.5 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину двох площин, які задані слідами.

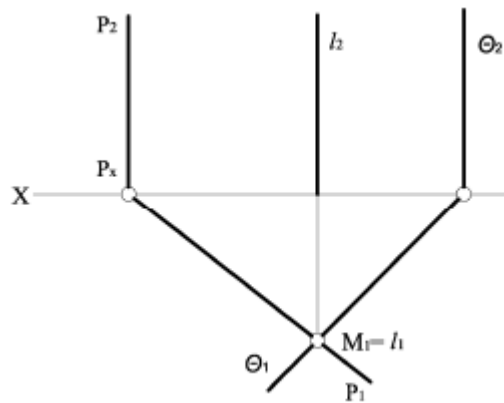


$$\begin{aligned}\theta_2 \cap P_2 &= N_2 \\ \theta_1 \cap P_1 &= M_1 \\ \ell_2 &= M_2 N_2 \\ \ell_1 &= M_1 N_1\end{aligned}$$

Рис. 4.5

Для визначення лінії перетину двох площин знаходимо спільні точки на перетині фронтальних і горизонтальних слідів:  $\theta_2 \cap P_2 = N_2$ ;  $\theta_1 \cap P_1 = M_1$ . Потім будуємо фронтальну проекцію  $M_2$  горизонтального сліду  $M_1$  та горизонтальну проекцію  $N_1$  фронтального сліду  $N_2$ , а тоді – проекцію лінії перетину  $\ell_1$  та  $\ell_2$ , з'єднуючи відповідні проекції слідів.

Якщо дві площини перетину є проекційними відносно однієї з площин проєкцій, то лінія їх перетину – проекційна пряма (рис. 4.6).



$$\begin{aligned}P &\perp \Pi_1 \\ \theta &\perp \Pi_1 \\ \theta_1 \cap P_1 &= M_1 \\ M_1 &\equiv \ell_1 \\ \ell_2 &\perp OX \\ \ell &\perp \Pi_1\end{aligned}$$

Рис. 4.6

У даному випадку результатом перетину двох горизонтально проєкційних площин є горизонтально проєкційна пряма  $l$ :  $\theta \cap P = l$ .

На рис. 4.7 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину двох площин: одна – загального положення, друга – горизонтально проєкційна.

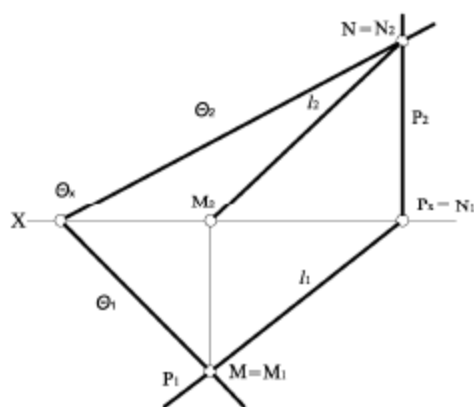


Рис. 4.7

$$\begin{aligned}
 P &\perp P_1 \\
 \theta_1 \cap P_1 &= M_1 \\
 \theta_2 \cap P_2 &= N_2 \\
 \ell_1 &= M_1 N_1 \\
 \ell_2 &= M_2 N_2 \\
 \theta \cap P &= \ell
 \end{aligned}$$

При розв'язанні визначаються точки перетину слідів цих площин. Характерною властивістю проекційних площин є збиральні властивості: горизонтальна проекція лінії перетину заданих площин збігається з горизонтальним слідом площини  $P$ . Звідси випливає, що в подібних випадках одна з проекцій лінії перетину завжди відома, а інші необхідно визначити, спираючись на закони проекційного зв'язку та закон належності.

На рис. 4.8 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину площини загального положення  $\theta$  ( $A_1 B_1 C_1$ ) з фронтально проекційною  $P$ , яка задана слідом.

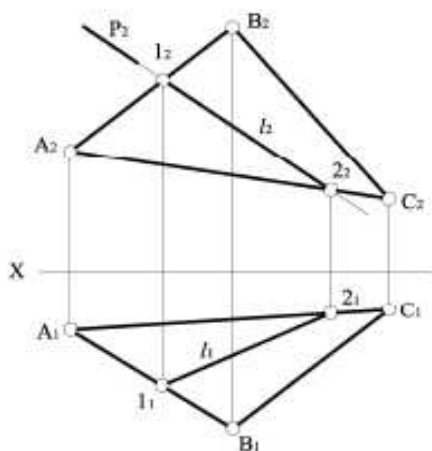


Рис. 4.8

$$\begin{aligned}
 P &\perp P_2 \\
 P_2 \cap (A_2 B_2 C_2) &= 1_2 - 2_2 \\
 \ell_2 &= 1_2 - 2_2 \\
 \ell_1 &= 1_1 - 2_1 \\
 P \cap \theta &= \ell
 \end{aligned}$$

Завдяки збиральним властивостям проекційних площин на  $P_2$  маємо готову проекцію лінії перетину. Використовуючи проекційний зв'язок і закон належності, будемо горизонтальну проекцію лінії перетину.

У більш загальних випадках, коли площини задані слідами, а сліди не перетинаються в межах креслення або обидві площини задані лініями або плоскими відсіками, необхідно для побудовання лінії перетину двох площин застосовувати метод допоміжних січних площин, якими є в більшості випадків проекційні площини або площини рівня.

На рис. 4.9 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину двох площин загального положення, які задані відсіками площин.

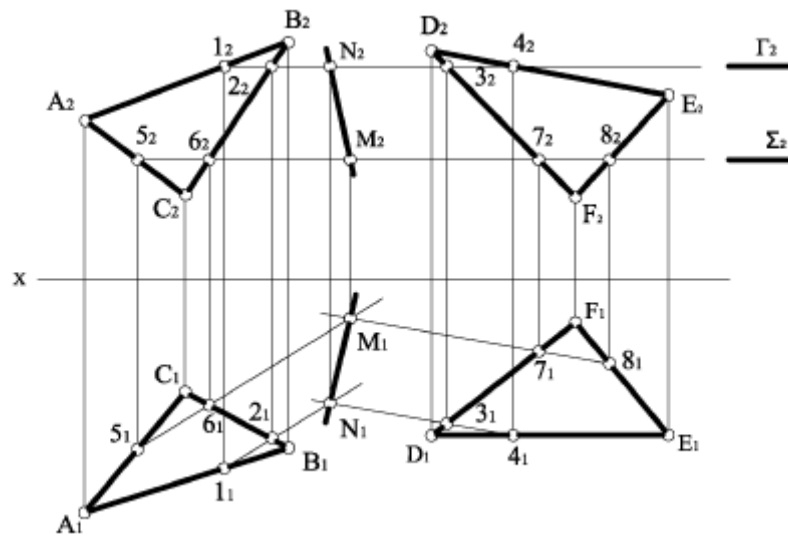


Рис. 4.9

Визначення лінії перетину площини  $\theta(ABC)$  з площиною  $\Lambda(DEF)$  проводимо в такій послідовності:

1. Проводимо допоміжну січну горизонтальну площину рівня  $\Gamma$ , яка перетинає обидві площини,  $\Gamma_2 \parallel ox$ .

2. Визначаємо фронтальні проекції ліній перетину обох площин завдяки збиральним властивостям площини рівня:

$$\theta_2 (A_2 B_2 C_2) \cap \Gamma_2 = 1_2 - 2_2, \quad \Lambda_2 (D_2 E_2 F_2) \cap \Gamma_2 = 3_2 - 4_2.$$

3. Використовуючи проекційний зв'язок і закон належності, визначаємо горизонтальні проекції ліній перетину обох площин, а також спільну точку, яка належить одночасно трьом площинам:

$$(1_1 - 2_1) \cap (3_1 - 4_1) = N_1.$$

4. Використовуючи проекційний зв'язок і закон належності, визначаємо фронтальну проекцію спільної точки  $N_2$ , яка належить сліду  $\Gamma_2$ .

Для визначення лінії перетину площин  $\theta$  і  $\Lambda$  необхідна ще одна спільна точка  $M$ , яку знаходимо, використовуючи ще одну допоміжну площину  $\Sigma$  у такій самій послідовності.

$$\theta(ABC) \cap \Lambda(DEF) = MN.$$

### 4.3 Паралельність прямої і площини

Пряма лінія паралельна до площини, якщо в цій площині є пряма лінія, котра паралельна до заданої прямої.

На рис. 4.10 наведено приклад побудови на комплексному кресленні через точку  $A$  прямої, яка паралельна до заданої площини  $\theta$ .



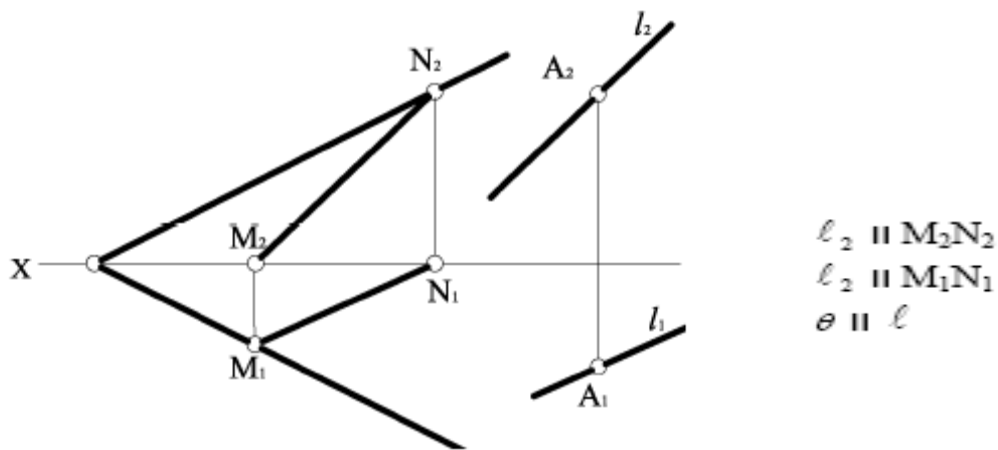


Рис. 4.10

Спочатку в площині  $\theta$  будемо довільну пряму  $MN$ , яка належить до площини, а потім через точку  $A$  проводимо пряму  $l \parallel MN$ .

Через точку, що не належить до площини, можна провести нескінченну кількість прямих, які паралельні до заданої площини. Для отримання одного варіанта побудови необхідні додаткові умови, наприклад побудувати пряму, котра паралельна одночасно до двох площин.

На рис. 4.11 наведено приклад побудови на комплексному кресленні через точку  $D$  прямої  $l$ , яка паралельна до заданої площини  $\theta(ABC)$  і горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ .

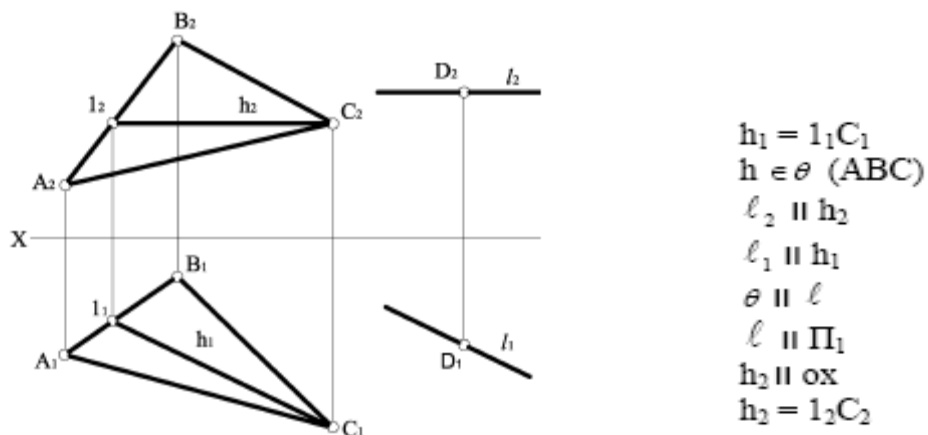


Рис. 4.11

#### 4.4 Перетин прямої і площини

Задача на знаходження точки перетину прямої з площиною належить до позиційних задач, які визначають взаємне положення геометричних фігур, взаємну належність геометричних фігур, а також перетин геометричних фігур.

При перетині прямої з площиною для покращення наочності креслення для видимих ліній застосовують суцільні основні лінії, а для невидимих ліній – штрихові. При визначенні видимості ліній на комплексному кресленні вважають, що:

- а) площини й поверхні непрозорі;
- б) спостерігач завжди перебуває в першій чверті або першому октанті.
- в) промінь зору від спостерігача є перпендикуляром до тієї площини проєкцій, відносно до якої визначається видимість.

На рис. 4.12 наведено наочне зображення конкуруючих точок відносно  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ .

Точки, що належать різним геометричним фігурам і лежать на одному проєкціювальному промені, називаються конкуруючими у видимості відносно тієї площини проєкцій, до якої проєкціювальний промінь є перпендикуляром.

Точки А і В є конкуруючими відносно горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ , а точки С і D – відносно фронтальної площини проєкцій  $\Pi_2$ .

На рис. 4.13 наведено приклад зображення конкуруючих точок на комплексному кресленні.

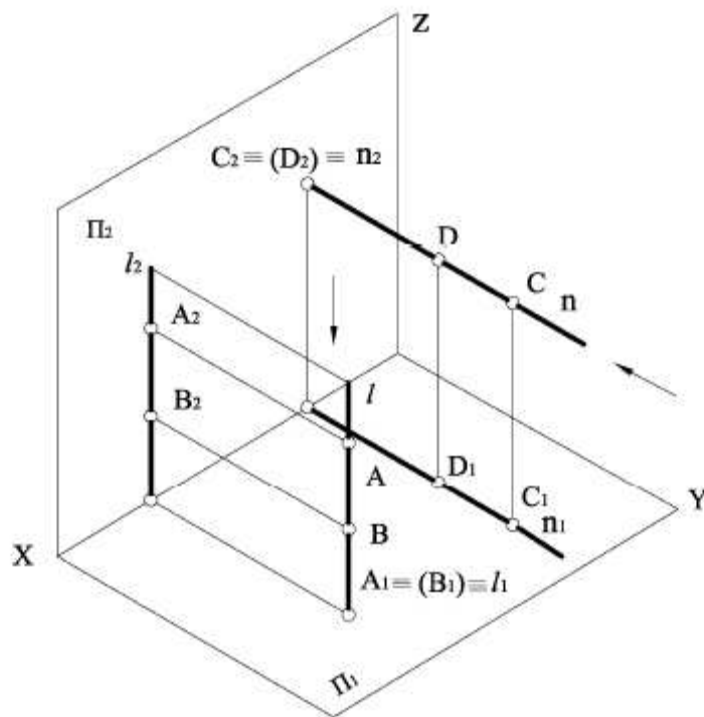


Рис. 4.12

Точки А і В лежать на одному проєкціювальному промені  $l \perp \Pi_1$ , ці точки називають конкуруючими у видимості відносно площини  $\Pi_1$ . Точка А видима, вона закриває точку В, яка невидима і яку беруть у дужки.

Точки С і D також лежать на одному проєкціювальному промені  $n \perp \Pi_2$ , ці точки називають конкуруючими у видимості відносно площини  $\Pi_2$ . Точка С –

видима, D – невидима. На комплексному кресленні з двох конкуруючих точок видимою буде та проекція, котра розташована на більшій відстані від площини проєкцій, відносно якої вони конкурують.

Задача на перетин прямої з площиною є однією з основних позиційних задач.

На рис. 4.14 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину фронтально проєкційної площини  $\theta$  і горизонтально проєкційної прямої  $l$ .

На рис. 4.15 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення  $l$  із горизонтально проєкційною площиною  $\theta(ABC)$ .

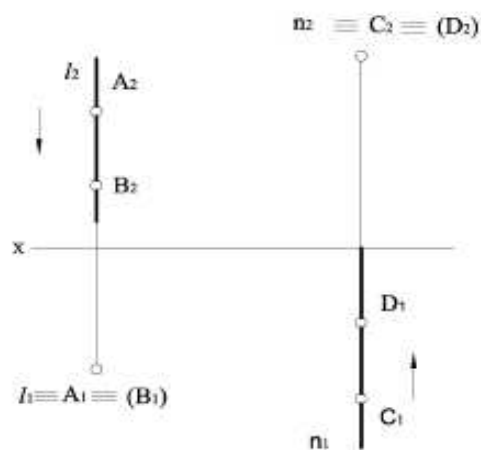
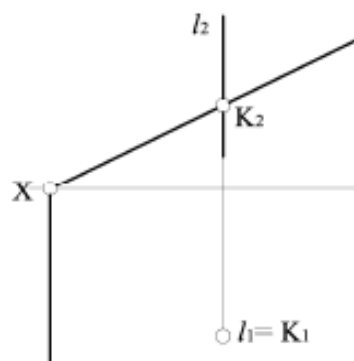
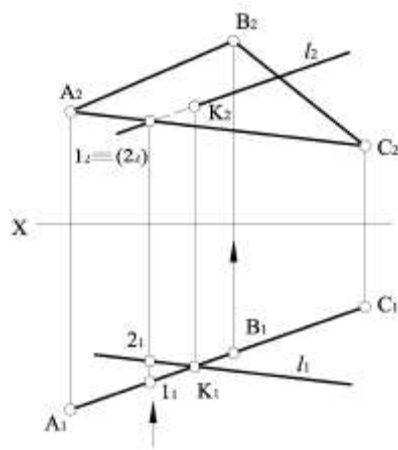


Рис. 4.13



$$\begin{aligned} \ell_2 \cap \theta_2 &= K_2 \\ \ell_1 &\equiv K_1 \end{aligned}$$

Рис. 4.14



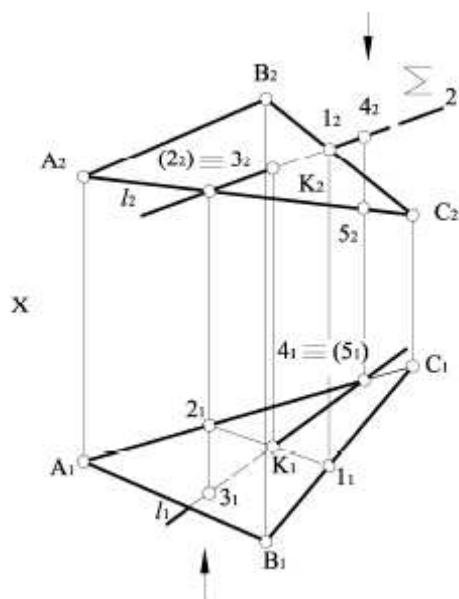
$$\theta(ABC) \perp \Pi_1$$

$$(A_1B_1C_1) \cap \ell_1 = K_1$$

Рис. 4.15

Завдяки збиральним властивостям проєкційних площин  $\theta(ABC) \perp \Pi_1$  на  $\Pi_1$  маємо готову проєкцію точки перетину  $K_1$ , використовуючи проєкційний зв'язок і належність точки  $K$  прямій  $l$ , будуємо фронтальну проєкцію точки перетину  $K_2$ .

На рис. 4.16 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення  $l$  із площиною загального положення  $\theta(ABC)$ .



$$\ell_2 \equiv \Sigma_2$$

$$\Sigma_2 \cap \theta_2 = 1_2 - 2_2$$

$$(1_1 - 2_1) \cap \ell_1 = K_1$$

Рис. 4.16

Алгоритм розв'язання задачі складається з чотирьох операцій:

1. Пряму поміщають у допоміжну площину: через пряму проводять фронтально проєкційну площину  $\Sigma$  ( $l \equiv \Sigma$ ).

2. Знаходять лінію перетину заданої площини  $\theta$  (ABC) з допоміжною  $\Sigma$  :  $\Sigma_2 \cap \theta_2 = l_2 - 2_2$ . За фронтальною проекцією визначають горизонтальну проекцію  $1_1-2_1$ .

3. Визначають точку перетину двох прямих:  $(1_1 - 2_1) \cap l_1 = K_1$ , її фронтальну проекцію визначають за вертикальною відповідністю.

4. Видимість відрізків прямої  $l$  визначають за допомогою конкуруючих точок 2 і 3 для фронтальної площини проекцій, та точок 4 і 5 – для горизонтальної площини проекцій.

На рис. 4.17 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення  $n$  із площиною загального положення  $\theta$ , яка задана слідами.

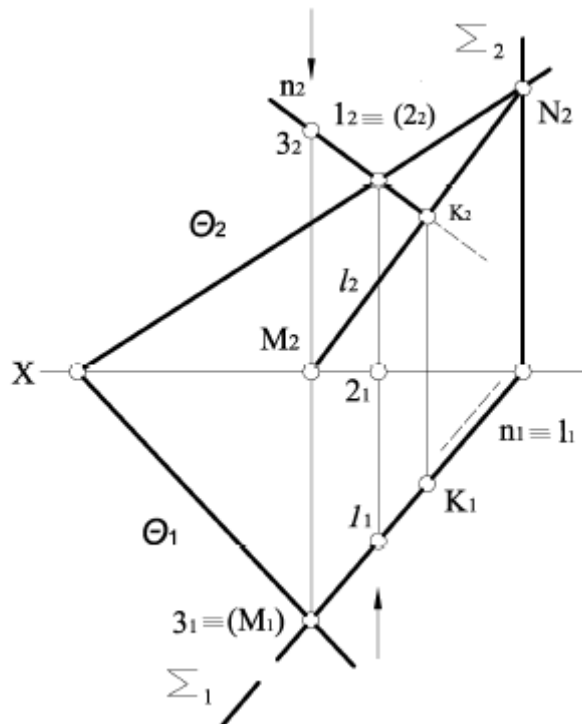


Рис. 4.17

Послідовність визначення точки перетину  $\theta \cap n = K$  складається з чотирьох операцій:

1. Через пряму  $n$  проводимо горизонтально проекційну площину  $\Sigma$ :

$$n_1 \equiv \Sigma.$$

2. Знаходимо лінію перетину заданої площини  $\theta$  з допоміжною  $\Sigma$ :

$$\theta \cap \Sigma = l, \text{ тобто } l_1 = M_1 N_1, \text{ а } l_2 = M_2 N_2.$$

3. Визначаємо точку перетину двох прямих:

$$n_2 \cap l_2 = K_2,$$

а  $K_1$  визначаємо за вертикальною відповідністю.

4. Видимість відрізків прямої  $n$  визначаємо за допомогою конкуруючих точок 1 і 2 для фронтальної площини проекцій та 3 і М – для горизонтальної площини проекцій.

## 4.5 Перпендикулярність прямої і площини

Пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна до кожної з двох прямих перетину, котрі належать цій площині.

Якщо в площині брати не довільні прямі перетину, а її горизонталь та фронталь, виникає можливість використати теорему про проєкціювання прямого кута.

Якщо одна з двох взаємно перпендикулярних прямих є прямою окремого положення, – прямий кут між ними проєкціюється без спотворень на ту площину проєкцій, до якої пряма окремого положення є паралельною.

Якщо пряма  $l$  перпендикулярна до площини  $\Sigma$ , – її горизонтальна проекція  $l_1$  перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі  $h_1$  цієї площини, а фронтальна проекція  $l_2$  перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі  $f_2$  цієї площини.

Якщо пряма  $l$  перпендикулярна до площини, заданої слідами, – її горизонтальна проекція  $l_1$  перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонтального сліду  $h_1^0$  цієї площини, а фронтальна проекція  $l_2$  перпендикулярна до фронтальної проекції фронтального сліду  $f_2^0$  цієї площини.

На рис. 4.18 наведено приклад побудови перпендикуляра до площини  $\theta$ , яка задана головними лініями цієї площини в точці К.

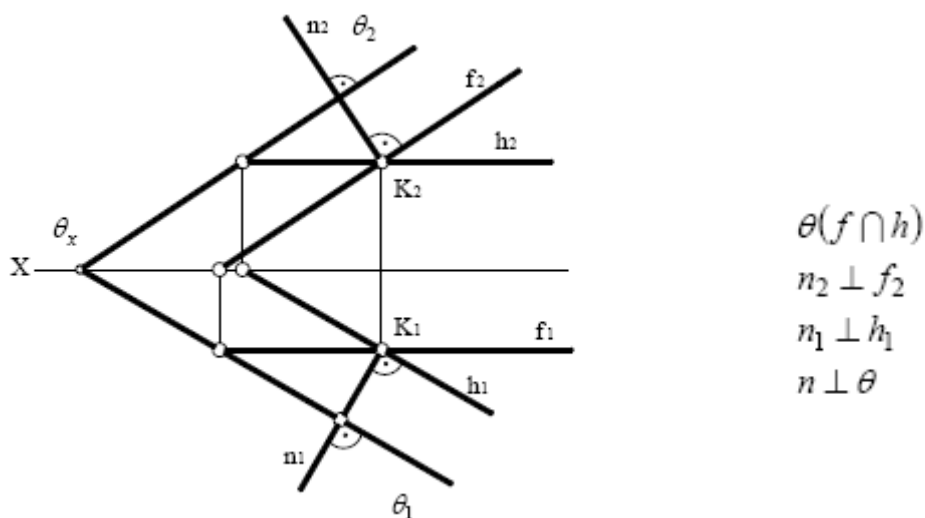
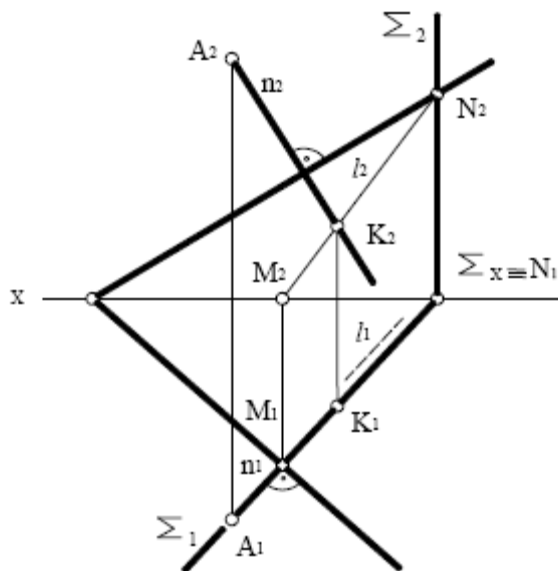


Рис. 4.18

У наступному прикладі (рис. 4.19) площина загального положення  $\theta$  задана слідами. Необхідно з точки А опустити перпендикуляр на площину  $\theta$  та знайти його основу.



$$\begin{aligned}
 A &\in n \\
 n_2 &\perp \theta_2 \\
 n_1 &\perp \theta_1 \\
 \Sigma_1 &\equiv n_1 \\
 \theta \cap \Sigma &= \ell \\
 \ell_2 &= M_2 N_2 \\
 \ell_1 &= M_1 N_1 \\
 n_2 \cap \ell_2 &= K_2
 \end{aligned}$$

Рис. 4.19

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1. Із точки  $A$  опускаємо перпендикуляр  $n$  до площини  $\theta$ , при цьому  $n_2 \perp \theta_2$ , а  $n_1 \perp \theta_1$ .
2. Основу перпендикуляра визначаємо за допомогою допоміжної горизонтально проєкційної площини  $\Sigma$  ( $n_1 \equiv \Sigma_1$ ).
3. Знаходимо лінію перетину заданої площини  $\theta$  з допоміжною  $\Sigma$ :  
 $\ell_1 = M_1 N_1$ ,  $\ell_2 = M_2 N_2$ .
4. Визначаємо точку перетину:  $n_2 \cap \ell_2 = K_2$ , а  $K_1$  визначаємо за вертикальною відповідністю.

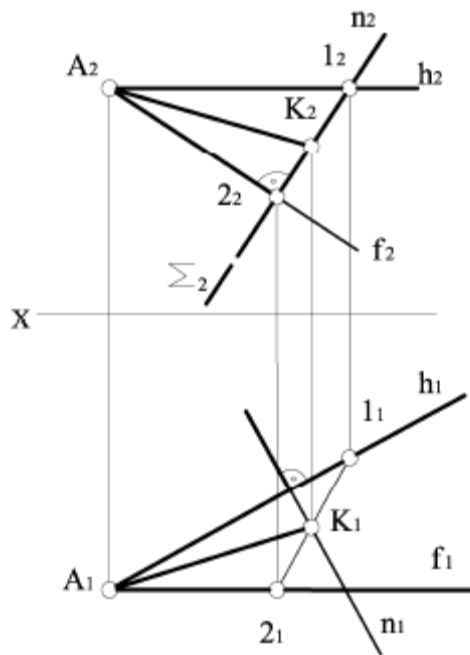
На рис. 4.20 наведено приклад визначення відстані від точки  $D$  до площини загального положення  $ABC$ , яка задана відсіком площини. Для цього необхідно з точки  $D$  опустити перпендикуляр на площину  $ABC$ , визначити його основу та знайти натуральну величину відрізка цього перпендикуляра.

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1. Будуємо головні лінії площини  $ABC$ :  $h$  – горизонталь,  $f$  – фронталь.
2. З точки  $D$  будуємо проєкції перпендикуляра  $n$ :  $n_2 \perp f_2$ ,  $n_1 \perp h_1$ .
3. Основу перпендикуляра  $n$  визначаємо за допомогою допоміжної горизонтально проєкційної площини  $\Sigma$ , що перетинає відсік по прямій 3–4. Основою перпендикуляра є точка  $K$ , фронтальну проєкцію якої знаходимо на  $P_2$ :  
 $n_2 \cap (3_2 - 4_2) = K_2$ , а  $K_1$  визначаємо за вертикальною відповідністю.
4. Проєкції відстані від точки до площини –  $D_1 K_1$  і  $D_2 K_2$ . Способом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину відрізка  $[DK]$ , що вимірює відстань від точки  $D$  до площини  $ABC$ .







$$\begin{aligned}
 &h_2 // oX \\
 &f_2 \perp n_2 \\
 &h_1 \perp n_1 \\
 &f_1 // oX \\
 &\theta(h \cap f) \perp n \\
 &\Sigma_2 \cap (h_2 \cap f_2) = l_2 - 2_2 \\
 &(l_1 - 2_1) \cap n_1 = K_1 \\
 &AK \perp n
 \end{aligned}$$

Рис. 4.21

## 4.7 Перпендикулярність площин

Дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одній із них належить пряма, яка перпендикулярна до іншої площини.

Побудову площини  $P$ , яка перпендикулярна до площини  $\theta$ , можна виконати двома шляхами:

1. Площину  $P$  будуємо через пряму  $m$ , яка перпендикулярна до площини  $\theta$ :  $(m \perp \theta), (m \in P) \Rightarrow P \perp \theta$ .

2. Площину  $P$  будуємо перпендикулярно до прямої  $n$ , яка лежить у площині  $Q$  або паралельна до цієї площини:  $(n \parallel \theta), (n \perp P) \Rightarrow P \perp \theta$ , оскільки через пряму  $m$  можливо провести безліч площин (перший шлях), а також у площині або паралельно до неї можливо провести безліч прямих  $n$  (другий шлях), задача має безліч розв'язків. Для отримання одного розв'язку необхідно накласти додаткові умови.

На рис. 4.22 наведено приклад побудови на комплексному кресленні для заданої площини  $P(\triangle ABC)$  із точки  $D$  перпендикулярної площини  $\theta$ .

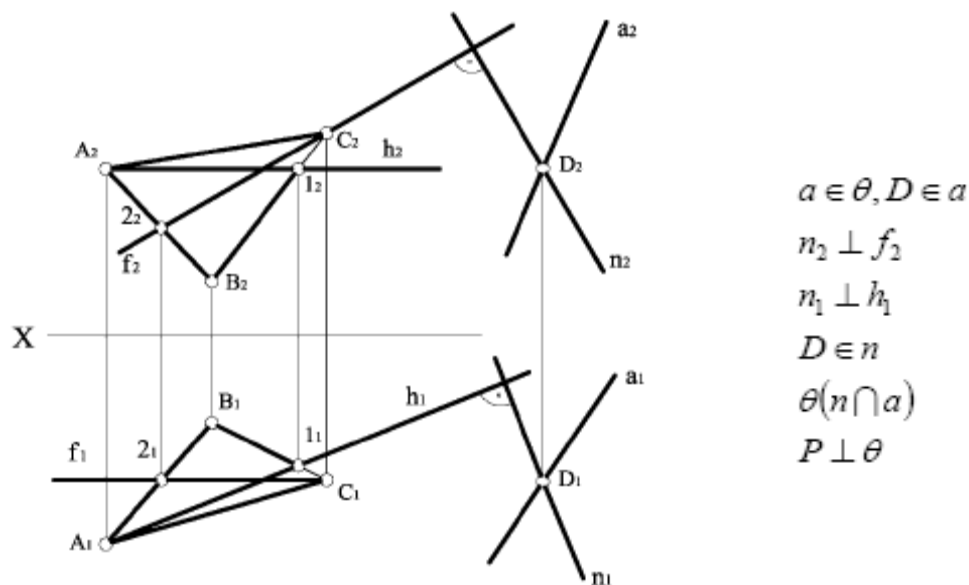


Рис. 4.22

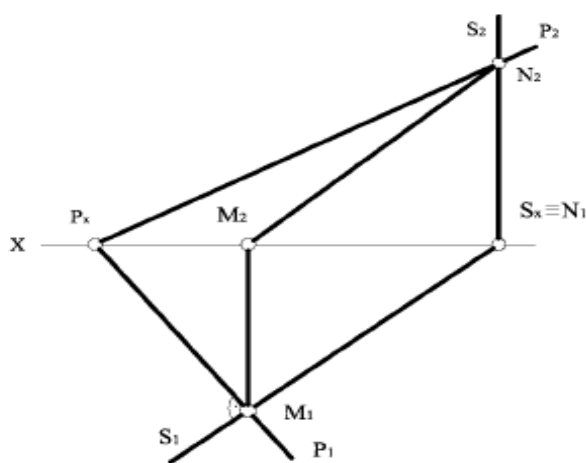
Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1. Будуємо головні лінії площини ABC: h – горизонталь, f – фронталь.
2. З точки D будуюмо пряму n, яка перпендикулярна до площини ABC:  $n_2 \perp f_2$ ,  $n_1 \perp h_1$ .
3. Через точку D будуюмо пряму a загального положення:  $P(ABC) \perp \theta(n \cap a)$ .

На рис. 4.23 наведено приклад побудови на комплексному кресленні двох взаємно перпендикулярних площин, які задані слідами, одна з яких – площина загального положення P, а інша – горизонтально проєкційна площина S.

Якщо площина S перпендикулярна до площини  $\Pi_1$  та до площини P, –  $S \perp P_1$  як до однієї з прямих у площині  $\Pi_1$ .

Проте якщо однойменні сліди двох площин загального положення взаємно перпендикулярні, самі площини не перпендикулярні між собою, оскільки при цьому не дотримується умова перпендикулярності площин.



$$(S \perp \Pi_1), (S \perp P) \Rightarrow S \perp P_1$$

Рис. 4.23

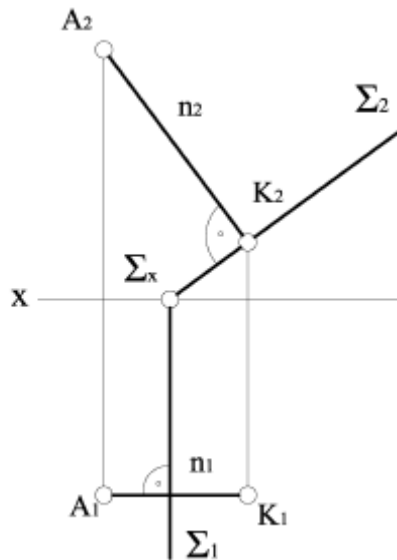
Лекція 6 –7

## 5. МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ

## 5.1 Спосіб заміни площин проекцій

У багатьох випадках розв'язання задачі значно спрощується, якщо прямі лінії, площини, елементи геометричних фігур займають окреме положення.

На рис. 5.1 наведено приклад знаходження відстані від точки А до фронтально проекційної площини  $\Sigma$ , яка задана слідами.



$$\begin{aligned} n_2 &\perp \Sigma_2 \\ n_1 &\perp \Sigma_1 \\ n_2 \cap \Sigma_2 &= K_2 \\ A_2 K_2 &= \text{н.в.}[AK] \end{aligned}$$

Рис. 5.1

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1. З точки А опускаємо перпендикуляр до площини  $\Sigma$ :

$n_2 \perp \Sigma_2$ ,  $n_1 \perp \Sigma_1$ , оскільки  $\Sigma_2 = f_2^0$ ,  $\Sigma_1 = h_1^0$ .

2. Завдяки збиральним властивостям проекційних площин на  $\Pi_2$  знаходимо фронтальну проекцію точки перетину перпендикуляра  $n$  з площиною  $\Sigma$ :  $n_2 \cap \Sigma_2 = K_2$ . Горизонтальну проекцію  $K_1$  визначаємо за вертикальною відповідністю.

3. Пряма  $AK$  є фронталлю, тому  $A_2 K_2 = \text{н.в.}[AK]$ .

Переміщення геометричної фігури із загального положення в окреме можна виконати двома шляхами:

1. Переміщенням площин проекцій у положення, відносно яких плоскі фігури займали б окремі положення.

2. Переміщенням плоскої фігури в просторі в окреме положення відносно нерухомих площин проекцій.

Перший шлях лежить в основі способу заміни площин проекцій, а другий – в основі інших способів.

Суть способу полягає в тому, що самі геометричні фігури не змінюють свого положення, а в системі площин проекцій  $\Pi_2$  та  $\Pi_1$  послідовно замінюють одну, дві або більше площин проекцій. При цьому нова площина проекцій має бути перпендикулярною до тієї площини проекцій, яка залишається незмінною,

а до плоских геометричних фігур вона має бути паралельною або перпендикулярною.

На рис. 5.2 зображена умовно перспективна модель проєкціювання точки  $A$  на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ , а також на додаткову площину  $\Pi_4$ , яка перпендикулярна до  $\Pi_1$ . У результаті утворилась нова система площин проєкцій  $\Pi_1/\Pi_4$  зі своєю віссю проєкцій  $x_{14}$  як наслідок перетину площин проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_4$ . Положення горизонтальної проєкції  $A_1$  точки  $A$  залишається без зміни, оскільки точка  $A$  та площина  $\Pi_1$  не змінювали свого положення в просторі. Для знаходження нової фронтальної проєкції точки  $A$  —  $A_4$  достатньо виконати ортогональне проєкціювання точки  $A$  на площину  $\Pi_4$ . Відстань нової фронтальної проєкції  $A_4$  точки  $A$  від нової осі  $x_{14}$  дорівнює відстані від старої фронтальної проєкції  $A_2$  точки  $A$  до старої осі  $x_{12}$ :  $|A_4 x_{14}| = |A_2 x_{12}| = |AA_1|$ .

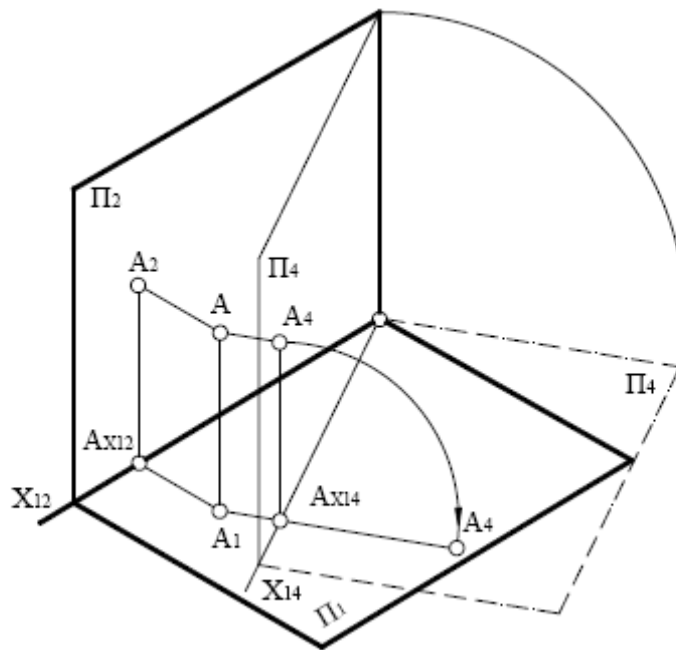
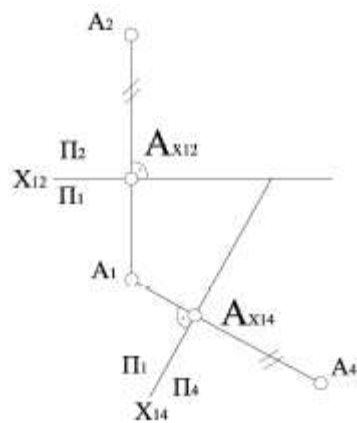


Рис. 5.2

Для побудування комплексного креслення нова площина проєкцій  $\Pi_4$  обертається навколо осі  $x_{14}$  до суміщення з горизонтальною площиною проєкцій  $\Pi_1$  (рис. 5.3). Напрямок обертання не впливає на результат розв'язання задачі. Обертання виконують таким чином, щоби не було накладання нових проєкцій на старі.



$$|A_4 A_{x14}| = |A_2 A_{x12}|$$

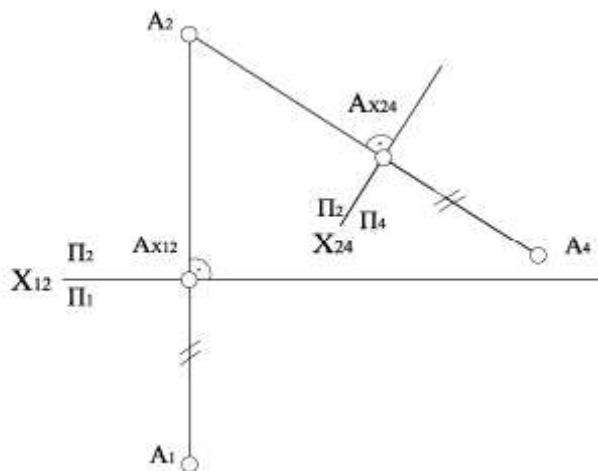
Рис. 5.3

Заміна горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$  на нову площину  $\Pi_4$  та побудування нових проєкцій точки  $A$  в системі  $\Pi_2/\Pi_4$  відбувається аналогічно розглянутому випадку. Тепер без змін залишається фронтальна проєкція точки, а для побудування нової горизонтальної проєкції  $A_4$  точки  $A$  необхідно зі старої фронтальної проєкції точки опустити перпендикуляр (провести лінію зв'язку) на нову вісь  $x_{24}$  та відкласти на ньому від точки перетину з віссю  $x_{24}$  відрізок, що дорівнює відстані від горизонтальної проєкції точки до осі  $x_{12}$  (рис. 5.4).

Розв'язання всіх задач методом заміни площин проєкцій зводиться до розв'язання чотирьох основних задач:

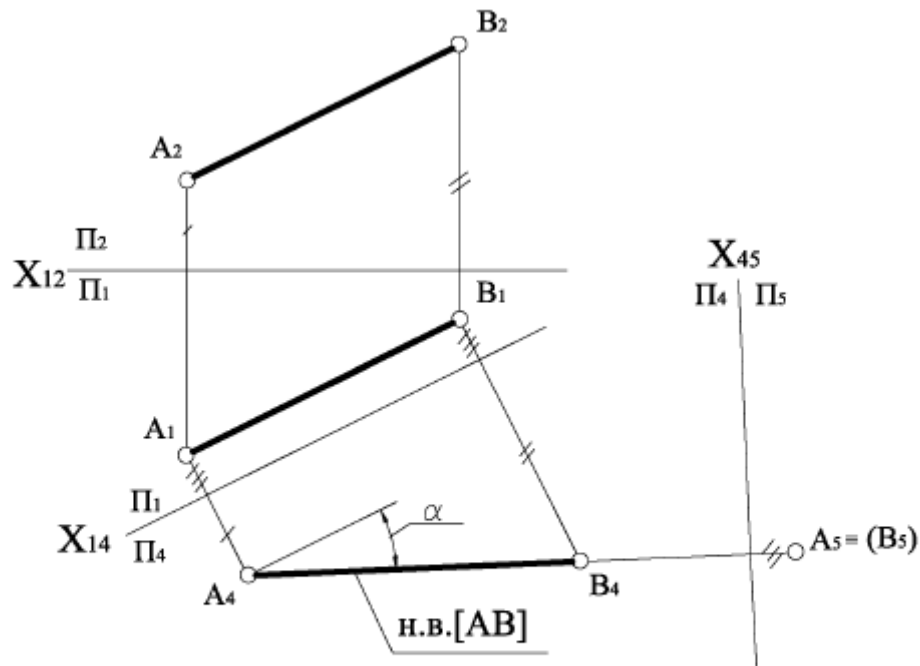
1. Перетворення прямої загального положення на пряму рівня.
2. Перетворення прямої загального положення на проєкційну.
3. Перетворення площини загального положення на проєкційну.
4. Перетворення площини загального положення на площину рівня.

На рис. 5.5 зображено розв'язання перших двох задач перетворення прямої загального положення на пряму рівня та перетворення її на проєкційну. У системі  $\Pi_2/\Pi_1$  відрізок прямої  $AB$  займає загальне положення. Для перетворення відрізка прямої на пряму рівня будемо на довільній відстані від відрізка площину  $\Pi_4$ , яка паралельна до відрізка  $AB$ , а також  $\Pi_4 \perp \Pi_1$ .



$$|A_4 A_{x24}| = |A_1 A_{x12}|$$

Рис. 5.4



$$\alpha = x_{14} \wedge A_4 B_4 = AB \wedge \Pi_1$$

Рис. 5.5

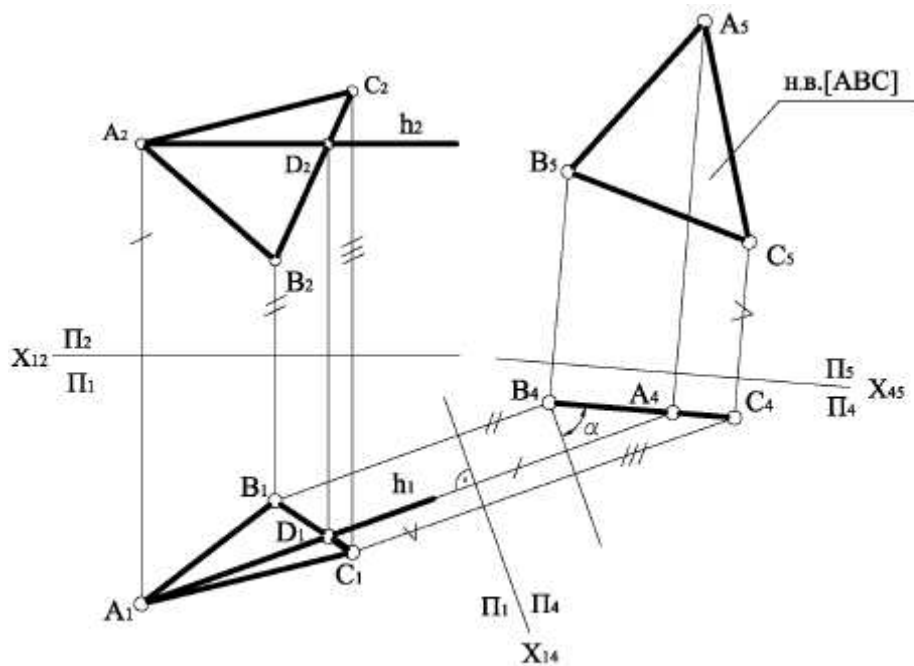
Щоб отримати натуральну величину відрізка, від осі  $x_{14}$  відкладаємо відстані, які дорівнюють відстаням від точок  $A_2$  і  $B_2$  до осі  $x_{12}$ . У системі  $\Pi_1/\Pi_4$  відрізок прямої  $AB$  стає прямою рівня і на площині проєкцій  $\Pi_4$  проєкціюється в натуральному вигляді.

Для перетворення відрізка прямої рівня на проєкційне положення необхідно перпендикулярно до прямої рівня провести нову площину  $\Pi_5$ , слідом якої буде  $x_{45}$ . Проекція прямої у вигляді точки  $A_5 \equiv (B_5)$  розміститься від осі  $x_{45}$  на відстані, що дорівнює відстані від проєкцій  $A_1$  та  $B_1$  до осі  $x_{14}$ .

Спільне розв'язання першої та другої задач дозволяє знаходити:

- а) відстань від точки до прямої;
- б) відстань між двома паралельними прямими;
- в) відстань між мимобіжними прямими.

На рис. 5.6 зображено розв'язання третьої та четвертої задач перетворення площини загального положення на проєкційну та перетворення її на площину рівня. При цьому здійснено дві заміни площин проєкцій.



$$\alpha = x_{14}^{\wedge}(B_4 A_4 C_4) = (ABC)^{\wedge} \Pi_1$$

Рис. 5.6

При першій заміні відсік площини (ABC) переведено в проекційне положення, а при другій заміні знайдено натуральну величину відсіку. Щоби перевести відсік у проекційне положення, необхідно в межах відсіку побудувати лінію рівня, бо для її перетворення на точку досить однієї заміни. На рисунку у відсіку проведено горизонталь AD, а нову вертикальну площину  $\Pi_4$  побудовано перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі ( $A_1 D_1$ ). У системі площин проекцій  $\Pi_1/\Pi_4$  площина ABC перетворилась на проекційну площину і на площині проекцій  $\Pi_4$  спроекціювалась у відрізок прямої  $A_4 B_4 C_4$ . При другій заміні вісь  $x_{45}$  проводять паралельно відрізку  $A_4 B_4 C_4$ , із точок  $B_4, C_4, A_4$  проводять лінії проекційного зв'язку, перпендикулярні осі  $x_{45}$ , а від осі  $x_{45}$  відкладають відрізки, що дорівнюють відстані від точок горизонтальної проекції до осі  $x_{14}$ .

У системі площин проекцій  $\Pi_4/\Pi_5$  площина ABC перетворилась на площину рівня і на площині проекцій  $\Pi_5$  спроекціювалась у натуральному вигляді  $A_5 B_5 C_5$ .

Спільне розв'язання третьої та четвертої задач дозволяє знаходити:

- а) натуральні величини плоских фігур;
- б) відстань від точки до площини;
- в) кути нахилу площини до площини проекцій;
- г) відстань між паралельними площинами.

## 5.2 Обертання навколо проекційних осей

Площини проекцій залишаються незмінними, а геометричну фігуру обертають навколо прямої лінії (осі), яка перпендикулярна до якоїсь із площин проекцій, у нове окреме положення. У новому положенні будують ортогональні

проекції геометричної фігури. Для кожної точки геометричної фігури має бути своя площина обертання і свій радіус обертання.

На рис. 5.7 показано визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення способом обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекції.

Через точку А проведено вертикальну вісь і, яка є горизонтально проекційною прямою. Навколо цієї осі повернуто відрізок загального положення АВ до положення паралельного фронтальній площині проєкцій  $\Pi_2$ . Точка А, яка належить осі обертання, залишається на місці, а точка В повертається навколо вертикальної осі в площині, перпендикулярній до неї, тобто в горизонтальній.

Відрізок  $A_2\bar{B}_2$  – його натуральна величина.

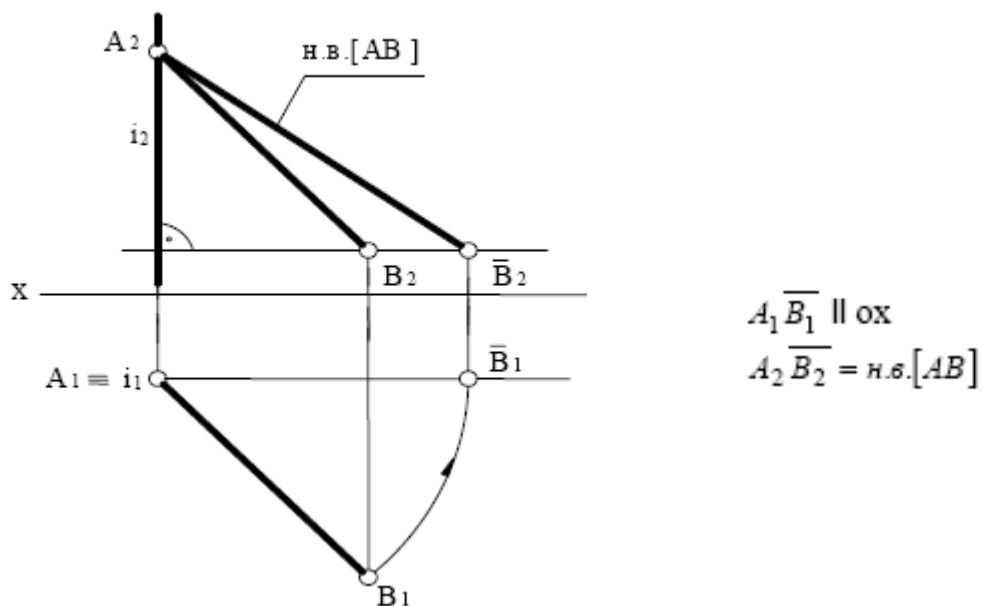


Рис. 5.7

### 5.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення

Плоскопаралельне переміщення розглядають як обертання навколо невизначених осей. Площини проєкцій залишаються незмінними, а геометрична фігура переводиться в окреме положення шляхом її зміщення в просторі, причому всі точки фігури мають рухатися в площинах, паралельних до певної площини проєкцій.

На рис. 5.8 наведено приклад визначення натуральної величини трикутного відсіка методом плоскопаралельного переміщення. Для цього спочатку необхідно побудувати головну лінію площини ABC – фронталь DC. Потім поворотом навколо горизонтальної осі відсік площини встановлено у горизонтально проекційне положення. Після цього поворотом навколо горизонтально проекційної осі відсік площини встановлено у фронтальну площину рівня, при цьому відсік площини на полі  $\Pi_2$  відобразиться в натуральну величину



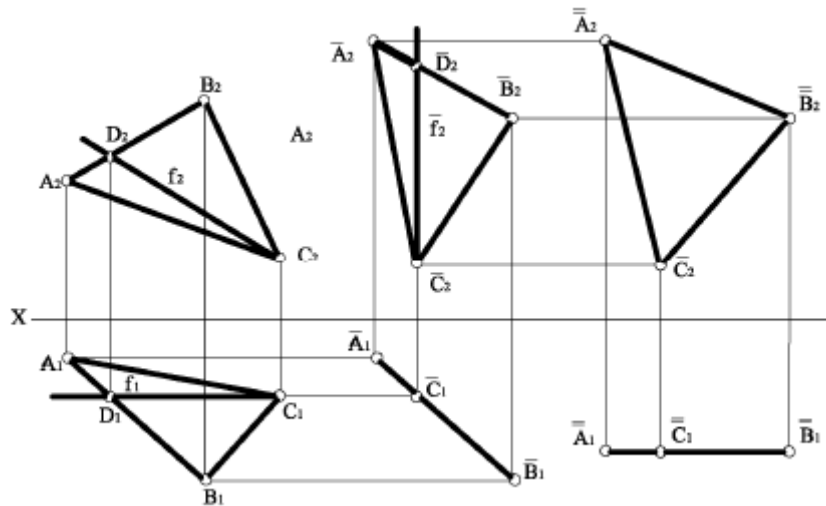


Рис. 5.8

#### 5.4 Спосіб обертання навколо прямих рівня

Площини проєкцій залишаються незмінними, а геометричну фігуру, яка належить площині, обертають навколо лінії рівня цієї площини до паралельного положення до тієї площини проєкцій, до якої лінія рівня паралельна.

При цьому плоска фігура буде без спотворень проєкціюватися на цю площину проєкцій. При обертанні навколо горизонталі плоска фігура переводиться в положення, паралельне горизонтальній площині проєкцій, при обертанні навколо фронталі – у положення, паралельне фронтальній площині проєкцій.

На рис. 5.9 наведено приклад визначення натуральної величини трикутного відріку ABC методом обертання навколо фронталі AD.

При цьому точки A і D, які лежать на фронталі, залишаються на місці, а точки B і C обертаються у фронтально проєкційних площинах, які перпендикулярні до фронтальної проєкції фронталі. Проекції відрізка прямої  $B_2O_2$  та  $B_1O_1$  є проєкціями радіуса обертання в даний момент точки B навколо фронталі AD. Це відрізок прямої загального положення. Для визначення натуральної величини радіуса обертання  $[BO]$  застосовують спосіб прямокутного трикутника. При цьому на горизонтальній площині проєкцій визначають різницю координат точок B та O, а на фронтальній площині будують прямокутний трикутник  $B_2^*B_2O_2$ , гіпотенуза якого  $B_2^*O_2$  є натуральною величиною радіуса обертання точки B. Потім гіпотенузою роблять засічку на лінії траєкторії руху точки B і отримують  $\bar{B}_2$ . Для визначення положення точки C користуються точкою D, яка після обертання залишається на місці. Точку  $\bar{C}_2$  визначають як перетин прямої  $\bar{B}_2D_2$  із траєкторією руху точки C. Фронтальна проєкція трикутного відріку після обертання  $A_2\bar{B}_2\bar{C}_2$  є натуральною величиною трикутного відріка.

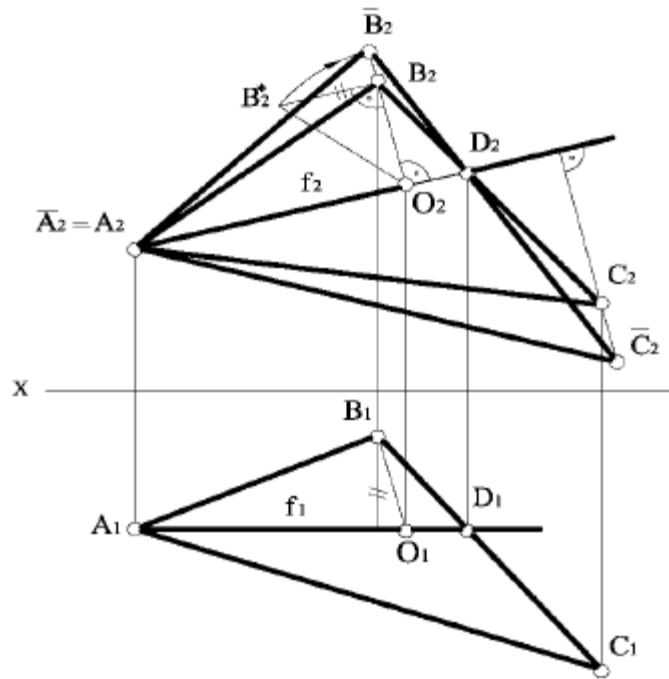


Рис. 5.9

### 5.5 Спосіб обертання навколо сліду площини

Цей спосіб є окремим випадком обертання площини навколо горизонталі або фронталі, при цьому за вісь обертання береться не будь-яка горизонталь або фронталь площини, а її горизонтальний або фронтальний слід (нульова горизонталь або фронталь). У цьому випадку внаслідок обертання площини вона збігається з площиною проєкцій. Тому цей метод називають методом суміщення. При обертанні площини навколо горизонтального сліду вона збігається з горизонтальною площиною проєкцій або з фронтальною площиною проєкцій при її обертанні навколо фронтального сліду.

Метод суміщення застосовують тоді, коли необхідно визначити натуральний вигляд фігури або побудувати в площині загального положення фігуру, яка має певну конфігурацію та розміри.

На рис. 5.10 наведено приклад обертання площини загального положення  $Q$ , яка задана слідами, навколо горизонтального сліду  $Q_1$  до суміщення з горизонтальною площиною проєкцій.

При цьому перетворенні слід  $Q_1$  як вісь обертання залишається на місці. Для знаходження суміщеного положення площини достатньо знайти суміщене положення тільки однієї точки цієї площини, яка не належить сліду  $Q_2$ .

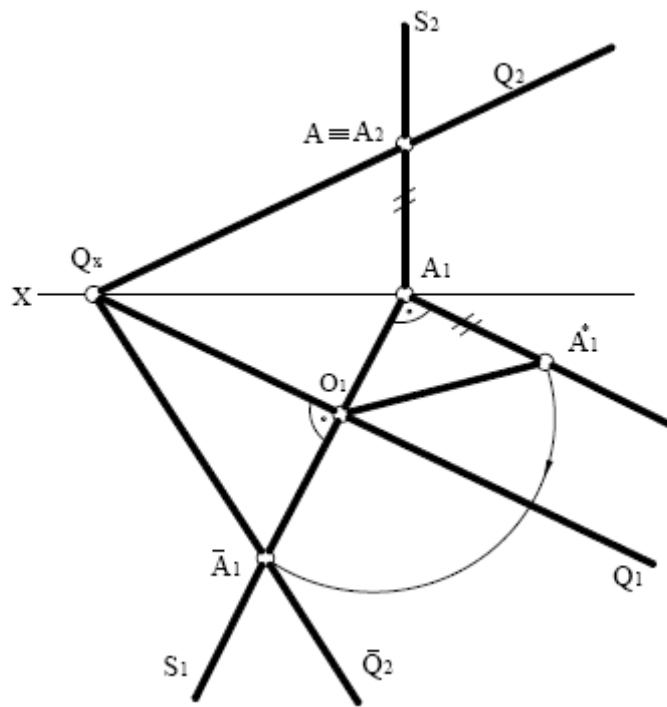


Рис. 5.10

Для спрощення геометричних побудов доцільно використати точку  $A$ , яка належить фронтальному сліду  $Q_2$ .

Точка  $A$  при обертанні навколо осі  $Q_1$  буде переміщатися по дузі кола, яке належить горизонтально проекційній площині  $S$ , перпендикулярній до осі обертання  $Q_1$ .

Методом прямокутного трикутника знаходять натуральну величину радіуса обертання  $[OA] = O_1A_1^*$ . Потім гіпотенузою  $O_1A_1^*$  роблять засічку на лінії траєкторії руху точки  $A$  і отримують  $\bar{A}_1$ . Через отриману точку будують фронтальний слід площини  $\bar{Q}_2$  при суміщенні її з горизонтальною площиною проєкцій.

Необхідно зазначити, що суміщене положення точки  $A$  і сліду  $Q_2 - \bar{Q}_2$ , а також будь-якої точки, яка належить площині  $Q$ , можна побудувати, не користуючись центром і радіусом обертання (рис. 5.11). Для цього достатньо на фронтальному сліді площини  $Q$  взяти довільно точку  $A \equiv A_2$ , а потім побудувати горизонтальну проєкцію точки  $A$ . Через обрану точку  $A$  провести горизонтально проєкційну площину  $S$ , у площині якої переміщується точка  $A$ , причому горизонтальний слід цієї площини перпендикулярний до горизонтального сліду площини  $\theta$ :  $S_1 \perp Q_1$ .

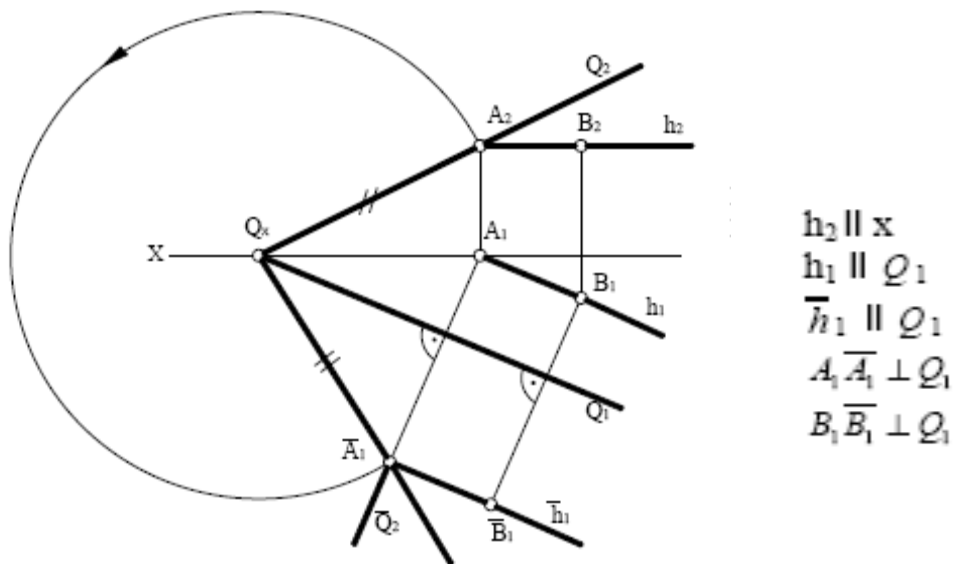


Рис. 5.11

Потім із точки  $Q_x$  описують дугу радіусом, який дорівнює відстані від  $|Q_x A_2|$  до її перетину з горизонтальним слідом  $S_1$ . Через отриману точку  $\bar{A}_1$  будують фронтальний слід площини  $\bar{Q}_2$  при суміщенні його з горизонтальною площиною проєкцій.

На рис. 5.12 наведено приклад визначення натуральної величини  $\triangle ABC$  обертанням навколо горизонтального сліду  $Q_1$  площини загального положення  $Q$ , який він належить.

Для знаходження горизонтальної проєкції відріку  $(A_1 B_1 C_1)$  використовуємо головні лінії площини – горизонталі. Через фронтальні проєкції точок  $A_2, B_2, C_2$  проводимо паралельно осі  $x$  фронтальні проєкції горизонталей до перетину з фронтальним слідом  $Q_2$ , потім будуємо горизонтальні проєкції горизонталей паралельно горизонтальному сліду  $Q_1$ . За вертикальною відповідністю будуємо горизонтальну проєкцію відріку  $A_1 B_1 C_1$ . Далі суміщаємо задану площину  $Q$  з полем  $\Pi_1$  обертанням навколо горизонтального сліду  $Q_1$ . Для цього на фронтальному сліді площини беремо довільну точку 1, знаходимо її горизонтальну проєкцію – точку  $1_1$ . Точку 1 обертаємо навколо горизонтального сліду в площині, перпендикулярній до цього сліду. Суміщене з  $\Pi_1$  положення точки 1 отримаємо, якщо з точки збігу слів  $Q_x$  зробимо дугою  $|Q_x 1_2|$  засічку на траєкторії повороту точки 1, отримавши при цьому точку  $\bar{1}_1$ . Після цього відрізок  $ABC$  суміщаємо з  $\Pi_1$  і отримуємо натуральну величину відріку  $|\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1|$ .

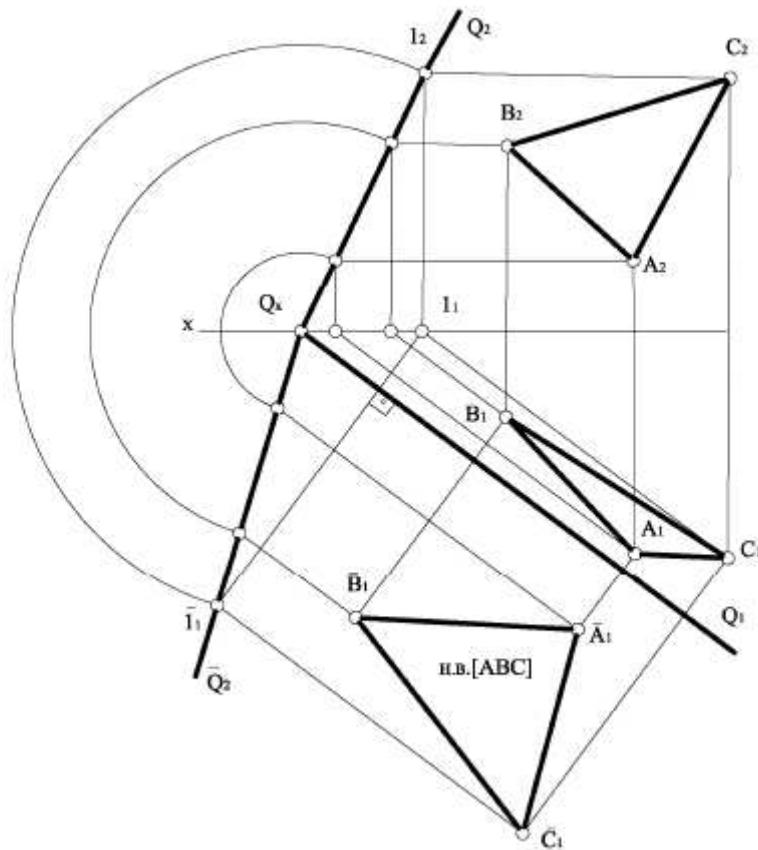


Рис. 5.12

## Лекція 8

### 6. КРИВІ ЛІНІЇ

Кривою називається однопараметрична множина точок простору. Оперувати поняттям кривої не завжди зручно, тому використовують також і поняття відрізка. При цьому під відрізком розуміють частину кривої, обмежену з двох сторін точками. Криву можна розглядати як траєкторію руху точки у відповідності з деяким законом. Тому в загальному випадку визначник кривої може бути записаний у наступному вигляді:  $Def_a = (A) [A_m]$ , де  $a$  – назва кривої,  $A$  – твірна точка,  $A_m$  – закон переміщення твірної точки. В залежності від характеру руху твірної точки можна одержати безліч різних кривих. Якщо твірна точка рухається прямолінійно, крива вироджується в пряму. Деякі криві мають важливе значення з технічної чи наукової точки зору, тому вони добре вивчені, мають конкретний визначник (формулу) та назву, наприклад синусоїда, еліпс, циклоїда та інші. Такі криві в подальшому будемо називати іменованими. Усі інші криві будемо називати кривими загального вигляду. Закон переміщення твірної точки таких кривих може бути заданий різними способами. Найпростішим із них є його табличне завдання, тобто перелік тієї чи іншої кількості належних кривій точок:  $Def_a = (A; B; C \dots)$ .

#### 6.1 Комплексне креслення кривої лінії

Проекцією кривої в загальному випадку є крива. Тому на комплексному кресленні крива може бути задана своїми проекціями (рис. 6.1).

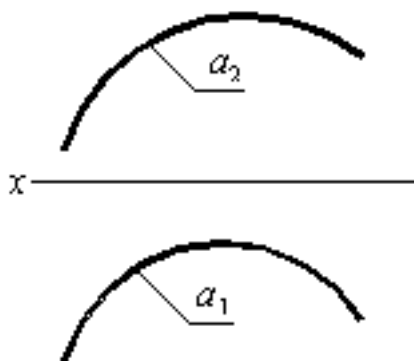


Рис. 6.1

Якщо в процесі формотворення твірна точка попадає у вихідне положення, таку криву називають замкненою (коло, еліпс та інші), якщо ця умова не виконується – розімкненою (парабола, гіпербола та інші).

Якщо в процесі формотворення твірна точка весь час розташована в одній і тій самій площині, то отриману криву називають плоскою, в протилежному разі – просторовою, або лінією подвійної кривизни. Важливою властивістю плоскої кривої є те, що коли вона належить проектуючій площині, одна із її проекцій вироджується в пряму (рис. 6.2).

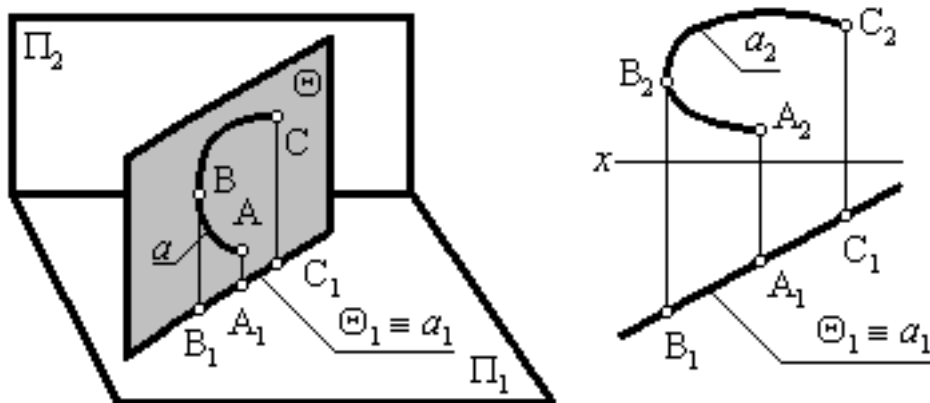


Рис. 6.2

Найдоцільніше визначати належність кривої площині в такому порядку (рис. 6.3).

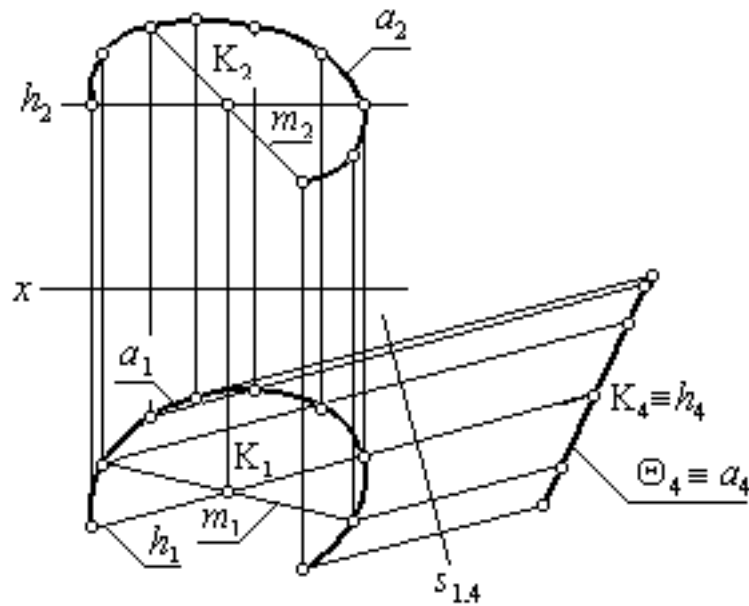


Рис. 6.3

Спочатку виберемо на кривій чотири довільні точки і проведемо через них дві прямі:  $h$  і  $m$  (одну з них доцільно провести так, щоб вона була прямою рівня). Якщо ці прямі не перетинаються, можна зробити висновок, що вибрані чотири точки не належать одній площині й задана крива є просторовою. Якщо ці прямі перетинаються, вони задають деяку площину  $\Theta$ . Далі слід визначити, чи належать цій площині інші точки кривої. Для цього перейдемо в таку систему площин проекцій  $\Pi_1/\Pi_4$ , у якій площина  $\Theta$  буде займати проекціююче положення. Тоді, якщо крива є плоскою, четверті проекції всіх інших її точок будуть належати виродженій проекції площини  $\Theta_4$ .

## 6.2 Плоскі криві другого порядку

Із плоских кривих найбільше значення для подальшого мають криві другого порядку, а саме: коло, еліпс, парабола та гіпербола. Ці криві добре відомі, але доцільно навести про них ті відомості, які можуть знадобитись при розгляді наступного матеріалу.

Коло (рис. 6.4) – це замкнена плоска крива, всі точки якої однаково віддалені від деякої точки  $O$  (центра кола), належної тій площині, що і крива. Відрізок  $R$ , який з'єднує центр кола з будь-якою його точкою, називають радіусом. Відрізок прямої, який з'єднує будь-які дві точки кола, наприклад  $A$  і  $B$ , називають хордою. Хорда, що проходить через центр кола, називається діаметром  $D$ .

Еліпс (рис. 6.5) – це також замкнена крива, у якої сума відстаней від будь-якої точки  $M$  до двох точок  $F_1$  і  $F_2$  залишається постійною:  $F_1M + F_2M = AB$ . Відрізок  $AB$  називають великою віссю еліпса, відрізок  $CD$  – малою віссю, точки  $F_1$  і  $F_2$  – фокусами, точку  $O$  – центром еліпса.

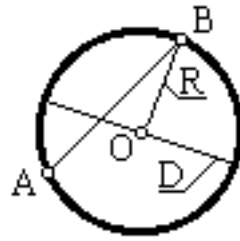


Рис. 6.4

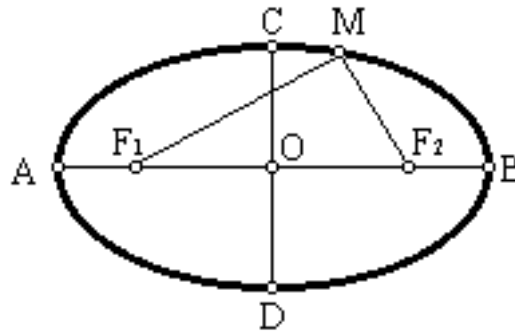


Рис. 6.5

Для побудови еліпса за осями (рис. 6.6) із його центра радіусами, які відповідно дорівнюють половині великої та половині малої осі, проводимо концентричні кола. Через центр еліпса проводимо прямі, які перетинають обидва кола. На частинах прямих, які розташовані між колами, будують прямокутні трикутники з катетами, паралельними осям еліпса. На перетині катетів визначаються належні еліпсу точки.

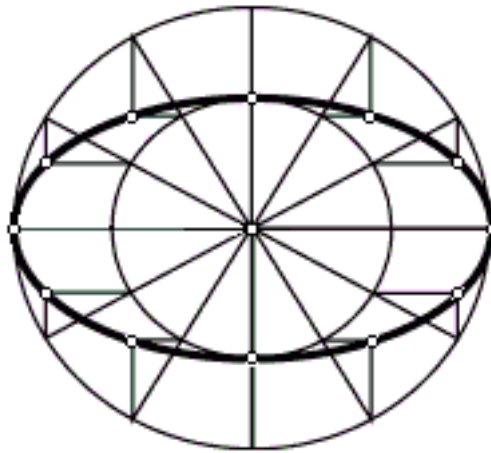


Рис. 6.6

Парабола (рис 6.7) – це розімкнена крива, кожна точка М якої лежать на однаковій відстані від прямої  $p$  (директриси) та точки F (фокуса). Парабола має вісь симетрії, яка проходить через її вершину О. Існують різні способи побудовання параболи, однак для розгляду наступного матеріалу окремі точки параболи найзручніше будувати за їх відстанями від вершини О вздовж осі  $x$  та їх відстанями в перпендикулярному напрямі від цієї осі. Для побудовання параболи досить з'єднати отримані точки плавною кривою.



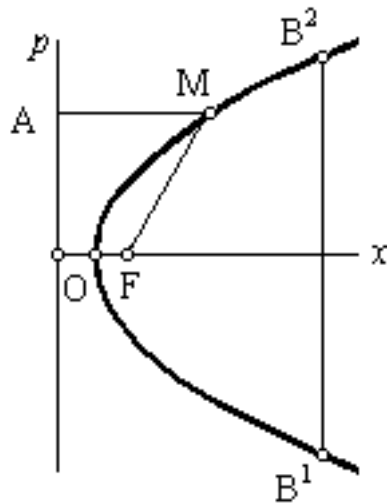


Рис. 6.7

Гіпербола (рис. 6.8) – це розімкнена крива, для кожної точки  $M$  якої різниця відстаней від двох заданих точок  $F^1$  і  $F^2$  (фокусів) залишається постійною:  $F^2M - F^1M = A^1A^2$ . Гіпербола включає в себе дві гілки, які необмежено наближаються до прямих  $p^1$  та  $p^2$  (асимптот), і має дві осі симетрії – дійсну вісь  $x$ , яка проходить через її фокуси, та уявну вісь  $y$ , яка проходить перпендикулярно до дійсної осі через середину відстані між вершинами  $A^1$  і  $A^2$  гілок. Гілки гіперболи симетричні відносно уявної осі. У подальшому буде використовуватись тільки одна з гілок, тому обмежимося наведеним. Зазначимо тільки: побудувати гілку гіперболи можна таким самим шляхом, що й параболу.

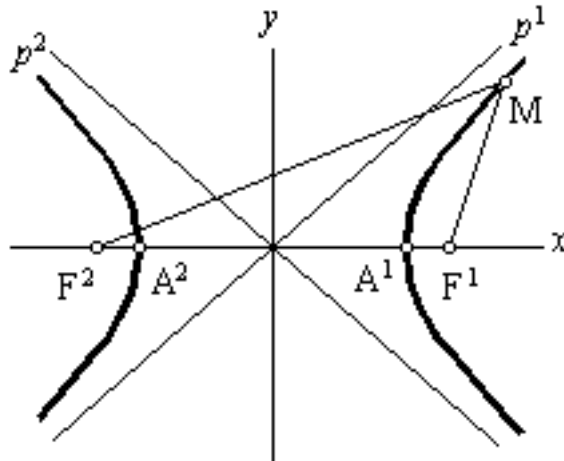


Рис. 6.8

Із просторових кривих найбільше технічне значення має гвинтова лінія. Гвинтовою називають лінію, яка утворюється гвинтовим рухом твірної точки. Під гвинтовим розуміють одночасне обертання навколо нерухомої осі й переміщення вздовж цієї осі. Якщо твірна точка рухається з постійною кутовою швидкістю по поверхні кругового циліндра і перетинає всі його твірні під одним і тим самим кутом, утворюється циліндрична гвинтова лінія (рис. 6.9).

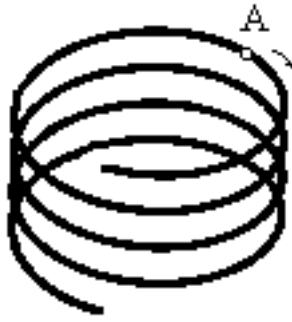


Рис. 6.9

Якщо твірна точка рухається по поверхні кругового конуса і перетинає всі його твірні під одним і тим самим кутом, утворюється конічна гвинтова лінія (рис .6.10).



Рис. 6.10

### 6.3 Апарат аналізу кривої лінії

Основним апаратом аналізу кривих є їх порядок, характер точок та дотичні до неї.

Однією з найбільш загальних характеристик кривої є її порядок. Під ним розуміють найбільшу кількість точок перетину кривої з площиною або ступінь рівняння, яким вона подається. Так, на рис. 6.11 крива  $a$  є кривою другого порядку, оскільки вона перетинає площину  $\Theta$  в двох точках.

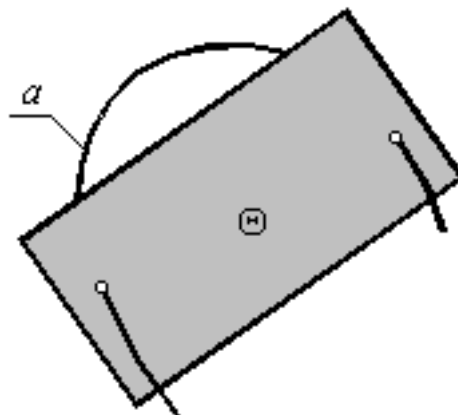


Рис. 6.11

Нехай задана крива  $l$  (рис. 6.12).

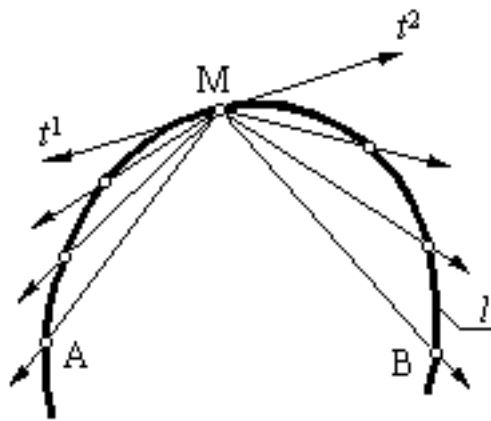


Рис. 6.12

Виберемо на ній три довільні точки: А, В, М. З'єднаємо точку М із точками А і В січними прямими. Далі будемо необмежено наближати точки А і В до точки М. При цьому січні МА та МВ будуть повертатись навколо точки М і, коли точки А та В співпадут з нею, досягнуть свого граничного положення  $t^1$  і  $t^2$ . Це граничне положення січної називають напівдотичною до кривої в точці М. Якщо при цьому напівдотичні  $t^1$  і  $t^2$  утворюють одну пряму, цю пряму називають дотичною  $t$  до кривої в точці М, а точку М – звичайною. Якщо напівдотичні  $t^1$  і  $t^2$  не утворюють прямої (рис. 6.13), – кажуть, що в точці М дотична не існує, точку М називають особливою, або вершиною кривої, саму криву – складовою, а її частини – дугами, які вивчаються незалежно одна від одної. Для побудови дотичної до кривої на комплексному кресленні досить побудувати дотичні до проекцій кривої в проекціях її точки.

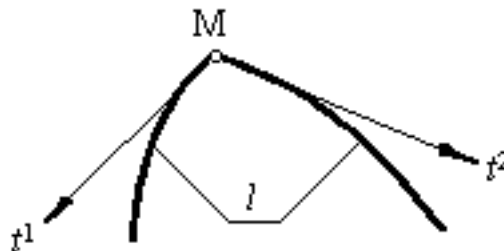


Рис. 6.13

#### 6.4 Визначення довжини відрізка просторової кривої

Довжина відрізка кривої визначається шляхом його спрямлення. Для цього на кривій вибирають ряд точок і замінюють (наближають) її ламаною. Потім визначають дійсну величину кожного із відрізків ламаної та відкладають їх послідовно один за одним уздовж довільної прямої. Загальна довжина всіх цих відрізків ламаної і приймається за довжину відрізка кривої. Очевидно, кількість відрізків ламаної має бути такою, щоби можна було визначити довжину відрізка кривої з наперед заданою точністю (рис. 6.14).

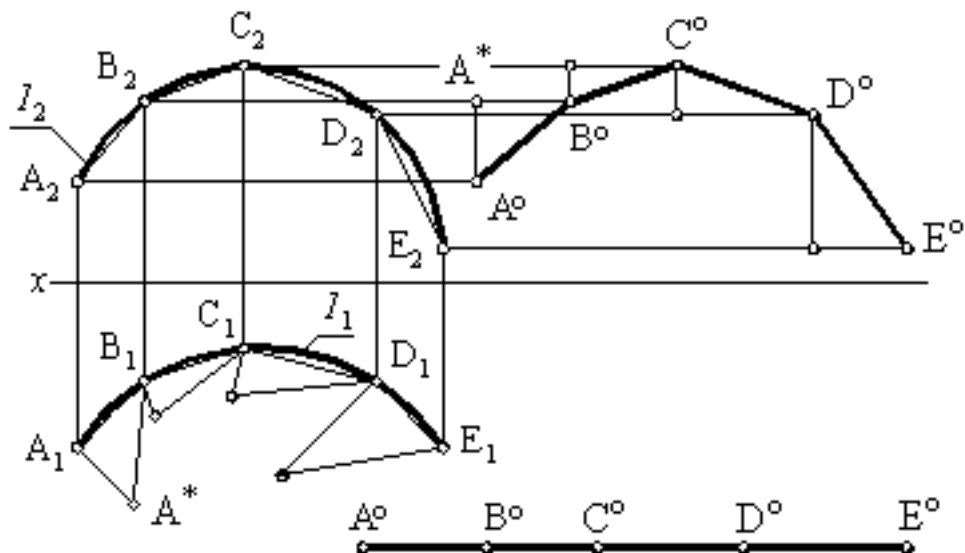


Рис. 6.14

Лекція 9 –10

## 7. ПОВЕРХНІ

### 7.1 Визначення, утворення, задання

Під поверхнею розуміють геометричне місце точок, що відповідають функції координат простору типу  $\Phi(x, y, z) = 0$ .

Поверхня може бути утворена переміщенням деякої лінії  $a$  (твірної), форма якої в процесі переміщення може залишатися постійною або безперервно змінюватися. Для наочності зображення на комплексному кресленні закон переміщення твірної звичайно задають графічно у вигляді сімейства ліній  $l, m, n, \dots$ , які називають напрямними. При цьому мають на увазі, що в процесі формотворення твірна ковзає по напрямних (рис. 7.1).

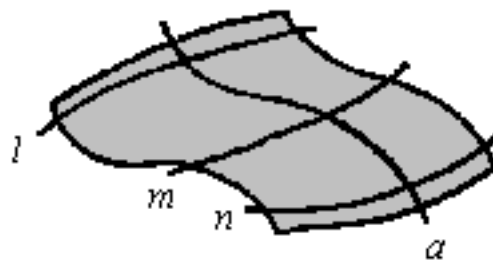


Рис. 7.1

У загальному випадку поверхня може бути задана визначником типу  $\text{Def}_\Theta = (\Gamma) [A]$ . При цьому конкретне значення геометричної та алгоритмічної частин визначника залежить від умов формотворення.

При зображенні поверхні на комплексному кресленні, крім проєкцій геометричних елементів визначника, будують допоміжні лінії, що підвищують його наочність. При цьому, як правило, показують нариси поверхні. Під нарисом поверхні розуміють слід проєкційної циліндричної поверхні  $\Sigma$ , що обгортає

задану поверхню  $\Phi$ . Обгортуюча поверхня стикається з заданою поверхнею по деякій лінії  $l$ , котру називають контурною. Тому нарисом поверхні можна вважати проекцію контурної лінії. Таким чином, горизонтальним нарисом поверхні  $\Phi$  (рис.7.2) буде лінія  $l_1 \equiv \Sigma_1$ .

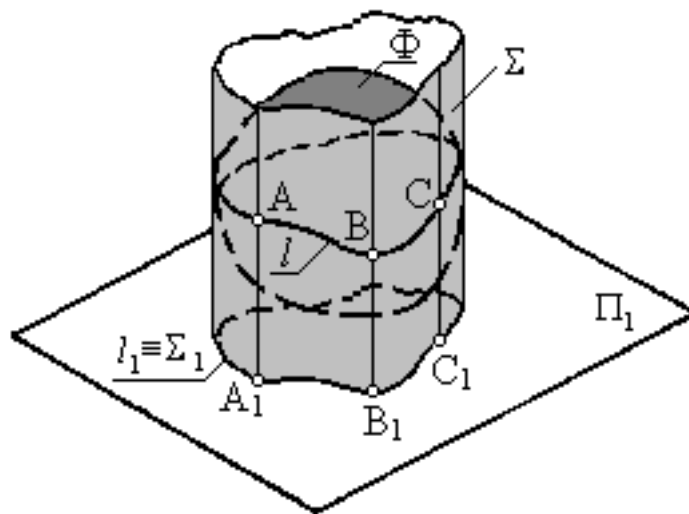


Рис. 7.2

Однією з найбільш загальних характеристик поверхні є її порядок. Під порядком поверхні розуміють порядок кривої, по якій цю поверхню перетинає площина загального положення або найбільша кількість точок перетину поверхні прямою.

## 7.2. Класифікація поверхонь

Уже сам спосіб формотворення припускає існування безлічі поверхонь. Їх доцільно систематизувати за ознаками, що відображують процес формотворення, тобто за формою твірної та законами зміни її форми й переміщення по напрямній. Відповідно до цього підходу всі поверхні можна поділити на поверхні з криволінійною твірною (нелінійчаті) й поверхні з прямолінійною твірною (лінійчаті). У свою чергу поверхні з криволінійною твірною можна поділити на поверхні з криволінійною твірною змінного виду і поверхні з криволінійною твірною постійного виду (рис. 7.3).

Використання як твірної довільної кривої приводить до утворення поверхні загального виду, котра являє тільки теоретичний інтерес.

Якщо як твірну прийняти пряму, в результаті формотворення утвориться поверхня з прямолінійною твірною або лінійчата поверхня. Лінійчата поверхня в загальному випадку може бути однозначно утворена за умови, коли прямолінійна твірна ковзає по трьох напрямних. У зв'язку з цим у загальному випадку визначник лінійчатих поверхонь має наступний вигляд:  $\text{Def}_\Theta = (a, m, n, l)$ . Однак, звичайно, заздалегідь обумовлюється, що мова йде про лінійчатую поверхню, тому, як правило, прямолінійну твірну у визначнику не вказують:  $\text{Def}_\Theta = (m, n, l)$ . Характер переміщення твірної в процесі формотворення лінійчатих поверхонь може бути заданий трьома напрямними, двома або однією

напрямною та додатковими умовами. Тому їх поділяють на лінійчаті поверхні з трьома, двома й однією напрямною.



Рис. 7.3

Лінійчаті поверхні з двома напрямними і напрямною площиною називають косими. Вони включають в себе косі циліндроїди, косі коноїди і косі площини (однопорожнинні гіперболоїди).

Якщо за напрямну площину прийняти площину паралелізму, то ми одержимо особливий випадок косих лінійчатих поверхонь із двома напрямними – так звані прямі лінійчаті поверхні з двома напрямними, або поверхні Каталана. Прямий циліндроїд (рис. 7.4) утворюється тоді, коли обидві напрямні є гладкими кривими, при цьому одна з них належить площині, перпендикулярно до площини паралелізму. Якщо одна з напрямних пряма, утворюється прямий коноїд (рис. 7.5), якщо напрямні – мимобіжні прямі, утворюється гіперболічний параболоїд (рис. 7.6). Поверхня прямого циліндроїда використовується при виготовленні повітряпроводів великого діаметра, поверхня прямого коноїда – у гідротехнічному будівництві для формування поверхонь підвалин мостових опор, а поверхня гіперболічного параболоїда – для формування покриттів різних споруд, насипів залізниць і автомобільних шляхів, набережних і різних гідротехнічних споруджень.

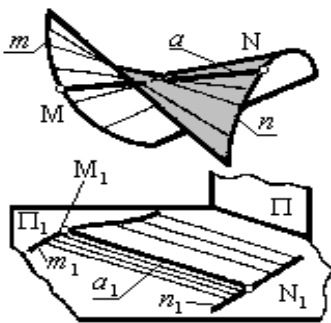


Рис. 7.4

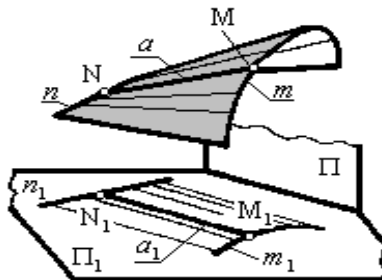


Рис. 7.5

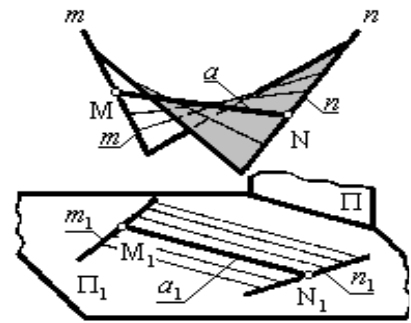


Рис. 7.6

У загальному випадку визначник лінійчатих поверхонь з однією напрямною може бути записаний у наступному вигляді:  $\text{Def}_\Theta = (m) [A_m]$ . Однак при цьому варто зазначити, що лінійчаті поверхні з однією напрямною можуть

бути утворені тільки за наявності додаткових умов про характер переміщення твірної. Ці додаткові умови не можуть бути загальними для всіх поверхонь, тому в кожному конкретному випадку в алгоритмічну частину визначника потрібно вкладати конкретний зміст.

Якщо поставити вимогу, щоби прямолінійна твірна в процесі формотворення була дотичною до напрямної (яку в даному випадку називають ребром повернення) у всіх її точках, – утвориться поверхня торса (рис. 7.7). Якщо додатково потрібно, щоби твірна при цьому складала постійний кут із деякою напрямною площиною, – утвориться поверхня постійного схилу, котра використовується при спорудженні укосів залізничного насипу на схилах і кривих (рис. 7.8).

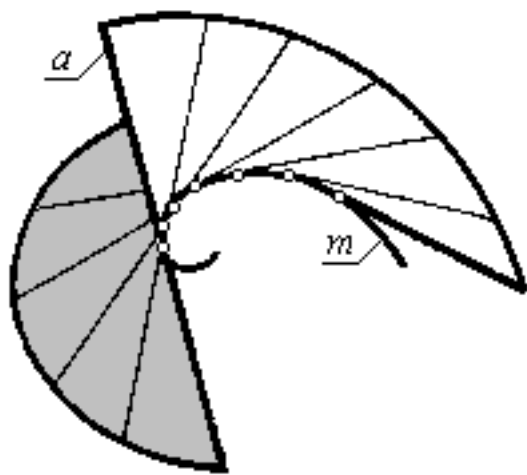


Рис. 7.7

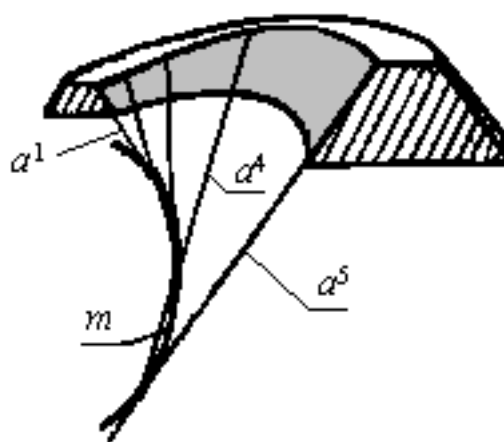


Рис. 7.8

При поступальному переміщенні твірної, коли одна з її точок ковзає по криволінійній напрямній, утворюється циліндрична поверхня (рис. 7.9). Тіло, обмежене циліндричною поверхнею з замкненою напрямною і двома паралельними площинами, називають циліндром (рис. 7.10). Частини площин, що обмежують циліндр, називають основами, а відстань між ними – висотою циліндра. Якщо твірні перпендикулярні до основ, циліндр називають прямим, якщо ця умова не виконується – похилим. Циліндр називають круговим або еліптичним, якщо його нормальний (перпендикулярний до твірної) перетин дає відповідно коло або еліпс. Якщо циліндр одночасно і прямий і круговий, його називають круглим.

Якщо при поступальному переміщенні твірної криволінійну напрямну замінити ламаною, утвориться призматична поверхня (рис. 7.11). Тіло, обмежене замкненою призматичною поверхнею і двома паралельними площинами, називають призмою (рис. 7.12).

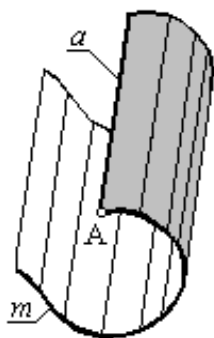


Рис. 7.9

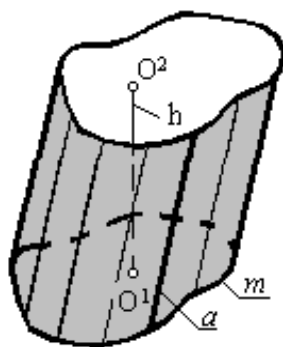


Рис. 7.10

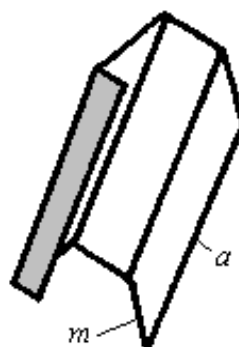


Рис. 7.11

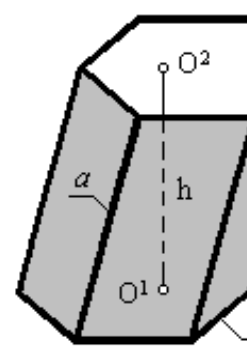


Рис. 7.12

При полярному переміщенні твірної (коли деяка точка  $S$  твірної не змінює свого положення в просторі) по криволінійній напрямній утворюється конічна поверхня (рис. 7.13). При цьому точку  $S$  називають вершиною конічної поверхні. Конічна поверхня має дві порожнини, але звичайно під конічною поверхнею мають на увазі тільки одну з них. Якщо за напрямну прийняти замкнуту плоску криву, тіло, обмежене однією порожниною конічної поверхні та площиною, якій належить напрямна, називають конусом (рис. 7.14). Частина цієї площини, обмежена напрямною, називається основою конуса, а перпендикуляр, опущений із вершини конуса на його основу, – висотою. Пряма, що з'єднує вершину конуса з центром основи, називається віссю конуса. Якщо вісь конуса перпендикулярна основі, конус називають прямим, якщо ця умова не виконується – похилим. Якщо основою прямого конуса є коло, конус називають круглим. Конус називають круговим або еліптичним, якщо його нормальний (перпендикулярний до осі) перетин дає відповідно коло або еліпс. Тіло, обмежене конічною поверхнею і двома паралельними площинами, називають зрізаним конусом. Висотою зрізаного конуса є відстань між його основами.

Якщо як напрямну прийняти ламану, утвориться пірамідальна поверхня (рис. 7.15). Якщо при цьому напрямна замкнена, утвориться замкнена пірамідальна поверхня. Якщо замкнену пірамідальну поверхню перетнути площиною, утвориться тіло, яке називають пірамідою (рис. 7.16). Точку  $S$  називають вершиною: твірні, котрі проходять через вершини ламаної напрямної, – ребрами; частину площини, обмежену напрямною, – основою; відсіки площин, що розміщені між сусідніми ребрами і сторонами основи – гранями. Кількість граней входить у назву піраміди, наприклад, тригранна, чотиригранна й т.д. Якщо в основі піраміди – правильний багатокутник, піраміду називають правильною. Відстань від вершини піраміди до її основи називають висотою. Якщо основа висоти збігається з центром основи піраміди, останню називають прямою, якщо ця умова не виконується – похилою. Тіло, обмежене пірамідальною поверхнею і двома паралельними площинами, називають зрізаною пірамідою. Частини площин, що обмежують піраміду, називають основами, а відстань між ними – висотою.



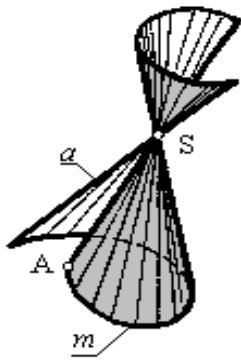


Рис. 7.13

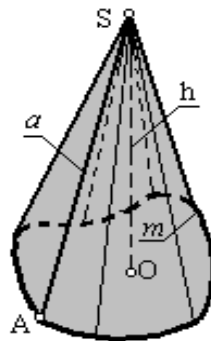


Рис. 7.14

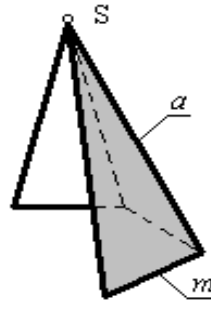


Рис. 7.15

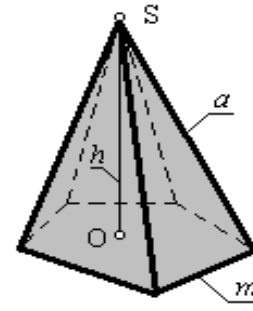


Рис. 7.16

При гвинтовому переміщенні твірної утворюється гвинтова поверхня, або гелікоїд. Якщо при цьому твірна перетинає вісь циліндричної гвинтової лінії, то гелікоїд називають закритим, якщо ця умова не виконується – відкритим; якщо твірна складає прямий кут із віссю циліндричної гвинтової лінії, гелікоїд називають прямим, якщо цей кут відрізняється від прямого – косим. Так, на рис. 7.17 наведено зображення прямого закритого гелікоїда. Гвинтові поверхні мають властивість зсуву (у процесі формотворення поверхня ковзає уздовж самої себе). Ця властивість забезпечила гвинтовим поверхням широке технічне застосування. Гвинти, шнеки, свердла, пружини, поверхні лопаток турбін і вентиляторів, робочих органів корабельних і повітряних гвинтів, конструкції похилих гвинтових апарелей і сходин та багато інших технічних пристроїв виконуються з використанням гвинтових поверхонь.

При обертанні твірної навколо осі в залежності від їхнього взаємного положення можна одержати циліндр, конус або однопорожнинний гіперболоїд. Якщо відрізок твірної паралельний осі обертання, утвориться циліндр (рис. 7.18), якщо твірна перетинає вісь обертання – конус (рис. 7.19), а якщо твірна і вісь обертання мимобіжні – однопорожнинний гіперболоїд (рис. 7.20). Лінійчаті поверхні обертання завдяки їх технологічності набули винятково широкого застосування в інженерній і будівельній практиці. Зокрема, однопорожнинний гіперболоїд обертання використовується при конструюванні пристроїв для передачі обертання за допомогою зубчастих чи фрикційних гіперболоїдних коліс із мимобіжними осями, а також у будівництві.

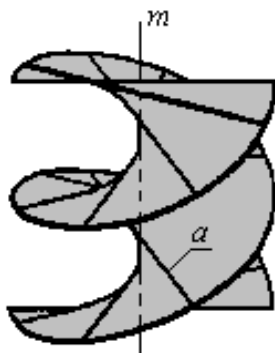


Рис. 7.17

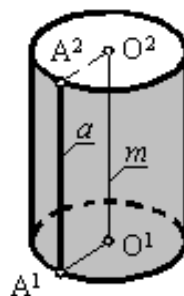


Рис. 7.18

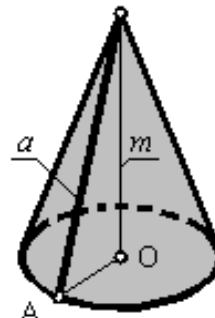


Рис. 7.19

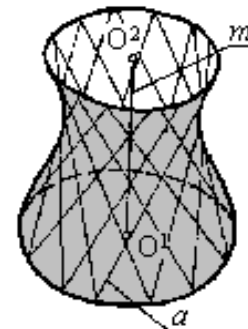


Рис. 7.20

У процесі формотворення кожна точка твірної описує коло з центром на осі обертання, яке називають паралеллю. Найбільша і найменша з них одержали

спеціальні назви – відповідно екватора і шийки (горла). Площини, які проходять через вісь обертання, називають меридіональними, а лінії, по яких вони перетинають поверхню, – меридіанами. Звичайно вісь обертання розташовують перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій. Тоді меридіани, паралельні фронтальній і профільній площинам проєкцій, називають відповідно фронтальним, або головним, і профільним. У залежності від виду твірної можна одержати безліч різноманітних поверхонь обертання. Завдяки простоті виготовлення поверхні обертання виключно широко застосовуються в практичній діяльності людини.

Якщо коло обертати навколо осі, розташованої в її площині, у залежності від їхнього взаємного положення можна одержати різні поверхні. Так, якщо центр кола належить осі обертання, одержимо сферу (рис. 7.21).

Якщо центр кола не належить осі обертання, одержимо тор. Якщо при цьому радіус  $r$  кола менший за відстань  $R$  його центра від осі обертання, одержимо відкритий тор, або кільце (рис. 7.22),

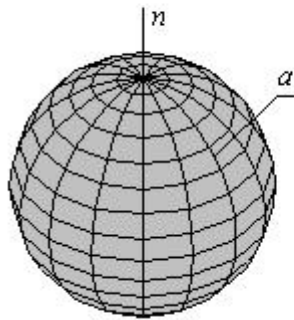


Рис. 7.21

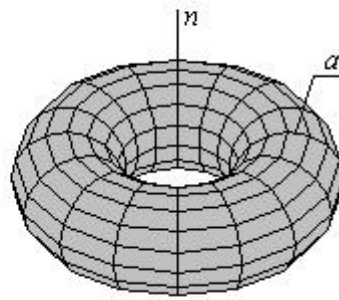


Рис. 7.22

якщо більше – закритий тор (рис. 7.23).

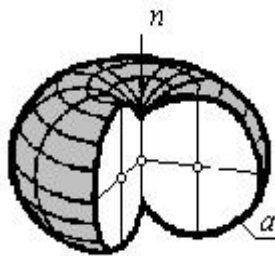


Рис. 7.23

Коли як твірну прийняти еліпс і обертати його навколо малої осі, одержимо стиснений еліпсоїд обертання (рис. 7.24), котрий використовується в картографії; якщо еліпс обертати навколо великої осі, одержимо витягнутий еліпсоїд обертання.

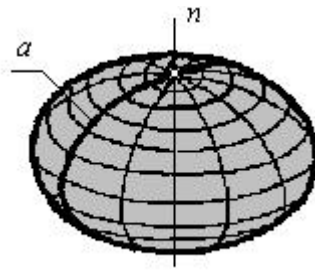


Рис. 7.24

Лекція 11-- 12

## 8. ГРАННІ ПОВЕРХНІ

Гранні поверхні утворюються за допомогою площин. **Багатогранником** називають просторову фігуру, обмежену замкнутою поверхнею, яка складається з відсіків площин, що мають форму плоских багатокутників. Багатокутники, які утворюють поверхню багатогранника, називаються **гранями**, сторони багатокутників – **ребрами**, а вершини – **вершинами** багатогранника.

В інженерній практиці найчастіше використовують такі багатогранники: піраміди, призми, призматоїди та правильні багатогранники.

Пірамідальна поверхня утворюється при переміщенні прямої твірної  $l$ , що проходить через сталу точку простору  $S$  та ковзає по замкнутій ламаній лінії  $m$ , яку називають напрямною (рис. 8.1). При перерізі цієї пірамідальної поверхні площиною  $\Sigma$  утворюється піраміда.

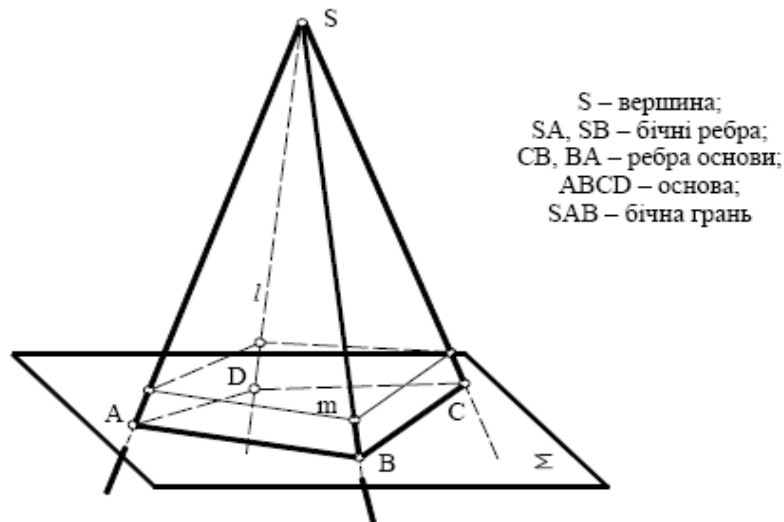


Рис. 8.1

**Піраміда** – це багатогранник, основою якого є багатокутник, а бічні грані – трикутники, що мають спільну точку  $S$  – вершину піраміди.

Сукупність усіх ребер багатогранника називають його сіткою. Згідно з теоремою Ейлера, для випуклого багатогранника існує залежність між числом граней  $\Gamma$ , вершин  $B$  та ребер  $P$ , яка має наступний вигляд:  $\Gamma + B - P = 2$ .

**Піраміда називається правильною**, якщо в її основі лежить правильний багатогранник, а висота проходить через центр основи. Висота – це найкоротша

відстань від вершини піраміди до площини основи. Бічні грані правильної піраміди – рівнобедрені трикутники.

На рис. 8.2 наведено приклад побудови на комплексному кресленні правильної піраміди, в основі якої лежить чотирикутник.

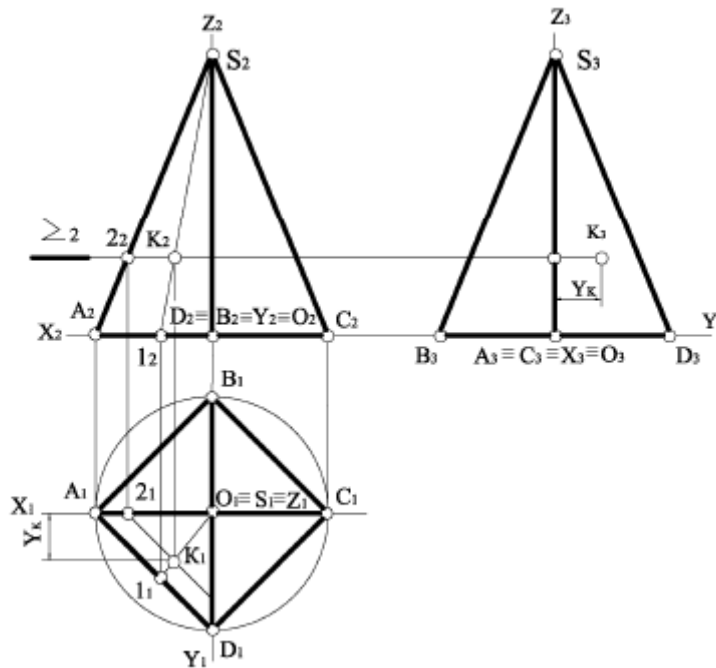


Рис. 8.2

Будемо вважати, що задана фронтальна проекція  $K_2$  точки  $K$ , котра належить бічній грані  $SAD$ , яка є площиною загального положення. Точка належить площині, якщо належить якійсь прямій цієї площини. Виходячи з цього, проводимо через точки  $S_2$  і  $K_2$  пряму до перетину з фронтальною проекцією  $A_2D_2$  у точці  $1_2$ . Далі будуємо  $1_1S_1$  і за вертикальною відповідністю  $K_1$ . Профільну проекцію  $K_3$  будуємо, використовуючи проекційний зв'язок.

Будувати точки на поверхні можна за допомогою січних площин посередників. У даному випадку вибираємо горизонтальну площину рівня  $\Sigma$ , яку проводимо через точку  $K$ .

Фронтальна проекція лінії перетину площини  $\Sigma$  і грані  $SAD$  проходить через точки  $2_2K_2$ . Точка  $2$  належить ребру  $SA$ , тому знаходимо точку  $2_1$ , через яку паралельно  $A_1D_1$  будуємо горизонтальну проекцію лінії перетину, і по вертикальній відповідності знаходимо  $K_1$  – горизонтальну проекцію точки  $K$ . Профільну проекцію  $K_3$  точки  $K$  будуємо як і раніше.

Призматична поверхня утворюється при переміщенні прямої твірної  $l$  по довільній напрямній  $m$  замкненій ламаній лінії так, що вона залишається паралельною до заданого напрямку  $S$  (рис. 8.3).

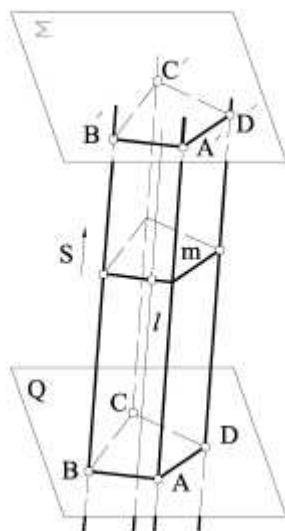


Рис. 8.3

**Призмою** називається багатогранник, який утворюється в перерізі призматичної поверхні двома паралельними площинами  $\Sigma$  і  $Q$ . Якщо бічні ребра перпендикулярні до основи, призма називається прямою і її бічні грані – прямокутники. Якщо бічні ребра не перпендикулярні до основи, призма називається похилою і її бічні грані – паралелограми.

Призма називається **правильною**, якщо в основі її лежить правильний багатокутник.

На рис. 8.4 наведено приклад побудови на комплексному кресленні прямої правильної трикутної призми, яка стоїть на горизонтальній площині проєкцій  $\Pi_1$ .

Нижня і верхня основи є горизонтальними площинами рівня, тому їх горизонтальні проєкції відображені в натуральну величину. Бічні ребра  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  перпендикулярні до  $\Pi_1$ , тому бічні грані на горизонтальну площину проєкцій спроекціювались у відрізки прямих, що співпадають із відповідними сторонами трикутника основи.

Площина  $BB'CC'$  є профільною площиною рівня, тому вона перпендикулярна до  $\Pi_2$  і її фронтальна проєкція вироджується в одну пряму.

Будемо вважати, що задана фронтальна проєкція  $K_2$  точки  $K$ , яка належить бічній грані  $AA'CC'$ . Ця грань є горизонтально проєкційною площиною, тому  $A_1C_1$  має збиральні властивості й горизонтальна проєкція  $K_1$  належить  $A_1C_1$ . Для побудови профільної проєкції  $K_3$  точки  $K$  вимірюємо на  $\Pi_1$  координату  $u_K$  і відкладаємо її на лінії проєкційного зв'язку праворуч від  $Z_3$ .

**Призматойд** – це опуклий багатогранник, усі бічні грані якого є трикутниками або трапеціями, верхня і нижня основи розташовані в паралельних площинах і є багатокутниками

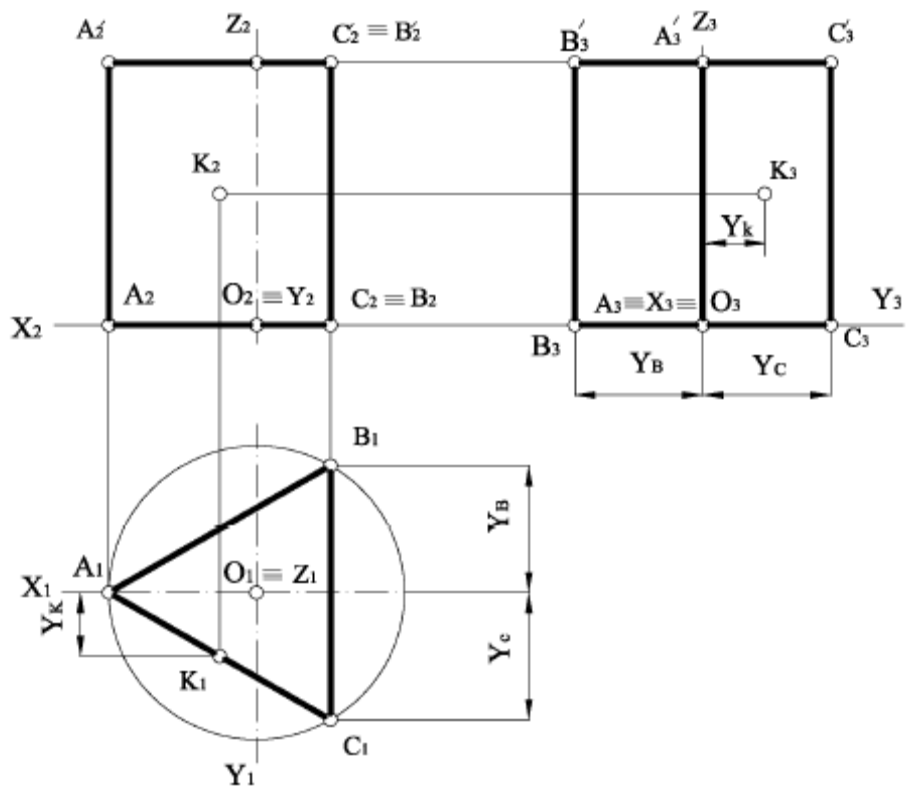


Рис. 8.4

На рис. 8.5 зображено призматойд, основами якого є квадрати ABCD та EFGH.

**Багатогранники** називаються правильними, якщо усі ребра, грані, кути (плоскі, двогранні та просторові) рівні між собою, їх називають тілами Платона.

Існує п'ять таких правильних багатогранників:

- правильний чотиригранник (тетраедр), гранями якого є чотири рівносторонні трикутники (рис. 8.6);
- правильний шестигранник (гексаедр), або куб, складається з шестирівних квадратів (рис. 8.7);
- правильний восьмигранник (октаедр), гранями якого є вісім рівносторонніх трикутників (рис. 8.8);
- правильний дванадцятигранник (додекаедр) складається з дванадцяти правильних п'ятикутників;
- правильний двадцятигранник (ікосаедр), утворений із двадцяти рівносторонніх трикутників.

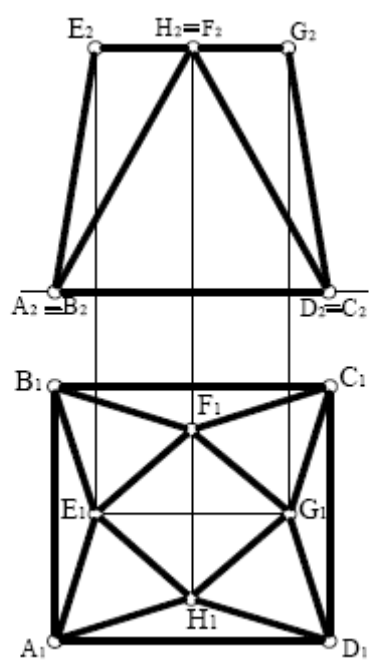


Рис. 8.5

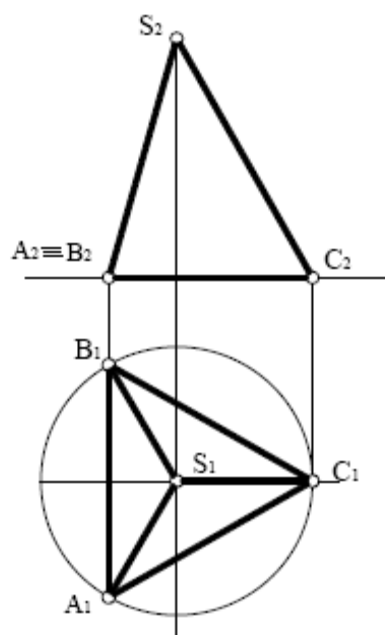


Рис. 8.6

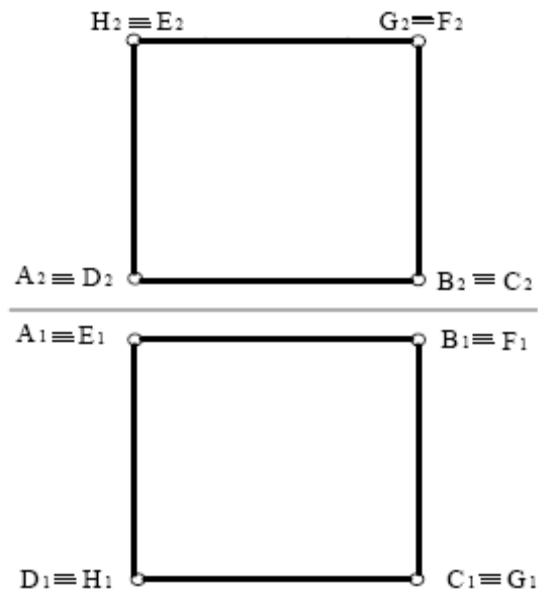


Рис. 8.7

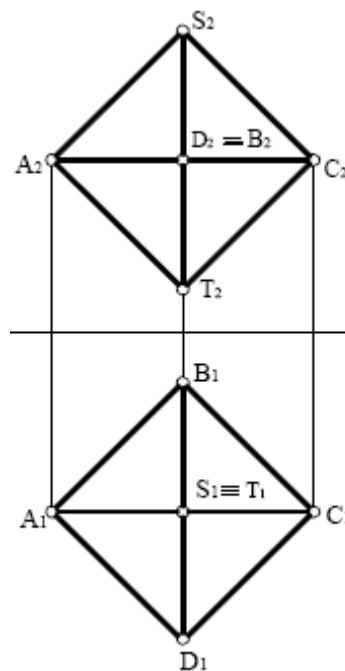


Рис. 8.8

### 8.1 Переріз гранних поверхонь площиною

**Перерізом** називають плоску фігуру, яку отримують при перетині багатогранника площиною. Для побудови перерізів багатогранників використовують два способи: спосіб ребер, спосіб граней. Спосіб ребер передбачає розв'язання задачі на перетин прямої з площиною, причому виконується пошук точки перетину кожного бічного ребра з січною площиною.

Побудова перерізу значно спрощується, коли січна площина  $\Sigma$  є проєкційною (рис. 8.9).



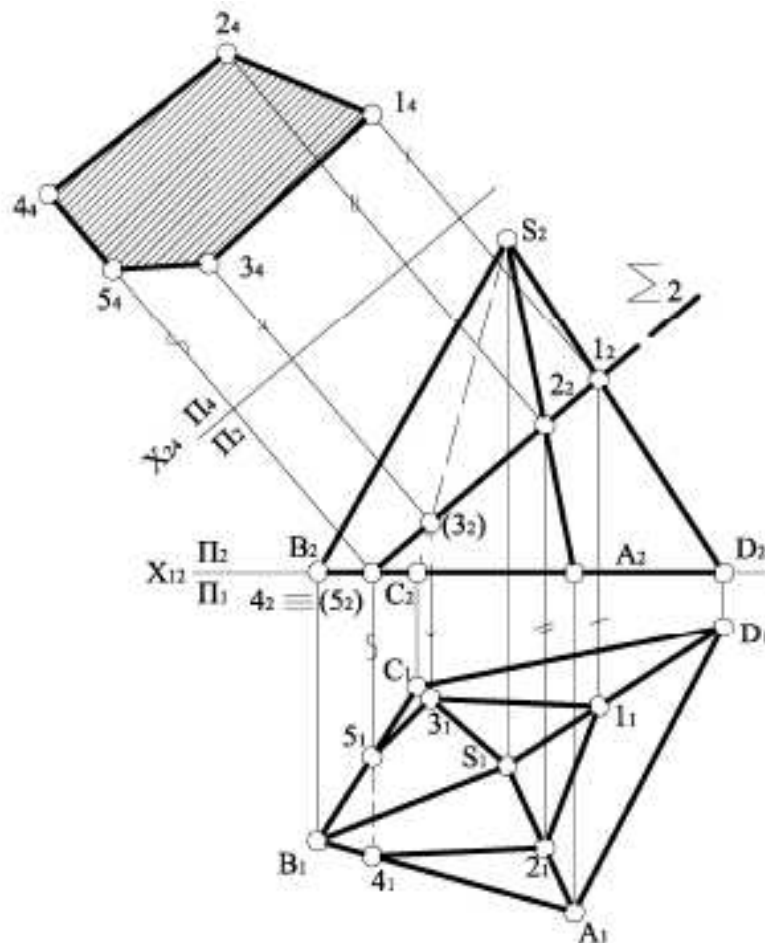


Рис. 8.9

У цьому випадку фронтальна проекція перерізу 12345 уже відома, оскільки вона збігається з фронтальним слідом січної фронтально проекційної площини  $\Sigma$ . Горизонтальну проекцію перерізу будуюмо за законом належності точки ребру і по вертикальній відповідності. Далі методом заміни площин проекцій перетворюємо площину перерізу, яка є проекційною в системі  $\Pi_2/\Pi_1$ , у площину рівня. Для цього будуюмо вісь нової системи площин  $x_{24} \parallel \Sigma_2$ . Координати точок перерізу заміряємо на  $\Pi_1$  від осі  $x_{12}$  і переносимо відповідно на  $\Pi_4$ . Проекція площини перерізу  $1_4 2_4 4_4 5_4 3_4$  є натуральною величиною.

На рис. 8.10 наведено приклад побудови перерізу похилої трикутної призми, яка перетинається фронтально проекційною площиною  $\Sigma$ .

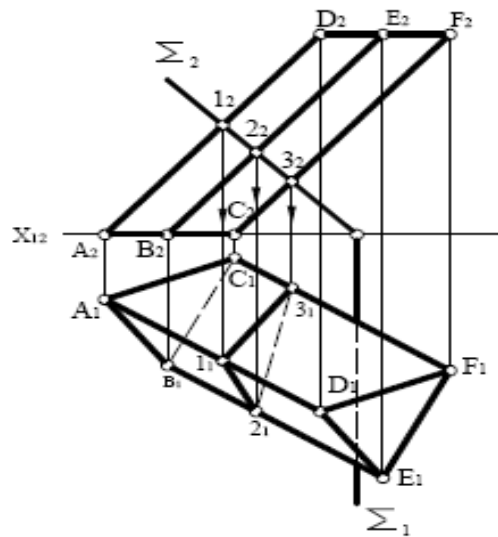


Рис. 8.10

Фронтальна проекція площини перерізу  $1_2 2_2 3_2$  збігається з фронтальним слідом площини  $\Sigma$ . Горизонтальну проекцію перерізу визначаємо за допомогою вертикальної відповідності.

На рис. 8.11 наведено приклад побудови перерізу вертикальної призми січною площиною загального положення  $\Sigma$ .

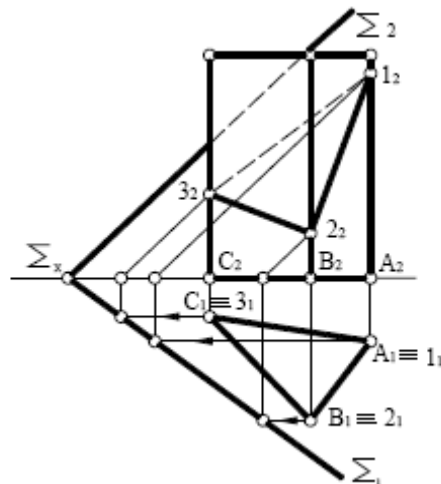


Рис. 8.11

Грані призми займають горизонтально проекційне положення, тому горизонтальна проекція перерізу  $1_1 2_1 3_1$  збігається з горизонтальною проекцією призми. Фронтальну проекцію перерізу будуюмо за допомогою фронталей, які проводимо через вершини трикутника перерізу. Фронтальні проекції фронталей паралельні  $\Sigma_2$  і при перетині з ребрами призми дають фронтальну проекцію перерізу  $1_2 2_2 3_2$ .

На рис. 8.12 наведено приклад побудови перерізу піраміди січною площиною загального положення  $\Sigma$ .

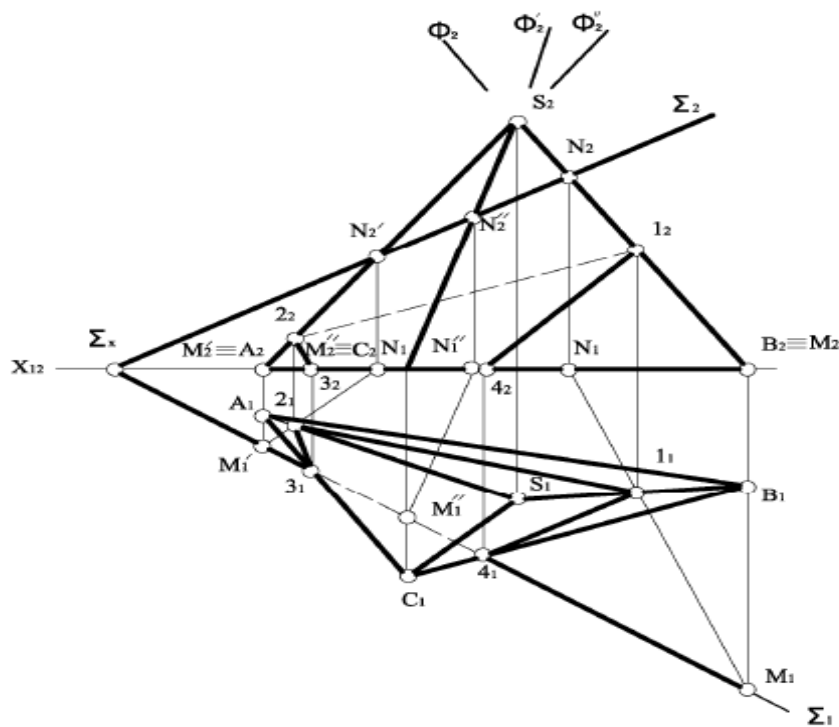


Рисунок 8.12

Грані піраміди  $SABC$  займають загальне положення, тому для побудови перерізу січною площиною загального положення необхідно застосовувати спосіб ребер, який передбачає знаходження точки перетину кожного бічного ребра піраміди з січною площиною  $\Sigma$ .

Розглянемо, наприклад, знаходження точки перетину ребра  $SB$  із січною площиною  $\Sigma$ . Спочатку проводимо через задане ребро  $SB$  фронтальну проекційну площину  $\Phi$ . Потім знаходимо лінію перетину площини  $\Sigma\Phi$ :  $\Sigma \cap \Phi = NM$ . Після цього знаходимо горизонтальну проекцію точки перетину:  $S_1 \cap B_1M_1 = 1_1$ . Фронтальну проекцію точки перетину  $1_2$  знаходимо по вертикальній відповідності. Як бачимо, січна площина не перетинає ребро  $SC$  у межах заданої піраміди. Точки  $3_1$  і  $4_1$  визначаються безпосередньо на перетині горизонтального сліду  $\Sigma_1$  із  $A_1C_1$  і  $C_1B_1$ . Фронтальні проекції  $3_2$  і  $4_2$  отримуємо за допомогою ліній проекційного зв'язку. Таким чином, ми одержали переріз 4123.

## 8.2 Побудування точок перетину лінії з поверхнею

Багатогранну опуклу поверхню пряма лінія перетинає у двох точках. Точки перетину прямої з поверхнею багатогранника називаються точками зустрічі.

При перетині багатогранників прямою лінією можливі такі випадки:

1. Грані багатогранника займають проекційне положення.
2. Грані багатогранника займають загальне положення.

У першому випадку точки перетину прямої з гранями одразу визначають на одній із проекцій, до якої грані займають проекційне положення. У другому випадку крізь пряму проводять допоміжну площину, частіше проекційну, будують лінію перетину цієї площини з багатогранною поверхнею, а потім визначають точки перетину отриманої лінії (багатокутника) і прямої.

На рис. 8.13 наведено приклад побудови точок перетину прямої загального положення  $l$  із прямою трикутною призмою  $ABC$ .

Бічні грані призми  $ABC$  займають горизонтально проекційне положення, тому горизонтальна проекція прямої трикутної призми виглядає як трикутник  $A_1B_1C_1$ . Завдяки збиральним властивостям проекційних площин точки перетину  $K$  і  $L$  прямої  $l$  із гранями визначаємо безпосередньо на горизонтальній площині проекцій  $\Pi_1$ . Фронтальні проекції точок  $K$  і  $L$  визначають за вертикальною відповідністю. Відрізок між точками входу та виходу невидимий на обох проекціях.

На рис. 8.14 наведено приклад побудови точок входу і виходу прямої загального положення  $l$  з поверхнею піраміди  $SABCD$ .

Через пряму  $l$  проводимо фронтально проекційну площину  $\Sigma$ . На  $\Pi_2$  визначаємо точки перетину ребер піраміди зі слідом площини  $\Sigma_2$ .

Потім будуємо горизонтальну проекцію перерізу  $1_12_13_14_1$  за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв'язку. Перетин горизонтальної проекції  $l_1$  прямої  $l$  із побудованою горизонтальною проекцією перерізу  $1_12_13_14_1$  дає точки  $K_1$  і  $L_1$  – горизонтальні проекції точок входу і виходу. Фронтальні проекції  $K_2$  і  $L_2$  визначаємо за законом належності та за вертикальною відповідністю.

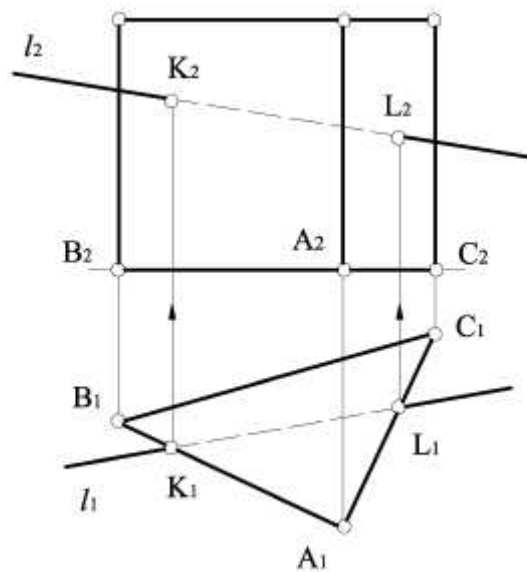


Рис. 8.13

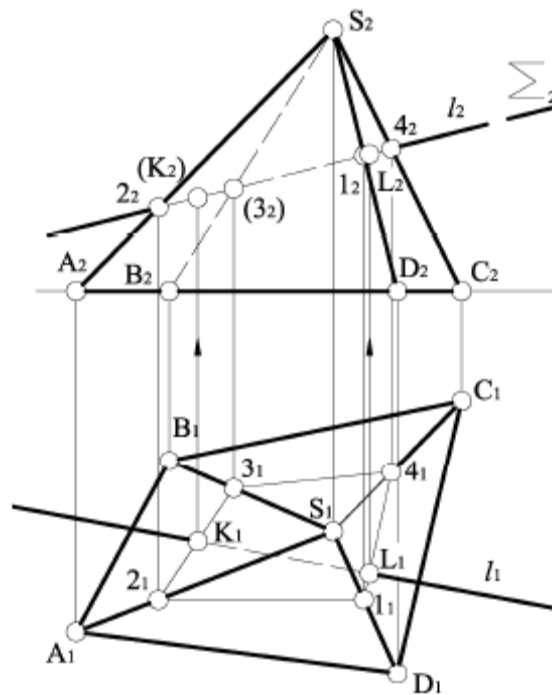


Рис. 8.14

Іноді зручніше одержувати розв'язання задачі за допомогою площини загального положення (рис. 8.15).

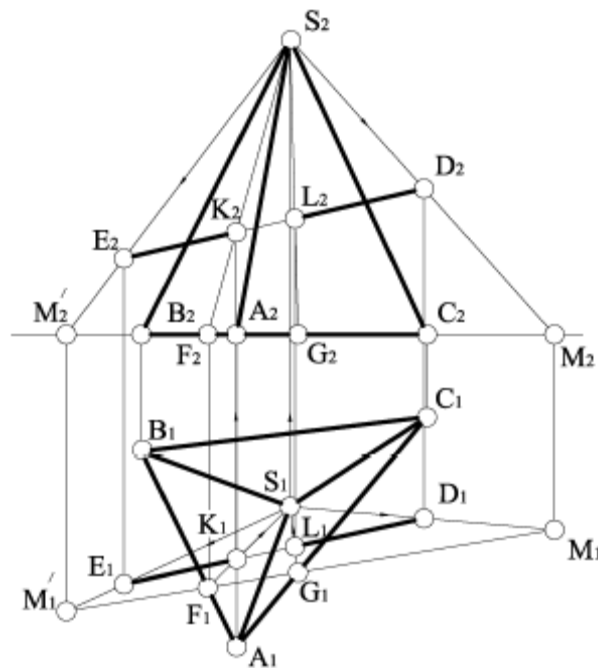


Рис. 8.15

Допоміжну площину задаємо прямою ED і вершиною піраміди S. З'єднуємо вершину піраміди S з точками E і D. Далі знаходимо сліди для цих прямих M і M', через які проходить горизонтальний слід M1' M1 допоміжної площини. Цей слід перетинає основу піраміди в точках F і G, через які проходять прямі SF і SG, що є лініями перетину допоміжної площини з поверхнею піраміди. Пряма ED належить допоміжній площині, а також перетинає прямі SF і SG в точках K і L, які є точками входу і виходу.

### 8.3 Розгортки гранних поверхонь

Для виготовлення багатогранників з листового матеріалу необхідно мати їх розгортки. Будують розгортки за допомогою послідовного суміщення граней багатогранника з площиною. Грані багатогранника на розгортці відображаються в натуральну величину, їх розташування може бути різним, але при цьому треба досягти найвигіднішого використання листового матеріалу та скорочення шва розгортки.

Для побудови розгорток багатогранних поверхонь використовують такі способи:

- 1) спосіб трикутників;
- 2) спосіб нормального перерізу;
- 3) спосіб розкатки.

**Спосіб трикутників (триангуляцій)** використовують для побудови розгорток пірамід, бічна поверхня яких складається з трикутників – граней піраміди. Для побудови розгортки піраміди необхідно визначити дійсну величину всіх ребер піраміди. На рис. 8.16 наведено приклад побудови розгортки бічної поверхні піраміди  $SABC$ .

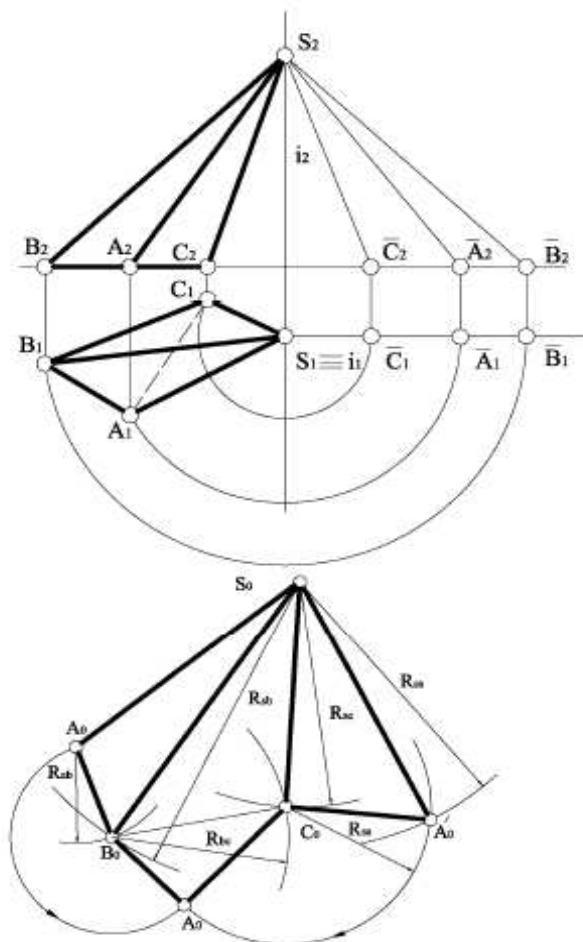


Рис. 8.16

Через вершину піраміди  $S$  проводимо вісь  $i$ , яка перпендикулярна до  $\Pi_1$ . Дійсну величину ребер піраміди визначаємо шляхом обертання кожного ребра

піраміди навколо осі й до положення, паралельного фронтальній площині проєкцій, а потім на  $\Pi_2$  визначаємо їх дійсну величину  $S_2 \bar{A}_2$ ,  $S_2 \bar{B}_2$ ,  $S_2 \bar{C}_2$ . Основа піраміди належить  $\Pi_1$ , і ребра основи мають на кресленні дійсну величину ребер, тобто  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ . Розгортку будуємо з довільної точки  $S_0$ , і при цьому під довільним кутом будуємо відрізок  $S_0A_0 = S_2 \bar{A}_2$ . Далі з точки  $A_0$  проводимо дугу радіусом  $R_{AB} = [A_1B_1]$ , а з точки  $S_0$  – дугу радіусом  $R_{SB} = [S_2 \bar{B}_2]$ . Перетин дуг дає точку  $B_0$  – вершину трикутника  $\Delta S_0A_0B_0$ .

Аналогічно знаходимо точки  $C_0$  і  $A_0'$ . Потім методом засічок будуємо основу піраміди.

Метод трикутників можна використати для побудови розгорток призм, бічні грані яких є чотирикутниками. За допомогою діагоналі чотирикутник розбивають на два трикутники, визначають дійсну довжину сторін цих трикутників і методом засічок будують розгортку.

**Спосіб нормального перерізу** використовують для побудови розгортки поверхні призми тоді, коли бічні ребра призми паралельні до однієї з площин проєкцій і на кресленні при цьому є дійсна величина бічних ребер призми.

На рис. 8.17 наведено приклад побудови розгортки бічної поверхні призми  $ABCA'B'C'$ , у якої бічні ребра є фронталями.

Для побудови розгортки призму перерізаємо фронтально проєкційною площиною  $\Sigma(\Sigma_2)$  перпендикулярно до бічних ребер призми і визначаємо дійсну величину перерізу  $\Delta 1_42_43_4$  методом заміни площин проєкцій. Потім на горизонтальній прямій від довільної точки  $1_0$  відкладаємо відрізки  $[1_02_0] = [1_42_4]$ ,  $[2_03_0] = [2_43_4]$ ,  $[3_01_0] = [3_41_4]$  і через отримані точки проводимо прямі лінії, які перпендикулярні до горизонтальної прямої. Фронтальна проєкція ребер призми є дійсною величиною. Умовно позначаємо від фронтального сліду площини  $\Sigma_2$  нижню і верхню частини призми. Відповідні відрізки ребер відкладаємо на відповідних вертикальних лініях, унаслідок чого отримуємо точки  $A_0, B_0, C_0, \bar{A}_0, A'_0, B'_0, C'_0, \bar{A}'_0$ . З'єднуємо їх послідовно прямими лініями і отримуємо розгортку бічної поверхні призми. Методом засічок будуємо верхню та нижню основи призми.

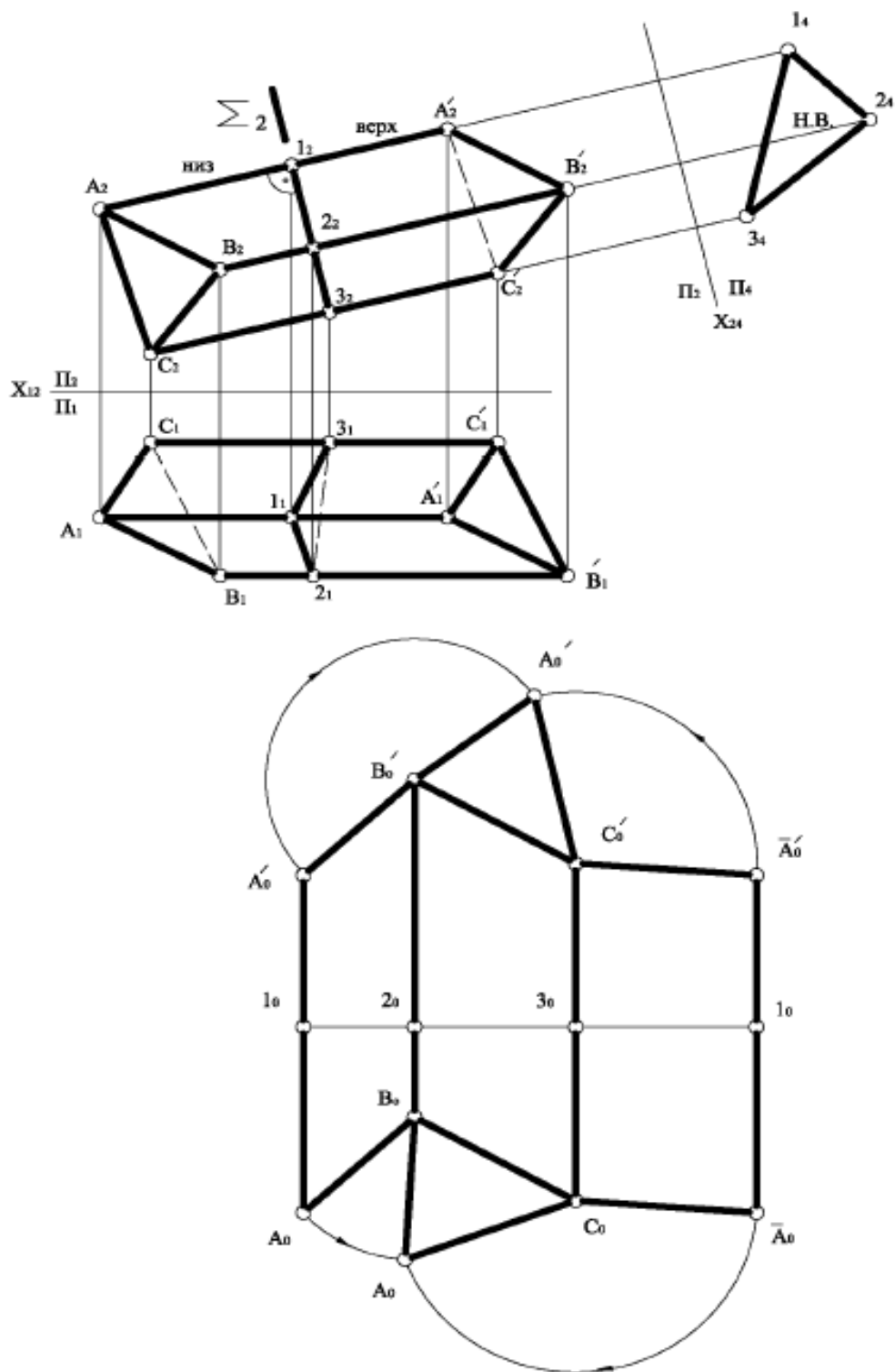


Рис. 8.17

**Спосіб розклатки** використовують для побудови розгортки поверхні призми тоді, коли її основа паралельна одній площині проекцій, а бічні ребра паралельні до другої площини проекцій. На рис. 8.18 наведено приклад побудови розгортки похилої тригранної призми, у якій основи  $ABC$  та  $A'B'C'$  паралельні до горизонтальної площини проекцій, а бічні ребра паралельні до фронтальної площини проекцій.



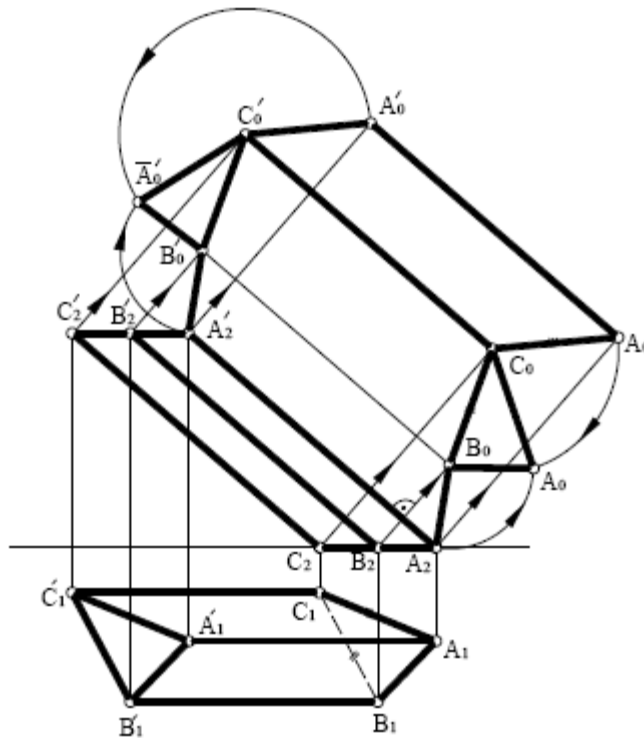


Рис. 8.18

Будемо вважати, що площина  $\theta$  розгортки бічної поверхні призми проходить через ребро  $AA'$  паралельно фронтальній площині проєкцій. Розрізаємо уявно бічну поверхню призми уздовж ребра  $AA'$  і обертаємо площину  $ABB'A'$  навколо ребра  $AA'$  до суміщення з площиною розгортки  $\theta$ . Для цього з точок  $B_2$  і  $B_2'$  проводимо промені, які перпендикулярні до осі обертання  $A_2A_2'$ , а потім на цих променях робимо засічки радіусом  $[A_1B_1]$ , які проводимо з точок  $A_2$  та  $A_2'$ . У результаті отримуємо точки  $B_0$  і  $B_0'$ . Далі навколо осі  $B_0B_0'$  обертаємо грань  $BB'C'C$  до суміщення з площиною розгортки  $\theta$ . Для цього з точок  $C_2$  і  $C_2'$  проводимо промені, які перпендикулярні до осі обертання  $B_0B_0'$ , а потім на цих променях робимо засічку радіусом  $[B_1C_1]$ , які проводимо з точок  $B_0$  та  $B_0'$ . У результаті отримуємо точки  $C_0$  і  $C_0'$ . Аналогічно будуємо точки  $A_0$  і  $A_0'$ . З'єднуємо побудовані точки і отримуємо плоску фігуру  $A_2B_0C_0A_0A_0'C_0'B_0'A_2'$  – розгортку бічної поверхні призми. Для побудови повної розгортки призми достатньо приєднати до бічної розгортки призми її верхню та нижню основи. Цю побудову здійснюємо за допомогою засічок, наслідок чого отримуємо точки  $A_0$  та  $A_0'$ .

#### 8.4 Побудування лінії взаємного перетину гранних поверхонь

**Лінія перетину** – це спільна лінія для двох поверхонь, які перетинаються. Для побудови лінії перетину двох багатогранників використовують два способи:

1. Спосіб ребер.
2. Спосіб граней.

Спосіб ребер дозволяє визначити лінію перетину багатогранників за точками перетину ребер одного багатогранника з гранями другого. Розв'язання задачі зводиться до побудування точки перетину прямої з площиною.

Спосіб граней дозволяє визначити лінію перетину багатогранників як просторову ламану, котра складається з відрізків прямих ліній, по яких перетинаються певні грані багатогранників. Розв'язання задачі зводиться до побудування лінії перетину двох площин.

Лініями перетину двох багатогранників є просторові замкнені багатокутники. Якщо один багатогранник частково перетинає поверхню другого, то матимемо тільки одну замкнену ламану лінію їх взаємного перетину, це називається неповним проникненням, або врізанням.

Якщо один багатогранник повністю перетинає другий, отримаємо дві лінії перетину: лінію входу і лінію виходу, це називається повним проникненням.

Просторова лінія перетину багатогранників складається з відрізків прямих ліній, по яких перетинаються їх грані, при цьому вершини ламаної є точками перетину ребер одного багатогранника з гранями другого.

На рис. 8.19 наведено приклад побудови ліній перетину піраміди  $SABC$  і чотиригранної призми  $DEFG$ .

Тригранна піраміда своєю основою розташована на горизонтальній площині проєкцій. Дві бічні грані призми  $DEE'D'$  і  $GFF'G'$  – горизонтальні площини рівня, а дві інші  $DGG'D'$  і  $EFF'E'$  – фронтально проєкційні площини, тому їх фронтальні проєкції перетворюються на прямі лінії, які мають збиральні властивості, а бічні ребра призми проєкціюються в точки. Отже, фронтальна проєкція лінії перетину цих фігур відома. Оскільки призма повністю перетинає піраміду, отримуємо дві лінії перетину: лінію входу і лінію виходу. Для побудування горизонтальної проєкції лінії перетину проводимо через грані  $DEE'D'$  і  $GFF'G'$  горизонтальні площини рівня  $\alpha(\alpha_2)$  і  $\Sigma(\Sigma_2)$ , які паралельні до основи піраміди, і, таким чином, лінії перетину з бічною поверхнею піраміди дадуть фігури, подібні до основи. Фронтальна проєкція горизонтальної площини рівня  $\alpha_2$  перетинає ребро піраміди  $S_2B_2$  у точці  $T_2$ . Далі за законом належності та за допомогою лінії проєкційного зв'язку будуємо її горизонтальну проєкцію  $T_1$ . Потім проводимо через  $T_1$  пряму, паралельну до  $B_1A_1$ , і отримуємо точки  $1_1$  і  $3_1$ . Через точку  $3_1$  проводимо пряму, паралельну до  $A_1C_1$ , і отримуємо точку  $4_1$ . Потім через  $T_1$  проводимо пряму, паралельну до  $B_1C_1$ , і отримуємо точки  $2_1$  і  $5_1$ .



Тому для побудування лінії перетину двох пірамід використовуємо спосіб ребер, який зводиться до побудування точки перетину прямої з площиною. Для цього через ребра піраміди HEDF проводимо фронтальні проєкційні площини  $\Sigma(\Sigma_2)$ ,  $\Sigma'(\Sigma'_2)$ ,  $\Sigma''(\Sigma''_2)$ .

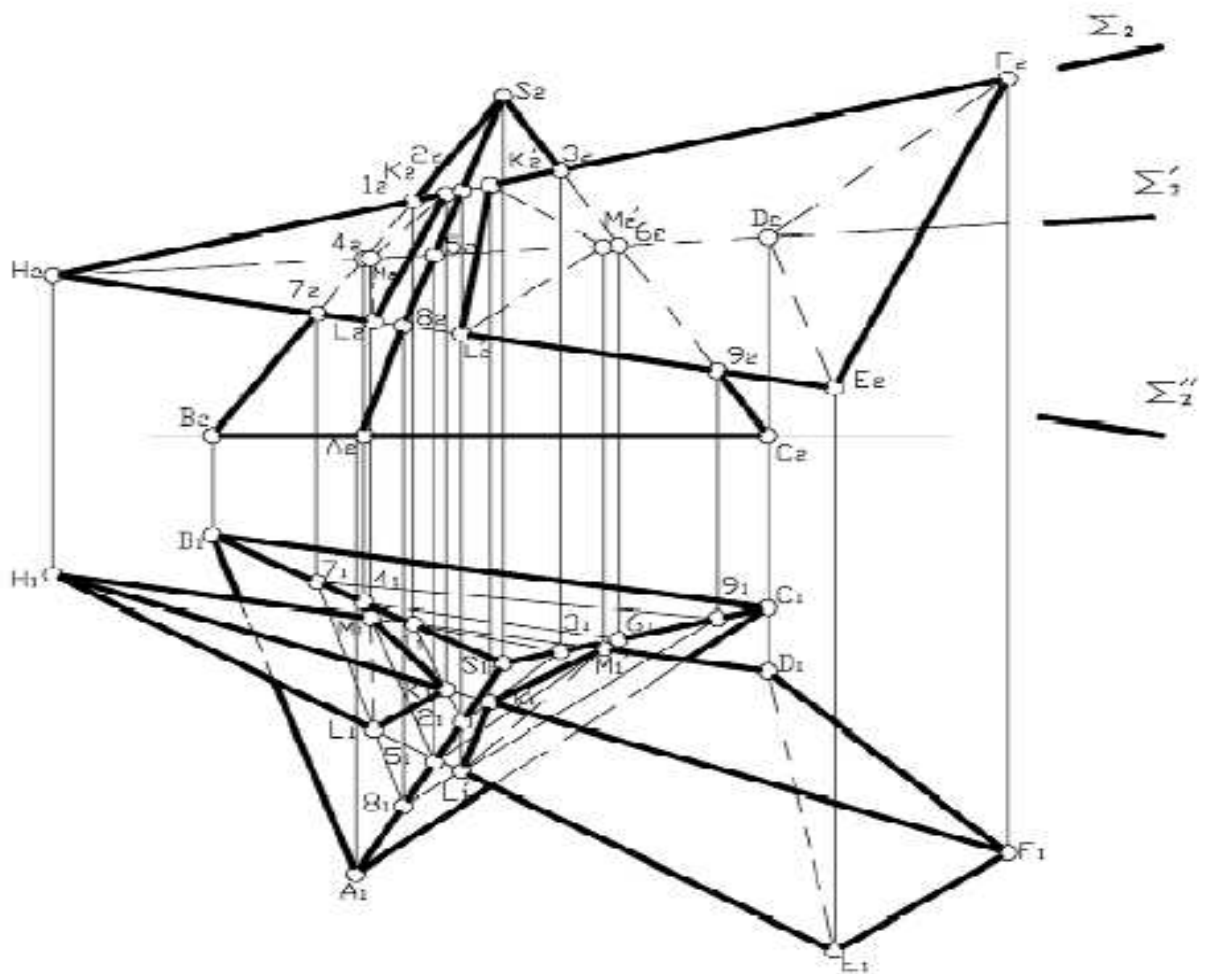


Рис. 8.20

Кожна з цих площин перетинає піраміду  $SABC$  по трикутнику, і точки лінії перетину розташовані на перетині трикутника з відповідним ребром піраміди  $HEDF$ . Наприклад, фронтально проекційна площина  $\Sigma$  перетинає піраміду  $SABC$  по трикутнику  $123$ . Тоді горизонтальні проекції  $K_1$  і  $K'_1$  точок перетину  $K$  і  $K'$  піраміди  $SABC$  з ребром  $HF$  піраміди  $HEDF$  знаходимо на перетині горизонтальної проекції  $1_12_13_1$  трикутника  $123$  з горизонтальною проекцією  $H_1F_1$ , а фронтальні проекції  $K_2$  і  $K'_2$  цих точок знаходимо по вертикальній відповідності, використовуючи властивість належності. Аналогічно визначаємо точки  $L, L', M, M'$  лінії перетину двох пірамід. Потім з'єднуємо отримані точки прямими і знаходимо дві лінії перетину: лінію входу  $K'L'M'$  і лінію виходу  $KLM$ , це називається повним проникненням.

Видимість кожної ланки лінії перетину визначається за видимістю граней, до яких вона належить. На горизонтальній площині проекцій усі грані піраміди  $SABC$  видимі, а з граней піраміди  $HEDF$  невидима тільки одна –  $HDE$ . Тому на горизонтальній площині проекцій невидимі тільки відрізки  $M_1L_1$  і  $M'_1L'_1$ , які належать лінії перетину.

На фронтальній площині проекцій видимими є дві грані піраміди  $SABC$ :  $SBA$  і  $SAC$ , а також грань піраміди  $HEDF$  –  $HEF$ . Тому видимими є відрізки  $KL$  і  $K'L'$ , які належать грані  $HEF$  і, відповідно, граням  $SBA$  та  $SAC$ .

Задача на побудування лінії перетину гранних поверхонь значно спрощується, коли одна з фігур займає проекційне положення. На рис. 8.21 наведено приклад побудови лінії перетину прямої тригранної призми з тригранною пірамідою.

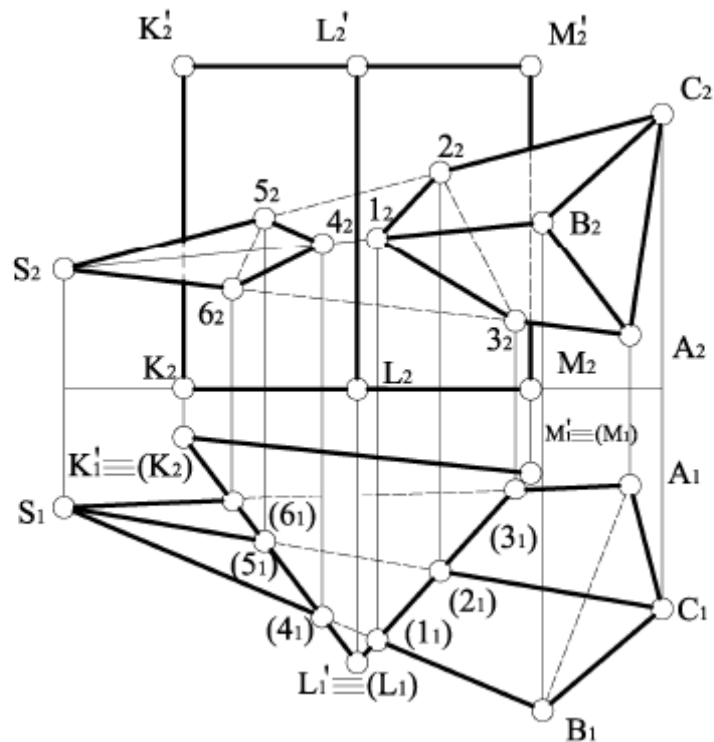


Рис. 8.21

Грані призми займають горизонтально проекційне положення і на горизонтальній площині проєкцій проєкціюються в прямі лінії. Горизонтальні проєкції  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1$  точок перетину ребер піраміди з гранями призми знаходимо на перетині горизонтальних проєкцій відповідних граней призми і ребер піраміди, а фронтальні проєкції  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2$  знаходимо по вертикальній відповідності з використанням властивості належності.

Видимість лінії перетину визначаємо відповідно до видимості граней, на яких лежить ця лінія. На фронтальній площині проєкцій призма має дві видимі грані  $KK'L'L, LL'M'M$  і одну невидиму  $KK'M'M$ , з граней піраміди видимими є грані  $SBC, SBA$ , а невидимою – грань  $SAC$ . Тому видимими на фронтальній площині проєкцій є відрізки  $1_22_2, 1_23_2$ , а також  $4_25_2, 4_26_2$ , які належать одразу двом видимим граням.

Лекція 13 – 16

## 9. КРИВІ ПОВЕРХНІ

### 9.1 Точки і лінії на поверхнях

Лінію можна розглядати як сукупність розташованих по поверхні точок. Виникає запитання: скільки і які точки необхідно побудувати? Побудування великої кількості точок приводить до великих затрат часу.

Спочатку будують опорні точки, до яких належать точки початку і кінця лінії, точки на межі видимості, а також найвищі та найнижчі точки. Потім

будують точки, які називають додатковими, і вони впливають тільки на точність побудовання.

Зазвичай на комплексному кресленні точку задають на одній із проекцій, і при цьому виникає задача знаходження інших проекцій цієї точки. Для розв'язання цієї задачі використовують умову належності точки поверхні: якщо точка належить поверхні, вона належить деякій лінії цієї поверхні. Тому для знаходження необхідної проекції через задану точку проводять яку-небудь лінію поверхні. Звичайно як таку лінію використовують твірну або паралель. Потім знаходять другу проекцію цієї лінії, а потім, використовуючи властивість належності точки лінії, знаходять другу проекцію цієї точки.

На рис. 9.1 наведено приклад побудови відсутніх проекцій лінії  $l$  по заданій фронтальній проекції лінії  $l$ , яка належить поверхні прямого кругового конуса.

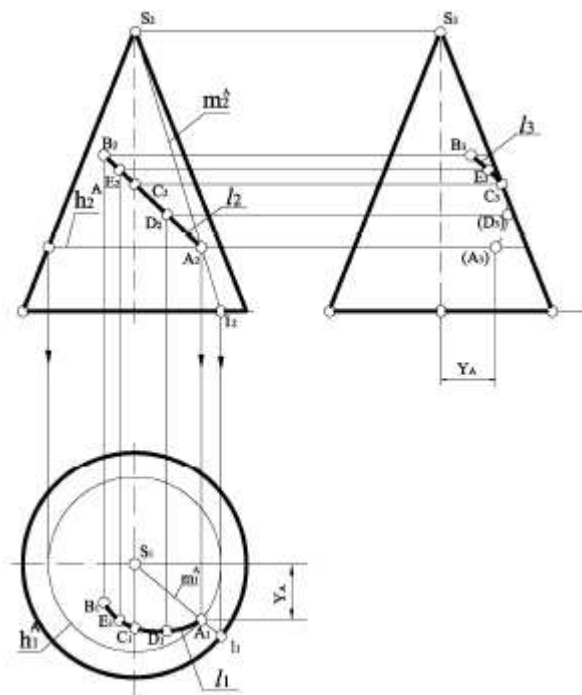


Рис. 9.1

Як опорні точки приймаємо точки  $A$  і  $B$  – начало і кінець лінії, а також точку  $C$ , точку перетину лінії  $l$  з профільним меридіаном, а для точності побудовання вибираємо ще дві допоміжні точки  $E$  і  $D$ .

Прямий круговий конус можна розглядати як поверхню обертання і як лінійчатую поверхню. Тому для побудовання горизонтальних проекцій точок, які належать поверхні конуса, існує два способи.

Якщо конус розглядати як поверхню обертання, то через задану точку, наприклад  $A$ , проводимо паралель  $h^A$ . Її фронтальна проекція  $h^A_2$  є прямою, яка проходить через  $A_2$  і перпендикулярна до осі конуса, а горизонтальна проекція  $h^A_1$  – коло радіуса  $h^A_2/2$ .

Фронтальною межею видимості для конуса є лінії його головних меридіанів, а профільною межею видимості є лінії профільних меридіанів. Використовуючи властивість належності точки лінії, а також враховуючи

видимість фронтальної проекції  $A_2$  точки  $A$ , знаходимо горизонтальну проекцію  $A_1$  точки  $A$ .

Для побудови профільної проекції  $A_3$  точки  $A$  через  $A_2$  проводимо горизонтальну лінію зв'язку і відкладаємо на ній від осі вправо  $Y_A$ .

Якщо конус розглядати як лінійчасту поверхню, то через точку  $A$  проводимо твірну  $m^A$ . Фронтальна проекція  $m^A_2$  проходить через фронтальну проекцію  $A_2$  точки  $A$  і в точці  $1_2$  перетинає фронтальну проекцію основи конуса. Потім будуємо горизонтальну проекцію  $1_1$  точки  $1$ . Оскільки точка  $A_2$  за умовою видима, видимою буде і твірна  $m^A_2$ , яка проходить через неї. Тому горизонтальна проекція  $1_1$  точки  $1$  буде належати нижній половині горизонтальної проекції кола основи конуса.

З'єднуємо прямою точки  $1_1$  і  $S_1$  і отримуємо горизонтальну проекцію  $m^A_1$  твірної  $m^A$ . Використовуючи властивість належності точки лінії, отримуємо горизонтальну проекцію  $A_1$  точки  $A$ .

Аналогічно знаходять горизонтальні проекції всіх вибраних точок і, з'єднавши їх плавною кривою, отримаємо горизонтальну проекцію  $l_1$  лінії  $l$ .

Далі будуємо профільні проекції точок, використовуючи лінії зв'язку і відстані до відповідних точок, які беремо з горизонтальної площини проекцій. Профільна проекція  $C_3$  точки  $C$  належить профільному меридіану. Частина профільної проекції  $B_3E_3C_3$  буде видимою, а частина  $C_3D_3A_3$  – невидимою.

На рис. 9.2 наведено приклад побудови відсутніх проекцій лінії  $l$  по заданій фронтальній проекції лінії  $l_2$ , яка належить поверхні прямого колового циліндра.

Як опорні точки приймаємо точки  $A$  і  $B$  – начало і кінець лінії  $l$ , а також точку  $C$ , точку перетину лінії  $l$  з профільним меридіаном, а для точності побудування вибираємо ще дві допоміжні точки  $E$  і  $D$ .

Бічна поверхня циліндра займає проекційне положення відносно горизонтальної площини проекцій, при цьому всі паралелі однакові і їх горизонтальні проекції збігаються з горизонтальним обрисом циліндра, яким є коло.

Тому горизонтальні проекції точок знаходять по вертикальній відповідності на горизонтальному обрисі циліндра. Горизонтальною межею видимості є лінія верхньої основи, тому вся горизонтальна проекція  $l_1$  лінії  $l$  буде невидимою.

Для побудування профільної проекції  $A_3$  точки  $A$  через точку  $A_2$  проводимо горизонтальну лінію зв'язку і відкладаємо  $Y_A$  на ній від осі вправо. Частина профільної проекції  $A_3E_3C_3$  буде видимою, а частина  $C_3D_3B_3$  – невидимою.

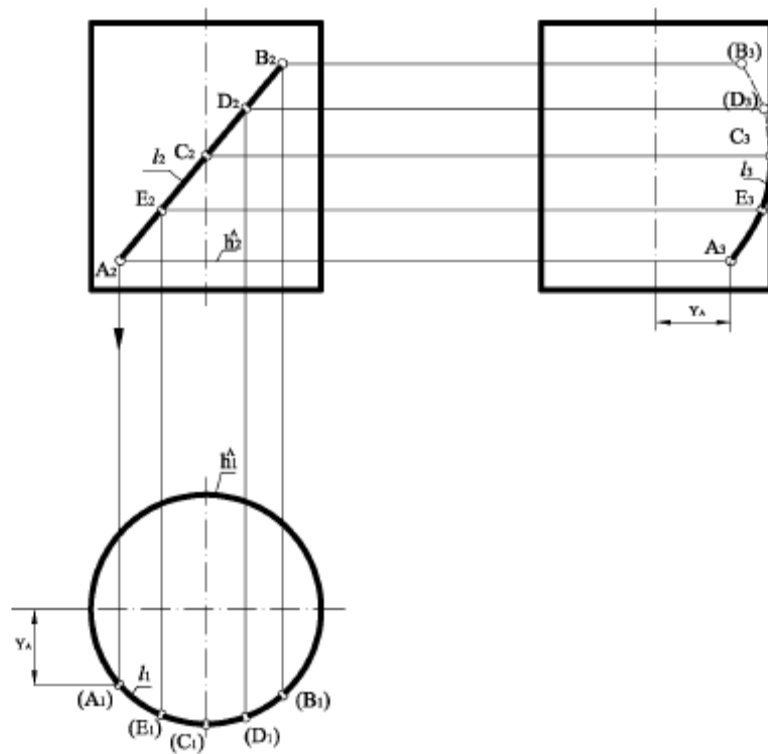


Рис. 9.2

На рис. 9.3 наведено приклад побудови проекцій, яких не вистачає, лінії  $l$ , котра належить сфері, по заданій фронтальній проекції  $l_2$ .

Як опорні точки приймаємо точки  $A$  і  $B$  – початок і кінець лінії  $l$ , а також  $D$  і  $C$  – точки перетину лінії  $l$  з екватором і профільним меридіаном сфери. Оскільки  $l$  є кривою лінією, вибираємо ще додаткові точки  $E, F, G$ .

Фронтальна проекція точки  $D$  належить фронтальній проекції екватора, тому її горизонтальна проекція належить горизонтальній проекції екватора. Існують дві точки, які задовольняють цій умові: одна на верхній половині обрисового кола, друга – на нижній.

Для правильного знаходження положення точки використовуємо дані про її видимість на фронтальній площині проекцій, де вона є видимою. Фронтальною межею видимості для сфери є горизонтальна проекція головного меридіана, тому горизонтальна проекція  $D_1$  належить нижній половині обрисового кола сфери.

Порядок знаходження горизонтальних проекцій інших точок однаковий. Розглянемо знаходження горизонтальної проекції  $A_1$  точки  $A$ . Через точку  $A$  проводимо паралель. Її фронтальна проекція  $h_2^A$  є прямою, яка перпендикулярна до фронтальної проекції осі сфери, а горизонтальна проекція  $h_1^A$  – коло радіуса  $h_2^A/2$  з центром, який збігається з горизонтальною проекцією осі сфери.



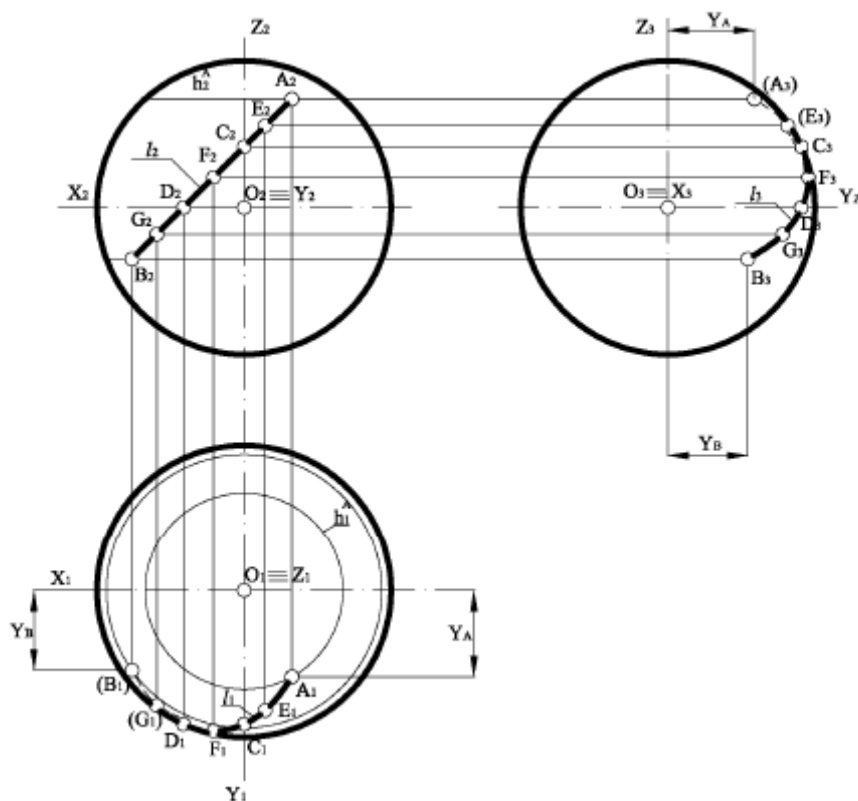


Рис. 9.3

Горизонтальною межею видимості для поверхні сфери є екватор. Фронтальна проекція  $A_2$  лежить вище від екватора і є видимою, тому на  $\Pi_1$  горизонтальна проекція  $A_1$  є видимою і буде знаходитися на нижній половині кола  $h_1^A$ , оскільки фронтальною межею видимості для сфери є головний меридіан. Аналогічно знаходимо положення і видимість горизонтальних проекцій інших точок.

Потім з'єднуємо отримані точки плавною кривою з урахуванням видимості. Частина горизонтальної проекції лінії  $l_1 - A_1E_1C_1F_1D_1$  – буде видимою, а частина  $D_1G_1B_1$  – невидимою.

Для побудування профільної проекції  $A_3$  точки  $A$  через  $A_2$  проводимо горизонтальну лінію зв'язку і відкладаємо на ній від  $Z_3$  вправо величину, що дорівнює  $Y_A$ . Аналогічно будемо профільні проекції інших точок. Для побудування профільної проекції  $C_3$  точки  $C$  достатньо провести горизонтальну лінію зв'язку із  $C_2$  до перетину з профільною проекцією профільного меридіана.

Профільною межею видимості для поверхні сфери є профільний меридіан. Частина лінії від точки  $B$  до точки  $C$  лежить перед площиною профільного меридіана, тому профільна проекція цієї частини лінії буде видимою, а частина  $C_3E_3A_3$  – невидимою.

## 9.2. Переріз кривих поверхонь площиною

При перетині кривих поверхонь площиною утворюється плоска фігура, яку називають **перерізом**.

У загальному випадку для побудування лінії перерізу кривої поверхні площиною необхідно виконати такі дії:



3. Якщо січна площина паралельна до осі циліндра, отримаємо прямокутник.

4. Якщо січна площина є дотичною до поверхні циліндра, то отримаємо пряму лінію.

На рис. 9.4 наведено приклад побудови перерізу поверхні циліндра фронтально проекційною площиною  $T$ .

Завдяки збиральним властивостям проекційних площин на  $\Pi_2$  маємо готову проекцію лінії перерізу, яка збігається зі слідом площини  $T$  ( $T_2$ ). Січна площина  $T$  не перпендикулярна і не паралельна до осі циліндра, вона перетинає циліндр по еліпсу. Велика вісь еліпса належить площині головного меридіана циліндра  $\theta$  і дорівнює відстані між точками  $1_2$  і  $2_2$ , а мала вісь еліпса належить площині профільного меридіана і дорівнює відстані між точками  $3_1$  і  $4_1$ . Для точності побудови еліпса вибираємо ще допоміжні проекції точок  $5_2$  і  $6_2$ , а також  $7_2$  і  $8_2$ . Далі для побудовання натуральної величини перерізу циліндра нахиленою площиною  $T$  використовуємо спосіб заміни площини проекцій. Вісь нової системи проекцій  $X_{24}$  будуюмо паралельно до  $T_2$ . Координати точок еліпса заміряємо з горизонтальної площини проекцій і переносимо на  $\Pi_4$ . Завдяки тому, що еліпс є симетричною фігурою, координати точок краще заміряти від осі  $1_1-2_1$ .

При перетині конуса січною площиною утворюються криві другого порядку.

На рис. 9.5 наведені всі можливі випадки розташування січної площини відносно визначника конічної поверхні.

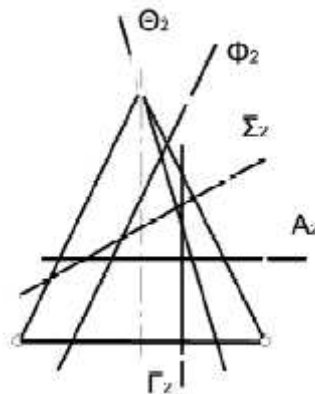


Рис. 9.5

Якщо січна площина  $\Sigma \equiv \Sigma_2$  перетинає всі твірні конуса, отримаємо еліпс. При перетині конуса площиною  $A \equiv A_2$  перпендикулярно до осі конуса – отримаємо коло. При перетині конуса площиною  $\Phi \equiv \Phi_2$  паралельно одній із твірних – отримаємо параболу. Якщо січна площина  $\Gamma \equiv \Gamma_2$  перетинає поверхню конуса паралельно до осі обертання або яких-небудь двох твірних, то отримаємо гіперболу. При перетині конуса площиною  $\Theta \equiv \Theta_2$ , яка проведена через вершину конуса і перетинає його основу, отримаємо трикутник.

На рис. 9.6 наведено приклад побудови перерізу конуса фронтально проекційною площиною  $\Sigma \equiv \Sigma_2$ .

Площина  $\Sigma$  має на  $\Pi_2$  збиральні властивості, тому фронтальна проекція еліпса є відрізком прямої  $1_2 2_2$ .

Горизонтальна проекція еліпса визначається за принципом належності його точок поверхні конуса. Побудовання горизонтальної проекції еліпса виконуємо з

використанням допоміжних січних посередників – це горизонтальні площини рівня.

Велика вісь еліпса дорівнює відстані між точками  $1_2$  і  $2_2$ , у яких січна площина перетинає обрисові твірні конуса. Якщо мала вісь лежить у площині перерізу і перпендикулярна великій осі еліпса, вона є фронтально проекційною прямою.

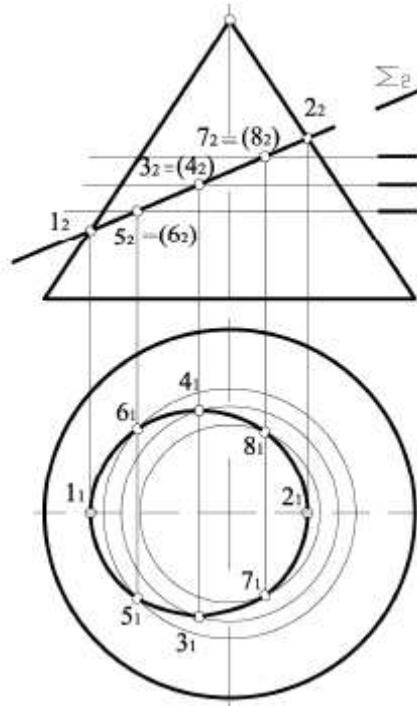


Рис. 9.6

Для знаходження фронтальної проекції осі поділяємо велику вісь  $1_2 2_2$  на дві рівні частини і отримуємо точку  $3_2 \equiv (4_2)$ , яка є фронтальною проекцією малої осі еліпса. Довільно вибираємо допоміжні точки  $5_2 \equiv (6_2)$ , а також  $7_2 \equiv (8_2)$ . Через задані точки проводимо допоміжні січні площини – це горизонтальні площини рівня, котрі перетинають конус по колах, – будуємо ці кола на  $\Pi_1$  і, використовуючи вертикальну відповідальність, знаходимо горизонтальні проекції точок, через які будуємо плавну криву лінію – це горизонтальна проекція еліпса. Мала вісь еліпса дорівнює відстані між точками  $3_1$  і  $4_1$ .

На рис. 9.7 наведено приклад побудови перерізу конуса площиною загального положення  $\Sigma$ .

Оскільки перерізом є еліпс, починаємо побудовування з опорних точок малої та великої осей. Кінці великої осі будуть найнижчою та найвищою точками, тому вони знаходяться на лінії найбільшого нахилу площини  $\Sigma$ , яка проходить через вісь обертання конуса. Горизонтальна проекція лінії найбільшого нахилу  $l_1$  проходить через точку  $S_1$  перпендикулярно до сліду  $h_1^0$  площини  $\Sigma$ . Фронтальну проекцію лінії найбільшого нахилу  $l_2$  будуємо за ознакою належності площині  $\Sigma$  за допомогою горизонтального  $M$  та фронтального  $N$  слів цієї лінії.

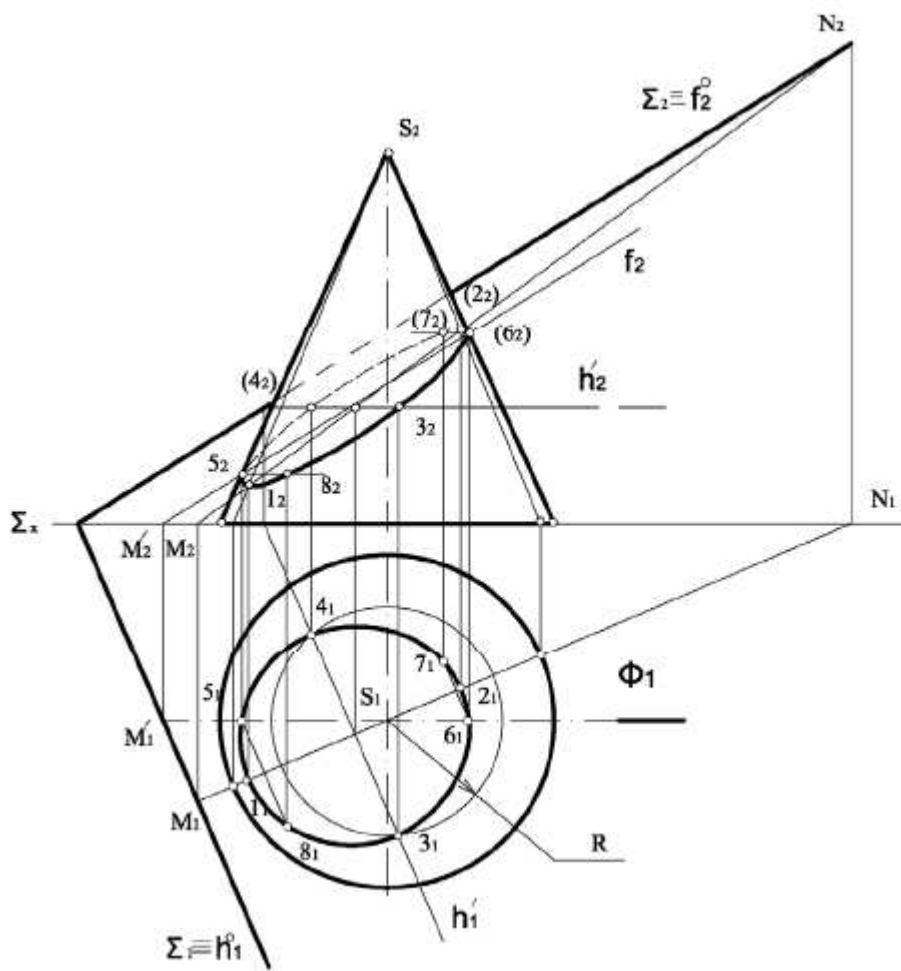


Рис. 9.7

Для знаходження точок перетину лінії найбільшого нахилу площини  $\Sigma$  із конічною поверхнею через пряму  $l$  проведемо горизонтально проєкційну площину  $\theta$ , яка перетинає конус по трикутнику, бічними сторонами якого є твірні конуса  $m$  і  $n$ . Спочатку знаходимо фронтальні проєкції точок:  $l_2 \cap n_2 = 1_2$ ,  $l_2 \cap m_2 = 2_2$  а потім, використовуючи вертикальну відповідність, знаходимо горизонтальні проєкції точок  $1_1$  і  $2_1$ . Унаслідок цього отримаємо проєкції великої осі еліпса  $1_1 2_1$  і  $1_2 2_2$ . Наступними опорними точками є точки малої осі  $3$  і  $4$ . Знаходимо центр еліпса  $O$  ( $O_1$ ,  $O_2$ ) за умовою  $O_1 = O_2$ . Потім через  $O_1$  проводимо горизонтальну проєкцію  $h'_1$  прямої  $h'$  перпендикулярно до  $l_1$ , на якій знаходяться точки малої осі. Оскільки пряма  $h'$  є горизонталлю площини  $\Sigma$ , її фронтальна проєкція має бути паралельною відносно осі  $X$ . Потім через пряму  $h'$  проведемо горизонтальну площину рівня  $\alpha$  ( $\alpha_2$ ), яка перетинає конус по колу радіуса  $R$ . Пряма  $h'$  і коло  $R$  розташовані в площині  $\alpha$  і, перетинаючись, визначають шукані точки  $3$  ( $3_1$ ,  $3_2$ ) і  $4$  ( $4_1$ ,  $4_2$ ).

Наступними опорними точками є точки перетину, які належать обрисним твірним конуса, вони визначають видимість лінії перерізу на фронтальній площині проєкцій. Через обрисні твірні  $a$  і  $b$  проведемо фронтальну площину рівня  $\Phi = \Phi_1$  і знайдемо лінію перетину  $f$  ( $f_1$ ,  $f_2$ ) з площиною  $\Sigma$ . Точки перетину  $5$  і  $6$  спочатку знаходимо на фронтальній площині проєкцій:  $a_2 \cap f_2 = 5_2$ ,  $b_2 \cap f_2 = 6_2$ , а потім, використовуючи вертикальну відповідність, знаходимо

горизонтальні проекції точок  $5_1$  і  $6_1$ . Далі будуємо точки, симетричні відповідно точкам 5 і 6 відносно осі еліпса, – це точки 8 і 7. Далі плавною кривою з'єднуємо побудовані точки й отримуємо горизонтальну і фронтальну проекції еліпса. За необхідності можна вводити додаткові січні площини у вигляді площини  $\alpha$ , які можна проводити нижче від точки 2 і вище від точки 1.

### 9.3 Побудування точок перетину лінії з поверхнею

Алгоритм побудови точок перетину прямої лінії з кривою поверхнею має такий вигляд:

1. Через задану пряму лінію необхідно провести допоміжну січну площину.
2. Знайти лінію перетину кривої поверхні з допоміжною січною площиною.
3. Знайти точки перетину прямої лінії з лінією перетину кривої поверхні з допоміжною площиною.

За допоміжну січну площину частіше обирають проекційну площину, але мають місце випадки, коли найбільш доцільно як допоміжну використати площину загального положення.

На рис. 9.8 наведено приклад побудови точок перетину прямої  $l$  з прямим конусом обертання.

Якщо через пряму загального положення  $l$  провести фронтально проекційну площину, при її перетині з конусом матимемо еліпс. Якщо через пряму  $l$  провести горизонтально проекційну площину, при її перетині з конусом матимемо гіперболу. Якщо через пряму  $l$  провести площину загального положення, котра проходить через вершину конуса, при перетині її з конусом матимемо трикутник. Цей варіант підвищує точність побудування і скорочує потрібний на нього час.

Таким чином, допоміжна площина  $\Sigma$  задана прямою  $l$  і вершиною конуса  $S$ . Щоби побудувати трикутник перетину, необхідно знайти для площини  $\Sigma$  її горизонтальний слід. Для цього на горизонтальній площині проекцій необхідно побудувати дві спільні точки для площини  $\Sigma$  і  $\Pi_1$ . Першою є точка  $M$  ( $M_1, M_2$ ) – це горизонтальний слід прямої  $l$ .

Для знаходження другої спільної точки  $M'$  ( $M_1', M_2'$ ) будуємо довільну пряму  $S1$  ( $S_11_1, S_22_2$ ). Пряма  $M_1M_1'$  є горизонтальним слідом площини  $\Sigma$ , який перетинає основу конуса в точках  $A$  і  $B$ . При перетині конуса площиною  $\Sigma$  матимемо трикутник  $SAB$ . Тому горизонтальні проекції точок перетину прямої  $l$  з поверхнею конуса визначаються як результат перетину  $A_1S_1$  і  $B_1S_1$  з  $l_1$ . Фронтальні проекції точок  $L_2$  і  $K_2$  отримані за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв'язку.

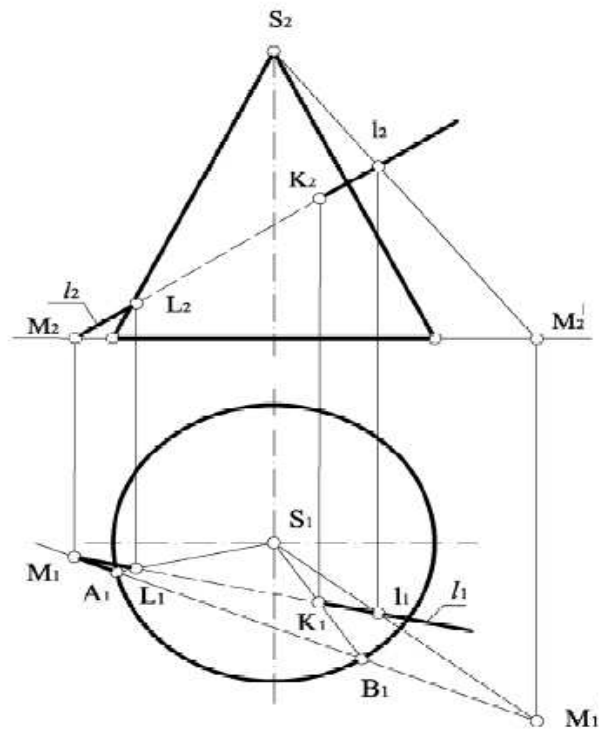


Рис. 9.8

На рис. 9.9 наведено приклад побудови точок перетину прямої 1 з поверхнею похилого циліндра.

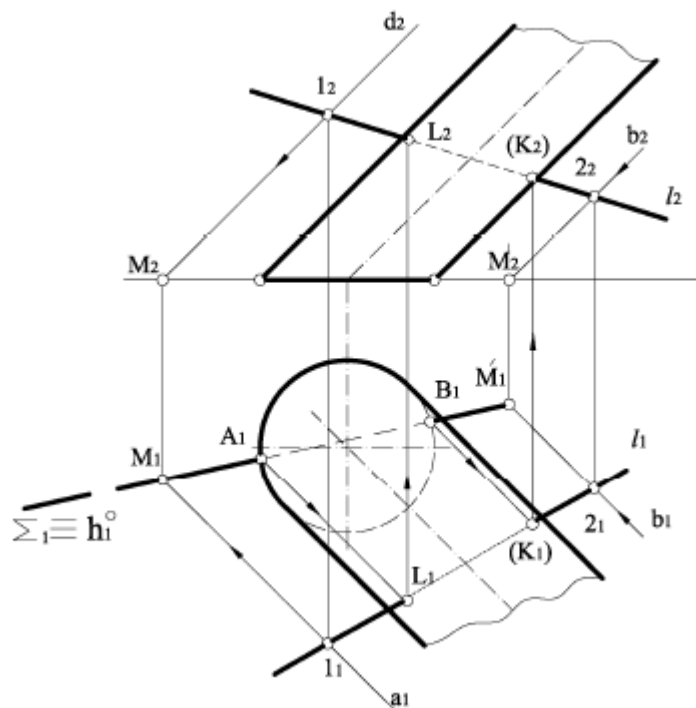


Рис. 9.9

Якщо через пряму 1 провести фронтально проекційну площину, при її перетині з циліндром матимемо еліпс; той самий результат буде, якщо використати горизонтально проекційну площину.

На прямій 1 вибираємо довільні точки 1 ( $1_1, 1_2$ ) і 2 ( $2_1, 2_2$ ), через які будуємо дві паралельні прямі а і б, що одночасно паралельні твірній циліндра.

Таким чином, через пряму 1 провели площину загального положення  $\Sigma$  ( $a \parallel b$ ), яка перетинає циліндричну поверхню вздовж твірних.

Далі знаходимо горизонтальний слід  $\Sigma_1 \equiv h^0_1$  площини ( $a \parallel b$ ), для цього знаходимо горизонтальні проекції  $M_1$  і  $M'_1$  горизонтальних слідів прямих  $a$  і  $b$ , з'єднуємо їх прямою і знаходимо точки  $A_1$  і  $B_1$ , через які проходять горизонтальні проекції твірних циліндра. Горизонтальні проекції точок перетину  $L_1$  і  $K_1$  знаходимо на перетині горизонтальної проекції прямої  $l_1$  із твірними, проведеними з точок  $A_1$  і  $B_1$ . Фронтальні проекції точок  $L_2$  і  $K_2$  отримані за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв'язку. Видимість проекцій точок  $K$  і  $L$  визначається за видимістю проекцій твірних, до яких вони належать.

На рис. 9.10 наведено приклад побудови точок перетину прямої  $m$  із поверхнею сфери.

Якщо використовувати як допоміжну січну – проекційну площину, проекцією перерізу буде еліпс, для побудування якого необхідно знайти ряд точок.

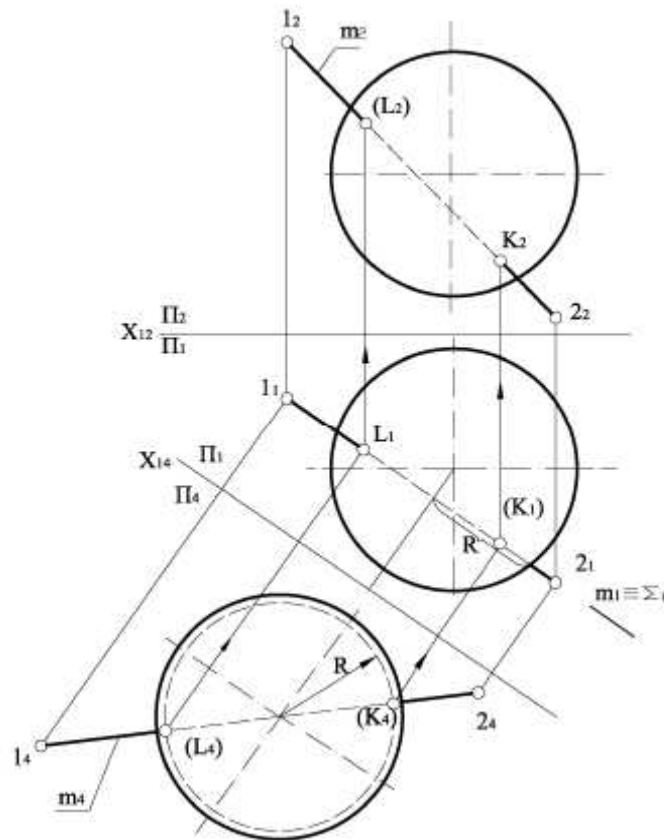


Рис. 9.10

Розв'язання задачі спрощується, якщо використати метод заміни площин проекцій. Нова вісь  $X_{14}$  проходить паралельно горизонтальній проекції відрізка прямої  $1_1 2_1$ . Через пряму  $m$  проводимо горизонтально проекційну площину  $\Sigma$ , яка перетинає сферу по колу радіуса  $R$ . Це коло на допоміжній площині проекцій  $\Pi_4$  зображується без спотворень, а перетин його з проекцією відрізка прямої дає проекції точок перетину  $L_4$   $K_4$ , які проекціюються у зворотному напрямку на проекції прямої.



## 9.4 Побудування лінії взаємного перетину кривих поверхонь

При перетині поверхонь утворюється лінія, яку прийнято називати лінією перетину поверхонь. Ця лінія одночасно належить обом поверхням і в загальному випадку є просторовою кривою, ступінь складності якої залежить від ступеня складності поверхонь, що перетинаються, та їх взаємного положення. У ряді випадків лінія перетину поверхонь може розпадатися на декілька частин, котрі, зокрема, можуть бути плоскими кривими, а в окремих випадках – навіть відрізками прямої.

Лінія перетину поверхонь, як і лінія перетину поверхні площиною, будується за окремими точками.

Загальний метод побудови належних лінії перетину поверхонь точок полягає у використанні поверхонь-посередників. Його суть полягає в наступному (рис. 9.11).

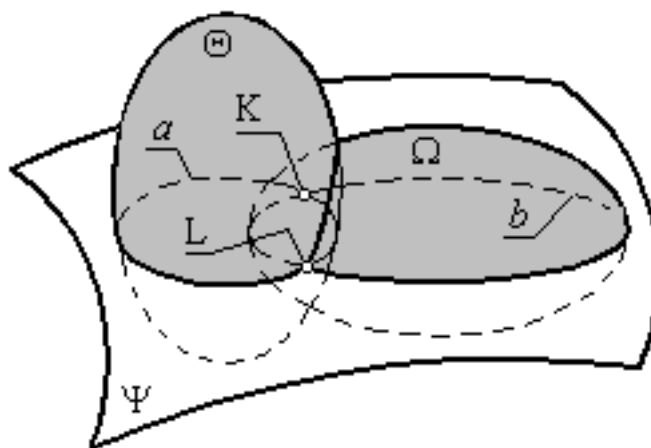


Рис. 9.11

Обидві задані поверхні  $Q$  і  $W$  одночасно перетинаються третьою поверхнею-посередником  $\Psi$  і дають відповідно лінії  $a$  і  $b$ . Оскільки ці лінії належать одній і тій самій поверхні  $\Psi$ , вони можуть перетинатися в одній або декількох точках (у даному випадку таких точок дві:  $L^1$  і  $L^2$ ). Ці точки й належать лінії перетину заданих поверхонь. Багаторазово повторюючи описану процедуру зі зміною положення поверхні-посередника  $\Psi$ , можна одержати п таких точок. З'єднавши їх плавною кривою, одержимо шукану лінію перетину  $l$ . Як поверхні-посередники можуть бути використані різні поверхні або площини, але доцільно вибирати ті з них, які дозволяють одержати з графічної точки зору найпростіші лінії перетину із заданими поверхнями. Виходячи з цього побажання, найчастіше як поверхні-посередники використовують проектуючі площини або сфери. У зв'язку з цим існує декілька способів побудування лінії перетину поверхонь.

Спосіб площин-посередників. Застосовується, коли обидві задані поверхні можна одночасно перетнути сімейством площин по графічно простих лініях.

Побудуємо дві проекції лінії перетину півсфери і прямого кругового конуса (рис. 9.12).

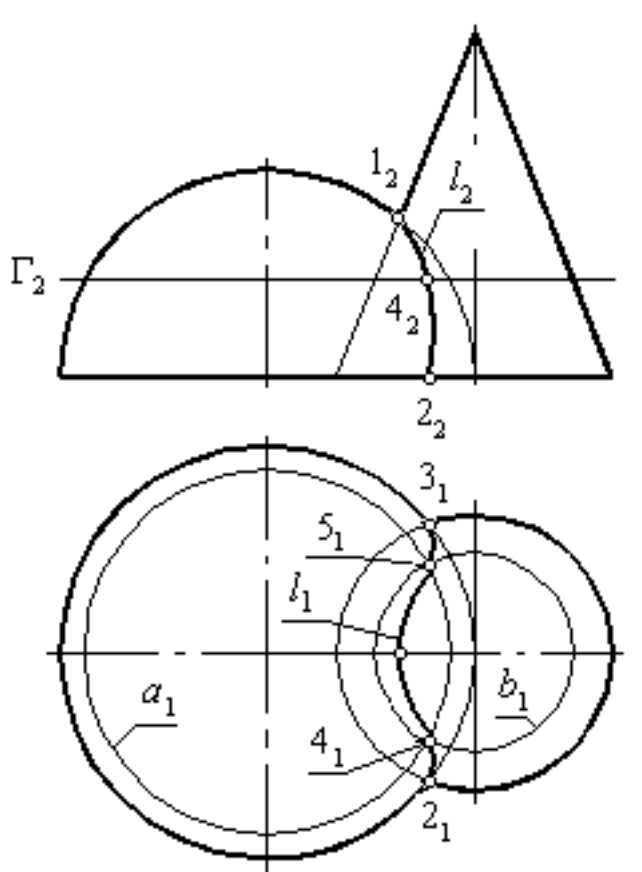


Рис. 9.12

У даному випадку слід використати сімейство площин-посередників горизонтального рівня: вони одночасно перетинатимуть обидві поверхні по колах, на перетині яких і будуть розташовані точки, що належать шуканій лінії взаємного перетину (рис. 9.13).

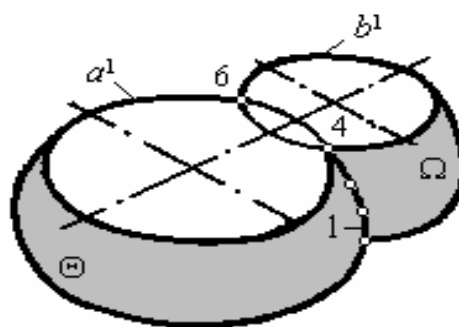


Рис. 9.13

Вибираємо опорні точки. Оскільки обидві задані поверхні мають спільну площину симетрії, паралельну фронтальній площині проєкцій, їх фронтальні меридіани будуть перетинатись у точці  $1_2$ . Точка 1 є найвищою з тих, що належать лінії перетину заданих поверхонь, тому приймемо її за опорну. Основи обох заданих поверхонь належать одній і тій самій площині горизонтального рівня, тому вони будуть перетинатись у точках  $2_1$  і  $3_1$ . Точки 2 і 3 є відповідно початковою і кінцевою точками лінії перетину, тому і вони мають належати до опорних. Визначимо їх горизонтальні проєкції.

Кількість та положення додаткових точок визначається заданою точністю побудування лінії перетину. Будемо вважати, що для досягнення заданої точності побудування лінії взаємного перетину між опорними точками по висоті досить визначити по одній додатковій точці.

Задамо площину горизонтального рівня  $\Gamma$  ( $\Gamma_2$ ), яка проходить по висоті приблизно посередині між опорними точками. Вона перетне задані поверхні по паралелях  $a$  і  $b$ . На перетині їх горизонтальних проекцій  $a_1$  та  $b_1$  отримаємо горизонтальні проекції  $4_1$  та  $5_1$  додаткових точок 4 і 5. Визначимо фронтальні проекції цих точок  $4_2 \equiv (5_2)$ . Аналогічно можна ввести будь-яку кількість додаткових точок.

З'єднуємо однойменні проекції всіх опорних та додаткових точок плавними кривими і отримуємо відповідні проекції лінії перетину заданих поверхонь.

Горизонтальною межею видимості для лінії перетину є основа півсфери і конуса. А оскільки вся лінія перетину  $l$  лежить над площиною цієї межі, вся горизонтальна проекція  $l_1$  лінії перетину буде видимою. Фронтальною межею видимості є головний меридіан заданих поверхонь. Таким чином, видимою буде тільки половина фронтальної проекції лінії перетину від точки  $2_2$  до точки  $1_2$ , яка розташована перед площиною головного меридіана.

Зазначимо, що коли  $b$  за умовою спільна площина симетрії заданих поверхонь не була  $b$  паралельною до фронтальної площини проекцій, виникли би проблеми з визначенням найвищої опорної точки  $1(1_2)$ . Тому спочатку слід було  $b$  перетворити задане комплексне креслення таким чином, щоби звести умову завдання до розглянутого вище випадку, а вже потім розв'язувати задачу (рис. 9.14).

Якщо одна із заданих площин є проектуючою, побудова лінії взаємного перетину зводиться до побудови лінії на поверхні.

Побудуємо три проекції лінії перетину прямого кругового конуса з наскрізним призматичним отвором (рис. 9.15).

Призма займає фронтально проекційне положення (грані призми є фронтально проекційними площинами), тому фронтальна проекція лінії взаємного перетину конуса з призмою відома: вона співпадає з фронтальним нарисом призми.

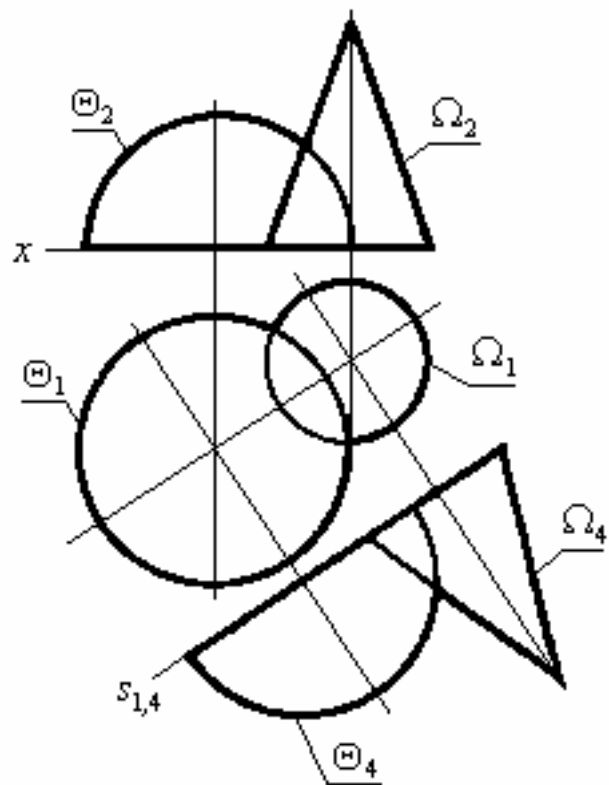


Рис. 9.14

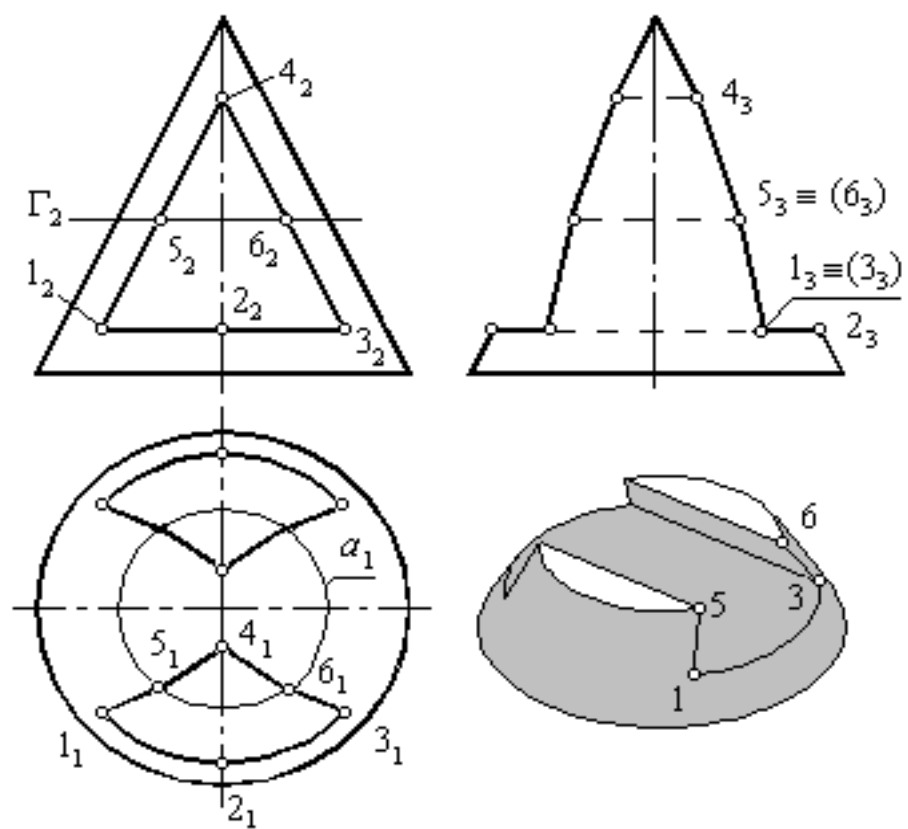


Рис. 9.15

Нагадаємо, що лінія взаємного перетину одночасно належить обом поверхням. Тому побудування її горизонтальної проекції можна виконувати як і

будь-якої лінії, належної конусу. При цьому як опорні слід взяти характерні точки фронтального нарису призми 1, 3 і 4, точку 2, що розташована в площині профільного меридіана конуса, а також симетричні до них точки, розташовані за площиною головного меридіана.

У нашому випадку існує повний перетин конуса призмою, тому їх лінія перетину розпадається на дві симетричні відносно площини головного меридіана гілки.

Горизонтальною межею видимості для лінії перетину є основа конуса. Тому вся горизонтальна проекція лінії взаємного перетину видима. Фронтальною межею видимості є лінія головного меридіану конуса, тому на фронтальній площині проєкцій видимою буде тільки передня гілка лінії перетину. Профільною межею видимості є лінія профільного меридіана. Тому на профільній площині проєкцій видимою будуть тільки частини обох гілок лінії перетину, які розташовані перед площиною профільного меридіана.

Спосіб площини обертання. У ряді випадків виявляється неможливим підібрати таке сімейство проєктуючих площин-посередників або сімейство площин-посередників рівня, кожна площина якого перетинала б одночасно обидві задані поверхні по графічно простих лініях, зате можна підібрати таке сімейство площин-посередників загального положення, яке б відповідало заданій умові. Особливо ефективний цей підхід при побудові ліній взаємного перетину конічних і циліндричних поверхонь.

Нехай, наприклад, необхідно побудувати лінію взаємного перетину двох конічних поверхонь (рис. 9.16).

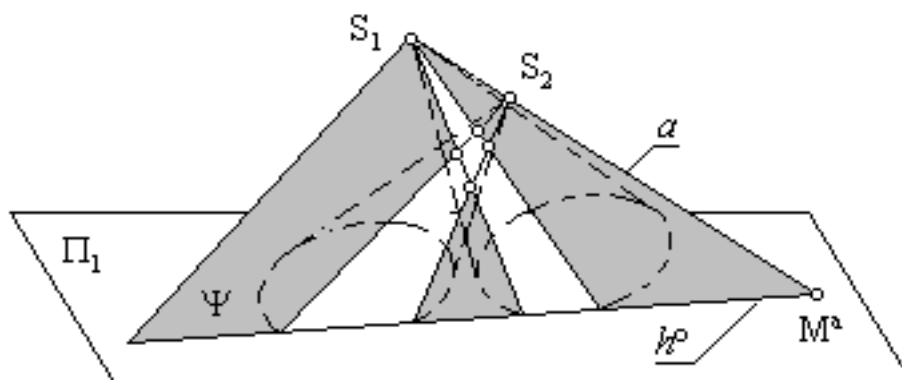


Рис. 9.16

Відомо, що найбільш графічно простим перерізом конуса є трикутник. Такий переріз можна отримати за допомогою січної площини, яка проходить через його вершину. Очевидно, що коли деяка площина  $\Psi$  буде одночасно проходити через вершини обох конусів, вона буде перетинати їх по трикутниках (твірних). Тоді на перетині сторін цих трикутників ми будемо одержувати спільні для обох конусів точки, тобто точки, що належать лінії взаємного перетину.

Задамо січну площину  $\Psi$  двома прямими, що перетинаються. Для того щоб ця площина проходила через вершини обох конусів, необхідно, щоб через них проходила одна з цих прямих, наприклад **a**. Тоді другу пряму **b** доцільно вибрати так, щоб вона одночасно перетинала пряму **a** і основи обох конусів. Для

цього основи заданих поверхонь мають належати деякій площині, наприклад  $\Pi_1$ . Тоді точкою, в якій пряма **b** перетинає пряму **a**, буде горизонтальний слід останньої, а пряма **b** одночасно буде і горизонтальним слідом  $h^0$  площини  $\Psi$ . Якщо тепер змінювати положення прямої **b**, тим самим ми задамо нову січну площину із прийнятого сімейства і отримаємо нові точки, належні лінії взаємного перетину заданих поверхонь. Цей процес слід продовжувати до того часу, поки ми не отримаємо достатньої кількості точок, щоби, з'єднавши їх плавною кривою, побудувати лінію взаємного перетину заданих поверхонь із обумовленою точністю.

Оскільки при цьому пряма **a** залишається нерухомою, можна вважати, що в нас є одна площина  $\Psi$ , яка обертається навколо цієї прямої. Тому цей спосіб побудування лінії взаємного перетину називають способом площини обертання. Із техніки застосування видно, що спосіб площини обертання може використовуватися при побудування лінії перетину конічних, пірамідальних, циліндричних і призматичних поверхонь у будь-якій комбінації. Якщо однією з поверхонь є конічна або пірамідальна, а другою – циліндрична або призматична, – пряма **a** площини обертання має проходити через вершину конічної (пірамідальної) поверхні паралельно до твірних циліндричної поверхні або ребер призми (рис. 9.17), а якщо задані циліндричні або призматичні поверхні в будь-якій комбінації, тут потрібні січні площини, одночасно паралельні до твірних циліндрів або ребер призм.

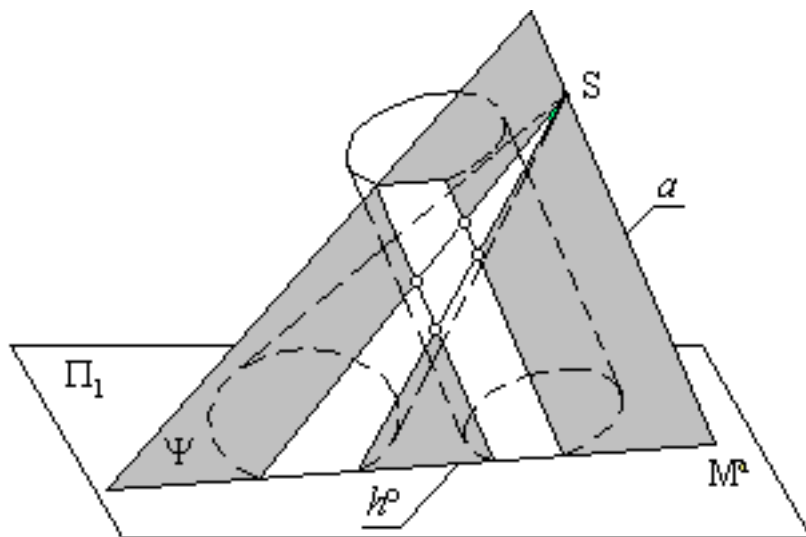


Рис. 9.17

Усі ці січні площини паралельні між собою. Напрямок сліду таких площин установлюють побудуванням площини паралелізму  $\Pi$ , яка визначається двома прямими **a** і **b**, що перетинаються в довільній точці **K** і є відповідно паралельними до твірних (ребер) заданих поверхонь (рис. 9.18).

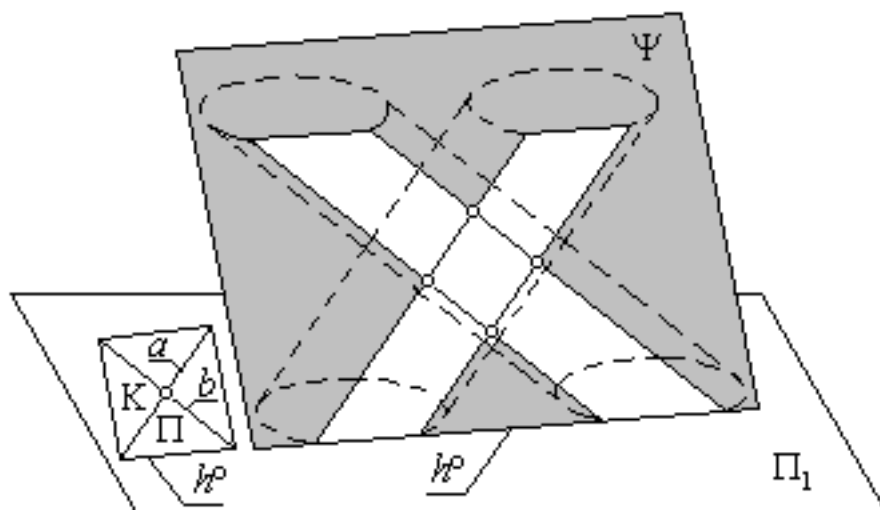


Рис. 9.18

Застосування січних сфер як поверхонь-посередників ґрунтується на тому, що дві будь-які співвісні поверхні обертання (тобто поверхні, які мають спільну вісь) перетинаються по колах, площини яких перпендикулярні до спільної осі та проходять через точки перетину їх меридіанів.

Нехай поверхні  $Q$  і  $W$  утворюються обертанням відповідно кривих  $l$  і  $m$  навколо їх спільної осі  $i$  (рис. 9.19).

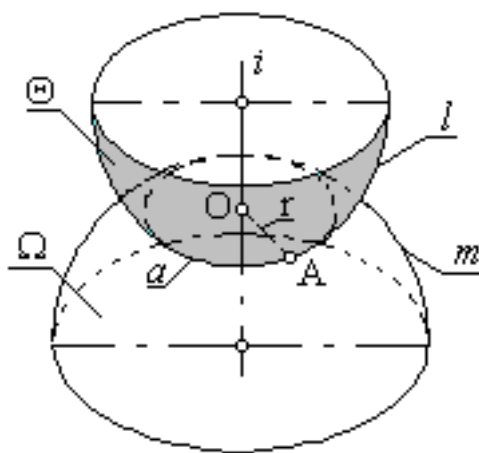


Рис. 9.19

Якщо ці криві перетинаються в деякій точці  $A$ , остання в процесі обертання утворює коло  $a$  (спільну паралель) із центром на осі обертання.

Нічого принципово не зміниться, якщо за поверхню  $W$  узяти сферу з центром на осі обертання  $i$  (рис. 9.20).

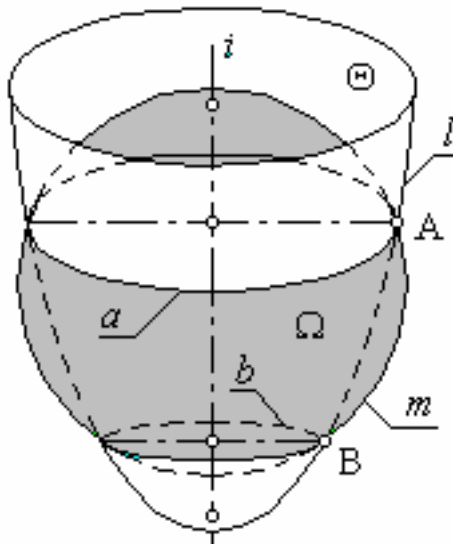


Рис. 9.20

Але оскільки твірні цих поверхонь  $l$  і  $m$  перетинаються в двох точках –  $A$  і  $B$ , то кожна з них утворить своє коло (спільну паралель). Якщо радіус сфери  $W$  зменшувати, точки  $A$  і  $B$  будуть наближатись одна до одної і при деякому його значенні співпадуть (рис. 9.21).

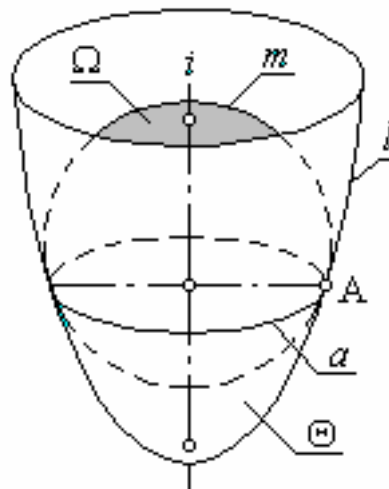


Рис. 9.21

У цьому випадку сфера вже не буде перетинати поверхню  $Q$ , а буде стикатися з нею (тобто це буде вписана сфера). Це стикання сфери з поверхнею  $Q$  буде відбуватися по колу  $a$  (паралелі), що проходить через їхню спільну точку  $A$ .

Таким чином, для визначення точки, належної лінії перетину двох поверхонь, потрібно, щоби січна сфера-посередник одночасно перетинала обидві поверхні по колах. У залежності від типу та взаємного положення заданих поверхонь, січні сфери можуть проводитись із одного або різних центрів, що веде до способів концентричних або ексцентричних сфер.

Спосіб концентричних сфер. Уже сама назва способу говорить про те, що сімейство січних сфер повинне мати спільний центр. А це можливо тільки в тому випадку, коли осі заданих поверхонь перетинаються. Тоді центр січних



сфер лежатиме на їх перетині. Січні сфери мають перетинати кожен з поверхонь по колах. А це можливо тільки тоді, коли обидві поверхні будуть поверхнями обертання. Очевидно, що коли перерізи сфер (кола) будуть займати в просторі загальне положення, визначати точки перетину між ними буде досить складно. Тому бажано, щоби ці кола проектувались на будь-яку площину проєкцій у відрізки прямих. А це можливо тоді, коли осі заданих поверхонь належатимуть площині, паралельній до будь-якої площини проєкцій (як правило, за таку приймають фронтальну). Таким чином, спосіб концентричних сфер використовується тоді, коли обидві задані поверхні є поверхнями обертання, їх осі перетинаються і належать площині, паралельній до площини проєкцій.

Нехай задані прямий круговий конус та циліндр обертання і їх осі перетинаються в точці  $O$  й утворюють спільну площину симетрії, паралельну до фронтальної площини проєкції (рис. 9.22).

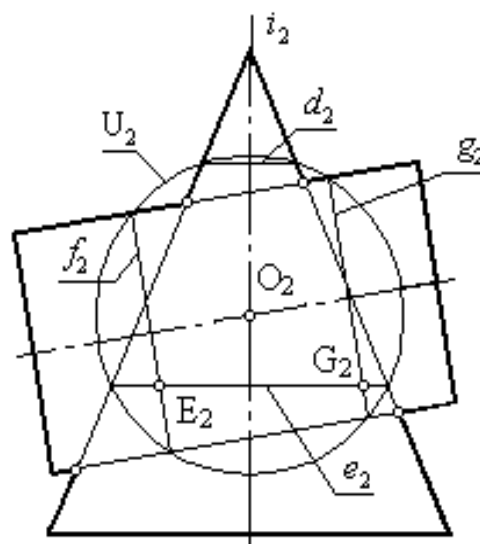
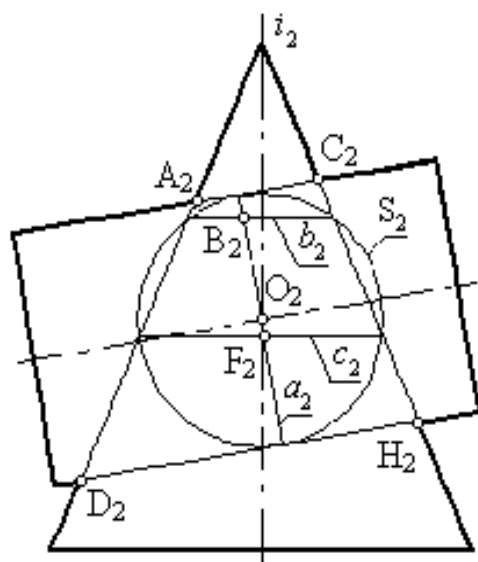
Тоді на перетині головних меридіанів заданих поверхонь утворюються опорні точки  $A_2, C_2, D_2$  і  $H_2$ .

Визначимо межі, в яких може лежати радіус січних сфер. Якщо він буде занадто малим, така сфера або не буде перетинати жодної із заданих поверхонь, або буде перетинати тільки одну з них. Тому очевидно, що найменшим має бути такий радіус, який утворює сферу, котра перетинає одну з поверхонь і стикається з другою (тобто буде вписана в неї). Отже, для визначення мінімального радіуса січних сфер необхідно із їхнього центра  $O_2$  опустити перпендикуляри до нарисів обох поверхонь і взяти більший із них. Якщо радіус січної сфери буде занадто великим, така сфера перетинатиме кожен із заданих поверхонь окремо. Це буде тоді, коли радіус січної сфери буде більшим за відстань від центра січних сфер до найбільш віддаленої точки перетину нарисів (у нашому випадку – від точки  $O_2$  до точки  $D_2$ ).

Сфера мінімального радіуса дає граничне положення радіуса  $s_2$ . У даному випадку мінімальним радіусом січної сфери є перпендикуляр до нарису циліндра. Ця сфера стикається з циліндром по колу  $a_2$  і перетинає конус по колах  $b_2$  і  $c_2$ . На перетині першого з них з двома останніми отримаємо точки  $B_2$  і  $F_2$ , належні лініям перетину заданих поверхонь. Ці точки є опорними в побудові ліній перетину поверхонь, тому використання січної сфери мінімального радіуса обов'язкове у всіх випадках. При цьому зазначимо, що існують і симетричні до них невидимі точки, розташовані за спільною площиною симетрії.

Техніка побудовання належних ліній перетину довільних точок нічим принциповим не відрізняється від розглянутого. Впишемо сферу довільного (в розглянутих межах) радіуса  $U_2$  (рис. 9.23). Вона перетне конус по колах  $d_2$  і  $e_2$ , а циліндр – по колах  $f_2$  і  $g_2$ . Коло  $d_2$  не перетинається з колами  $f_2$  і  $g_2$  і тому не утворює точок, належних лінії перетину. Коло  $e_2$  перетинається з ними й утворює належні лінії перетину точки  $E_2$  і  $G_2$ .

Аналогічно можна визначити будь-яку кількість належних ліній перетину точок.



При повному перетині поверхонь їх лінія перетину розпадається на дві гілки. Тому виникає питання, які з отриманих точок слід віднести до одної гілки, а які – до другої. Для цього треба визначити, яка поверхня перетинається, а яка перетинає. Очевидно, що перетинається та поверхня, нормаль до якої більша (рис. 9.24).

Таким чином, гілки лінії перетину будуть орієнтовані до поверхні, що перетинається (тобто в бік більшої нормалі). У наведеному вище прикладі більшою є нормаль до нарису циліндра, тому гілки лінії перетину будуть орієнтовані в його бік (рис. 9.25).

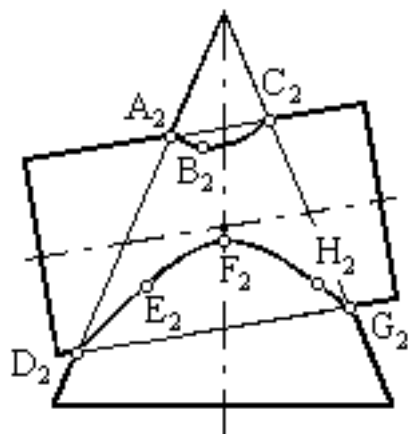


Рисунок 9.25

Побудування інших проєкцій лінії перетину виконується загальними методами.

Побудуємо лінію перетину прямого кругового конуса  $\Theta$  з поверхнею обертання  $\Omega$  (рис. 9.26).

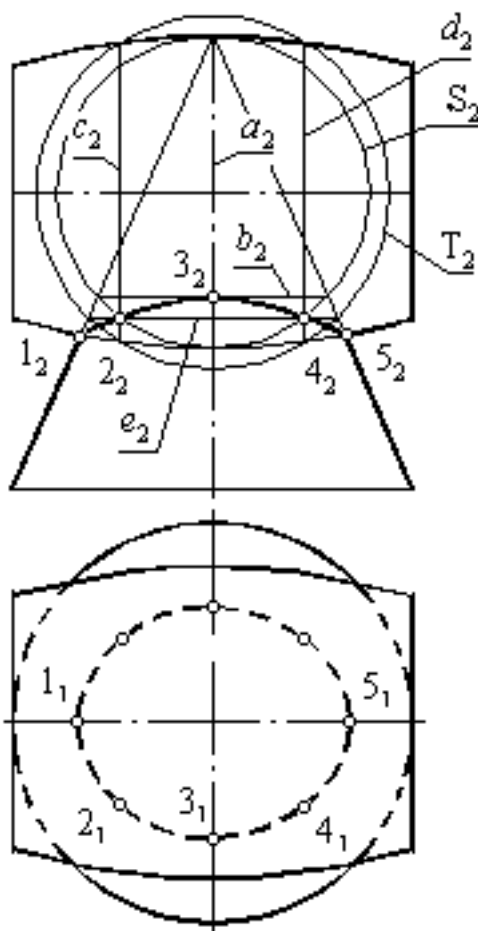


Рис. 9.26

За умовою обидві поверхні є по верхніми обертання, їх осі перетинаються і належать площині, паралельній до фронтальної площини проєкцій. Таким

чином, для розв'язання задачі можна використати спосіб січних сфер-посередників.

У даному випадку конус врізається в поверхню обертання  $\Omega$ , тому лінія їх перетину буде складатись з одної гілки.

Будуємо фронтальну проекцію лінії перетину. Визначаємо опорні точки. Це точки  $1_2$  та  $5_2$ . Вписуємо сферу мінімального радіуса  $S_2$ . Вона перетинає поверхню  $\Omega$  по колу  $a_2$ , а конус  $\Theta$  – по колу  $b_2$ . На перетині цих кіл отримуємо точку  $3_2$  (а також симетричну до неї невидиму точку), належну лінії перетину заданих поверхонь. Вписуємо сферу  $T_2$  довільного радіуса. Вона перетинає поверхню  $\Omega$  по колах  $c_2$  та  $d_2$ , а конус  $\Theta$  – по колу  $e_2$ . На їх перетині отримуємо точки  $2_2$  та  $4_2$  (а також симетричні їм невидимі точки). З'єднуємо опорні та отримані точки плавною кривою. Фронтальною межею видимості є спільна площина симетрії. Тому видимою буде та частина фронтальної проекції лінії перетину, яка розташована перед нею.

Горизонтальну проекцію лінії перетину будуємо, виходячи з того, що ця лінія належна конусу. Горизонтальною межею видимості для лінії перетину є осьова площина горизонтального рівня поверхні  $\Omega$ , тому вся її горизонтальна проекція буде невидимою.

Повернімося до рис. 9.24. Якщо в першому випадку зменшувати, а в другому – збільшувати діаметр циліндра, не змінюючи при цьому параметри конуса, то гілки лінії перетину будуть необмежено наближатися одна до одної та при деякому значенні діаметра циліндра будуть стикатися. Цей випадок регламентується теоремою Монжа: якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку або вписані в неї, їх лінія взаємного перетину розпадається на дві плоскі криві другого порядку. Так, якщо сфера  $S$  вписана в конус  $\Theta$  і циліндр  $\Omega$ , що перетинаються між собою (рис. 9.27), – відповідно з наведеною теоремою, гілки лінії їх взаємного перетину є кривими другого порядку. А оскільки ці криві одночасно належать і конусу, і циліндру, то вони можуть бути тільки еліпсами, фронтальні проекції яких вироджуються у відрізки прямих.

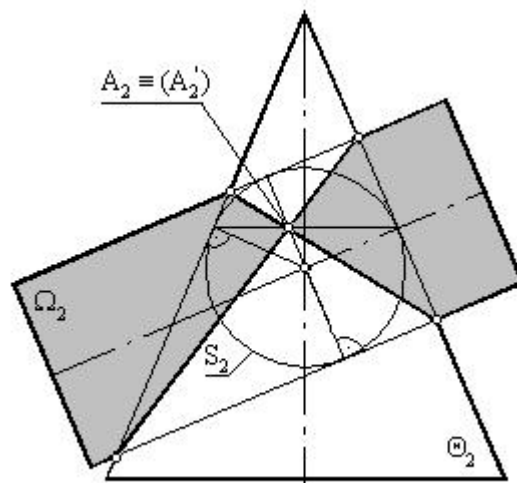


Рис. 9.27

Зазначимо також, що ці еліпси мають дві спільні точки  $A^1$  і  $A^2$ , в яких перетинаються лінії стикання сфери з конусом  $\Theta$  і циліндром  $\Omega$ .

Теорема Монжа має широке практичне застосування. Особливо ефективно вона застосовується при конструюванні трубопроводів.

Сконструюємо перехідні конічні поверхні  $\Psi$  і  $\Phi$  для з'єднання циліндричних елементів  $\Theta$ ,  $\Omega$  і  $\Sigma$  у єдину систему (рис. 9.28).

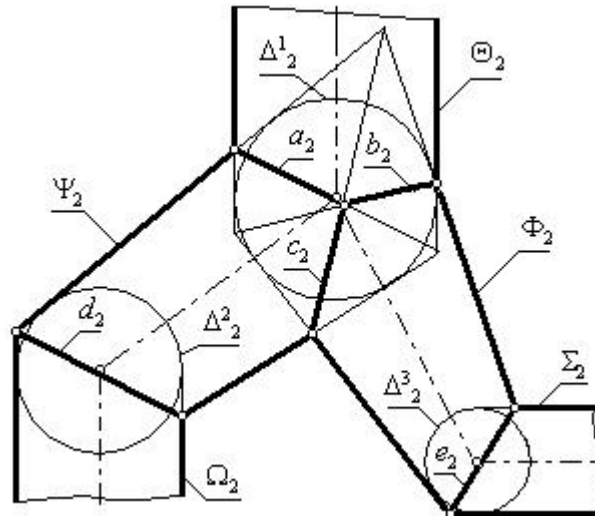


Рис. 9.28

Застосуємо теорему Монжа. Впишемо в циліндри  $\Theta$ ,  $\Omega$  і  $\Sigma$  відповідно сфери  $\Delta^1$ ,  $\Delta^2$ ,  $\Delta^3$ . Проведемо нарисові твірні конічних поверхонь як дотичні до цих сфер. Тоді циліндричний трубопровід  $\Theta$  буде перетинатися з конічною вставкою  $\Psi$  по еліпсу  $\mathbf{a}$ , з конічною поверхнею  $\Phi$  – по еліпсу  $\mathbf{b}$ , а конічні вставки між собою перетинатимуться по еліпсу  $\mathbf{c}$ . Частини цих еліпсів і визначають конфігурацію трубопроводу  $\Theta$  і поверхонь  $\Psi$  і  $\Phi$ , що прилягають до нього. А еліпси  $\mathbf{d}$  і  $\mathbf{e}$  визначають конфігурацію трубопроводів  $\Omega$  і  $\Sigma$  та другий кінець трубопроводів  $\Psi$  і  $\Phi$ , що прилягають до них.

Спосіб ексцентричних сфер. На відміну від попереднього в даному способі січні сфери-посередники проводяться з різних центрів, положення яких визначається побудовою. Одночасно з цим визначається і їх радіус. Але одна із заданих поверхонь може не бути поверхнею обертання, хоча вона повинна мати колові перерізи. Зберігається й умова наявності спільної площини симетрії, паралельної до площини проєкцій.

Нехай задані зрізаний конус обертання та чвертка відкритого тора (рис. 9.29). Вісь конуса займає в просторі положення профільно проєктуючої прямої  $p$ , а вісь тора – фронтально проєктуючої прямої  $j$ . Таким чином, осі заданих поверхонь є мимобіжними прямими.

Оскільки задані поверхні мають спільну площину симетрії, паралельну до фронтальної площини проєкцій, будуємо фронтальну проєкцію лінії перетину. Її опорні точки лежать на перетині фронтального меридіана конуса і екватора тора, які належать їх спільній площині симетрії. Це точки  $A_2$  і  $B_2$ . Таким чином, уся фронтальна проєкція лінії перетину розташована між ними. Перетнемо задані поверхні фронтально проєктуючою площиною  $T_2$ , яка проходить через вісь тора між опорними точками. Вона перетне його по колу  $a_2$ . Для того, щоб перетнути тор по цьому ж колу сферою, треба, щоб її центр лежав на перпендикулярі до площини цього кола і проходив через його центр. Тому через центр кола  $O_2$  проводимо перпендикуляр  $n_2$  до його площини.

З другого боку, ця ж сфера має перетинати конус по колу. А для цього її центр має лежати на його осі. Таким чином, щоби дана сфера одночасно

перетинала тор і конус по колах, її центр має лежати на перетині перпендикуляра  $p_2$  і осі конуса  $p_2$ , тобто в точці  $K_2$ . Цим самим визначається і радіус січної сфери  $R_2$ : він дорівнює відстані від центра сфери  $K_2$  до точки перетину нарису тора січною площиною  $T_2$ .

Вписуємо сферу  $S_2$  визначеного радіуса. Вона перетинає тор по колу  $a_2$ , а конус – по колу  $b_2$ . На їх перетині отримуємо точку  $L_2$  (а також невидиму симетричну до неї), належну лінії перетину.

Змінюючи положення січної площини, можна отримати будь-яку кількість довільних точок, належних лінії перетину.

Побудуємо фронтальну проекцію лінії взаємного перетину чверті відкритого тора зі зрізаним витягнутим еліпсоїдом обертання (рис. 9.30), якщо відомо, що згадані поверхні мають спільну площину симетрії, паралельну до фронтальної площини проєкцій  $\Pi_2$ .

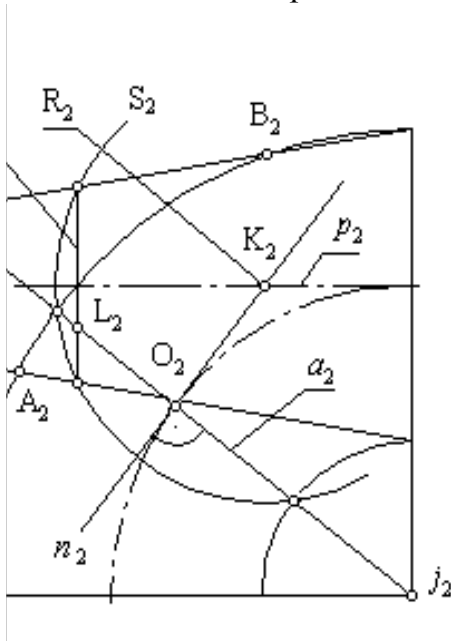


Рис. 9.29

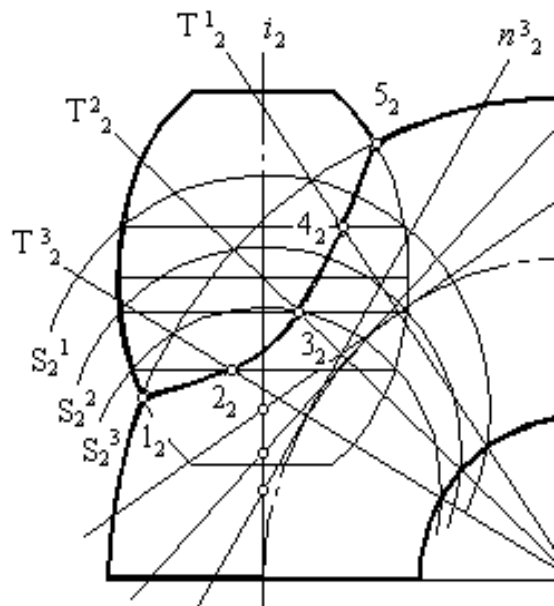


Рис. 9.30

Оскільки задані поверхні мають спільну площину симетрії, паралельну до  $\Pi_2$ , то їх фронтальні нариси будуть перетинатися в точках  $1_2$  і  $5_2$ , які мають бути прийняті за опорні. Приблизно рівномірно проводимо між опорними точками три січні площини  $T_2^1$ ,  $T_2^2$  та  $T_2^3$  і для кожної з них виконуємо розглянутий вище комплекс побудовань. Отримаємо три точки ( $2_2$ ,  $3_2$  та  $4_2$ ), належні лінії перетину заданих поверхонь. З'єднаємо ці й опорні точки плавною кривою і отримаємо фронтальну проєкцію лінії взаємного перетину заданих поверхонь.

Зазначимо, що в разі необхідності побудування горизонтальної проєкції лінії перетину звелось б до побудування горизонтальної проєкції лінії, належної еліпсоїду або тору.

Фронтальною межею видимості для лінії перетину є їх спільна площина симетрії, тому видимою буде частина фронтальної проєкції лінії взаємного перетину, яка лежить перед цією площиною.

### Список джерел

1. Нарисна геометрія та перспектива: навч. посібник. Ч. 1 – 7./ Антонович, Фольта, Шпильчак, Юрловський – К., 1990 – 1993. – 256 с.
2. Бубенников А. В. Начертательная геометрия. Учебник для вузов. – М. : Высш. шк., 1985. – 288 с.
3. Винницкий И. Г. Начертательная геометрия. Учебник для вузов. - М. : Высш. шк., 1975. – 280с.
4. Виноградов В. Н. Начертательная геометрия. – М., 1989. – 20 с.
5. Гордон В. О., Курс начертательной геометрии: Учебное пособие для вузов / Гордон, Семенцов-Огиевский – М.: Высш. шк., 2000. – 272 с.
6. Климухин А. Г. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1978. – 412 с.
7. Михайленко В. Э. Инженерная графика./ Михайленко, Пономарев – К., 1990. – 295 с.
8. Нарисна геометрія: підручник / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстіфеев, С. М. Ковальов, О. В. Кашенко; за ред. В. Є. Михайленка. – К. : Вища шк., 2004 – 342 с.
9. Начертательная геометрия: учебник для вузов / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, Н. М. Лаврухина; под ред. Н. Н. Крылова. – М. : Высш. шк., 1990. – 364 с.
10. Нарисна геометрія. Практикум: навч. посібник / Антонович та ін; за ред. проф. Є. А. Антоновича. – Львів : Світ, 2004. – 528 с.
11. Антонович Є .А. Нарисна геометрія: підручник / Антонович, Юрловський, Фольта – Львів, 1994. – 322 с.
12. Практикум з нарисної геометрії і навчально - методичний посібник (для студентів 1 курсу всіх спеціальностей академії) / Лусь В. І., Киркач Т. Є., Мандриченко О. Є., Радченко А. О.; за ред. Лусь В. І. – Х.: ХНАМГ, 2005. – 184 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**КИРКАЧ** Тетяна Євгенівна

Конспект лекцій  
з дисципліни

**«ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА»**

*(для студентів I курсу денної та заочної форм навчання  
за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)*

Відповідальний за випуск *Т. Є. Киркач*

Редактор *О. Ю. Кригіна*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосождарова*

План 2010, поз. 68 Л

---

Підп. до друку 22.11.2011  
Друк на ризографі.  
Тираж 50 пр.

Формат 210x297  
Ум. друк. арк. 4  
Зам. №

Видавець і виготовлювач:  
Харківська національна академія міського господарства  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.