

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
до самостійної та розрахунково-графічної роботи
з курсу

«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»

*(для студентів 2 курсу заочної форми навчання бакалаврів
напряму підготовки 6.050701 «Електротехніка та електротехнології»
та слухачів другої вищої освіти спеціальності
7.05070103 «Електротехнічні системи електроспоживання»)*

Методичні вказівки та завдання до самостійної та розрахунково-графічної роботи з курсу «ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА» (для студентів 2 курсу заочної форми навчання бакалаврів напряму підготовки 6.050701 «Електротехніка та електротехнології» та слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.05070103 «Електротехнічні системи електроспоживання») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Е. В. Лукіна, О. І. Чернушенко. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 75 с.

Укладачі: Е. В. Лукіна
О. І. Чернушенко

Рецензент: доцент кафедри ІСТвМГ, кандидат технічних наук
М. В. Чернявська

Затверджено на засіданні кафедри "Інформаційні системи і технології в міському господарстві", протокол № 85 від 06.02.2012 р.

ВСТУП

Планами підготовки бакалаврів за напрямом 6.050701 – Електротехніка та електротехнології для студентів другого курсу та слухачів другої вищої освіти заочної форми навчання передбачено вивчення дисципліни "Технічна механіка".

Поряд з вивченням теоретичного курсу з цієї дисципліни передбачено самостійне виконання розрахунково-графічної роботи (РГР) з метою знайомства і застосування на практиці сучасних методів проведення проектувальних розрахунків.

Запропоновані методичні вказівки містять завдання, методичні рекомендації та приклади виконання РГР з дисципліни "Технічна механіка" студентами зазначеної спеціальності.

Для виконання РГР необхідно засвоїти основні теоретичні визначення, положення, теореми, які також наводяться в методичних вказівках.

Розрахунково-графічна робота містить чотири завдання.

Завдання 1. Статика.

Завдання 2. Статика.

Завдання 3. Кінематика.

Завдання 4. Динаміка.

1. ВКАЗІВКИ ДО ЗАВДАННЯ 1. СТАТИКА

Статика – розділ механіки, в якому вивчаються методи перетворення сил і з'ясовуються умови рівноваги тіл.

У статистиці вирішуються дві основні проблеми:

- заміна системи сил, що діють на тверде тіло, простішою;
- визначення умов рівноваги твердих тіл під дією прикладених до них систем сил.

Основні поняття статички - це сила, система сил, абсолютно тверде тіло, вільне тіло.

Сила. Проекція сили на вісь і на площину

Сила \vec{F} як вектор вважається заданою, якщо визначені її модуль, напрям і точка прикладання. Силу можна задавати графічно або аналітично.

Графічно силу зображують у вигляді вектора з указанням її модуля (абсолютної величини довжини вектора) і напрямку.

Напрямок указується стрілкою, а довжина прямолінійного відрізка в масштабі відповідає довжині вектора. Модуль вектора позначається як і сам вектор, але літерами звичайного шрифту і без риски зверху.

Аналітично силу задають проекціями на осі координат.

Проекцією сили на вісь називається скалярна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатним напрямом осі і напрямком сили, наприклад на вісь "x" (рис. 1.1).

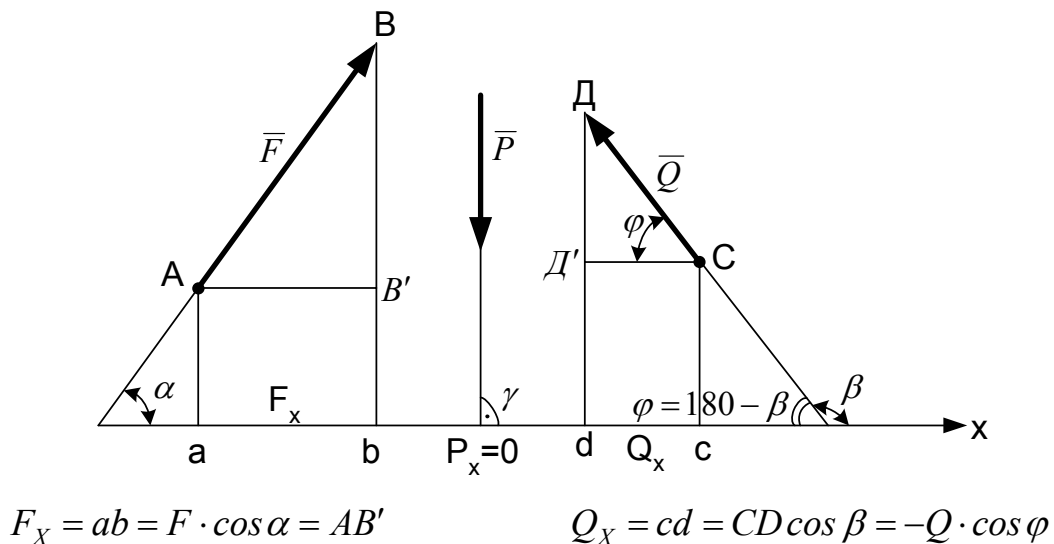


Рис. 1.1

Проекції надається знак "+", якщо вона складає гострий кут з додатним напрямом осі, і знак "-", якщо – тупий.

Проекція сили P на вісь, яка їй перпендикулярна, дорівнює нулю:

$$P_x = P \cdot \cos \gamma = P \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Проекцією сили \vec{F} на площину OXY називається вектор F_{xy} , який міститься між проекціями початку і кінця сили на цю площину (рис. 1.2).

Модуль вектора $F_{xy} = F \cdot \cos \varphi$

$$\vec{F} = F_X \cdot \vec{i} + F_Y \cdot \vec{j} + F_Z \cdot \vec{k}, \quad (1.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти, одиничні вектори, що напрямлені уздовж осей x, y, z ;
 F_x, F_y, F_z - проекції вектора сили F на відповідні осі.

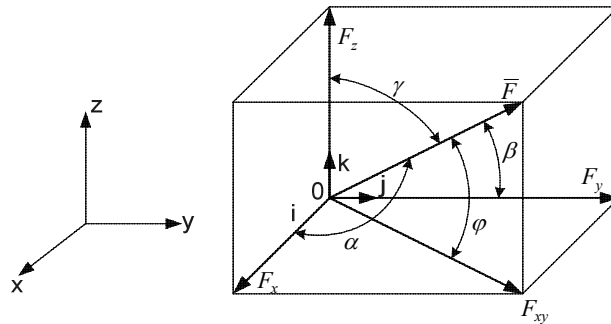


Рис. 1.2

Проекції сили : $F_x = F \cdot \cos \alpha$; $F_y = F \cdot \cos \beta$; $F_z = F \cdot \cos \gamma$,

Модуль сили: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, а її напрям – кут між додатним напрямом осі і напрямом сили:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \text{ - напрямні косинуси.}$$

Матеріальною точкою називається геометрична точка, якій приписана певна маса-модель матеріального тіла, розмірами якого при певних умовах можна знехтувати.

Система матеріальних точок механічна система - сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов'язані між собою.

Абсолютно твердим тілом називається тіло, що складається із системи матеріальних точок, відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною.

Системою сил називається сукупність сил, що діють на тверде тіло або матеріальну точку. Розрізняють три системи сил, що діють на тверде тіло у площині й просторі: збіжна система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці; паралельна система сил, лінії дії яких паралельні між собою; довільна система сил, лінії дії яких не паралельні між собою і всі разом не перетинаються в одній точці.

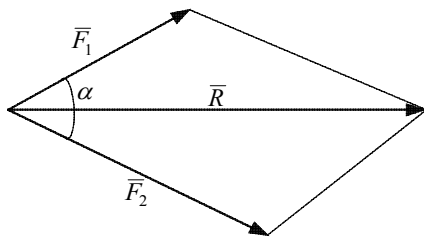
Рівнодійною \vec{R} називається одна сила, яка еквівалентна заданій системі сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$.

Матеріальна точка перебуває в рівновазі, якщо вона знаходиться у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху – принцип інерції.

Система матеріальних точок перебуває в рівновазі, якщо всі точки системи знаходяться у спокої або рухаються рівномірно, прямолінійно з однаковою швидкістю за величиною і напрямком.

Аксиома статички про паралелограм сил.

Рівнодійна двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці (рис. 1.3).



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

Рис. 1.3

Модуль рівнодійної сили \bar{R} визначається за теоремою косинусів:

$$R = |\bar{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}. \quad (1.2)$$

Напрямок рівнодійної двох сил визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах.

На основі цієї аксиоми будь-яке число сил, прикладених в одній точці, можна скласти геометрично. Рівнодійну сил визначають як векторну суму цих сил (рис. 1.4).

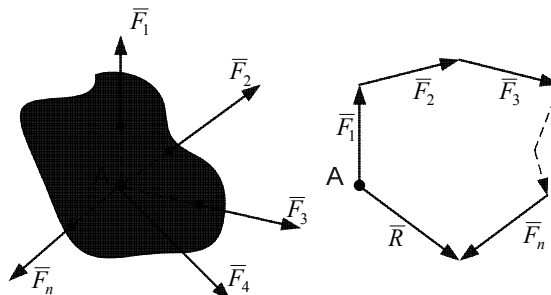


Рис. 1.4

Для цього з кінця вектора, що дорівнює першій силі \bar{F}_1 , відкидаємо вектор, що дорівнює силі \bar{F}_2 , і т.д. З'єднуючи початок першого вектора \bar{F}_1 з кінцем останнього \bar{F}_n , знаходимо рівнодійну силу:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (1.3)$$

Цей багатокутник називається багатокутником сил, або силовим багатокутником.

Закон дії і протидії (3-й закон Ньютона).

При деякій дії одного тіла на друге має місце протидія, чисельно рівна, але протилежна за напрямком (рис. 1.5).

Сили дії і протидії (\bar{F}' , \bar{F}) дорівнюють за модулем, діють уздовж однієї лінії в протилежному напрямку, але прикладені до різних тіл. Тому сили дії і протидії не врівноважені.

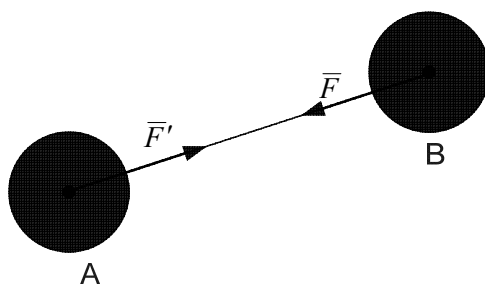


Рис. 1.5

Система матеріальних точок називається вільною, якщо на рух цих точок не накладено обмежень. У протилежному разі система матеріальних точок називається невольною.

Тіла, або поля, що обмежують свободу руху системи матеріальних точок або твердого тіла, називаються в'язами.

Аксиома про звільнення від в'язів. Не змінюючи механічного стану (руху або рівноваги) системи матеріальних точок або твердого тіла, в'язь, накладену на систему або тверде тіло, можна відкинути, замінивши дію в'язі її реакцією, прикладеною до цього тіла або системи в точці взаємодії тіла і в'язі.

Невольні матеріальні точки, систему матеріальних точок або тверде тіло можна розглядати як вільні, якщо їх звільнити від в'язів, заміняючи дію останніх їхніми реакціями.

1.1. В'язі і їхні реакції

Сила, з якою в'язь діє на тіло, називається реакцією в'язі і спрямована у бік, протилежний тому, в якому в'язь не дає тілу можливості переміщатися.

Модуль реакції в'язів визначається у процесі розв'язання задач.

Від виду в'язів і її конструктивного виконання залежить напрямок реакції в'язів (може бути частково або повністю відомою).

Рекомендації щодо напрямку реакції в'язів або її складових по осях координат Ox, Oy, Oz залишаються корисними і їх величини знаходять з умов рівноваги.

1) Гладка поверхня (плоскість) (рис. 1.6):

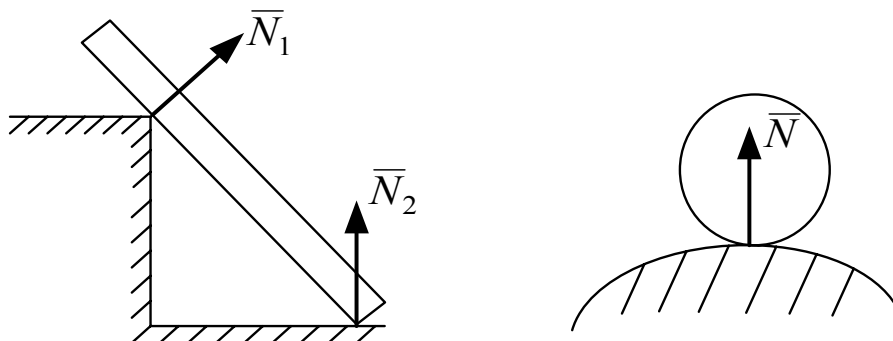


Рис. 1.6

Реакція ідеально гладкої поверхні напрямлена по нормалі від поверхні і позначається через \bar{N}

2) Гнучка в'язь (нитка, канат, ланцюг) (рис. 1.7):

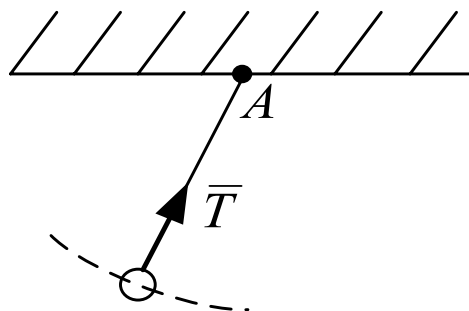


Рис. 1.7

Реакція гнучкої нитки напрямлена вздовж дотичної в будь-якій точці нитки і позначається через \bar{T} .

3) Невагомий стержень, що з'єднує два шарніри А, В. Реакція спрямована вздовж лінії, що з'єднує шарніри (рис. 1.8):

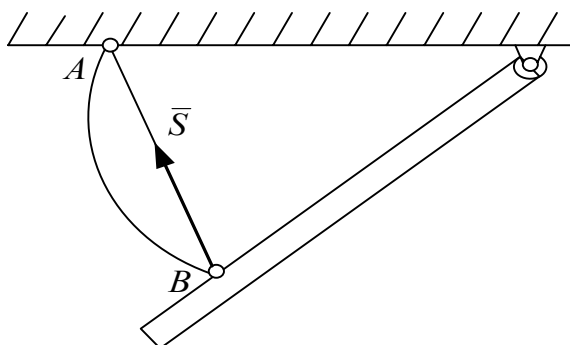


Рис. 1.80

4) Котки (рухомі шарніри) (рис. 1.9):

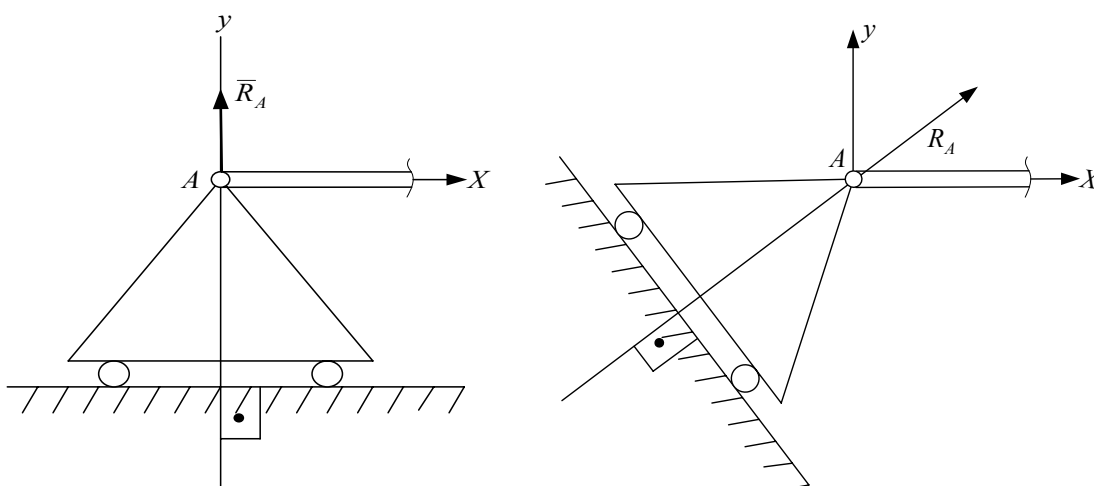


Рис. 1.9

Реакція R_A котка напрямлена перпендикулярно до опорної площини котка.

5. Нерухомий шарнір, циліндричний (підшипник) (рис. 1.10):

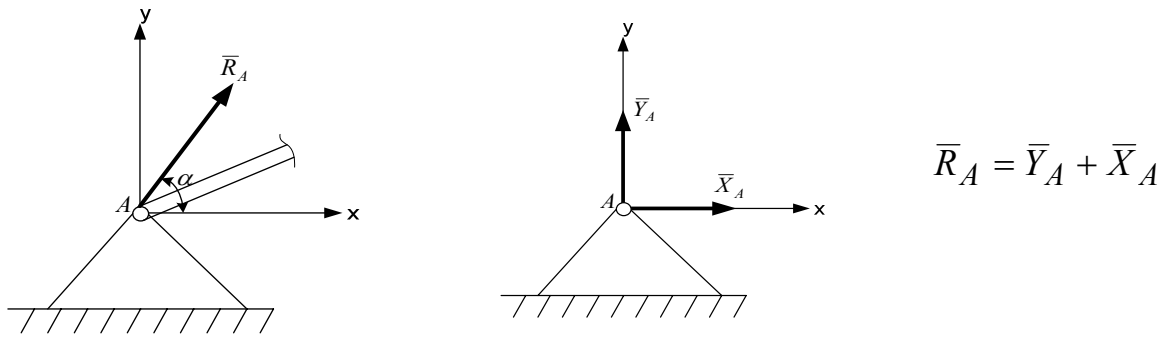


Рис. 1.10

Напрямок реакцій таких в'язів заздалегідь визначити не можна. Невідомий вектор реакції в'язі \bar{R}_A в площині визначається двома складовими \bar{Y}_A і \bar{X}_A по осях OX і OY .

6. Жорстке защемлення - тут три невідомі величини (рис. 1.11):

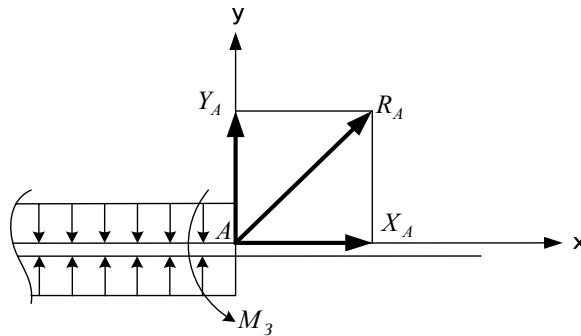


Рис. 1.11

Реакція жорсткого защемлення складається із сили \bar{R}_A та пари сил з моментом M_3 .

1.2. Система збіжних сил. Умови рівноваги системи збіжних сил (рис. 1.12)

Система збіжних сил – система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. 1.12).

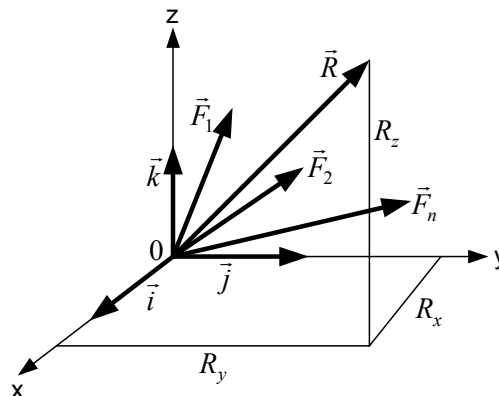


Рис. 1.12

Користуючись аксіомою про паралелограм сил, рівнодійна \bar{R} системи збіжних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$ визначається графічно як замикальна сторона многокутника сил (1.3):

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

Аналітично рівнодійну силу можна визначити за її проекціями на осі прямокутної системи координат (рис. 1.12) за теоремою про проекції векторної суми на осі координат.

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (1.4)$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} - проекції відповідних сил на осі координат.

Подамо рівнодійну \bar{R} у вигляді розкладання по ортах:

$$\bar{R} = \bar{i}R_x + \bar{j}R_y + \bar{k}R_z$$

Тоді її модуль $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$,

$$\text{або} \quad R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}. \quad (1.5)$$

Напрямні косинуси рівнодійної сили:

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю $\bar{R} = 0$. Ця умова є геометричною умовою рівноваги збіжної системи сил.

Оскільки $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$, то многокутник сил має бути замкненим, тобто кінець останньої сили \bar{F}_n збігається з початком першої сили.

Умови рівноваги системи збіжних сил в аналітичній формі формулюються так: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (1.6)$$

1.3. Методичні вказівки для розв'язання задач про рівновагу

Послідовність вирішення задач про рівновагу.

1. Прочитавши умови задачі й виписавши вихідні дані, слід визначити об'єкт дослідження, тобто те тіло, рівновагу якого треба розглянути.
2. Зобразити діючі на тіло активні сили.

3. Маючи на увазі аксіому про звільнення від в'язів, звільнити тіло від в'язів і розглядати його як вільне, але під дією не тільки активних сил, а й реакцій в'язів.
4. Вибрати систему координат.
5. Залежно від характеру одержаної системи сил застосувати відповідні умови рівноваги.
6. Скласти рівняння, розв'язати і проаналізувати їх.
7. Скласти перевіірочні рівняння результатів рішення.

1.4. Момент сили. Векторний і алгебраїчний моменти сили відносно центра

Векторний момент сили \vec{F} відносно центра O дорівнює векторному добутку радіуса вектора точки A прикладення сили відносно цього центра на вектор сили: $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}$.

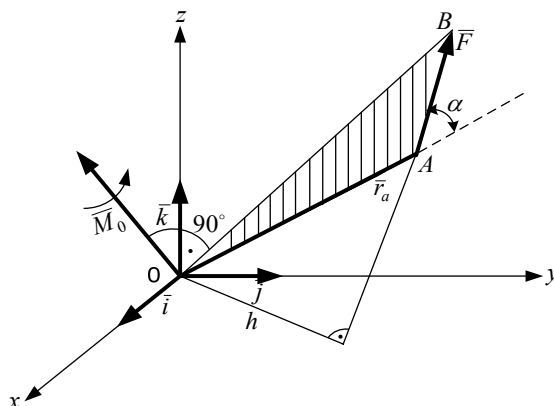


Рис. 1.13

Модуль векторного моменту:

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot r_A \sin(\vec{r}_A, \vec{F}) = F \cdot r_A \sin \alpha = F \cdot h,$$

Тут h - плече сили, тобто довжина перпендикуляра, який проведений із центра до лінії дії сили.

Вектор \vec{M}_O спрямований у той бік, звідки обертаюча дія сили згідно з центром O видна спрямованою проти ходу годинникової стрілки.

Алгебраїчним моментом сили відносно точки (центра) називається величина, яка дорівнює взятому з відповідним знаком добутку модуля сили на плече: $M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h$.

Отже, момент сили \vec{F} відносно центра O чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече h і напрямлений перпендикулярно до площини, що проходить через точку O і лінію дії сили, в той бік, звідки обертання тіла під дією сили \vec{F} навколо точки O (або найкоротший поворот вектора \vec{r} до напрямку вектора \vec{F}) спостерігач бачить таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки. Спостерігач дивиться назустріч вектора-моменту (рис. 1.13, 1.14).

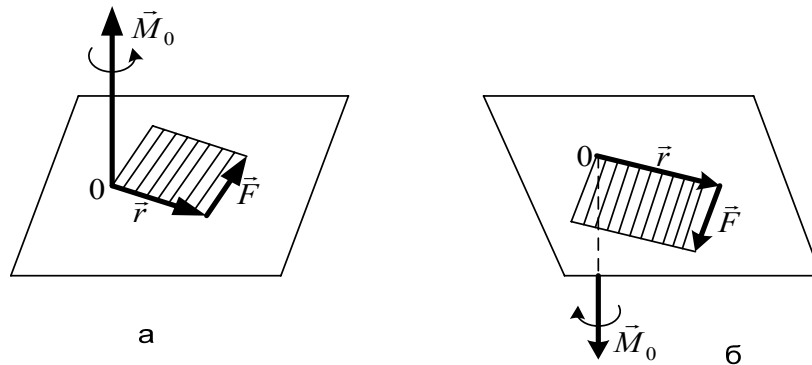


Рис. 1.14

Із визначення моменту сили відносно центра маємо:

1. Якщо перемістити силу вздовж лінії її дії, то момент сили відносно центра не зміниться.

2. Момент сили відносно центра завжди дорівнює нулю, коли лінія дії сили проходить через центр (у цьому випадку плече h дорівнює нулю).

3. Момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника OAB (рис. 1.15), побудованого на силі ($F = AB$) і центрі моменту (O).

Методичні вказівки для визначення моменту сили відносно точки O (рис. 1.15).

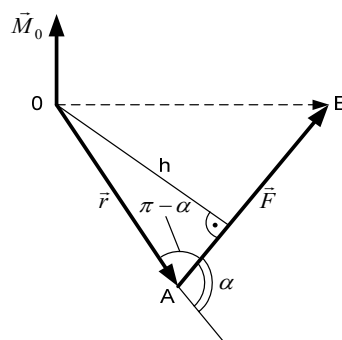


Рис. 1.15

1. Провести лінію дії сили (пряма AB).

2. З обраної точки O провести перпендикуляр на лінію дії сили (довжина перпендикуляра h - плече сили \vec{F} відносно центра O).

3. Скласти добуток модуля сили на плече ($F \cdot h$).

4. Взяти знак “+” якщо сила \vec{F} прагне обернути площину відносно точки O проти руху годинникової стрілки, і знак “-” якщо за стрілкою годинника:

$$M_0(F) = F \cdot h.$$

Теорема про момент рівнодійної просторової системи збіжних сил (теорема Варіньона).

Момент рівнодійної просторової збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів складових сил відносно того самого центра:

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i) \quad (1.7)$$

Рівнодійна \bar{R} збіжної системи сил дорівнює їх геометричній сумі

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Тоді з визначення моменту сили відносно центру O маємо

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \bar{r} \times \bar{R} = \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n) = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2 + \dots + \bar{r} \times \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i) \quad (1.8)$$

Якщо сили і центр O розміщені в одній площині, то їхні моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій. Тому момент рівнодійної такої системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї точки.

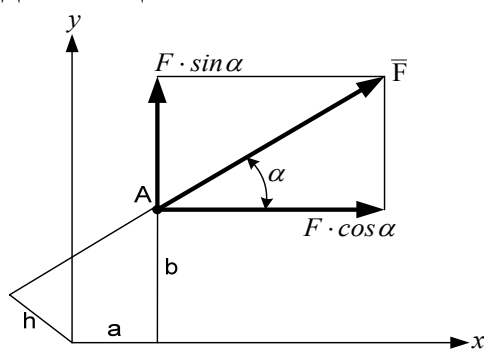


Рис. 1.16

Приклад вживання теореми Варіньона наведено на рис. 1.16.

$$M_O(\bar{F}) = F \cdot \sin \alpha \cdot a - F \cdot \cos \alpha \cdot b.$$

Обчислюючи ж момент сили F відносно центра O по визначенню, маємо $M_O(\bar{F}) = -P \cdot h$, однак визначити плече h сили F , якщо дані координати точки A , дещо складніше.

1.5. Момент пари сил (рис. 1.17)

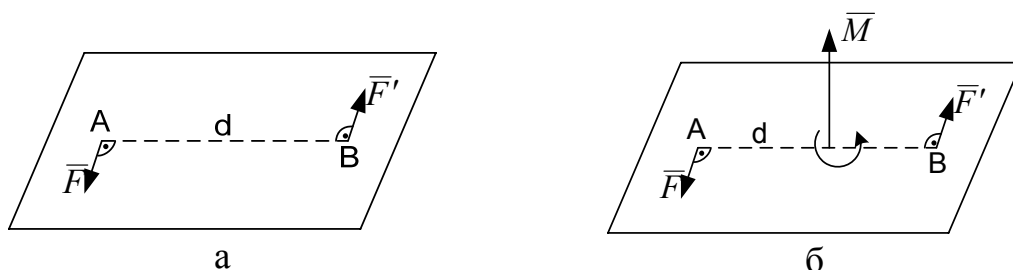


Рис. 1.17

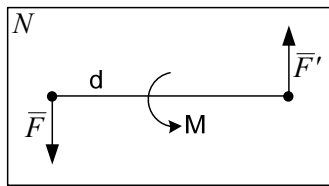
Пара сил – це система двох чисельно рівних паралельних сил, спрямованих у протилежні боки $\bar{F} = -\bar{F}'$.

За міру механічного впливу пари сил на тверде тіло приймається векторний момент пари $\bar{M}(F, \bar{F}')$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання однієї з сил пари відносно точки прикладання другої сили на вектор першої сили:

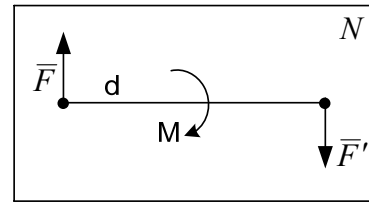
$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \overline{AB} \times \bar{F}'. \quad (1.9)$$

Сума моментів сил пари відносно осі дорівнює проекції векторного моменту пари на цю вісь.

Для пари сил, які лежать у одній площині, вводиться поняття алгебраїчного моменту пари, який дорівнює з відповідним знаком добутку модуля однієї з сил пари на плече, тобто на відстань між лініями дії сил пари.



$$M = F \cdot d$$



$$M = -F \cdot d$$

Рис. 1.18

Площина N (рис. 1.18) називається площиною дії пари сил (\bar{F}, \bar{F}') . Плечем пари d називається найкоротша відстань між лініями дії пари.

Вектор момент \bar{M} пари \bar{F}, \bar{F}' спрямований перпендикулярно до площини дії пари сил у той бік, звідки спостерігач бачить пару сил, яка намагається повернути площину проти ходу годинникової стрілки.

Деякі властивості пар сил, що лежать в одній площині:

1. Алгебраїчна сума моментів сил пари відносно будь-якого центра O в площині пари не залежить від вибору цього центра і дорівнює моменту цієї пари (рис. 1.19):

$$M_0(\bar{F}, \bar{F}') = M_0(\bar{F}) + M_0(\bar{F}') = -F \cdot h + F' \cdot (d + h) = F' \cdot d$$

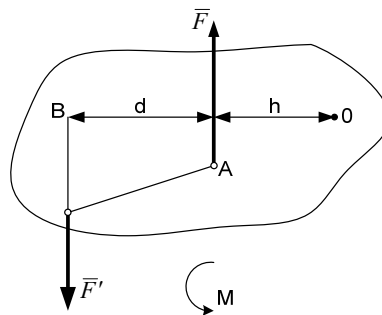
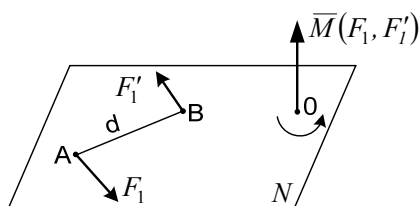


Рис. 1.19

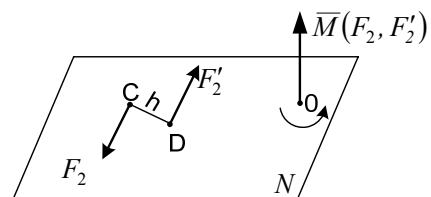
2. Пара сил визначається лише двома параметрами: площиною дії та моментом. Пара сил не має рівнодіяної, сили пари не врівноважені, тому що напрямлені паралельно. Пара сил становить зрівноважену систему (систему сил, еквівалентну нулю) тоді і тільки тоді, коли момент пари дорівнює нулю.

3. Не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати в площині дії, змінюючи величину сили, що входить у неї, і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним (рис. 1.20).

4.



$$M(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) = F_1 \cdot d$$



$$M(\bar{F}_2, \bar{F}'_2) = F_2 \cdot h$$

Рис. 1.20

$$\bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) = \bar{M}(\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \text{ якщо } F_1 \cdot d = F_2 \cdot h$$

5. Пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари.

6. Декілька пар сил, довільно розміщених у просторі, можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i.$$

7. Вектор момент пари сил є вільний, ковзний і математично визначений у вигляді

$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \overline{AB} \times \bar{F}. \quad (1.10)$$

Момент пари цілком визначає статичну дію пари сил на тверде тіло, тобто є повною характеристикою механічної дії пари сил на це тіло.

8. Дві пари сил, що лежать в одній або паралельних площинах і мають однакові за величиною, але протилежні за напрямом моменти, становлять систему пар сил, еквівалентну нулю.

1. Умова рівноваги системи пар сил: $\sum_{i=1}^n \bar{M}_i = 0$.

1.6. Умови рівноваги довільної системи сил

Довільною системою сил називається система сил, як завгодно розташованих у просторі.

Лема про паралельне перенесення лінії дії сили. Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, прикладену до цього тіла, можна перенести у будь-яку точку паралельно самій собі, додаючи при цьому приєднану пару. Момент приєднаної пари дорівнює моменту цієї сили відносно центра зведення (рис. 1.21).

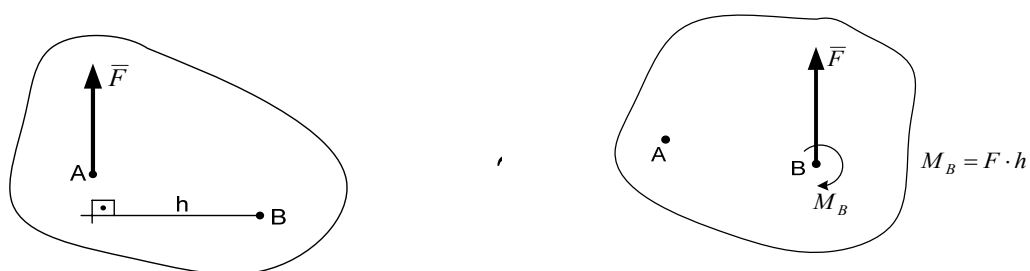


Рис. 1.21

Приведення довільної просторової системи сил до центра (рис. 1.21).

Довільну систему сил можна замінити однією силою, яка дорівнює головному вектору системи і прикладена до центра приведення (довільна точка), і однією парою сил, момент якої дорівнює головному моменту системи відносно тієї ж точки.



Рис. 1.21

Головний вектор \bar{R}_0 дорівнює геометричній сумі сил:

$$\bar{R}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n. \quad (1.11)$$

Проекції головного вектора на осі координат:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

Головний момент відносно будь-якого центра \bar{M}_0 дорівнює геометричній сумі векторних моментів усіх сил системи відносно того ж центра (точки O):

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i) = \bar{M}_0(\bar{F}_1) + \bar{M}_0(\bar{F}_2) + \dots + \bar{M}_0(\bar{F}_n). \quad (1.12)$$

Модуль головного моменту \bar{M}_0 та його напрямні косинуси визначаються виразами

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2},$$

Проекції головного моменту на осі координат M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} дорівнюють алгебраїчним сумах моментів усіх сил відносно осей OX, OY, OZ , що проходять через центр зведення O :

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_{ix}); \quad M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_{iy}); \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_{iz}). \quad (1.13)$$

Варіанти зведення сил.

1) $\bar{M}_0 = 0$ – система є еквівалентною одній силі, яка називається рівнодійною даній системі сил. При цьому відповідно до теореми Варіньона якщо система сил приводиться до рівнодійної відносно будь-якої точки момент рівнодійної дорівнює сумі моментів, що складають систему сил відносно тієї ж точки (осі).

2) Для плоскої системи сил – головний момент системи сил відносно будь-якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно цього центра:

$$M_0 = M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) + \dots + M_0(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i). \quad (1.14)$$

3) Якщо $\bar{M}_0 = 0$, $\bar{R}_0 \neq 0$, то система паралельних сил приводиться до рівнодійної прикладенням у точці, яку називають центром паралельних сил.

Окремим випадком паралельних сил є розподілені сили, що характеризуються інтенсивністю розподілення $g \left[\frac{H}{m} \right]$. У розрахунках це навантаження доцільно замінити рівнодіючою, що дорівнює площині епюри розподілених сил, і прикладеній у центрі епюри паралельних сил (рис. 1.22).

Для найбільш поширених випадків

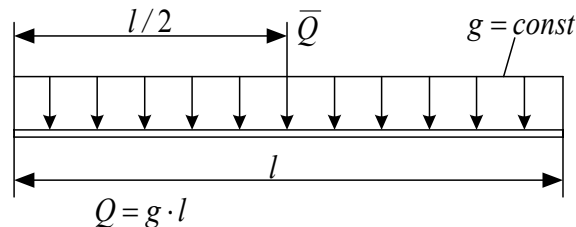


Рис. 1.22

Для рівноваги довільної просторової системи сил (система сил була еквівалентна нулю) необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно будь-якої точки O дорівнювали нулю, тобто

$$\bar{R}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0; \quad \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i) = 0.$$

Ці умови називаються умовами рівноваги довільної системи сил у векторній (геометричній) формі. Умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі:

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; & 4. \sum_{i=1}^n M_{0x}(\bar{F}_i) &= 0; \\ 2. \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0; & 5. \sum_{i=1}^n M_{0y}(\bar{F}_i) &= 0; \\ 3. \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0; & 6. \sum_{i=1}^n M_{0z}(\bar{F}_i) &= 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

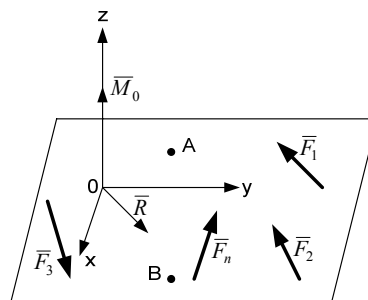


Рис. 1.23

Система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ задана у площині XOY (рис. 1.23). За центр зведення візьмемо довільну точку O , що належить цій площині. Головний момент M_0 цієї системи сил перпендикулярний до площини XOY , якій належать сили. Головний вектор \bar{R} також лежить у площині XOY дії сил.

З шести рівнянь рівноваги просторової довільної системи сил (1.15) залишаються лише три:

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \\ 2. \sum F_{iy} &= 0; \\ 3. \sum M_{0z}(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів відносно довільно вибраної точки дорівнювали нулю.

Число невідомих у рівняннях рівноваги для довільної плоскої системи сил не повинно перевищувати трьох, тоді задача буде статично визначеною.

У випадку, якщо вісь OX не перпендикулярна до прямої AB , рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \\ 2. \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) &= 0; \\ 3. \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Якщо три точки O, A, B не лежать на одній прямій, всі три рівняння рівноваги можна подати у вигляді рівнянь моментів відносно цих точок:

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i) &= 0; \\ 2. \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) &= 0; \\ 3. \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Такими рівняннями рівноваги довільної плоскої системи сил користуються при визначенні зусиль у стержнях ферми способом Рітера.

За центр моментів доцільно взяти точку, в якій перетинається найбільша кількість ліній дії невідомих сил (тоді моменти сил відносно цієї точки дорівнюватимуть нулю).

Якщо дві невідомі сили взаємно перпендикулярні, то осі координат доцільно направити по лініях дії цих сил.

1.7. Ферми. Способи визначення зусиль у стержнях ферми

Плоскими фермами називаються конструкції, що складаються з прямолінійних стержнів, які з'єднані між собою шарнірами і утворюють незмінну геометричну фігуру. Шарніри називають вузлами ферми (рис. 1.24).

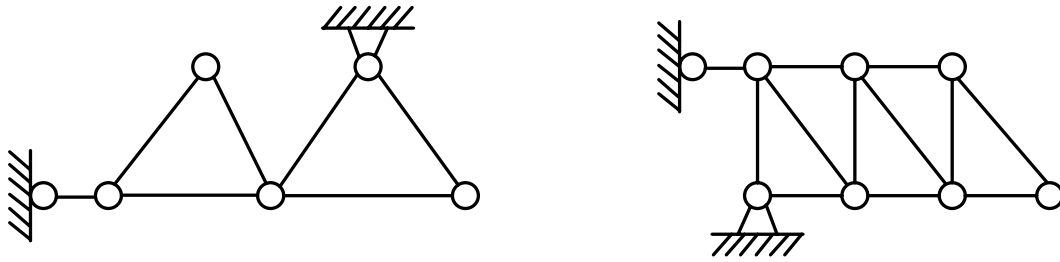


Рис. 1.24

При розрахунку ферм припускають, що:

1. шарніри розміщені тільки на кінцях стержнів;
 2. вагою стержнів нехтують;
 3. навантаження, що діють на ферму, прикладені у вузлах ферми,
- тому кожен стержень буде розтягнутий або стиснутий.

Розрахунок ферми складається з визначення опорних реакцій і зусиль в стержнях ферми. Для визначення зусиль у стержнях ферми користуються двома способами.

Спосіб вирізання вузлів полягає в тому, що кожен вузол вирізається з ферми і розглядається окремо як такий, що перебуває в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і зусиль розрізаних стержнів. Система сил, що діє на вузол, є плоскою системою збіжних сил, яка перебуває в рівновазі. Тому розрахунок ферми необхідно починати з вузла, в якому сходяться два стержні, два невідомих зусилля в яких визначаються з двох рівнянь рівноваги збіжної системи сил у площині.

Припускають, що всі зусилля у стержнях напрямлені від вузла, тобто стержні розтягнуті. Останній вузол розглядають для перевірки.

Спосіб Рітера дає змогу знайти зусилля в будь-якому стержні ферми незалежно від зусиль в інших стержнях.

Спосіб Рітера полягає в тому, що ферма розсікається так, щоб у перерізі було не більше трьох стержнів з невідомими зусиллями, які не сходяться в одному вузлі, і розглядають рівновагу відсіченої частини під дією прикладених зовнішніх сил і зусиль, які замінюють дію розсічених стержнів. Для цієї частини складають три рівняння рівноваги з трьома невідомими зусиллями. Найчастіше ці рівняння є умовами рівності нулю алгебраїчних сум моментів сил відносно трьох різних центрів, за які обирають точки попарного перетину розсічених стержнів з числа переріжаних. Ці точки називаються точками Рітера.

Якщо два стержні з трьох розсічених паралельні, то точка Рітера віддаляється у нескінченність. Тоді складають два рівняння моментів сил і одне рівняння проєкцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних стержнів.

Приклад

Визначити зусилля у стержнях 1, 2, 3 ферми, якщо $F_1 = 45 \text{ кН}$,

$F_2 = 20 \text{ кН}$, а інші розміри показано на рис. 1.25.

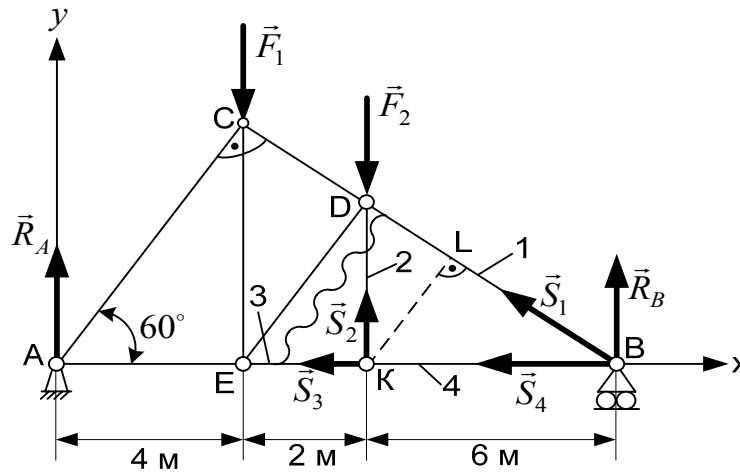


Рис. 1.25

Розв'язання. Визначаємо реакції опор ферми R_A і R_B . Реакція котка R_B напрямлена по нормалі до опорної площини. А оскільки на ферму діє система сил F_1 , F_2 і \bar{R}_B , то і реакція R_A шарніра A буде паралельна цим силам. У цьому легко переконатися, склавши рівняння рівноваги в проекціях на вісь AX .

Складаємо умови рівноваги системи паралельних сил, які лежать в одній площині у вигляді

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = R_B \cdot AB - F_1 \cdot AE - F_2 \cdot AK = 0.$$

Звідси знаходимо $R_B = \frac{F_1 \cdot AE + F_2 \cdot AK}{AB} = \frac{45 \cdot 4 + 20 \cdot 6}{12} = 25 \text{ кН},$

$$R_A = -R_B + F_1 + F_2 = -25 + 45 + 20 = 40 \text{ кН}.$$

Перевірка: $\sum M_C = 0; -R_A \cdot 4 - F_2 \cdot 2 + R_B \cdot 8 = 0,$

$$\begin{aligned} -40 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + 25 \cdot 8 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Визначаємо зусилля методом вирізання вузлів. Розглянемо рівновагу вузла B (рис. 1.26).

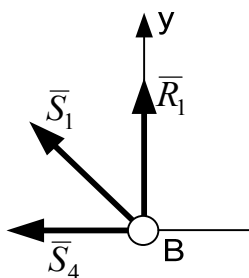


Рис. 1.26

$$\sum_{L=1}^3 F_{ix} = 0;$$

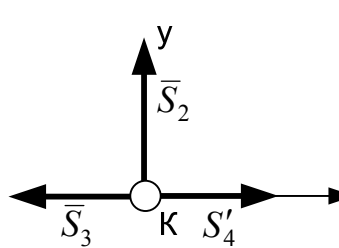
$$-S_4 - S_1 \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow S_4 = -S_1 \cdot \cos 30^\circ;$$

$$\sum_{L=1}^3 F_{iy} = 0; R_B + S_1 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$S_1 = \frac{-R_B}{\cos 60^\circ} = \frac{-25}{0,5} = -50 \text{ кН};$$

$$S_4 = -(-50) \cdot 0,866 = 43,3 \text{ кН}.$$

Розглянемо рівновагу вузла K (рис. 1.27):



$$\sum_{L=1}^3 F_{ix} = 0; \quad -S_3 + S_4 = 0;$$

$$S_3 = S_4 = 43,3 \text{ кН}$$

$$\sum_{L=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_2 = 0$$

Рис. 1.27

Відповідь: за методом вирізання вузлів $S_1 = -50 \text{ кН}$, $S_2 = 0$, $S_3 = 43,3 \text{ кН}$, $S_4 = 43,3 \text{ кН}$.

Визначаємо зусилля у стержнях 1, 2, 3 ферми методом Рітера.

Проведемо переріз через стержні 1, 2, 3 і розглянемо рівновагу тієї частини розсіченої ферми, в якій прикладено меншу кількість сил. Це права частина ферми. Зусилля в розсічених стержнях, як і в методі вирізання вузлів, умовно вважаємо розтяжними і напрямленими у бік частини, що відкидається.

У відсіченій частині ферми зрівноважується плоска система сил $\bar{R}_B, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$.

Для визначення зусилля \bar{S}_1 відповідною точкою Рітера буде точка K .

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^4 M_K(\bar{F}_i) = R_B \cdot 6 + S_1 \cdot KL = 0,$$

звідки

$$S_1 = -\frac{R_B \cdot 6}{KL} = -\frac{R_B \cdot 6}{KB \cdot \sin 30^\circ} = -\frac{25 \cdot 6}{6 \cdot 0,5} = -50 \text{ кН}.$$

Для визначення зусилля \bar{S}_2 точкою Рітера є точка B , для визначення зусилля \bar{S}_3 - точка D , а відповідні рівняння рівноваги мають вигляд

$$\sum_{i=1}^4 M_B(\bar{F}_i) = -6 \cdot S_2 = 0 \rightarrow S_2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 M_D(\bar{F}_i) = R_B \cdot 6 - S_3 \cdot KD = 0,$$

звідки

$$S_3 = \frac{R_B \cdot 6}{KD} = \frac{R_B \cdot 6}{KB \cdot \text{tg} 30^\circ} = \frac{25 \cdot 6}{6 \cdot 0,577} = 43,3 \text{ кН}.$$

Відповідь: $S_1 = -50 \text{ кН}$; $S_2 = 0$; $S_3 = 43,3 \text{ кН}$.

Отримані двома способами величини зусиль у стержнях 1, 2, 3 ферми співпадають.

Стержень 1 – стиснутий, 2 – не навантажений, 3 – розтягнутий.

1.8. Завдання 1. Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми методами вирізання вузлів і Рітера

Визначити реакції опор, а також сили у зазначених стержнях методом вирізання вузлів і методом Рітера.

Схеми ферм наведені на рисунках 1.27 – 1.29, а необхідні для розрахунків дані у табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані для розрахунків реакції опор

| Варіант | P_1 | P_2 | P_3 | a | h | α | Номери стержнів |
|---------|-------|-------|-------|-----|------|----------|-----------------|
| | кН | | | м | | | |
| 1 | 4 | 9 | 2 | 2,0 | – | 30 | 3, 8, 9 |
| 2 | 10 | 3 | 4 | 2,5 | – | 60 | 2, 5, 7 |
| 3 | 2 | 12 | 6 | 3,0 | – | 60 | 4, 5, 10 |
| 4 | 10 | 10 | 5 | 4,0 | – | 60 | 5, 6, 11 |
| 5 | 2 | 4 | 2 | – | 2,0 | 60 | 4, 5, 10 |
| 6 | 3 | 7 | 5 | 4,0 | 3,0 | – | 8, 9, 11 |
| 7 | 9 | 6 | 3 | 4,0 | – | 60 | 4, 6, 12 |
| 8 | 5 | 7 | 7 | 3,2 | – | 45 | 3, 4, 5 |
| 9 | 10 | 8 | 2 | 5,0 | – | 60 | 6, 7, 12 |
| 10 | 3 | 4 | 5 | 4,4 | 3,3 | – | 3, 5, 7 |
| 11 | 2 | 6 | 8 | 2,5 | 3,0 | – | 2, 7, 8 |
| 12 | 5 | 7 | 2 | 4,0 | – | 60 | 4, 5, 10 |
| 13 | 4 | 5 | 2 | 4,8 | 3,6 | – | 4, 5, 10 |
| 14 | 3 | 5 | 5 | 3,0 | – | 60 | 5, 6, 8 |
| 15 | 2 | 2 | 10 | 4,0 | 6,0 | – | 2, 6, 9 |
| 16 | 5 | 6 | 2 | 5,0 | – | 60 | 3, 5, 6 |
| 17 | 4 | 4 | 10 | 4,0 | 6,0 | – | 4, 7, 8 |
| 18 | 5 | 2 | 8 | – | 5,0 | 60 | 1, 4, 8 |
| 19 | 8 | 4 | 10 | 5,0 | 10,0 | 60 | 4, 5, 7 |
| 20 | 2 | 3 | 5 | 4,0 | 6,0 | – | 5, 6, 8 |
| 21 | 3 | 2 | 7 | 6,0 | – | 45 | 5, 8, 9 |
| 22 | 4 | 2 | 9 | 4,0 | – | 45 | 2, 6, 8 |
| 23 | 5 | 8 | 8 | 4,0 | 9,0 | 30 | 4, 7, 9 |
| 24 | 6 | 10 | 2 | 3,6 | – | 45 | 4, 5, 10 |
| 25 | 7 | 10 | 5 | 4,4 | 3,3 | – | 8, 10, 11 |
| 26 | 8 | 12 | 2 | 4,0 | – | 30 | 4, 5, 9 |
| 27 | 9 | 4 | 4 | 4,0 | 3,0 | – | 5, 9, 11 |
| 28 | 10 | 5 | 3 | 5,0 | – | 30 | 3, 5, 6 |
| 29 | 12 | 8 | 2 | 6,0 | – | 45 | 5, 6, 11 |
| 30 | 5 | 10 | 4 | 4,0 | 2,0 | – | 6, 7, 12 |

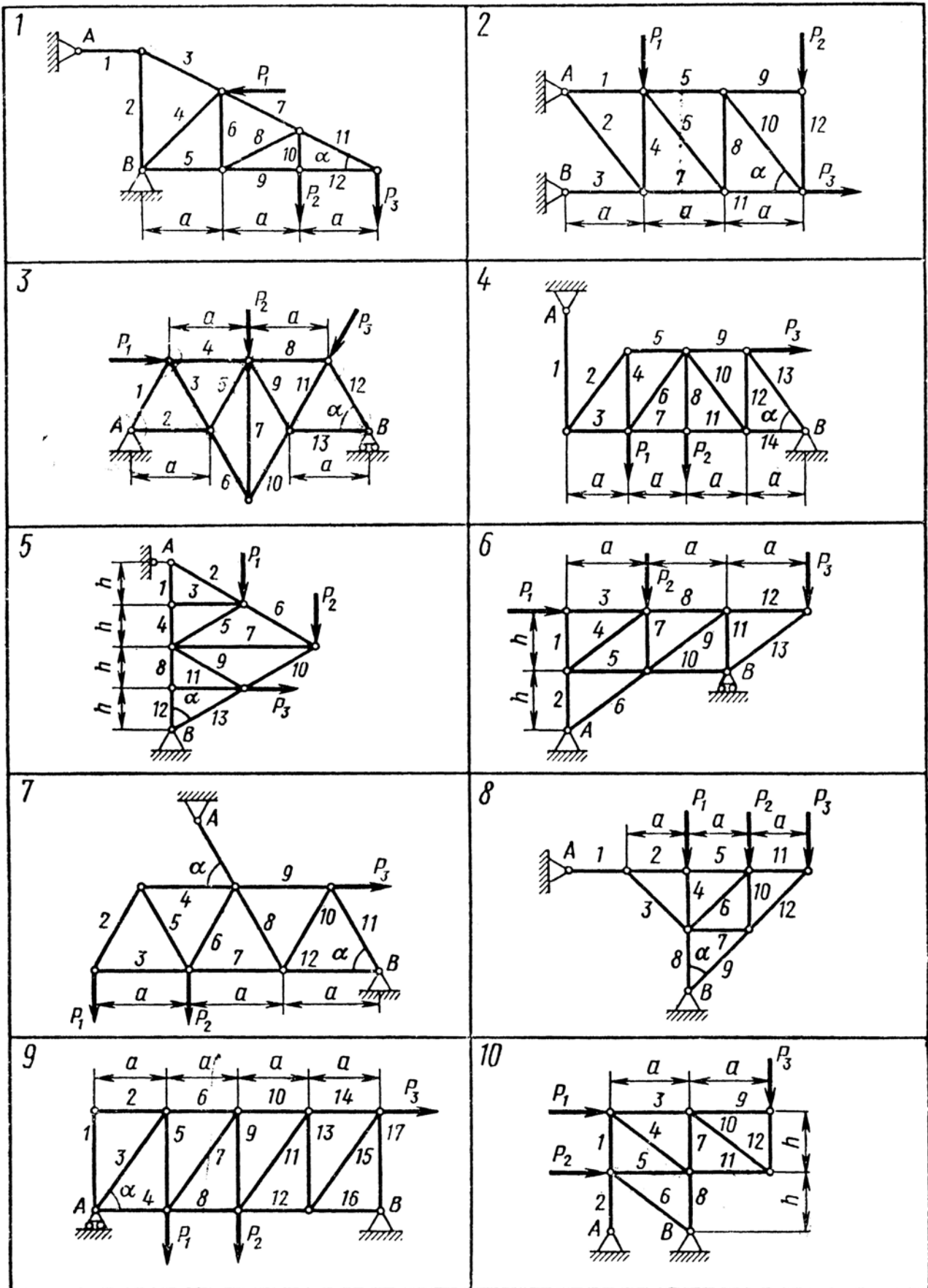


Рис. 1.27

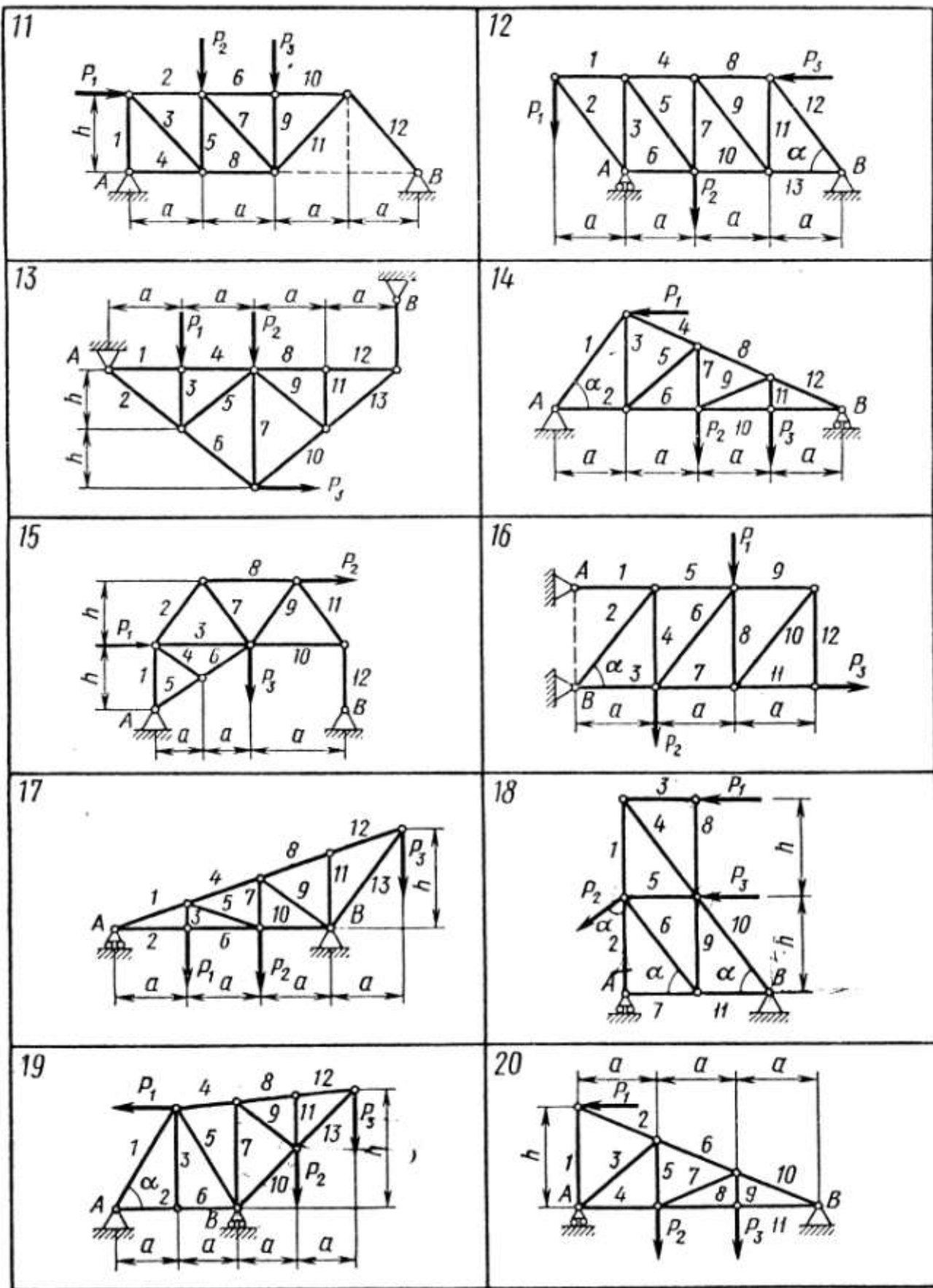


Рис. 1.28

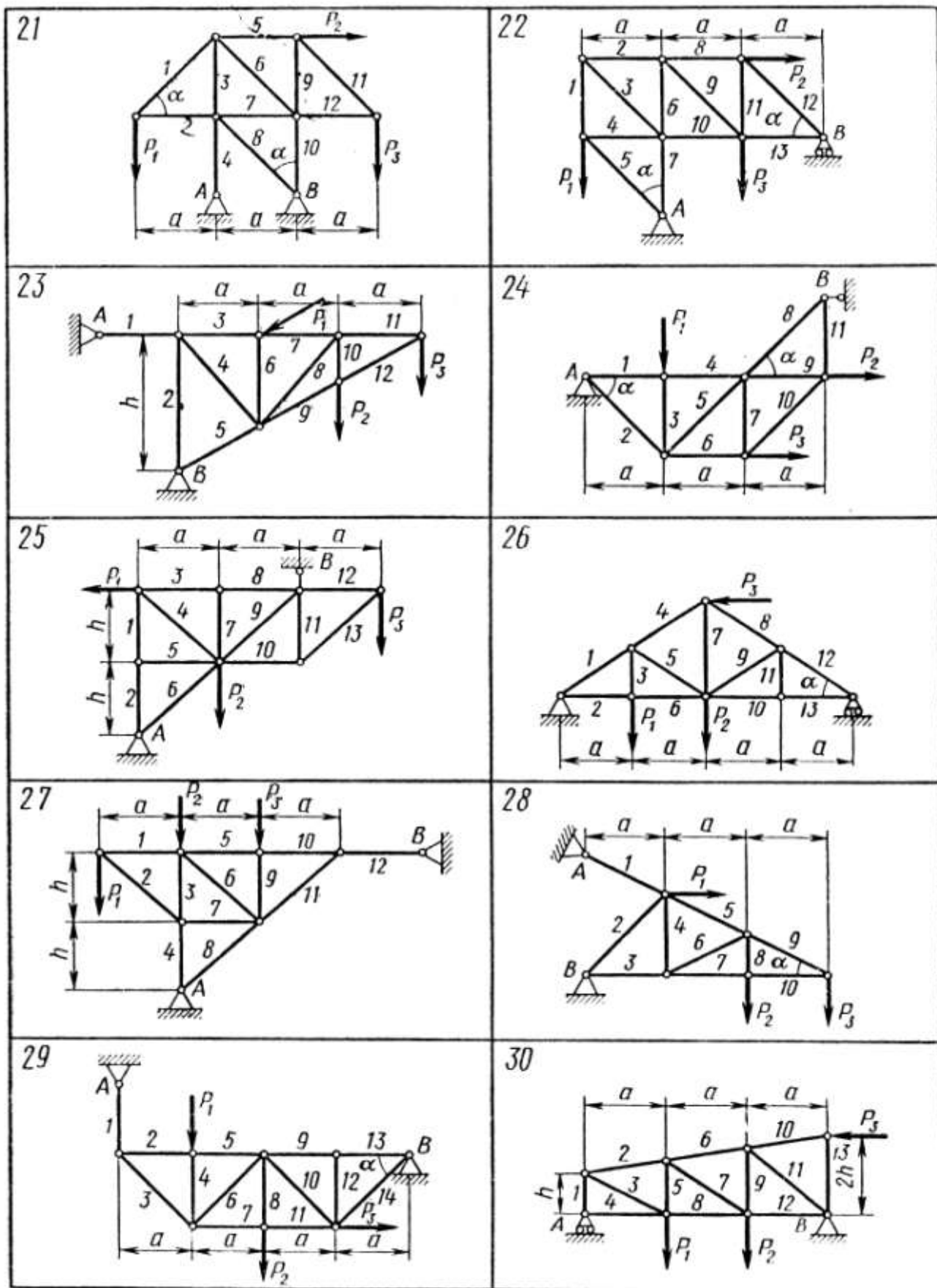


Рис. 1.29

2. ЗАВДАННЯ 2. СТАТИКА

2.1. Згин

Деформація згину виникає під дією прикладених до стрижня сил або пар сил, розташованих у площині, яка проходить через його поздовжню вісь.

Згином називається деформація, яка супроводжується зміною кривизни стрижня.

При поперечному згині сили перпендикулярні до осі стрижня.

Стрижень, що працює на згин, називається балкою. У разі, коли прикладені сили лежать в площині, що проходить через поздовжню вісь балки, і в ній розташовується одна з головних осей інерції, виникає явище плоского згину. При плоскому згині вісь бруса викривляється в площині діючих сил і є плоскою кривою.

На балку діють прикладені сили і реакції опор. Зовнішнє навантаження:

- 1) зосереджені сили P (Н, кН);
 - 2) пари сил M (Н • м, кН • м);
 - 3) моменти і сили рівномірно і нерівномірно розподілені по довжині балки
- Інтенсивність нерівномірно розподілених навантажень змінюється по довжині балки і дорівнює величині навантаження, що припадає на одиницю довжини балки в розглянутій точці.

Розглянемо балки, що задовольняють таким обмеженням:

- 1) перетин балки має хоча б одну вісь симетрії;
- 2) всі зовнішні сили лежать в цій площині симетрії балки.

2.2. Згинальний момент і поперечна сила в перерізі балки

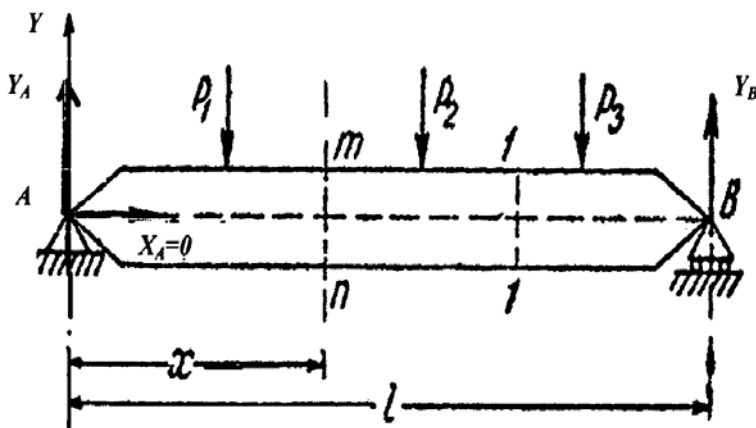


Рис. 2.1

При обчисленні напружень необхідно відшукати небезпечний переріз балки (рис. 2.1), через який передаються найбільші напруги. Визначимо напруги по перерізах, перпендикулярних до осі балки. Скористаємося для цього методом перерізів.

На залишену ліву частину балки в кожній точці перерізу будуть діяти напруги, які можна представити складовими: нормальним σ і дотичним τ (рис.2.2, а). σ і τ врівноважують зовнішні сили Y_A і P_1 , прикладені до залишеної частини. Зовнішні сили й напруги разом утворюють систему сил у просторі, для якої можна скласти шість рівнянь рівноваги.

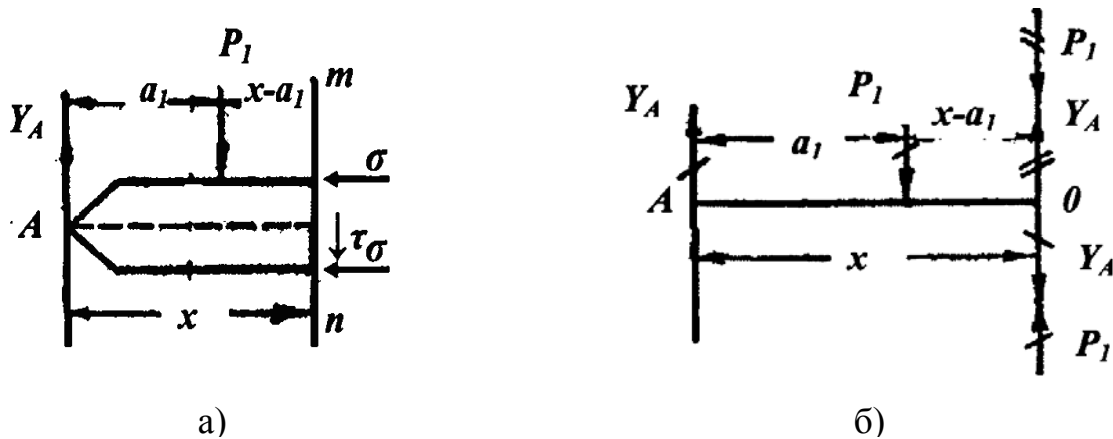


Рис. 2.2

Щоб отримати для σ і τ загальні формули, придатні при будь-якому значенні x , зручно систему сил замінити силою, прикладеною в якій-небудь точці - центрі приведення, і парою сил (рис. 2.2, б). За центр приведення зазвичай беруть центр ваги розглянутого перерізу, що значно спрощує формули для обчислення σ і τ . В окремому випадку сила може обернутися в нуль.

При додаванні додатними будемо вважати напрямки для сил - вгору, для a моментів - за годинниковою стрілкою: $Q_y = Y_A - P_1$, $M = Y_A \cdot x - P_1(x - a_1)$.

Таким чином, в будь-якому перерізі балки може бути два зусилля: поперечна сила Q_y і згинальний момент M .

Згинальний момент - це момент системи сил, які замінюють в даному перерізі дію відкинutoї частини балки на її частину, що залишилася. Згинальний момент M у перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу усіх сил, розташованих по один бік від перерізу (ліворуч або праворуч).

Сила Q_y , яка прагне зрушити залишену частину балки щодо відкинutoї, називається поперечною (перерізуваною) силою в даному перерізі. Поперечну силу Q_y можна також розглядати як проекцію на площину перерізу рівнодіючої системи сил, які замінюють в даному перерізі дію відкинutoї частини балки на її частину, що залишилася.

Поперечна сила Q_y в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх сил, розташованих по один бік від перерізу (ліворуч або праворуч).

Незалежно від вибору правої або лівої частини балки, умовимося вважати позитивними: M - за годинниковою стрілкою і Q_y вгору, якщо при обчисленні розглядається ліва частина балки і, назад, M - проти годинникової стрілки і Q_y вниз, якщо розглядається права частина (рис. 2.3 а, б).

Якщо згинальний момент у перерізі позитивний, то балка в цьому перерізі гнеться опуклістю вниз, якщо від'ємний - опуклістю вгору.

У перерізі, де M переходять через нуль, кривизна балки змінює свій напрямок, тобто вісь балки в цьому перерізі має точку перегину.

Або, поперечна сила Q_y в перерізі позитивна, якщо її вектори прагнуть обертати частини розсіченою балки за годинниковою стрілкою; згинальний

момент позитивний - якщо він викликає в нижніх волокнах балки розтягнення, тобто коли зовнішня сила прагне повернути балку відносно центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, то вона дає в виразі для Q_y у цьому перерізі позитивний доданок; якщо зовнішнє навантаження створює відносно центра ваги розглядуваного перерізу момент, що викликає розтягання в нижніх волокнах балки, то вона дає в виразі для згинального моменту в цьому перерізі позитивний доданок.

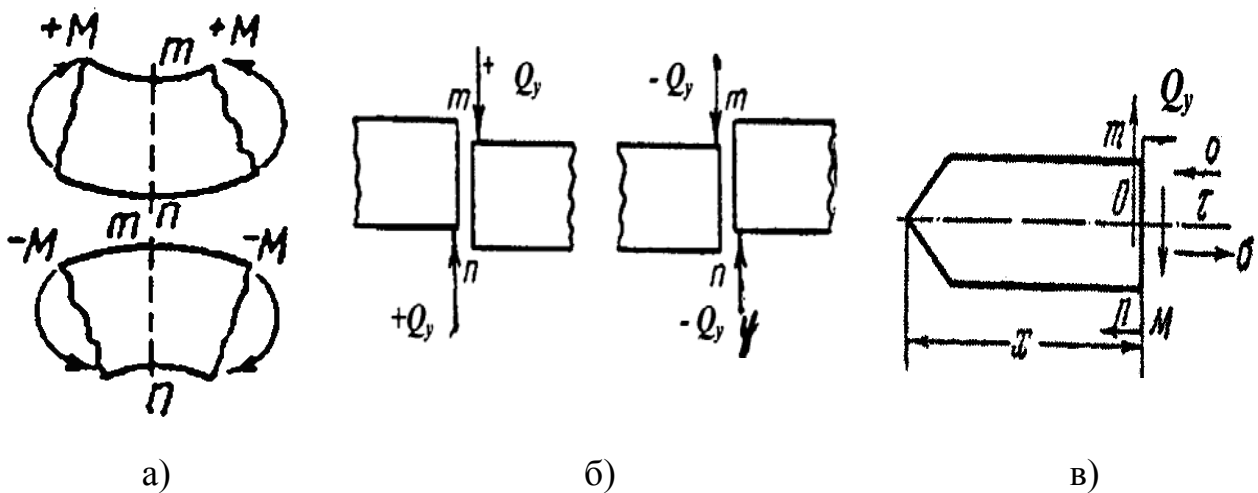


Рис. 2.3

Нормальні напруги σ складаються в пару, врівноважуючу згинальний момент M , оскільки спрямовані паралельно площині симетрії балки, в якій лежить M , тобто $\sigma = f_1(M)$. Поперечна сила врівноважується тільки дотичними напруженнями τ , тобто $\tau = f_2(Q_y)$ (рис. 2.3, в).

2.3. Побудова епюр внутрішніх сил

Для розрахунків балок на міцність необхідно вміти знаходити перерізи, в яких виникають найбільші внутрішні зусилля. Знаходження найбільш навантаженого перерізу можливо побудовою графіків, так званих епюр внутрішніх зусиль, які дають змогу визначити небезпечний переріз балки.

Побудова епюр внутрішніх зусиль виконується в такій послідовності:

- 1) визначення опорних реакцій (коли необхідно);
- 2) визначення перерізів;
- 3) складання рівнянь рівноваги для кожного перерізу;
- 4) визначення трьох рівнянь рівноваги невідомих внутрішніх зусиль;
- 5) побудова епюр і визначення екстремальних значень внутрішніх зусиль.

Після побудови епюр Q_y і M необхідно їх проаналізувати, звертаючи увагу на наступні особливості

$$q = \frac{dQ_y}{dx}. \quad (2.1)$$

Похідна від поперечної сили по абсцисі перерізу дорівнює інтенсивності суцільний навантаження у тому ж перерізі.

Похідна від згинального моменту по абсцисі перерізу дорівнює поперечній силі в тому ж перерізі:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dx} = q. \quad (2.2)$$

Таким чином друга похідна від згинального моменту по абсцисі дорівнює інтенсивності суцільний навантаження.

Якщо q спрямоване вниз, то

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (2.3)$$

Графічно Q_y в даному перерізі може розглядатися як тангенс кута нахилу дотичної до епюри M в точці, відповідній цьому розтину.

Якщо її вісь спрямована з право наліво $\frac{dM}{dx} = -Q_y$, то так як кут нахилу дотичної змінює знак при зміні напрямку осі абсцис.

Із (2.2) випливає, що M досягне екстремального значення там, де $Q_y = \frac{dM}{dx} = 0$, тобто в перерізі, де поперечна сила переходить через нуль.

Отримані в п. 2.3 залежності, необхідні при побудові епюр поперечних сил і згинальних моментів, показані в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 - Особливості побудови епюр Q_y и $M_{узг.}$

| | | |
|--|------------|--|
| $\begin{cases} q = \frac{d}{dx}(Q_y) = \frac{d^2}{dx^2}(M_{узг.}) \\ Q_y = \frac{d}{dx}(M_{узг.}) \end{cases}$ | | Диференційні залежності між q , Q_y та $M_{узг.}$ |
| Залежність Q_y , $M_{узг.}$ от q | | |
| 1 | $q = 0$ | Q_y - пряма \parallel осі Z $M_{узг.}$ - похила пряма |
| 2 | $q \neq 0$ | Q_y - похила пряма $M_{узг.}$ - квадратична парабола |
| Залежність $M_{узг.}$ від Q_y | | |
| 1 | $Q_y > 0$ | $M_{узг.}$ зростає |
| 2 | $Q_y < 0$ | $M_{узг.}$ убуває |
| 3 | $Q_y = 0$ | $M_{узг.}$ екстремум (max або min) |

| | | |
|---|--|--|
| 4 | Q_y проходить через «0» і непереривна | $M_{изг.}$ має екстремум |
| | Залежність Q_y і $M_{изг.}$ від прикладеної зосередженої сили P | Q_y - стрибок на величину сили P ; $M_{изг.}$ - злам (різка зміна суміжних ділянок). |
| | Залежність Q_y і $M_{изг.}$ від зосередженої пари M | Q_y - не відображається; $M_{изг.}$ - стрибок, який дорівнює величині прикладеної зосередженої пари M . |
| | Q_y і $M_{изг.}$ на вільному кінці або шарнирно-оперта балка | $Q_y = P$ - зовнішня зосереджена сила; $M_{изг.} = 0$, якщо не прикладений зосереджений момент; $M_{изг.} = M$, якщо прикладений зосереджений момент M . |
| | Q_y і $M_{изг.}$ в жорсткій закладенні | Q_y - чисельно дорівнює опорної реакції Y_A ; $M_{изг.}$ - чисельно дорівнює моменту в закладенні M_p |

2.4. Розрахунок на міцність при згині

При перевірці міцності балки необхідно знайти найбільш напружені і на розтяг і на стиск перетини. Для цього треба застосувати формулу (2.4) до небезпечного перетину.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I} = \frac{M_{\max}}{\left(\frac{I}{z_{\max}} \right)} = \frac{M_{\max}}{W}, \quad (2.4)$$

де $W = \frac{I}{z_{\max}}$ називається осьовим моментом опору перерізу.

Для симетричного перерізу відносно осі нейтральної існує одне цілком певне значення W . Якщо перетин несиметрично відносно нейтральної осі - маємо два моменти опору W_1 і W_2 .

Умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \quad (2.5)$$

Величина W характеризує вплив форми і розмірів прийнятого перерізу на міцність балки при напругах, що не перевищують межі пропорційності.

При проектуванні балок можуть бути такі випадки розрахунку:

1) задані діючі навантаження та розміри балок, потрібно перевірити

міцність балки;

2) задані проліт балки, її матеріал і діючі на неї навантаження, потрібно визначити поперечні розміри балки,

3) задані розміри балки і її матеріал, потрібно визначити несучу здатність балки.

При цьому слід враховувати:

1) у разі матеріалу, який однаково чинить опір розтягування і стиснення $[\sigma_{\delta}] = [\sigma_{\text{н\acute{e}}}] = [\sigma]$, при несиметричному перерізі необхідно з двох значень W_1 і W_2 приймати меншу, відноситься до найбільш віддаленого волокна;

2) коли матеріал балки різному пручається розтягуванню і стисненню маємо дві умови міцності:

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{W_1} \leq [\sigma +] \quad \text{- для розтягнутих волокон,}$$

$$\sigma_{\text{н\acute{e}}} = -\frac{M_{\max}}{W_2} \leq [\sigma -] \quad \text{- для стислих волокон .}$$

В залежності від того, чого краще пручається матеріал, що більше $[\sigma +]$ і $[\sigma -]$, доводиться відповідним чином конструювати переріз, вибираючи його форму і розміри так, щоб W_1 і W_2 задовольняли умові міцності.

Переріз вважається раціональним, якщо він забезпечує міцність даної балки при мінімальній її вазі. У більшості випадків втрата міцності пов'язана з величиною σ . Матеріал, розташований поблизу нульової лінії, працює мало, отже, тільки дуже мала частина згинального моменту припадає на цю частину перетину, більшу ж частину M приймає матеріал, розташований далеко від нульової лінії. Чим більша частина площі перерізу винесена від нульової лінії на периферію, тим раціональніше буде переріз. Найкращим з широко поширених профілів є двотавр – в ньому найбільш реалізована ідея видалення матеріалу від нульової лінії. Однак він раціональний, якщо його орієнтувати так, щоб нульова лінія збіглася з віссю, щодо якої момент інерції мінімальний.

Послідовність дій при підборі перерізів балок з умов їх міцності наведено в прикладі.

Приклад. Для дерев'яної балки круглого поперечного перерізу (рис. 2.4, а) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, встановити небезпечний переріз і знайти діаметр балки. Допустима напруга $[\sigma] = 10$ МПа.

Рішення.

1. Визначаємо реакції опори (закладення А). У загальному випадку в закладенні кінця балки можуть виникнути три реакції сили: Z_A , R_A і M_{Ap} , їх напрямки покажемо довільно. Складемо три рівняння рівноваги статички:

$$\sum Z = 0 \quad Z_A = 0 \quad \sum Y = 0 \quad -qa + P + R_A = 0,$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_{A_p} - M_l - P \cdot b + qa \left(\frac{a}{2} + b \right) = 0$$

і знаходимо шукані сили:

$$Z_A = 0; \quad R_A = qa - P = 20 \cdot 1 - 25 = -5 \text{ кН},$$

$$M_{AP} = -M_l - P \cdot b + g \cdot a \left(\frac{a}{2} + b \right) = -8 - 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Знаки "мінус" вказують на те, що напрямки сил R_A і M_{AP} нами спочатку не вгадані і їх необхідно поміняти на протилежні (рис. 2.4, б).

2. Будуємо епюри Q_y і M , застосовуючи метод перерізів. На ділянці a проводимо будь-який перетин 1-1. Відкидаємо праву частину, а ліву - довжиною z_a зобразимо окремо (рис. 2.4, в). Дія відкинutoї частини балки на залишену замінимо Q_y і $M_{узз}$; для цієї розрахункової схеми (див. рис 2.4, в) складемо вираз поперечної сили як суму проекцій всіх сил, діючих на розглянуту частина балки. При цьому розподілене навантаження замінюється рівнодіючою qz_a , прикладеною посередині довжини z_a , так як $q = const$. Сила qz_a обертає розглянуту частина балки щодо проведеного розтину 1-1 проти годинникової стрілки, тому береться зі знаком "мінус": $Q_y(z_a) = -qz_a$, $(0 \leq z_a \leq a)$

Отримане рівняння для поперечної сили в будь-якому перетині ділянки a є рівнянням першого ступеня відносно змінної z_a . Якщо пересувати цей переріз, тобто міняти z_a , то Q_y на ділянці a буде змінюватися за лінійним законом. Отриманий вираз $Q_y(z_a)$ буде придатним до тих пір, поки переріз 1-1 не перейде на точку B , тобто поки $0 \leq z_a \leq a$. Так як $Q_y(z_a)$ є рівнянням прямої лінії, то достатньо обчислити лише два крайніх значення Q_y при $z_a = 0$ і при $z_a = a$:

$$Q_y(z_a = 0) = 0; \quad Q_y(z_a = a) = -qa = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН}.$$

При побудові епюр Q_y і $M_{узз}$ домовимося відкладати позитивні значення ординат вгору (в позитивну сторону осі y), а негативні вниз. Отже, від базової лінії (осі абсцис, проведеної паралельно осі балки) значення поперечної сили -20 кН відкладаємо вниз під точкою B балки. З'єднавши її з нулем (під точкою C), маємо епюру Q_y на ділянці a (див. рис. 2.4, д).

Для побудови епюри Q_y на ділянці b проведемо переріз 2-2 завдовжки $0 \leq z_b \leq b$. Залишимо праву частину балки (рис. 2.4, г) далі поступаємо аналогічно попередньому: $Q_y(z_b) = R_A = 5$ кН.

Тут R_A взято зі знаком "плюс", так як розглянуту частина балки сила R_A обертає за годинниковою стрілкою.

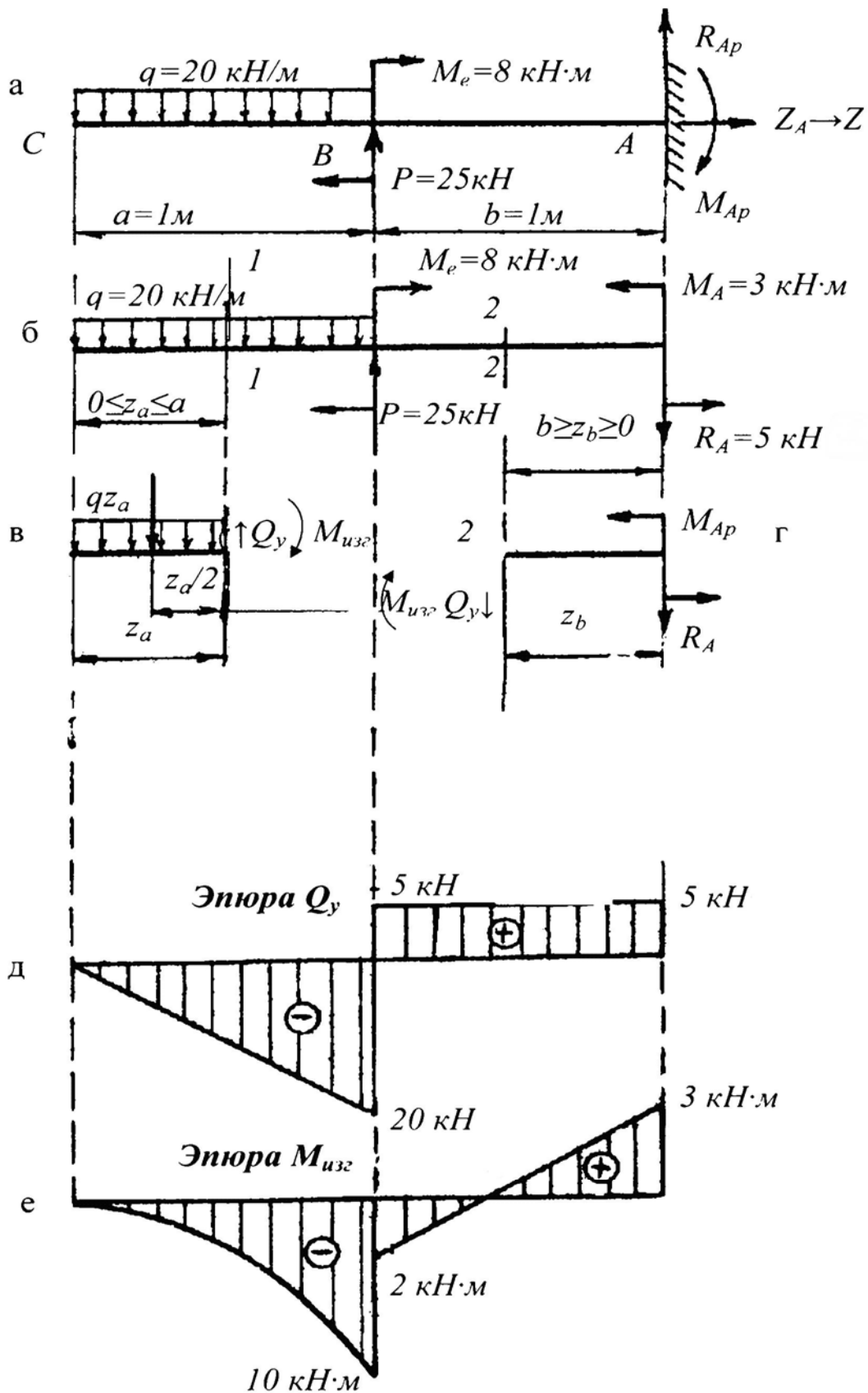


Рис. 2.4

Неважко бачити, що поперечна сила у всіх перетинах ділянки $0 \leq z_b < b$ буде однаковою, тому на епюрі тут буде пряма, паралельна осі абсцис.

Для побудови епюри згинальних моментів для тих же розрахункових схем залишених частин балки (див. рис 2.4, г), Записуємо загальні вирази як суму моментів щодо проведених перерізів усіх сил, що діють на розглянуту частина балки:

$$\text{для перерізу 1-1: } M(z_a) = -qz_a \cdot \frac{z_a}{2} = -\frac{qz_a^2}{2}, \quad 0 \leq z_a \leq a;$$

$$\text{для перерізу 2-2: } M(z_a) = M_{A_p} - R_A z_b, \quad 0 \leq z_b \leq b.$$

У першому рівнянні (для ділянки a) змінна z_a в квадраті. Отже, епюра M_{uzg} на ділянці a повинна бути представлена кривою (параболою); для її побудови необхідно обчислити декілька значень моментів. Але для практичних цілей достатньо мати три точки, а в деяких випадках і дві, якщо пам'ятати, що $Q_y = \frac{dM}{dz}$. Наприклад, у нашому випадку в точці C $Q_y = 0$, тобто похідна від $M(z_a)$ дорівнює нулю. А це означає, що на епюрі $M_{uzg}(z_a)$ повинен бути екстремум, тобто в цій точці кривої дотична повинна бути паралельною осі абсцис.

Знаходимо значення моменту в точках C і B :

$$M(z_a = 0) = 0; \quad M(z_a = a) = -\frac{qa^2}{2} = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Відкладаємо під точкою C нуль, а під B $M(z_a = a) = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, з'єднуємо їх кривою так, щоб в точці епюри M під перерізом C балки дотична була б паралельна осі Z . Це можна зробити тільки так, як показано на рис. 2.4, е.

Рівняння $M(z_b)$ лінійне, тому знаходимо значення моментів на кінцях ділянки b і, з'єднавши їх прямою, отримуємо епюру M на цій ділянці:

$$M(z_b = 0) = M_{A_p} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(z_b = b) = M_{A_p} - R_A \cdot b = 3 - 5 \cdot 1 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Необхідно перевірити епюри Q_y і M_{uzg} по скачках, по табл. 2.1. На епюрі Q повинні бути скачки тільки під зосередженими силами, що діють на балку (в тому числі і під реактивними силами). Стрибки ці повинні бути на величину діючих в цих точках балки сил. У нашому випадку в перерізі B має місце сила $P = 25 \text{ кН}$. На епюрі Q_y під точкою балки B ми маємо стрибок на 25 кН . У перерізі A - сила в $R_A = 5 \text{ кН}$. На епюрі Q_y тут стрибок на 5 кН . На епюрі M повинні бути скачки під зосередженими моментами, прикладеними до балки. У нашій задачі моменти M в точці B і M_{A_p} в перерізі A . І на епюрі M_{uzg} в цих же місцях маємо стрибки на величину зазначених моментів.

У багатьох випадках така проста перевірка є визначальною правильності побудованих епюр.

3. Підбираємо переріз балки по умові міцності по нормальних напругах

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

де $W = \frac{\pi d^3}{32}$ - момент сопроотивлення изгибу круглого сечення;

$M_{\max} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ - максимальний згинальний момент (з епюри $M_{\text{зг}}$).

Тоді $\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot M_{\max}}{(\pi d^3)} \leq [\sigma]$, звідки $d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{(\pi [\sigma])}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10 \cdot 10^6}{(\pi \cdot 10)}} = 216,8 \text{ мм}$.

Округляючи в більшу сторону, приймаємо $d = 220 \text{ мм}$.

2.5. Завдання 2. Визначення реакцій опор балки, побудова епюр внутрішніх сил. Розрахунок на міцність

Для заданої схеми балки (рис. 2.5) по одному з варіантів, які наведені в табл. 2.2, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, провести підбір круглого перерізу із умов міцності по нормальних напруженнях при $[\sigma] = 140 \text{ МПа} = 140 \cdot 10^3 \text{ кПа}$

Таблиця 2.2 – Дані для розрахунку

| Варіант | a , м | c , м | l , м | F_1 , кН | F_2 , кН | q_1 , кН/м | q_2 , кН/м | M_1 , Н·м | M_2 , Н·м |
|---------|---------|---------|---------|------------|------------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| 1 | 2 | 2 | - | 35 | 40 | - | 10 | - | - |
| 2 | 1 | - | 7 | 35 | - | 10 | - | - | 40 |
| 3 | 1 | 1 | 6 | - | - | 10 | - | 30 | - |
| 4 | 2 | - | 5 | 25 | - | - | - | 40 | 20 |
| 5 | 3 | 2 | 7 | - | - | - | 20 | 50 | - |
| 6 | 2 | 3 | - | 45 | - | 18 | - | - | - |
| 7 | 3 | 1 | 8 | 35 | - | - | 20 | - | 30 |
| 8 | 2 | 3 | 8 | - | - | 12 | - | 40 | - |
| 9 | - | 3 | 9 | - | - | 18 | 14 | - | - |
| 10 | 1 | 2 | 7 | - | - | 16 | 10 | - | - |
| 11 | 2 | - | 7 | 50 | - | 10 | - | - | - |
| 12 | 3 | - | 6 | - | - | - | 16 | 50 | - |
| 13 | - | - | 6 | - | - | 5 | - | 20 | - |
| 14 | 3 | 2 | 9 | 40 | 20 | - | - | - | - |
| 15 | 3 | 1 | 10 | - | - | 20 | - | 50 | - |
| 16 | 1 | 2 | - | 30 | - | 30 | - | - | - |
| 17 | 2 | 3 | - | - | - | 12 | - | 40 | - |
| 18 | 1 | 2 | - | 45 | - | 16 | - | - | - |
| 19 | - | 2 | 9 | - | - | - | 14 | 30 | - |
| 20 | 1 | 2 | - | - | - | 10 | - | 30 | - |
| 21 | - | - | 6 | - | - | 5 | - | 20 | - |
| 22 | - | 3 | 7 | - | - | - | 10 | - | 20 |
| 23 | - | 3 | 8 | - | - | - | 10 | - | 20 |
| 24 | 3 | - | 8 | - | - | - | 14 | 50 | - |
| 25 | 3 | | 10 | - | - | 14 | - | 50 | - |
| 26 | 1 | 1 | 7 | - | - | 5 | - | 20 | - |
| 27 | 2 | 1 | 7 | - | - | - | 5 | - | 10 |
| 28 | 3 | 1 | 8 | 30 | - | - | 5 | - | - |
| 29 | 1 | 2 | 9 | - | - | 20 | 5 | - | - |
| 30 | 2 | 2 | 10 | - | - | 5 | - | - | 30 |

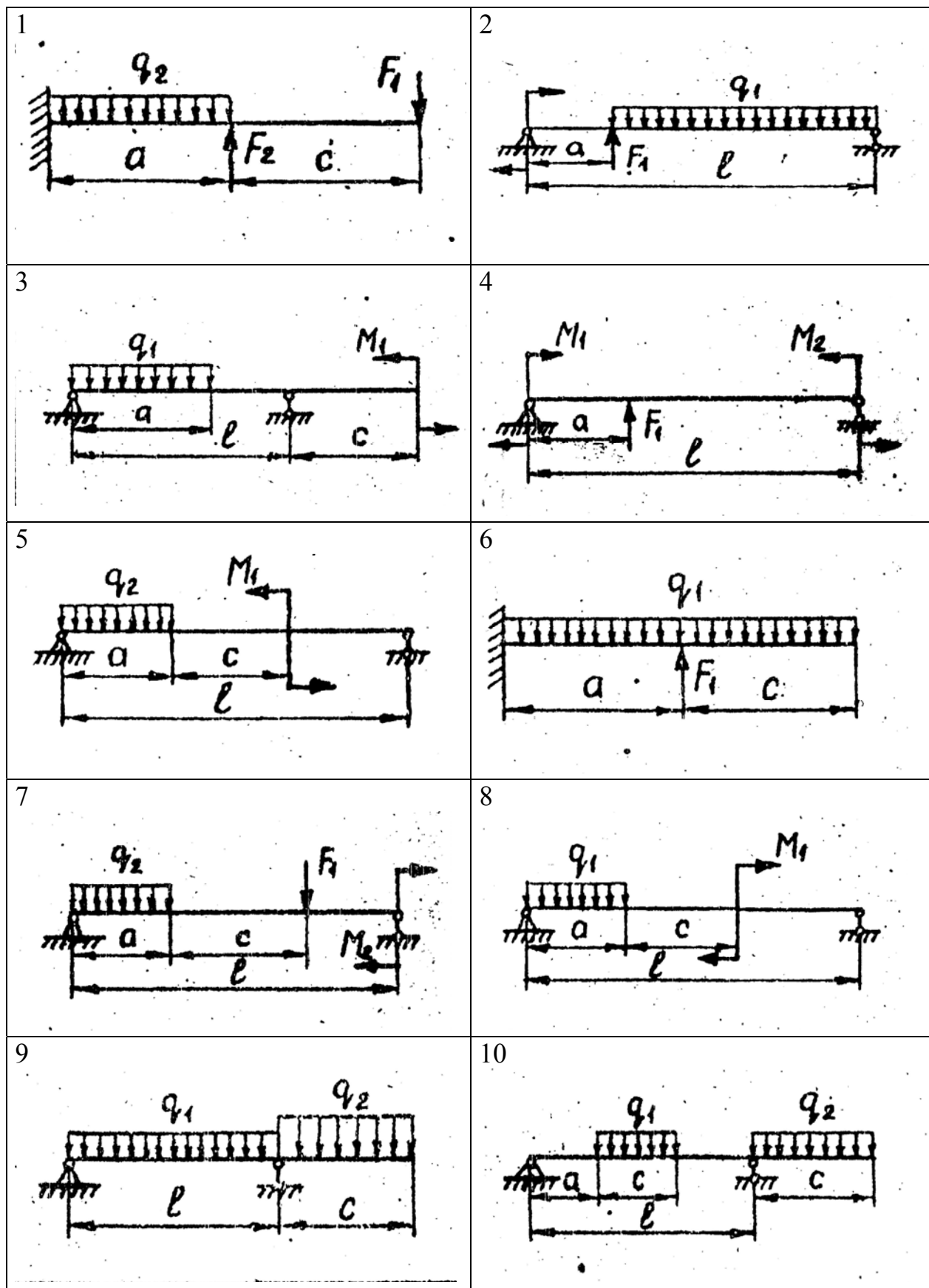


Рис. 2.5

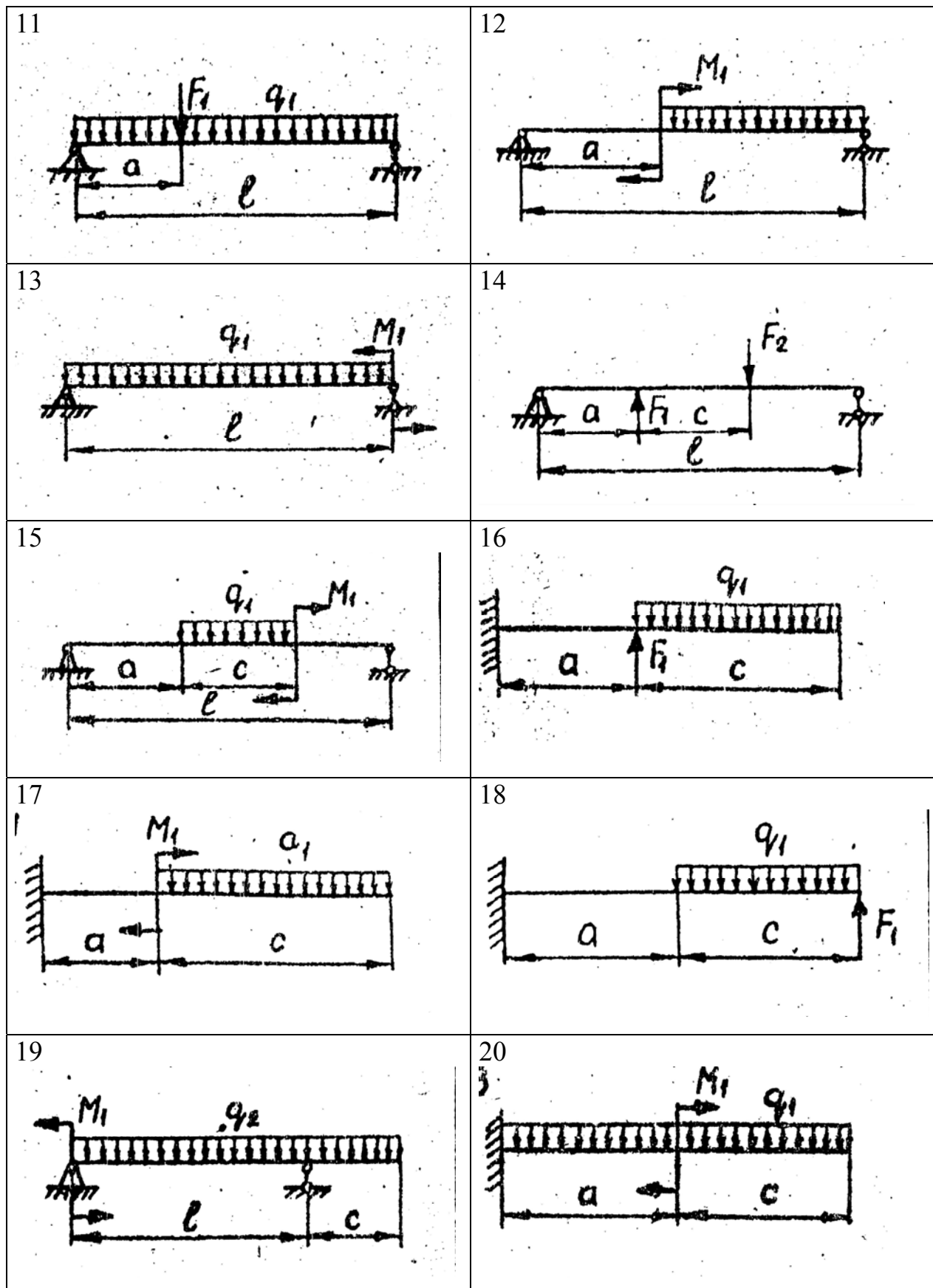


Рис. 2.6

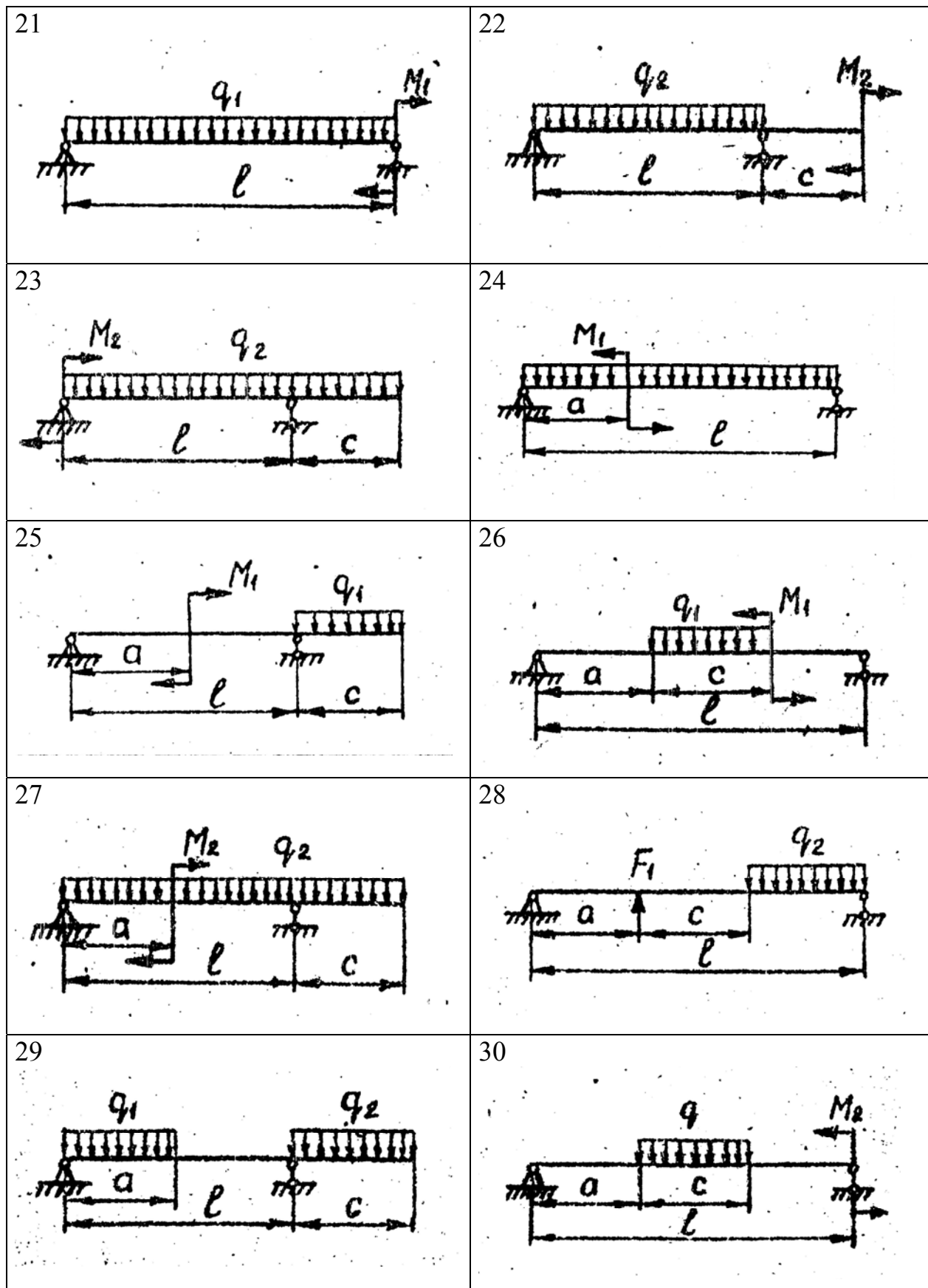


Рис. 2.7

3. ВКАЗІВКИ ДО ЗАВДАННЯ 3. КІНЕМАТИКА

Кінематикою називають розділ механіки, в якому вивчаються геометричні властивості руху тіл без урахування їх інертності (маси) і діючих на них сил. Вона умовно поділяється на два розділи: 1) кінематика точки, тобто тіла, розмірами якого можна знехтувати і положення якого можна описати як положення геометричної точки; 2) кінематика твердого тіла.

3.1. Кінематика точки

Рух точки характеризується законом, траєкторією, швидкістю і прискоренням.

Закон руху точки визначає залежність між довільним положенням рухомої точки в просторі й часі. Основними кінематичними характеристиками руху точки є її положення, швидкість і прискорення. Основне завдання кінематики точки полягає в знаходженні способів задання її положення та методів визначення швидкості й прискорення.

Швидкість точки завжди спрямована за дотичною до траєкторії руху точки.

Прискоренням точки називають міру зміни швидкості точки за часом.

Прискорення точки \vec{a} завжди спрямоване в бік угнутості траєкторії її руху.

3.2. Кінематика твердого тіла

У кінематиці, як і в статиці, всі тіла визнаються абсолютно твердими. Основні завдання кінематики твердого тіла полягають: 1) у знаходженні способів задання руху твердого тіла в цілому та його кінематичних характеристик; 2) у визначенні руху кожної точки твердого тіла окремо.

Залежно від способів задання руху тіла (від виду рівняння, однозначно визначаючого положення тіла в обраній системі відліку в будь-який момент часу) розрізняються види руху твердого тіла: поступальний, обертальний, плоский (плоскопаралельний), сферичний, загальний випадок руху.

Обертальним рухом твердого тіла називають такий рух тіла (рис. 3.1), при якому є пряма, жорстко зв'язана з тілом (називають віссю обертання), що залишається увесь час нерухомою.

Закон руху тіла $\varphi = \varphi(t)$ називається кінематичним рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Головні кінематичні характеристики обертального руху твердого тіла: кут повороту φ , кутова швидкість $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ [сек⁻¹], кутове прискорення у даний момент часу

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \text{ [сек}^{-2}\text{]} \quad (3.1)$$

Отже, кутова швидкість дорівнює першій похідній за часом від кута повороту φ . У техніці кутову швидкість часто задають числом n обертів за хвилину. Зв'язок між ω і n визначається формулою $\omega = \frac{2 \times \pi \times n}{60} = \frac{\pi \times n}{30}$.

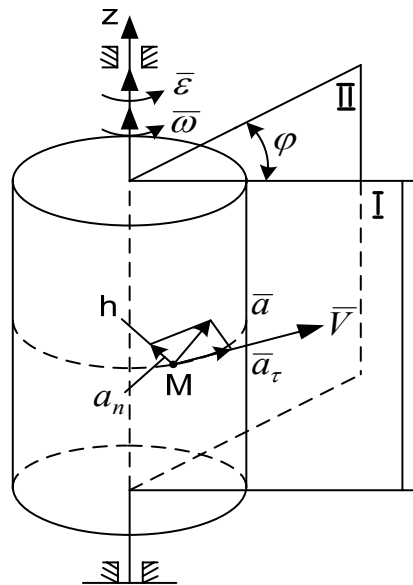


Рис. 3.1

Кутове прискорення тіла ε характеризує швидкість зміни кутової швидкості ω за часом.

Кутове прискорення ε в даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту.

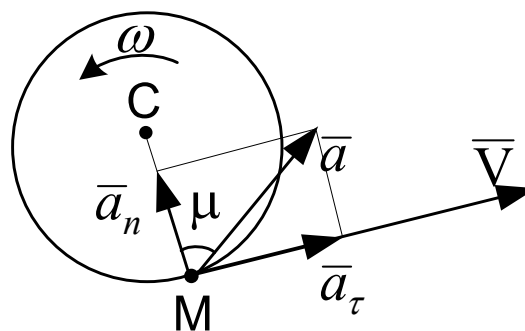


Рис. 3.2

Траєкторією будь-якої точки M тіла, яке обертається, є коло з центром C на осі обертання (рис. 3.2). Швидкість \vec{v} будь-якої точки M тіла, яке обертається, спрямована перпендикулярно до прямої, яка з'єднує її з віссю обертання, у бік обертання тіла і за модулем дорівнює

$$v = \omega \cdot h,$$

де h – відстань від точки M до осі обертання, або радіус MC кола, яке описує точка M.

Прискорення точки M розкладається на тангенціальну (обертальну) (\bar{a}_τ) і нормальну (доосьову) (\bar{a}_n) складові, які за модулем дорівнюють

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h; a_n = \omega^2 \cdot h; a = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot h \quad (3.2)$$

Вектор \bar{a}_τ спрямований за дотичною у бік (обертання) руху при прискореному обертанні тіла і в протилежний – при сповільненому. \bar{a}_n - спрямовано за радіусом MC до осі обертання, тобто у бік угнутості траєкторії точки M .

3.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Рух твердого тіла у просторі називають плоскопаралельним (плоским), якщо всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

Закон руху плоскої фігури має вигляд:

$$\begin{aligned} X_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Перші два рівняння характеризують поступальний рух фігури, при якому всі точки рухаються так само, як і полюс, а третє – обертальний рух навколо полюса.

Обертальний рух навколо полюса характеризується кутовою швидкістю $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ і кутовим прискоренням $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}(t)$.

Кутова швидкість і кутове прискорення обертального руху фігури не залежать від вибору полюса.

Швидкості точок плоскої фігури

Існують два основні методи знаходження швидкості будь-якої точки плоскої фігури в даний момент часу, тобто в даному положенні фігури.

1) Швидкість будь-якої точки B плоскої фігури складається зі швидкості полюса A і швидкості точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A , яка перпендикулярна до AB .

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}; \bar{V}_{BA} \perp BA. \quad (3.4)$$

Швидкість \bar{V}_{BA} за величиною дорівнює

$$V_{BA} = |\omega| \cdot BA = \omega_{BA} \cdot h = \omega_{BA} \cdot l_{AB}, \quad (3.5)$$

де ω - алгебраїчна кутова швидкість плоскої фігури, що не залежить від вибору полюса. Вектор \bar{V}_{BA} спрямований перпендикулярно до AB проти ходу годинникової стрілки навколо полюса A , якщо $\omega > 0$, і навпаки, якщо $\omega < 0$.

Проекції швидкостей двох точок фігури на пряму, що проходить через ці точки, дорівнюють одна одній і спрямовані в один бік (рис. 3.3).

Проекція \bar{V}_A на AB дорівнює проекції V_B на AB , тобто

$V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta$, де α і β - кути між \bar{V}_A і \bar{V}_B і напрямком прямої AB відповідно.

2) Плоский рух уявляється як обертальний рух навколо миттєвого центра обертань, або центра швидкостей.

Полюсом є миттєвий центр швидкостей (МЦШ), тобто така точка P рухомої площини, жорстко скріпленої з фігурою, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю $\overline{V}_P = 0$.

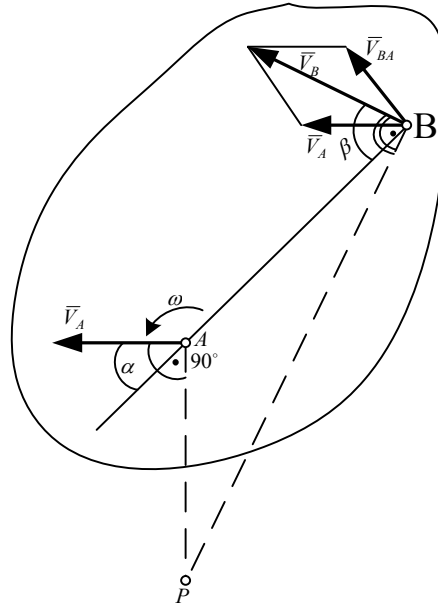


Рис. 3.3

Тоді $V_B = V_{BP} = |\omega| \cdot BP$, тобто швидкість будь-якої точки фігури дорівнює за величиною добутку модуля кутової швидкості фігури на відстань від цієї точки до МЦШ та спрямована перпендикулярно до цього відрізка ($\overline{V}_B \perp BP$) проти ходу годинникової стрілки, якщо $\omega > 0$ і навпаки.

Розподіл миттєвих швидкостей точок плоскої фігури такий, немовби фігура оберталася навколо МЦШ (точка P). З цього маємо співвідношення

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP}{AP}. \quad (3.6)$$

Отже, відношення швидкостей двох точок дорівнює відношенню їхніх відстаней до миттєвого центра швидкостей, або

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \dots = |\omega|. \quad (3.7)$$

Випадки знаходження миттєвого центра швидкостей та кутової швидкості плоскої фігури

1. У загальному випадку для знаходження миттєвого центра швидкостей потрібно знати лише напрям швидкостей двох точок фігури (рис. 3.4). Для цього з початку векторів швидкостей зазначених двох точок (наприклад A і B) проводимо перпендикуляри. У точці перетину цих перпендикулярів і є миттєвий центр швидкостей (точка P).

Кутова швидкість ω плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані до МЦШ:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \dots$$

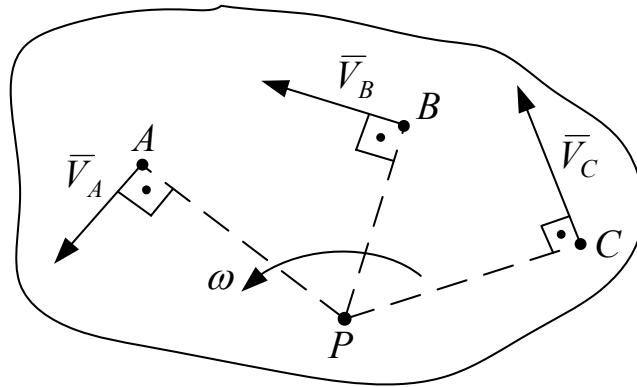
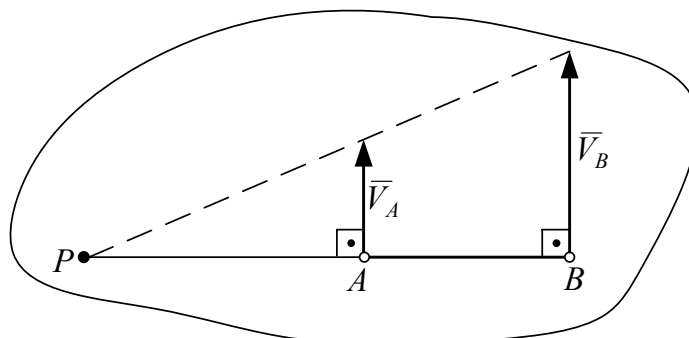


Рис. 3.4

2. Відомі за величиною швидкості двох точок A і B фігури, які паралельні одна одній, напрямлені в один бік і перпендикулярні прямій AB ($\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$) (рис. 3.5).



$$\omega > 0$$

Рис. 3.5

МЦШ (точка P) знаходиться в точці перетину прямої AB і прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей точок A і B :

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}; \quad (V_B \perp AB, \quad V_A \perp AB). \quad (3.8)$$

3. Якщо швидкості двох точок плоскої фігури напрямлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що з'єднує ці точки, то миттєвий центр швидкостей лежить у точці перетину прямої, яка з'єднує кінці векторів швидкостей з наведеним вище відрізком (рис. 3.6).

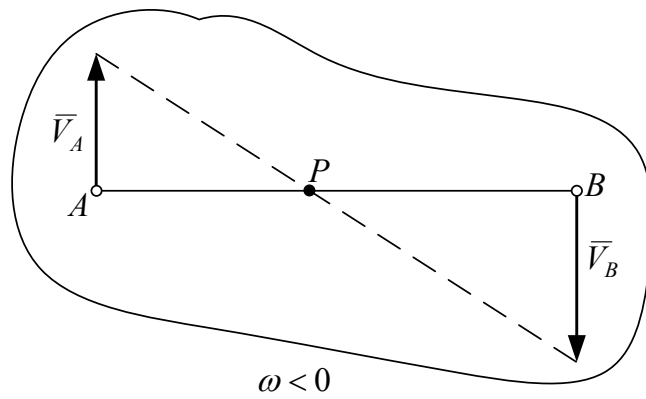


Рис. 3.6

4. Якщо швидкості двох точок плоскої фігури паралельні й рівні між собою, напрямлені в один бік, то миттєвий центр швидкості віддаляється на нескінченну велику відстань, тобто МЦШ відсутній, $\omega = 0$, і миттєві швидкості всіх точок фігури геометрично рівні між собою (рис. 3.7). $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \dots$

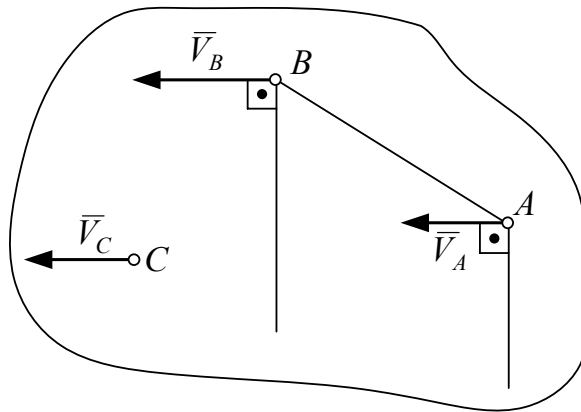


Рис. 3.7

Це випадок миттєво-поступального руху тіла: МЦШ $\rightarrow \infty$; $\omega = \frac{v_A}{\infty} = 0$.

5. У разі кочення без ковзання рухомого контуру плоскої фігури по нерухомому (рис. 3.8) миттєвий центр швидкостей лежить у точці дотику цих контурів. Кутова швидкість $\omega = \frac{v_A}{AP}$, $v_B = \omega \cdot BP$; $v_C = \omega \cdot CP$.

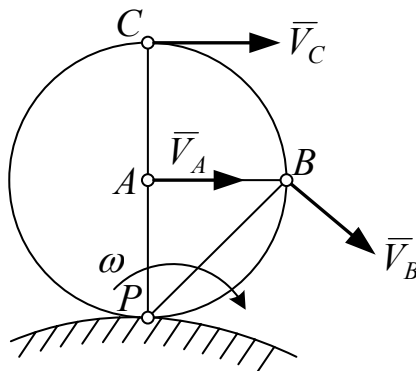
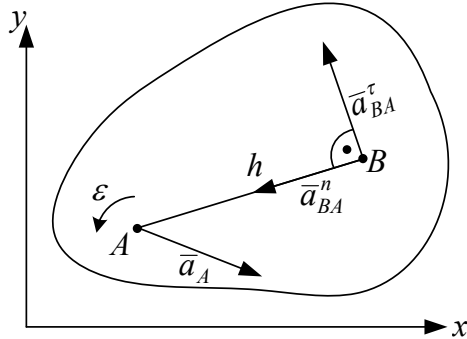


Рис. 3.8

Прискорення точок плоскої фігури

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури геометрично складається з прискорення полюса і прискорення точки в обертальному русі тіла навколо полюса, що складається з доцентрового (нормального) і обертального (тангенціального) прискорень (рис. 3.9).



$$\begin{aligned} \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} & \bar{a}_{BA} &= \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

де $a_{BA}^n = \omega^2 BA$ - спрямовано уздовж АВ від точки В до точки А, $a_{BA}^\tau = |\varepsilon| \cdot h = \varepsilon \cdot l_{BA}$ - завжди спрямоване перпендикулярно до АВ, що з'єднує точку В з полюсом А (рис. 3.10), у бік кутового прискорення ε .

Рис. 3.9

$$a_{BA} = BA \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (3.10)$$

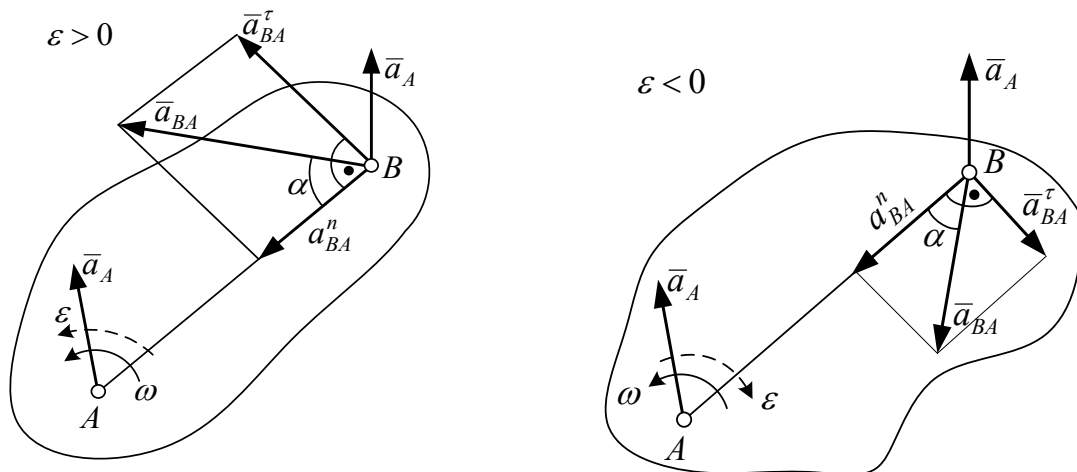


Рис. 3.10

Таким чином, прискорення \bar{a}_B будь-якої точки В плоскої фігури може бути знайдено як геометрична сума трьох прискорень: прискорення полюса \bar{a}_A , доцентрового прискорення \bar{a}_{BA}^n і обертального прискорення \bar{a}_{BA}^τ точки В навколо полюса А.

3.4. Вказівки для розв'язання задач з кінематичного аналізу плоского механізму

1. Послідовно розглянути і визначити рух окремих ланок механізму.
2. Розрахунок почати з ланки, рух якої є заданим. Якщо ланка виконує обертальний рух (у неї є нерухома точка), то для визначення швидкостей і

прискорень використовувати формули обертального руху. Якщо ланка виконує плоскопаралельний рух (немає нерухомої точки), для визначення швидкості й прискорення використати формули плоского руху.

3. Побудувати МЦШ всіх ланок і знайти величини та напрямки швидкостей усіх вказаних точок на механізмі.

4. Визначити модулі й знаки кутових швидкостей усіх ланок.

5. Визначити величини й напрямки прискорень усіх вказаних точок, а також величини і знаки кутових прискорень всіх ланок.

Приклад. Кривошипно-шатульний механізм (рис. 3.11) складається з кривошипа $OA=40$ см, шатуна AB і повзуна B . Точка C належить ланці AB і $AC=20$ см.

У даний момент часу, в даному положенні механізму кутова швидкість кривошипа $\omega_{OA} = 5$ рад/с, кутове прискорення $\varepsilon_{OA} = 10$ рад/с².

Визначити для заданого положення механізму швидкості й прискорення точок A, B, C ланки AB , а також її кутову швидкість ω_{AB} і кутове прискорення ε_{AB} .

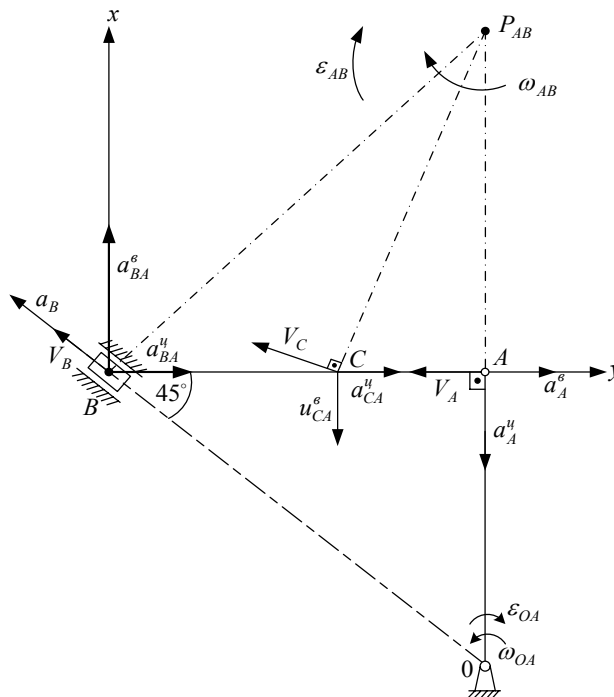


Рис. 3.11

Розв'язання.

1. Ланка OA виконує обертальний рух навколо нерухомої точки O . Тоді

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 40 = 200 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_A \perp OA$ і спрямований у бік обертання OA , у бік обертання ω .

Повзун B виконує поступальний рух, тому напрямки швидкості точки B , яка також належить ланці AB , відомий і спрямований уздовж спрямляючих.

Шатун AB рухається плоскопаралельно з миттєвим центром швидкості в точці P . Точка P є точкою перетину перпендикулярів до напрямку швидкостей у точках A і B .

Кутова швидкість ланки AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{200}{40} = 5 \text{ рад} / \text{с},$$

де $AP=AB=OA$, тому що $\angle BOA = \angle OBA = \angle APB = \angle 45^\circ /$

Кутова швидкість ланки AB спрямована відповідно до того, як вектор \vec{V}_A обертається навколо МЦШ.

Швидкості точок B і C ланки AB :

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 5 \cdot \sqrt{AB^2 + AP^2} = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot AB = 282,8 \text{ см} / \text{с},$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB} = 5 \cdot \sqrt{AP^2 + AC^2} = 5 \cdot \sqrt{40^2 + 20^2} = 223,6 \text{ см} / \text{с}.$$

Відповідно $\vec{V}_B \perp BP_{AB}$, $V_C \perp CP_{AB}$ і спрямовані у бік обертання ω_{AB} .

2. Визнаємо прискорення точок A , B , C ланки AB .

Прискорення точки A , яка разом з ланкою OA виконує обертальний рух, складається з геометричної суми прискорень обертального і доцентрового кривошипу OA :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{об} + \vec{a}_A^{\text{доц}},$$

де $a_A^{\text{доц}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 40 = 1000 \text{ см} / \text{сек}^2$ - доцентрове прискорення точки A , спрямоване уздовж AO від A до O ,

$a_A^{об} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 40 = 400 \text{ см} / \text{сек}^2$ - обертальне прискорення точки A , спрямоване відповідно до напрямку кутового прискорення ε_{OA} і вектор $\vec{a}_A^{об} \perp \vec{a}_A^{\text{доц}}$.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{доц}} + \vec{a}_A^{об}; a_A = \sqrt{1000^2 + 400^2} = 1077 \text{ см} / \text{с}^2.$$

Припустимо, що повзун B рухається прискорено. Тоді напрямок прискорення \vec{a}_B співпадає з напрямком швидкості \vec{V}_B . Визначаємо полюсом точку A .

Прискорення точки B визначається за формулою

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^{\text{доц}} + \vec{a}_A^{об} + \vec{a}_{BA}^{\text{доц}} + \vec{a}_{BA}^{об},$$

де $a_{BA}^{\text{доц}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 5^2 \cdot 40 = 1000 \text{ см} / \text{с}^2$ - доцентрове прискорення точки B відносно точки A , спрямоване від точки B до точки A , уздовж AB

$a_{BA}^{об} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ - обертальне прискорення обертального руху точки B відносно точки A , спрямоване перпендикулярно до AB і $\vec{a}_{BA}^{об} \perp \vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$, відоме за напрямком. При цьому припускаємо, що кутове прискорення ланки AB ε_{AB} співпадає за напрямком обертання з кутовою швидкістю ω_{AB} .

Обираємо систему координат $X B Y$ і проектуємо геометричне рівняння прискорення точки B , \vec{a}_B на осі координат:

$$Y: -a_B \cdot \cos 45^\circ = a_A^{об} + a_{BA}^{\text{доц}},$$

$$X: a_B \cdot \cos 45^\circ = -a_A^{\text{доц}} + a_{BA}^{\text{об}}$$

У цій системі двох алгебраїчних рівнянь є два невідомі прискорення точки В - a_B і прискорення $a_{BA}^{\text{об}}$.

Обчислюємо їх:

$$a_B = -\frac{a_A^{\text{об}} + a_{BA}^{\text{доц}}}{\cos 45^\circ} = -\frac{400 + 1000}{0,707} = -1980 \text{ см} / \text{с}^2,$$

$$a_{BA}^{\text{об}} = a_B \cdot \cos 45^\circ + a_A^{\text{доц}} = -1980 \cdot 0,707 + 1000 = -400 \text{ см} / \text{с}^2.$$

Знак “-” у знайдених відповідях означає, що насправді вектори прискорень \bar{a}_B і $\bar{a}_{BA}^{\text{об}}$ спрямовані у бік, протилежний зазначеному на рисунку, тобто прискорення точки В протилежне напрямку швидкості \bar{V}_B .

Кутове прискорення ланки АВ:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\text{об}}}{AB} = -\frac{400}{40} = -10 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Знак “-” означає, що кутове прискорення ланки АВ - ε_{AB} протилежне кутовій швидкості ω_{AB} за напрямком обертання.

Прискорення точки С ланки АВ визначаємо за цією ж методикою:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^{\text{доц}} + \bar{a}_A^{\text{об}} + \bar{a}_{CA}^{\text{доц}} + \bar{a}_{CA}^{\text{об}}$$

$$a_{CA}^{\text{доц}} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ см} / \text{с}^2 \text{ і напрямлено вздовж } AC \text{ від } C \text{ к } A.$$

$$a_{CA}^{\text{об}} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см} / \text{с}^2 \text{ і спрямоване у бік дійсного}$$

спрямування ε_{AB} таким чином, щоб $\bar{a}_{CA}^{\text{об}} \perp AC$.

Геометричне рівняння з визначення \bar{a}_C проектуємо на осі Y і X:

$$Y: a_{Cy} = a_A^{\text{об}} + a_{BA}^{\text{доц}} = 400 + 500 = 900 \text{ см} / \text{с}^2,$$

$$X: a_{Cx} = a_A^{\text{доц}} + a_{CA}^{\text{об}} = 1000 + 200 = 1200 \text{ см} / \text{с}^2,$$

$\bar{a}_C = \bar{a}_{Cy} + \bar{a}_{Cx}$ - діагональ прямокутника, побудованого на складових $\bar{a}_{Cx} + \bar{a}_{By}$.

$$a_C = \sqrt{a_{Cy}^2 + a_{Cx}^2} = \sqrt{900^2 + 1200^2} = 1500 \text{ см} / \text{с}^2.$$

Відповідь:

$$V_A = 200 \frac{\text{см}}{\text{с}} \quad a_A = 1077 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \omega_{AB} = 5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$V_B = 282,8 \frac{\text{см}}{\text{с}} \quad a_B = 1980 \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

$$V_C = 223,6 \frac{\text{см}}{\text{с}} \quad a_C = 1500 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_{AB} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}.$$

3.5. Завдання 3. Кінематика. Кінематичний аналіз плоского механізму

Визначити для заданого положення механізму швидкість і прискорення точки В, а також кутову швидкість і кутове прискорення ланки, до якої належить точка В. Схеми механізмів наведені на рис. 3.12, 3.13, 3.14, а необхідні для розрахунку розміри і кінематичні параметри подані нижче в таблиці 3.1, де ω_{OA} , ϵ_{OA} - кутова швидкість і кутове прискорення кривошипа OA для заданого положення механізму; ω_1 - кутова швидкість колеса I (стала); V_A , a_A - швидкість і прискорення точки А. Кочення коліс відбувається без ковзання.

Таблиця 3.1 – Дані для розрахунку

| Номер варіанта | Розміри, см | | | | ω_{OA} , рад/с | ω_1 , рад/с | ϵ_{AO} , рад/с ² | V_A , см/с | a_A , см/с ² |
|----------------|-------------|----|----|----|-----------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------|---------------------------|
| | OA | r | AB | AC | | | | | |
| 1 | 40 | 15 | - | 8 | 2 | - | 2 | - | - |
| 2 | 30 | 15 | - | 8 | 3 | - | 2 | - | - |
| 3 | - | 50 | - | - | - | - | - | 50 | 100 |
| 4 | 35 | - | - | 45 | 4 | - | 8 | - | - |
| 5 | 25 | - | - | 20 | 1 | - | 1 | - | - |
| 6 | 40 | 15 | - | 6 | 1 | 1 | 0 | - | - |
| 7 | 5 | - | 75 | 60 | 5 | - | 10 | - | - |
| 8 | - | - | 20 | 10 | - | - | - | 40 | 20 |
| 9 | - | - | 45 | 30 | - | - | - | 20 | 10 |
| 10 | 25 | - | 80 | 20 | 1 | - | 2 | - | - |
| 11 | - | - | 30 | 15 | - | - | - | 10 | 0 |
| 12 | - | - | 30 | 20 | - | - | - | 20 | 20 |
| 13 | 25 | - | 55 | 40 | 2 | - | 4 | - | - |
| 14 | 45 | 15 | - | 8 | 3 | 12 | 0 | - | - |
| 15 | 50 | 20 | - | 12 | 1 | - | 2 | - | - |
| 16 | 55 | 20 | - | - | 2 | - | 5 | - | - |
| 17 | - | 30 | - | 10 | - | - | - | 80 | 50 |
| 18 | 10 | - | 10 | 5 | 2 | - | 6 | - | - |
| 19 | 20 | 15 | - | 10 | 1 | 2,5 | 0 | - | - |
| 20 | - | - | 20 | 6 | - | - | - | 10 | 15 |
| 21 | 30 | - | 60 | 15 | 3 | - | 8 | - | - |
| 22 | 35 | - | 60 | 40 | 4 | - | 10 | - | - |
| 23 | - | - | 60 | 20 | - | - | - | 5 | 10 |
| 24 | 25 | - | 35 | 15 | 2 | - | 3 | - | - |
| 25 | 20 | - | 70 | 20 | 1 | - | 2 | - | - |
| 26 | 20 | 15 | - | 10 | 2 | 1,2 | 0 | - | - |
| 27 | - | 15 | - | 5 | - | - | - | 60 | 30 |
| 28 | 20 | - | 50 | 25 | 1 | - | 1 | - | - |
| 29 | 12 | - | 35 | 15 | 4 | - | 6 | - | - |

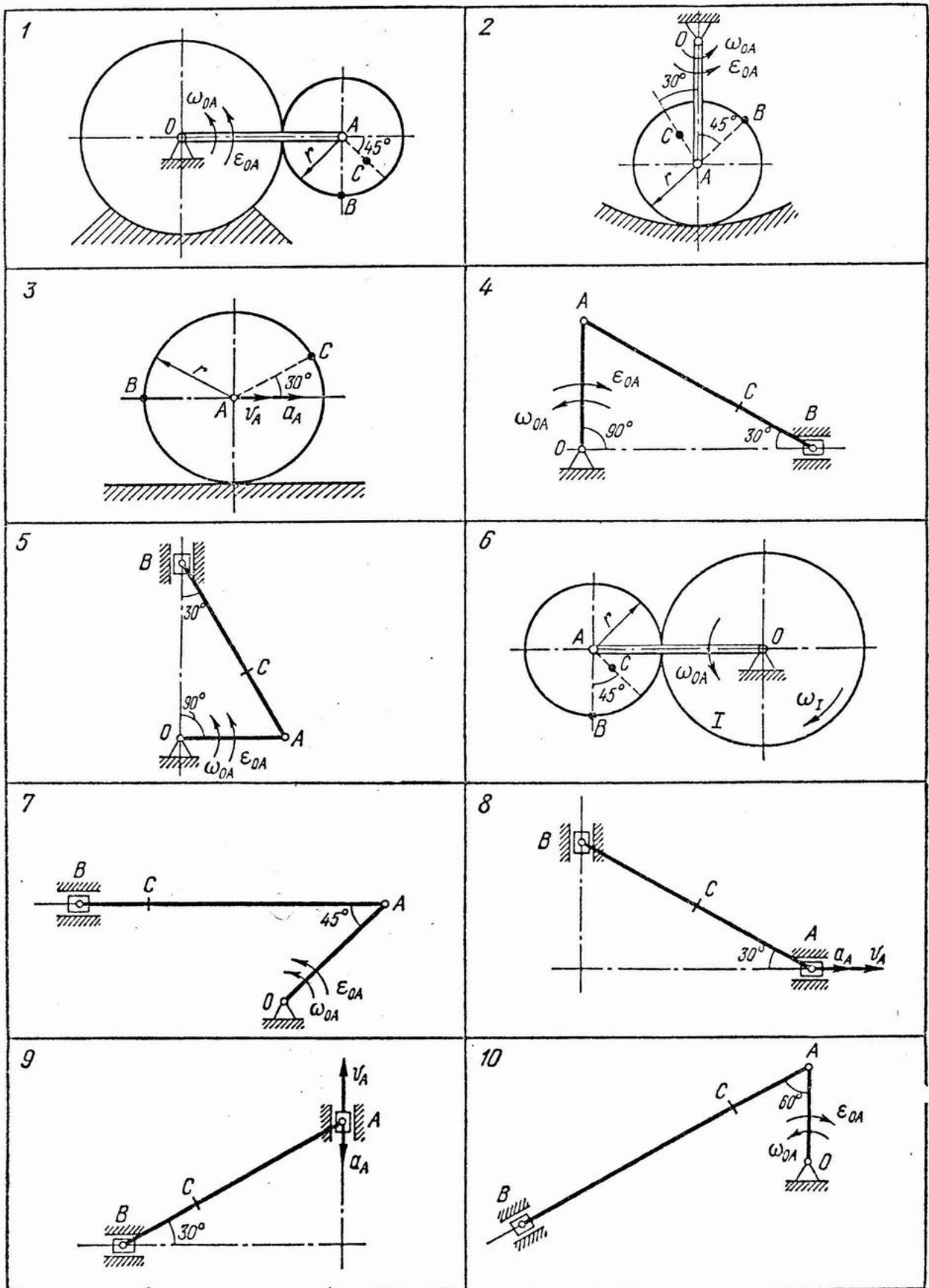


Рис. 3.12

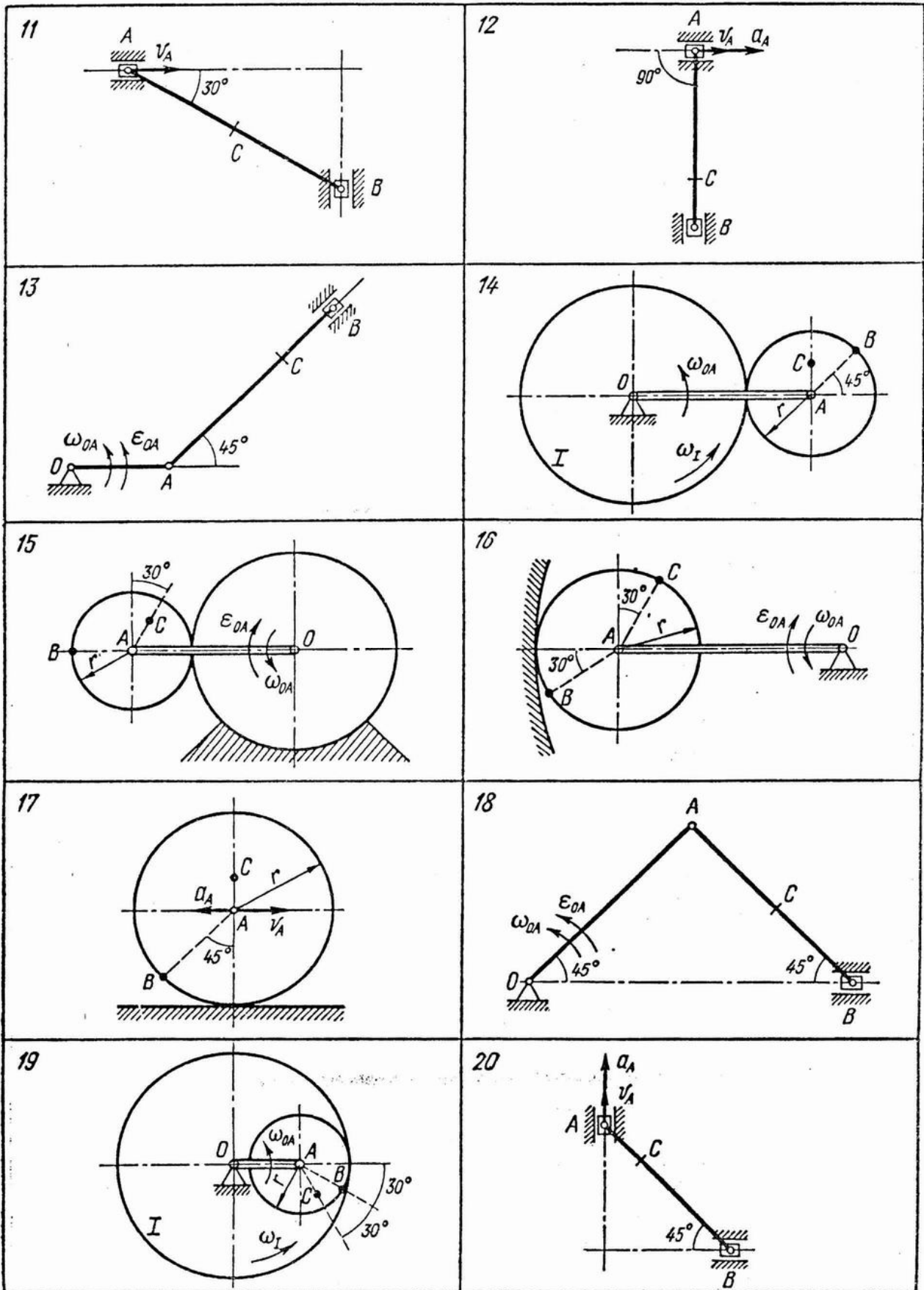


Рис. 3.13

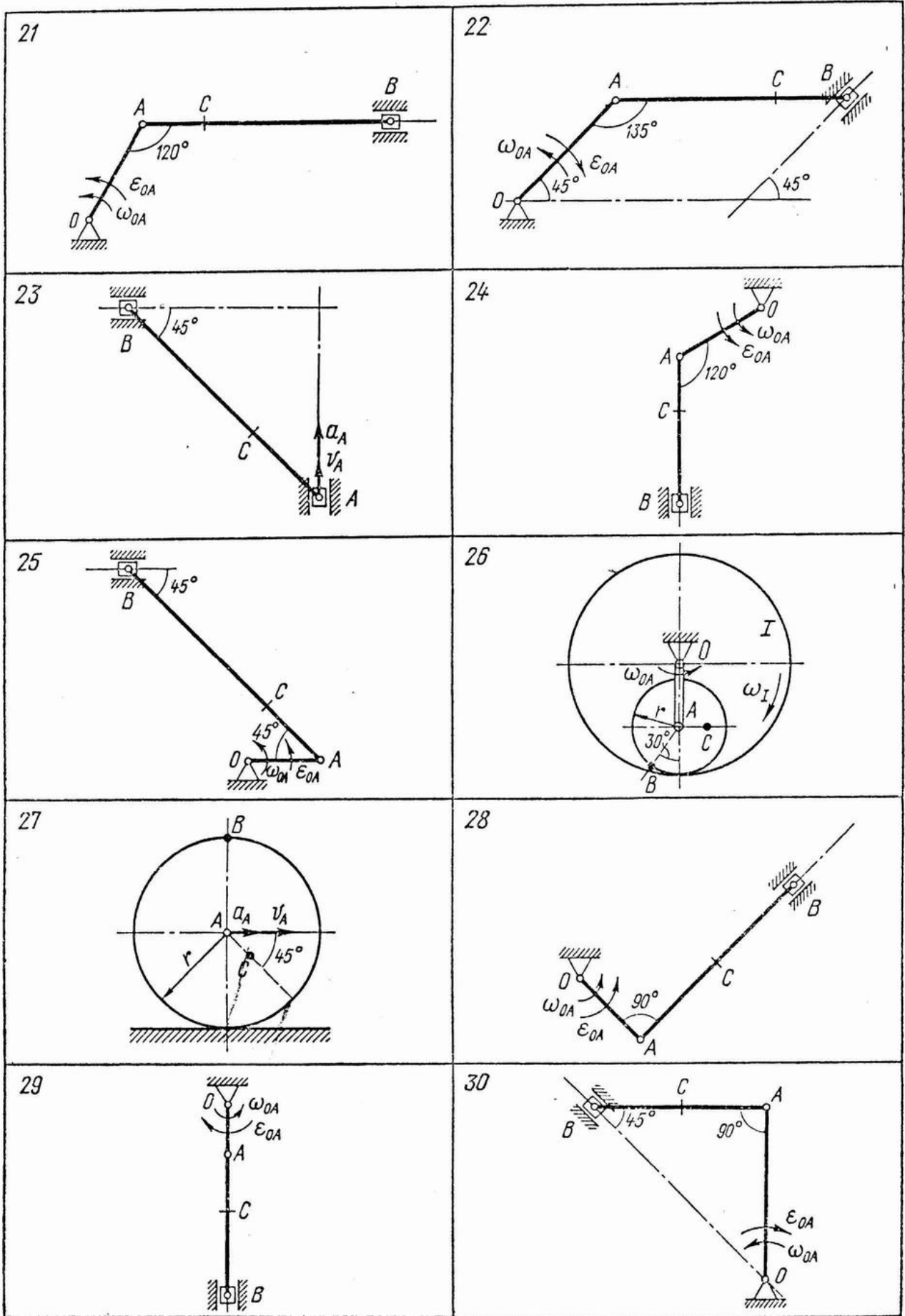


Рис. 3.14

4. ВКАЗІВКИ ДО ЗАВДАННЯ 4. ДИНАМІКА

Динаміка - розділ механіки, в якому визначається механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок, твердого тіла під дією прикладених до них сил.

Рух матеріальної точки з геометричної точки зору розглядається у кінематиці. У динаміці, на відміну від кінематики, при вивченні руху тіл беруть до уваги як діючі на них сили, так і інертність самих матеріальних тіл.

Основні поняття – сила, інертність, маса, матеріальна точка. Основні види сил: сила тяжіння ($\bar{P} = m \cdot \bar{g}$, або $m = P/g$); сила тертя ($\bar{F} = f \cdot \bar{N}$); сила пружності ($\bar{F} = c \cdot x$, де c - коефіцієнт жорсткості [H / M]); сила в'язкого тертя ($\bar{R} = \mu \cdot \bar{V}$), сили аеродинамічного (гідродинамічного) опору, інертна й гравітаційна маси. Одиницею виміру сили є Н (Ньютон)- це сила, яка надає масі в 1 кілограм прискорення в $1m/c^2$. $\left(1H = 1 \frac{kg \cdot m}{c^2}\right)$. Незалежним первинним

поняттям є маса. Під масою розуміють інертність тіла. З іншого боку, масу можна визначити як кількість речовин в тілі, що пропорційна його вазі ("гравітаційна маса"). Приймається, що маса не змінюється за часом, її величина не залежить ні від швидкості точки, ні від її положення у просторі.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки)

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку. Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий з нею напрям:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F} \quad (4.1)$$

4.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки отримують шляхом проектування векторного рівняння $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ на координатні осі :

а) В декартовій системі координат:

$$m \cdot a_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} ; \quad m \cdot a_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} ; \quad m \cdot a_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} , \quad (4.2)$$

$$\text{або} \quad m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} ;$$

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy} ;$$

$$m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz} ,$$

де m - маса точки, $\ddot{x} = a_x$; $\ddot{y} = a_y$; $\ddot{z} = a_z$ - проекції прискорення точки на

вісі, $\sum_{i=1}^n F_{ix}$, $\sum_{i=1}^n F_{iy}$, $\sum_{i=1}^n F_{iz}$ - алгебраїчні суми проекцій на координатні осі сил, що

діють на точку.

Ці рівняння називаються динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі.

Якщо точка рухається в площині, то її рух описується першими двома рівняннями, а якщо по прямій, то тільки одним з них (при цьому вісь слід спрямувати за рухом точки).

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки дозволяють вирішити дві основні задачі динаміки.

Перша, або пряма основна задача динаміки: знаючи закон руху точки і її масу, визначити сили, що викликають цей рух.

Друга, або обернена задача динаміки: визначити кінематичні рівняння руху точки, якщо відомі її маса m , прикладені до неї сили \vec{F} і початкові умови руху. Розв'язання другої задачі динаміки зводиться до інтегрування диференційних рівнянь руху матеріальної точки. Праві частини цих рівнянь відомі. Тому спочатку знаходять проекції сил \vec{F} на осі координат (F_x, F_y, F_z) , потім інтегрують системи диференційних рівнянь руху матеріальної точки.

Загальний розв'язок цієї системи визначає координати точки як функції часу t і шість сталих інтегрування $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$;

$$\begin{aligned}x &= f_1(t, C_1, \dots, C_6), \\y &= f_2(t, C_1, \dots, C_6), \\z &= f_3(t, C_1, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Сталі інтегрування визначають з початкових умов.

Початкові умови – це шість величин, що визначають положення точки і проекції вектора швидкості в початковий момент часу ($t=t_0$);

$$\begin{aligned}x(t_0) = x_0 : \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = V_{ox} \\y(t_0) = y_0 : \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 = V_{oy} \\z(t_0) = z_0 : \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 = V_{oz}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Підставивши знайдені значення сталих інтегрування у загальний розв'язок системи диференційних рівнянь, одержують закон руху точки:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Отже, розв'язання другої, оберненої задачі динаміки складається з операцій:

1. Складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовами задачі.
2. Інтегрування одержаної системи диференційних рівнянь.
3. Визначення значень сталих інтегрування.
4. Знаходження закону руху.

Методику розв'язання другої основної задачі динаміки застосовують при вирішенні задач про прямолінійні коливання матеріальної точки. Аксиома про звільнення від в'язів дає змогу задачу про рух невільної матеріальної точки вважати рухом вільної матеріальної точки, якщо дію в'язів замінити відповідними силами – реакціями в'язей.

4.2. Прямолінійні коливання матеріальної точки

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються механічними коливаннями. На матеріальну точку можуть діяти поновлююча сила, яка намагається повернути точку в положення рівноваги, сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, і збурююча сила, задана функцією часу.

Залежно від комбінації цих сил розглянемо три види коливального руху матеріальної точки: вільні коливання під дією тільки лінійної поновлюючої сили, згасаючі коливання під дією поновлюючої сили й сили опору, що залежить від швидкості, й вимушені коливання під дією поновлюючої сили і збурюючої сили, яка змінюється за гармонійним законом.

Вільними (власними) коливаннями матеріальної точки називають її коливання під дією сил, зумовлених початковими умовами: відхилення точки від положення рівноваги або надання їй початкових швидкостей.

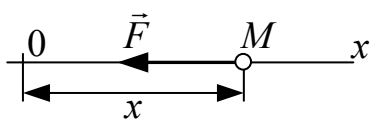


Рис. 4.1

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки M масою m під дією тільки сили \vec{F} , спрямованої до нерухомого центра O і пропорційної відстані точки M від центра O : $F = -cX$ (лінійна залежність) (рис. 4.1).

Сила \vec{F} намагається повернути точку M у положення рівноваги O , де $\vec{F} = 0$, тому сила \vec{F} називається поновлюючою силою. Прикладом такої сили є сила пружності пружини.

Визначимо закон руху точки M , тобто закон зміни координати x за часом. Запишемо диференціальне рівняння руху точки за часом у проекції на вісь x :

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{x} = -cx, \quad \text{або} \quad \ddot{x} = -\frac{c}{m}x,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0; \quad \ddot{x} + k^2x = 0,$$

де $k^2 = \frac{c}{m}$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - колова (власна) частота коливань матеріальної точки

масою m , вимірюється в рад/с; c - коефіцієнт жорсткості (пружності) пружини, що чисельно дорівнює силі, яку необхідно докласти до пружини, щоб змінити її довжину на одиницю (вимірюється в н/м).

Закон коливань точки M має вигляд (рішення диференціального рівняння коливань):

$$x = A \cos kt + B \sin kt, \quad \dot{x} = -A \cdot k \sin kt + B_2 \cdot k \cdot \cos kt, \quad (4.5)$$

де A і B - постійні інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Початкові умови: при $t=0$; $x=x_0$; $\dot{X} = V_0$.

Враховуючі початкові умови, маємо: $x_0 = A$; $\frac{\dot{x}_0}{k} = B$.

Остаточно закон коливань точки M має вигляд

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (4.6)$$

Розглянутий прямолінійний рух матеріальної точки M масою m під дією сили \vec{F} , величина якої пропорційна відхиленню точки від положення статичної рівноваги, є гармонійний коливальний рух з власною коловою частотою

$$K = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ періоди } T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}.$$

Період коливань T – проміжок часу між двома послідовними проходженнями точки через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку.

Колова частота власних коливань K і їх період T не залежать від початкових умов і амплітуди коливань a . Коли одночасно початкові умови дорівнюють нулю ($x_0 = 0, \dot{x} = 0$), то $x=0$, тобто вільні(власні) коливання не виникають (рис. 4.2).

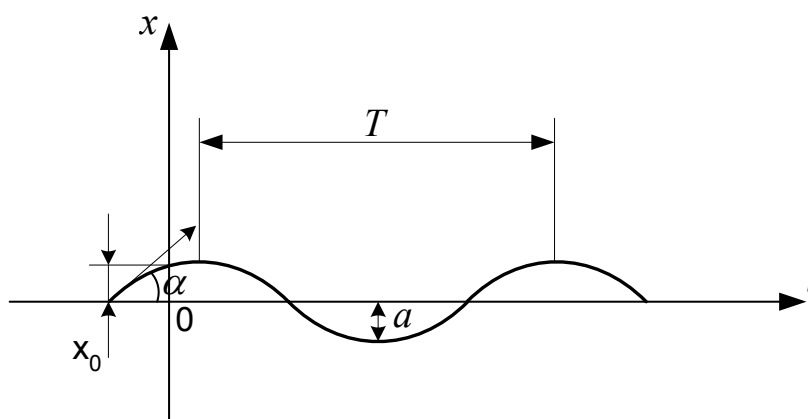


Рис. 4.2

Згасаючі коливання

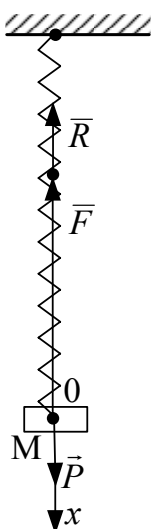


Рис. 4.3

Матеріальна точка M (вантаж масою m) рухається під дією сили тяжіння у в'язкому середовищі (рідина або газ), при русі в якій виникає сила опору, пропорційна першому ступеню швидкості.

Таку силу опору називають силою в'язкого тертя:

$$\vec{R} = -\mu\vec{V} \text{ (знак “-” показує, що сила } \vec{R} \text{ спрямована протилежно } \vec{V} \text{).}$$

Таким чином, на точку M при русі діють поновлююча сила \vec{F} і сила опору \vec{R} (рис 4.3).

Диференціальне рівняння руху точки (вантажу) має вигляд

$$m\ddot{x} = P - F - R,$$

$$\text{або } m\ddot{x} = mg - c(f_{\text{ст}} + x) - \mu\dot{x},$$

$$\text{або } m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0,$$

$$\text{або } \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - частота власних коливань (колова);

$n = \frac{\mu}{2m}$ - відносний коефіцієнт демпфірування, що має розмірність колової частоти k коливань ($[n] = \text{рад/с}$).

Закон коливання вантажу (рішення диференційного рівняння) залежить від співвідношення параметрів k і n .

1. Закон коливання вантажу у випадку малого опору $n < k$ має вигляд

$$x = e^{-nt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t),$$

$$\text{або } x = ae^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \alpha), \quad (4.8)$$

де постійні інтегрування визначаються, як і раніше, з початкових умов,

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ - частота згасаючих коливань,

$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 \cdot n + V_0)^2}{k_1^2}}$ - максимальне відхилення точки від положення

рівноваги,

Коливання, які відбуваються за цим законом, називаються згасаючими, тому що величина x за перебігом часу, завдяки множнику e^{-nt} , зменшується, прямуючи до нуля (рис. 4.4).

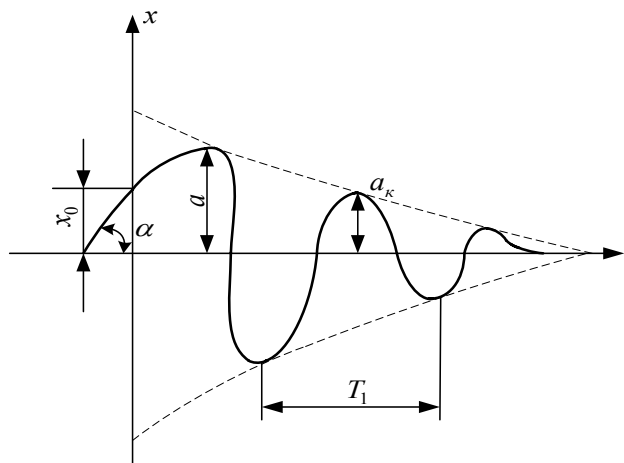


Рис. 4.4

Періодом згасаючих коливань T_1 називають проміжок часу між двома послідовними проходженнями точки через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Звідси видно, що період згасаючих коливань більший за період власних коливань $T_1 > T$. Опір середовища, що пропорційний швидкості в першому

ступені, збільшує період коливань.

Співвідношення $\frac{a_K}{a} = e^{-n \cdot T_1}$ називають декрементом загасання, або фактором загасання.

Амплітуда згасаючих коливань спадає за геометричною прогресією.

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім поновлюючої сили \bar{F} , діє збуджуюча сила \bar{Q} , яка змінюється за гармонічним законом, тобто $Q = H \cdot \sin pt$, де H – максимальне значення збуджуючої сили, p – колова частота збуджуючої сили (рис. 4.5).

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки M (вантаж) має вигляд

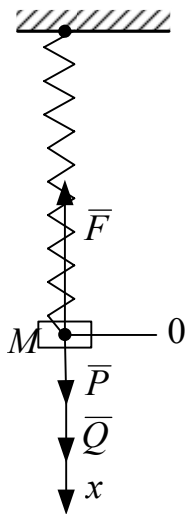


Рис. 4.5

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{Q},$$

або в проекції на вісь x :

$$m \ddot{x} = mg - c(f_{ce} + x) + H \sin pt,$$

або після ділення на m : $\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt$,

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m}; \quad h = \frac{H}{m}$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференційного рівняння складається з двох розв'язків (рис. 4.6):

$$x = x_1 + x_2$$

де $x_1 = A \cdot \cos kt + B \sin kt$ - загальний розв'язок однорідного рівняння,

x_2 - частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

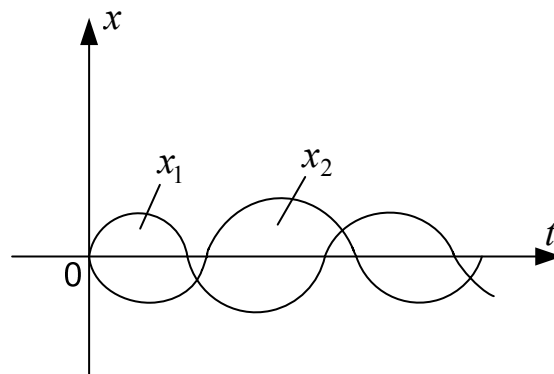


Рис. 4.6

При визначенні частинного розв'язку розглянемо випадок:

$$k \neq p.$$

Частота вільних коливань не дорівнює частоті збуджуючої сили ($k \neq p$).

$$\text{У цьому випадку } x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt.$$

Тоді закон коливання вантажу

$$x = x_1 + x_2 = A \cos kt + B \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt, \quad (4.9)$$

де A, B - постійні інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Закон коливання свідчить, що коливання складається в цьому випадку з коливання з амплітудою, залежною від початкових умов і власною частотою k , і коливання з амплітудою $\frac{h}{k^2 - p^2}$ (не залежною від початкових умов) і частотою p , які називаються змушеними коливаннями.

При $p \gg k$ амплітуда $\frac{h}{k^2 - p^2} \rightarrow 0$.

Змушені коливання, частота яких $p <$ частоти k вільних коливань, називаються змушеними коливаннями малої частоти ($p < k$) і

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt.$$

Фаза коливань pt співпадає з фазою збудуючої сили \bar{Q} .

Змушені коливання, частота яких $p >$ частоти k вільних коливань, називаються змушеними коливаннями великої частоти $P > k$ і

$$x_2 = \frac{h}{p^2 - k^2} \cdot \sin \cdot (pt - \pi).$$

У цьому випадку амплітуда вимушених коливань дорівнює $\frac{h}{p^2 - k^2}$, а фаза $(pt - \pi)$ відрізняється від фази збудуючої сили pt на π , тобто фази змушених коливань і збудуючої сили протилежні.

Якщо частота вільних коливань дорівнює частоті збудуючої сили ($p = k$), характер коливань якісно змінюється і виникає резонанс (рис.4.7).

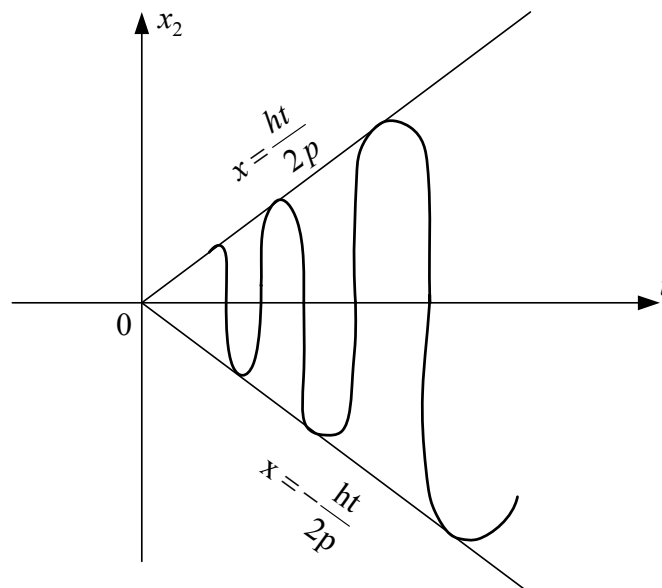


Рис. 4.7

Частинний розв'язок неоднорідного диференціювання має вигляд

$$x_2 = -\frac{h \cdot t}{2 \cdot p} \cdot \cos pt$$

Амплітуда змущених коливань x_2 , що визначається як $-\frac{h \cdot t}{2p}$, збільшується прямо пропорційно часу і при $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає (рис.4.7).

У разі ненульових початкових умов загальний розв'язок неоднорідного диференційного рівняння має вигляд:

$$x = x_1 + x_2 = A \cdot \cos kt + B \sin kt - \frac{h \cdot t}{2p} \cos pt. \quad (4.10)$$

В індивідуальних завданнях для контрольних робіт на дослідження коливального руху матеріальної точки, які наводяться нижче, збудження коливань вантажу здійснює основа в точці A_0 прикріплення до нього вільного кінця, що рухається за законом $\xi = v \cdot \sin pt$.

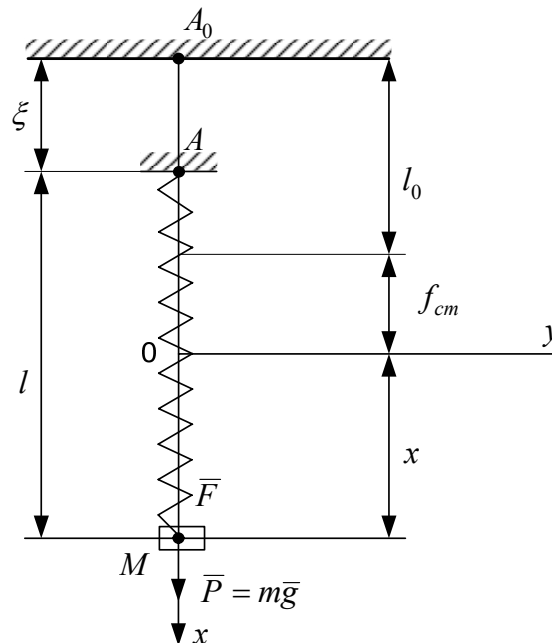


Рис. 4.8

Розглянемо коливання вантажу масою m на пружині жорсткістю c , прикріпленій до основи в точці A , яка починає здійснювати рух уздовж осі ox за законом $\xi = v \cdot \sin pt$. (рис. 4.8). На точку M (вантаж вагою $\bar{P} = m\bar{g}$) діє сила пружності пружини \bar{F} і сили ваги $\bar{P} = m\bar{g}$. Точка O - це початок осі ox положення статичної рівноваги, де сила \bar{P} і \bar{F} врівноважені: $(P=F, mg=c f_{cm})$. Якщо l_0 - довжина пружини в недеформованому стані, то її довжина у будь-якій момент часу $l = l_0 - \xi + f_{CT} + x$, а повна деформація $\Delta = l - l_0 = f_{CT} + x - \xi$.

Тоді діюча на вантаж сила пружності $F = \Delta \cdot c = c(f_{CT} + x - \xi)$.

Диференційне рівняння руху вантажу в проекції на вісь ox має вигляд

$$m \ddot{x} = P - F = mg - c(f_{CT} + x - \xi),$$

$$\text{або } m \ddot{x} = -c(x - \xi) = -cx + c \cdot v \cdot \sin pt,$$

$$\text{або } m \ddot{x} + cx = c \cdot v \cdot \sin pt,$$

$$\text{або } \ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sin pt, \quad (4.11)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m}; \quad h = \frac{c \cdot v}{m}.$$

Отже, вантаж здійснює вимушені коливання і закон коливання залежатиме від співвідношення k і p .

При виконанні завдання на дослідження коливального руху студентам зручно користуватися таблицею 4.1.

Таблиця 4.1 – Прямолінійні гармонійні коливання матеріальної точки

| Вид коливання | Вільні | Згасаючі | | |
|--|---|---|-----------------------------------|--|
| Діючі сили | $F = -cx$ | $F = -cx; R = -m \dot{x}$ | | |
| Диференціальне рівняння руху | $m \ddot{x} = -cx$ $m \ddot{x} + cx = 0$ $\ddot{x} + k^2 x = 0$ $k^2 = \frac{c}{m}$ | $m \ddot{x} = -cx - \mu \dot{x}$ $m \ddot{x} + \mu \dot{x} + cx = 0$ $\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = 0$ $k^2 = \frac{c}{m}; \quad 2n = \frac{\mu}{m}$ | | |
| Розв'язок диференціального рівняння закон руху | $x = A \cos kt + B \sin kt$ $x = a \sin(kt + \alpha)$ | $n < k$ $x = e^{-nt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t)$ $x = a \cdot e^{-nt} (\sin k_1 t + \alpha)$ | $n = k$ $x = e^{-nt} (At + B)$ | $n > k$ $x = A \cdot e^{-(n-k_2)t} + B \cdot e^{-(n+k_2)t}$ |
| Параметри руху | $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - власна частота $T = \frac{2\pi}{k}$ період $a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}$ - амплітуда $\alpha = \arctg \frac{x_0 \cdot k}{V_0}$ - початкова фаза | $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ - частота згасаючих коливань $T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{k_1}$ - період згасаючих коливань $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 \cdot n + V_0)^2}{k_1^2}}$ - амплітуда згасаючих коливань $\alpha = \arctg \frac{x_0 \cdot k_1}{x_0 \cdot n + V_0}$ - початкова фаза | Згасаючий аперіодичний рух | $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$ Згасаючий аперіодичний рух |

| Вид коливання | Вимушені | |
|--|---|--|
| Діючі сили | $F = -cx; Q = c \cdot v \cdot \sin pt$ | |
| Диференційне рівняння руху | $m \ddot{x} = -cx + c \cdot v \cdot \sin \cdot p \cdot t$ $m \ddot{x} + cx = c \cdot v \cdot \sin \cdot p \cdot t$ $\ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sin \cdot p \cdot t$ $k^2 = \frac{c}{m}; \quad h = \frac{c \cdot v}{m}$ | |
| Розв'язок диференційного рівняння закон руху | $k \neq p$ $x = x_1 + x_2$ $x_1 = A \cdot \cos \cdot k \cdot t + B \cdot \sin kt$ $p < k$ $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin \cdot p \cdot t$ $p > k$ $x_2 = \frac{h}{p^2 - k^2} \cdot \sin(pt - \pi)$ | $p = k$, резонанс $x_1 = A \cdot \cos kt + B \cdot \sin kt$ $x_2 = -\frac{h \cdot t}{2p} \cdot \cos \cdot pt$ |
| Параметри руху | $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - власна частота змушених коливань p - колова частота змушених коливань, $T = \frac{2\pi}{k}$ - період власних коливань, $T_B = \frac{2\pi}{p}$ - період вимушених коливань. | |

4.3. Методика розв'язання задач по дослідженню коливального руху матеріальної точки

1. У наведених для завдання схемах пружини, які з'єднують вантаж з основою, можуть бути з'єднань паралельно, змішано й послідовно. Тому ці схеми необхідно звести до розрахункової схеми з однією пружиною, яка має еквівалентну жорсткість c , як це показано на рис. 4.9.

2. Обрати систему відліку, за початок координат узявши точку статичної рівноваги вантажу ($c \cdot f_{CT} = m \cdot g$).

3. Вісь x спрямувати за напрямком руху вантажу.
4. Зобразити вантаж у проміжному положенні й діючі на нього сили.
5. Визначити початкові умови руху вантажу.
6. Записати диференційне рівняння руху вантажу в проекції на вісь.
7. Записати розв'язок диференційного рівняння руху вантажу.

8. Використавши початкові умови, визначити постійні інтегрування закону руху вантажу.

9. Визначити параметри коливання.

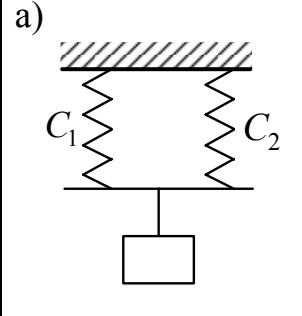
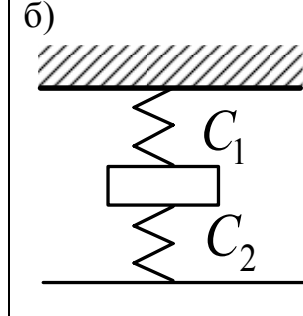
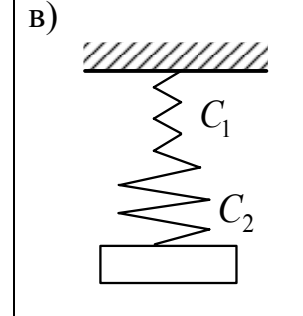
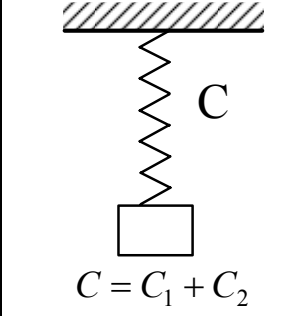
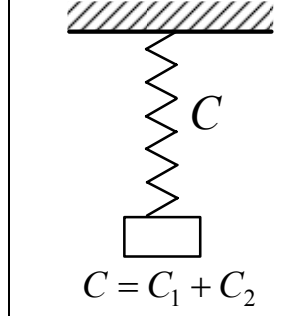
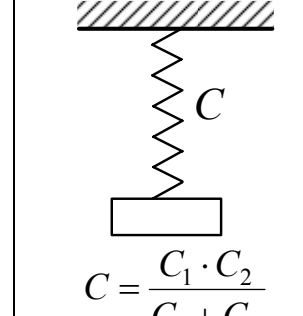
| | | | |
|--------------------|--|---|--|
| Задані схеми | а)  | б)  | в)  |
| Еквівалентні схеми |  $C = C_1 + C_2$ |  $C = C_1 + C_2$ |  $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ |

Рис. 4.9

Порядок виконання завдання 4 за методикою наведені на прикладі.

Приклад

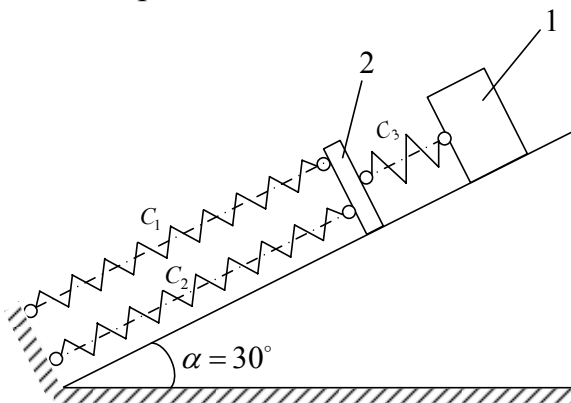


Рис. 4.10

Дві паралельні пружини (рис.4.10), коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = 4 \text{ Н/см}$, $c_2 = 6 \text{ Н/см}$, з'єднані з жорсткою плитою 2, до якої прикріплена пружина 3 з коефіцієнтом жорсткості $c_3 = 15 \text{ Н/см}$.

Вантаж 1 масою $m = 1,6 \text{ кг}$ з'єднується з кінцем третьої пружини і зміщується вниз з положення статичної рівноваги на величину $\lambda = 0,1 \text{ м}$.

Одночасно вантажу додають початкову швидкість $V_0 = 2 \text{ м/с}$, спрямовану вниз по нахиленій площині. У той же момент часу вантаж починає здійснювати рух уздовж похиленої площини ($\alpha = 30^\circ$) за законом $\xi = 0,25 \cdot \sin \cdot 10 \rho \text{ м}$.

Нехтуючи масою пружин, плити і силами опору, визначити рівняння коливального руху вантажу та його параметри.

Розв'язання

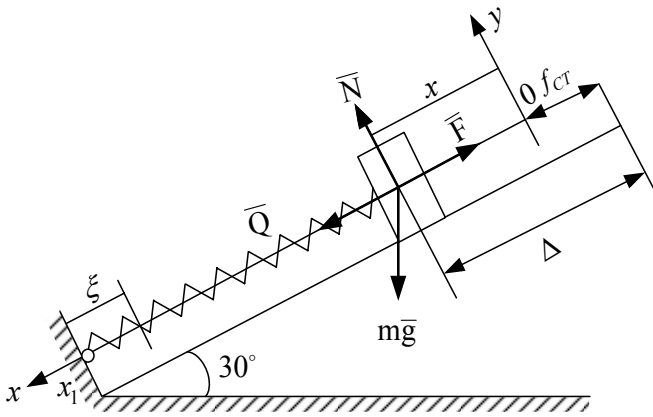


Рис. 4.11

Пружини з жорсткістю $c_{1,2}$ і c_3 з'єднані послідовно, тому

$$c = c_{1,2,3} = \frac{1000 \cdot 1500}{1000 + 1500} = 600 \text{ Н/м} - \text{ коефіцієнт еквівалентної жорсткості}$$

розрахункової пружини.

Розміщуємо початок координат в положенні статичної рівноваги вантажу, вісь x спрямовуємо вниз уздовж нахиленої площини.

Розміщуємо вантаж у проміжному положенні і зображуємо діючі на нього сили.

На вантаж діють сила ваги вантажу $\bar{P} = m \cdot \bar{g}$, сила опору пружини \bar{F} , нормальна реакція гладенької площини \bar{N} і збурююча сила $\theta = c \cdot \xi = c \cdot v \cdot \sin pt = 600 \cdot 0,25 \cdot \sin 10t = 150 \cdot \sin 10t$.

Сила пружності розрахункової пружини $F = c \cdot \Delta = c \cdot (x + f_{СТ})$,

де $\Delta = x + f_{СТ}$ - деформація розрахункової пружини,

$f_{СТ}$ - статична деформація пружини під дією тільки сили ваги вантажу P .

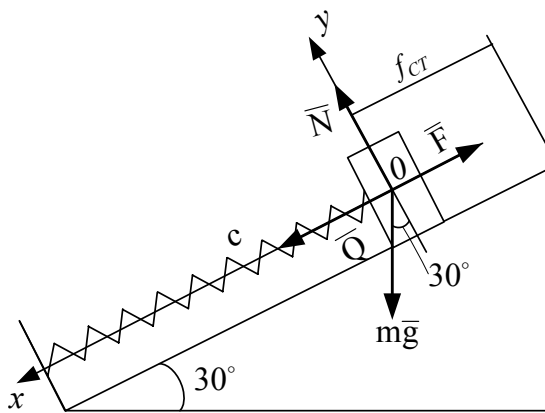


Рис. 4.12

Здану систему пружин перетворимо на розрахункову з однією пружиною, коефіцієнт жорсткості якої визначається за формулою

$$c = \frac{c_{1,2} \cdot c_3}{c_{1,2} + c_3},$$

де $c_{1,2}$ - еквівалентна жорсткість пружин 1 і 2, з'єднаних паралельно (рис. 8.20):

$$c_{1,2} = c_1 + c_2 = 400 + 600 = 1000 \text{ Н/м}$$

Статичну деформацію пружини $f_{СТ}$ визначаємо з рівняння статичної рівноваги вантажу в проекції на вісь x (рис. 4.12), вважаючи, що вантаж на початку координат перебуває в спокої:

$$\sum F_{ix} = 0, \text{ або } P \cdot \sin 30 - F = 0, \\ \text{ або } mg \cdot \sin 30 - F = 0.$$

У положенні статичної рівноваги $F = c \cdot f_{СТ}$ (рис 4.12), тому

$$m \cdot g \cdot \sin 30^{\circ} = c \cdot f_{CT} \quad \text{і} \quad f_{CT} = \frac{mg \cdot \sin 30^{\circ}}{c}.$$

Визначаємо початкові умови руху. За умовами задачі при $t = 0$

$$x = x_0 = \lambda = 0,1 \text{ м.}$$

$$\dot{x} = V_0 = 2 \text{ м/сек.}$$

Вантаж рухається під дією сили ваги вантажу, сили пружності й збурюючої сили \bar{Q} .

Диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь x

$$m \cdot \ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = mg \cdot \sin 30^{\circ} - F - Q,$$

$$\text{або} \quad m\ddot{x} = mg \cdot \sin 30^{\circ} - c \cdot \left(x + \frac{mg \cdot \sin 30^{\circ}}{c} \right) + c \cdot v \cdot \sin pt,$$

$$\text{або} \quad m\ddot{x} + cx = c \cdot v \cdot \sin pt$$

Поділивши на m диференціальне рівняння, маємо

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = h \cdot \sin pt,$$

$$\text{де} \quad \kappa^2 = \frac{c}{m}; \quad h = \frac{c \cdot v}{m} = \frac{600 \cdot 0,25}{1,5} = 100 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Вирішення цього диференціального рівняння (закон руху вантажу) залежить від співвідношення κ і p . Обчислюємо їх: $\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{600}{1,5}} = 20 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ -

власна колова частота коливань, $p = 10 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ за умовами прикладу, частота збурюючої сили.

Вирішення диференціального рівняння (закон коливання вантажу) у випадку коли $\kappa > p$, має вигляд:

$$x = A \cdot \cos kt + B \cdot \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt.$$

Постійні інтегрування A і B знаходимо з початкових умов. З першої умови визначаємо A :

$$x = x_0 = A = 0,1.$$

Для визначення постійного інтегрування B спочатку диференціюємо за часом закон коливання вантажу в будь-який момент часу:

$$\dot{x} = -\kappa \cdot A \cdot \sin kt + \kappa B \cos kt + \frac{h \cdot p}{k^2 - p^2} \cdot \cos pt.$$

На момент часу $t=0$ $\dot{x}_0 = V_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$

$$V_0 = B \cdot \kappa + \frac{h \cdot p}{k^2 - p^2} \quad \rightarrow \quad B = \frac{V_0}{\kappa} - \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \frac{p}{\kappa} = \frac{2}{20} - \frac{100}{20^2 - 10^2} \cdot \frac{10}{20} = -0,066 \text{ м}$$

Закон руху вантажу $x = f(t)$ має вигляд

$$x = 0,1 \cos 20t - 0,066 \sin 20t + 0,33 \sin 10t, \text{ м.}$$

Параметри коливання:

$$\begin{aligned} \text{власна частота} & \quad \kappa = 20 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \\ \text{амплітуда змушених коливань} & \quad \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{100}{400 - 100} = 0,33 \text{ м}, \\ \text{період власних коливань} & \quad T = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{20} = 0,314 \text{ сек}, \\ \text{період змушених коливань} & \quad T_3 = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{10} = 0,628 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Відповідь: Вантаж здійснює вимушені коливання за законом

$$x = 0,1 \cdot \cos 20t - 0,066 \sin 20t + 0,33 \sin 10t, \text{ м.}$$

4.4. Завдання 4. Дослідження коливального руху матеріальної точки

Варіанти 1-5 (рис.8.24) Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D (варіанти 2 і 4) або системи вантажів D і E масами m_D і m_E (варіанти 1,3,5), вздовж вісі x; початок відліку поєднати з положенням спокою вантажу D або відповідно системи вантажів D і E (при статичній деформації пружин).

Стрижні, з'єднуючі вантажі, вважати невагомими і не вразливими до деформацій.

Варіант 1. Вантаж D ($m_D=2\text{кг}$) закріплений до бруска АВ, підвищеного на двох паралельних пружинах, коефіцієнти жорсткості кожної з яких $c = 2 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$. Точка закріплення вантажу D знаходиться на однаковій відстані від осей пружин.

У деякий час до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E=1\text{кг}$). Опір руху системи двох вантажів пропорційний швидкості: $R=12V$ (Н), де V – швидкість ($\frac{\text{м}}{\text{с}}$).

Масами абсолютно жорсткого бруска АВ і частини демпфера знехтуємо.

Варіант 2. У момент часу, коли стрижень, що з'єднує вантажі D ($m_D = 1\text{кг}$) і E ($m_E = 2\text{кг}$), перерізають, точка В починає здійснювати рух за законом $\xi = 1,5 \sin 18t$ (см) (вісь ξ спрямована вертикально вниз). Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 12 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$, $c_2 = 36 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$.

Варіант 3. Вантаж D ($m_D=8 \text{ кг}$) висить на пружині, прикріпленій до точки F бруска АВ, коефіцієнт жорсткості якої $c_1=10 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$). Брусок підвішений до двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_2 = 4 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$, $c_3 = 6 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$, точка F знаходиться на відстані a і b від своїх пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}$.

У деякий час до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E=1,2\text{кг}$).

У той же момент часу системі вантажів надають швидкість $V_0 = 1,2 \text{ м/сек}$ спрямовану вниз. Масою не вразливого до деформацій бруска АВ нехтують.

Варіант 4. Статична деформація двох однакових паралельних пружин під дією вантажів D ($m_D = 0,5 \text{ кг}$) і E ($m_E = 1,5 \text{ кг}$) $f_{CT} = 4 \text{ см}$. Вантажі підвішені до пружин за допомогою не вразливого до деформацій бруска АВ. У деякий момент часу стрижень, який з'єднує вантажі, перерізають. Опір руху вантажу D пропорційний швидкості: $R = 6V$, де V - швидкість. Масами абсолютно жорсткого бруска і частини демпфера нехтують.

Варіант 5. Одночасно з підвішуванням до вантажу D ($m_D = 1,6 \text{ кг}$), який висить на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 4 \text{ Н/см}$, вантажу E ($m_E = 2,4 \text{ кг}$) точка В починає виконувати рух за законом $\xi = 2 \sin 5t$ (вісь ξ спрямована вертикально вниз).

Положення початку відліку на осі x відповідає середньому положенню точки В ($\xi = 0$).

Варіанти 1-5 (рис.8.24) Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D (варіанти 2 і 4) або системи вантажів D і E масами m_D і m_E (варіанти 1,3,5), вздовж вісі x ; початок відліку поєднати з положенням спокою вантажу D або відповідно системи вантажів D і E (при статичній деформації пружин).

Стрижні, з'єднуючі вантажі, вважати невагомими і не вразливими до деформацій.

Варіант 1. Вантаж D ($m_D = 2 \text{ кг}$) закріплений до бруска АВ, підвищеного на двох паралельних пружинах, коефіцієнти жорсткості кожної з яких $c = 2 \text{ Н/см}$. Точка закріплення вантажу D знаходиться на однаковій відстані від осей пружин.

У деякий час до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E = 1 \text{ кг}$). Опір руху системи двох вантажів пропорційний швидкості: $R = 12V$ (Н), де V – швидкість (м/с).

Масами абсолютно жорсткого бруска АВ і частини демпфера знехтуємо.

Варіант 2. У момент часу, коли стрижень, що з'єднує вантажі D ($m_D = 1 \text{ кг}$) і E ($m_E = 2 \text{ кг}$), перерізають, точка В починає здійснювати рух за законом $\xi = 1,5 \sin 18t$ (см) (вісь ξ спрямована вертикально вниз). Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 12 \text{ Н/см}$, $c_2 = 36 \text{ Н/см}$.

Варіант 3. Вантаж D ($m_D = 8 \text{ кг}$) висить на пружині, прикріпленій до точки F бруска АВ, коефіцієнт жорсткості якої $c_1 = 10 \text{ Н/см}$). Брусок підвішений до двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_2 = 4 \text{ Н/см}$, $c_3 = 6 \text{ Н/см}$, точка F знаходиться на відстані a і b від своїх пружин: $\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}$.

У деякий час до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E = 1,2 \text{ кг}$).

У той же момент часу системі вантажів надають швидкість $V_0 = 1,2 \text{ м/сек}$ спрямовану вниз. Масою не вразливого до деформацій бруска АВ нехтують.

Варіант 4. Статична деформація двох однакових паралельних пружин під дією вантажів D ($m_D = 0,5 \text{ кг}$) і E ($m_E = 1,5 \text{ кг}$) $f_{CT} = 4 \text{ см}$. Вантажі підвішені до пружин за допомогою не вразливого до деформацій бруска АВ. У деякий момент часу стрижень, який з'єднує вантажі, перерізають. Опір руху вантажу D пропорційний швидкості: $R = 6V$, де V - швидкість. Масами абсолютно жорсткого бруска і частини демпфера нехтують.

Варіант 5. Одночасно з підвішуванням до вантажу D ($m_D = 1,6 \text{ кг}$), який висить на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 4 \text{ Н/см}$, вантажу E ($m_E = 2,4 \text{ кг}$) точка В починає виконувати рух за законом $\xi = 2 \sin 5t$ (вісь ξ спрямована вертикально вниз).

Положення початку відліку на осі x відповідає середньому положенню точки В ($\xi = 0$).

Варіанти 16-20 (рис. 8.25). Знайти рівняння руху вантажу D масою m (варіанти 17 і 19) або системи вантажів D і E масами m_D і m_E (варіанти 16, 18, 20) уздовж осі, початок відліку з'єднати з положенням спокою вантажу D або відповідно системи вантажів D і E (при статичній деформації пружин). Вантажі D і E при сумісному русі не відділяються.

Варіант 16. Пружина 1, на якій покоїться вантаж D ($m_D = 10 \text{ кг}$), спирається в точці F на брусок АВ, який з'єднує кінці двох паралельних пружин 2 і 3. Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 200 \text{ Н/см}$, $c_2 = 160 \text{ Н/см}$, $c_3 = 140 \text{ Н/см}$.

Точка F знаходиться на відстані a і b від осей пружин 2 і 3: $\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}$.

У деякий момент часу на вантаж D установлюють вантаж E ($m_E = 20 \text{ кг}$); одночасно системі вантажів надають швидкість $V_0 = 0,4 \text{ м/с}$, спрямовану вниз. Масою абсолютно жорсткого бруска АВ нехтують.

Варіант 17. У деякий момент часу вантаж E знімають з вантажу D (обидва вантажі знаходяться у стані спокою, відповідному статичній деформації пружини). Колова частота власних коливань системи вантажів D і E на пружині $\kappa = 20 \text{ рад/с}$, відношення має $m_D / m_E = \frac{2}{3}$.

Варіант 18. Статична деформація кожної з двох однакових паралельних пружин під дією вантажу D ($m_D = 20 \text{ кг}$) дорівнює $f_{CT.D} = 2 \text{ см}$. У деякий момент часу на вантаж D установлюють вантаж E ($m_E = 10 \text{ кг}$). Опір руху вантажів пропорційний швидкості: $R = 60\sqrt{3}V$, де V - швидкість. Масою абсолютно жорсткого бруска АВ і частини демпфера, зв'язаної з ним, нехтують.

Варіант 19. Два вантажі D і E ($m_D = 15 \text{ кг}$, $m_E = 25 \text{ кг}$) покояться на послідовно з'єднаних пружинах з коефіцієнтами жорсткості $c_1 = 250 \text{ Н/см}$ і

$c_2 = 375 \text{ Н/см}$. У момент часу, коли вантаж Е, знімають, точка В спирає пружин починає рухатися за законом $\xi = 0,5 \sin 30t$ (вісь ξ спрямована вниз). Положення початку відліку вздовж осі x відповідає середньому положенню точки В ($\xi = 0$).

Варіант 20. На вантаж D, який знаходиться у стані спокою відповідно до статичної деформації пружини в деякий момент часу встановлюють вантаж Е. У той же момент часу системі вантажів надають швидкість $V_0 = 0,3 \text{ м/с}$ спрямовану вниз. Колова частота власних коливань вантажу D на пружині $k = 2,4 \text{ рад/с}$ відношення мас $\frac{m_E}{m_D} = 3$.

Варіанти 21-25 (рис. 8.26.) Знайти рівняння руху вантажу D масою m по гладкій нахиленій площині в напрямку осі x ; за початок відліку вважати положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 21. У деякий момент часу вантаж D ($m = 2 \text{ кг}$) закріплюють до кінців недеформованих пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = 7 \text{ Н/см}$ і $c_2 = 3 \text{ Н/см}$; Одночасно вантажу надають швидкість $V_0 = 0,4 \text{ м/с}$, спрямовану вздовж похиленої площини вниз ($\alpha = 45^\circ$).

Варіант 22. Вантаж D знаходиться на нахиленій площині ($\alpha = 30^\circ$) у стані, відповідному статичній деформації пружини $f_{CT} = 2 \text{ см}$. У деякий момент часу ($t = 0$) точка В (верхній кінець пружини) починає рухатися за законом $\xi = 0,01 \sin 10t \text{ м}$ (вісь ξ спрямована вздовж похиленої площини вниз).

Положення початку відліку осі x відповідає середньому положенню точки В ($\xi = 0$)

Варіант 23. Вантаж D ($m = 3 \text{ кг}$) закріплюють у точці F бруска АВ, який з'єднує кінці недеформованих паралельних пружин, і відпускають без початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 2 \text{ Н/см}$ і $c_2 = 4 \text{ Н/см}$. Точка F знаходиться на відстані a і в від осей пружини: $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$; $\alpha = 60^\circ$. Опір руху

вантажів пропорційний швидкості: $R = 12V$, де V - швидкість. Масами бруска АВ і демпфера нехтують.

Варіант 24. У деякий момент часу вантаж D ($m = 1 \text{ кг}$) закріплюють до кінців А недеформованих послідовно з'єднаних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = 12 \text{ Н/см}$ і $c_2 = 4 \text{ Н/см}$. Одночасно ($t = 0$) другий кінець пружини В починає рухатися за законом $\xi = 1,5 \sin 10t \text{ (см)}$. Вісь ξ - спрямована уздовж нахиленої площини вниз ($\alpha = 30^\circ$). Положення початку відліку на осі x відповідає середньому положенню точки В ($\xi = 0$).

Варіант 25. Кінці двох однакових паралельних пружин з'єднані брусом АВ. Статична деформація кожної пружини під дією вантажу D ($m_D = 1,5 \text{ кг}$), який знаходиться на нахиленій площині ($\alpha = 30^\circ$), $f_{CT} = 4,9 \text{ см}$. У деякий

момент часу вантажу D надають швидкість $V_0 = 0,3 \text{ м/с}$, спрямовану вверху уздовж нахиленої площини. Опір руху вантажу пропорційний швидкості вантажу: $R = 6V$, де V – швидкість.

Масами бруска АВ і демпфера нехтують.

Варіанти 26 – 30 (рис. 8.26). Нехтуючи масою плити і вважаючи її абсолютно жорсткою, знайти рівняння руху вантажу D масою m з моменту дотику його з плитою, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відокремлюється. Рух вантажу віднести до вісі x , за початок відліку прийняти положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 26. Плита покоїться на двох паралельних пружинах, коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = 600 \text{ Н/см}$ і $c_2 = 400 \text{ Н/см}$. Вантаж D ($m=500 \text{ кг}$) падає без початкової швидкості з висоти $h = 0,1 \text{ м}$ в точку F плити, яка знаходиться на відстані a і в від осей пружин $a/b = c_2/c_1$.

Варіант 27. Коефіцієнти жорсткості кожної з двох паралельних пружин, на яких лежить плита, $c_1 = 130 \text{ Н/см}$. Вантаж D ($m=40 \text{ кг}$) встановлюють на середину плити і відпускають без початкової швидкості при недеформованих пружинах. Опір руху вантажу пропорційний швидкості: $R = 40 \cdot V$, де V – швидкість. Масами плити і демпфера нехтують.

Варіант 28. Вантаж D падає на плиту з висоти $h = 5 \text{ см}$. Статичний прогин пружини під дією цього вантажу $f_{CT} = 1 \text{ см}$.

Варіант 29. Плита покоїться на двох однакових паралельних пружинах 1 і 2, коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = c_2 = c = 400 \text{ Н/см}$. У деякий момент часу вантаж D ($m=200 \text{ кг}$) встановлюють на середину плити і одночасно прикріплюють до недеформованої пружини 3, коефіцієнт жорсткості якої $c_3 = 200 \text{ Н/см}$. Одночасно (при недеформованих пружинах) вантажу надають швидкість $V_0 = 0,6 \text{ м/с}$, спрямовану вниз.

Варіант 30. У деякий момент часу вантаж D ($m=100 \text{ кг}$) встановлюють на плиту і відпускають (при недеформованій пружині) без початкової швидкості. Одночасно точка В (нижній кінець пружини) починає рухатися по вертикалі за законом $\xi = 0,5 \sin 20t$ (см). (вісь ξ спрямована вниз). Коефіцієнт жорсткості пружини $c = 200 \text{ Н/см}$.

Початок відліку осі x відповідає середньому положенню точки В ($\xi = 0$).

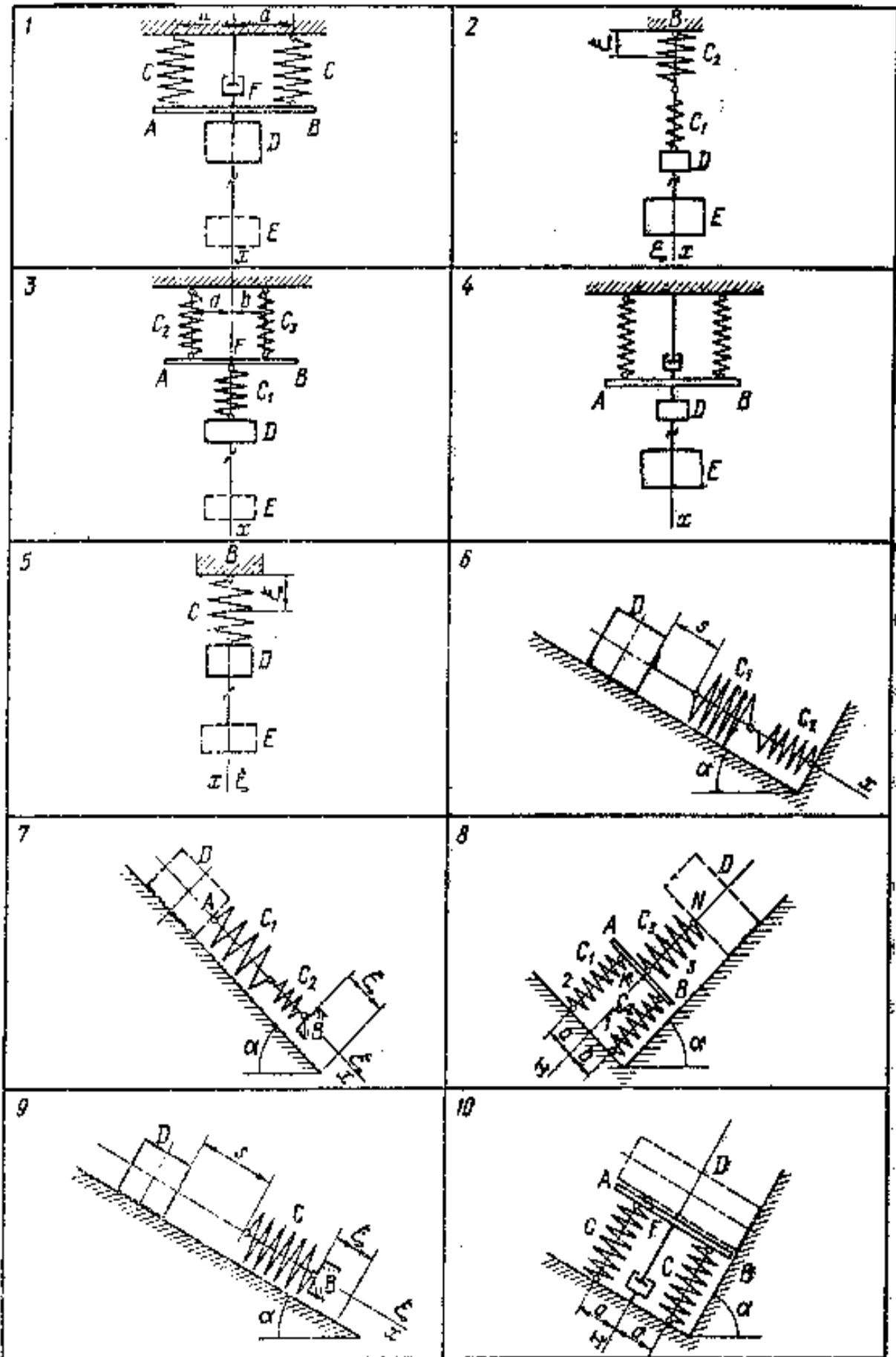


Рис. 4.12

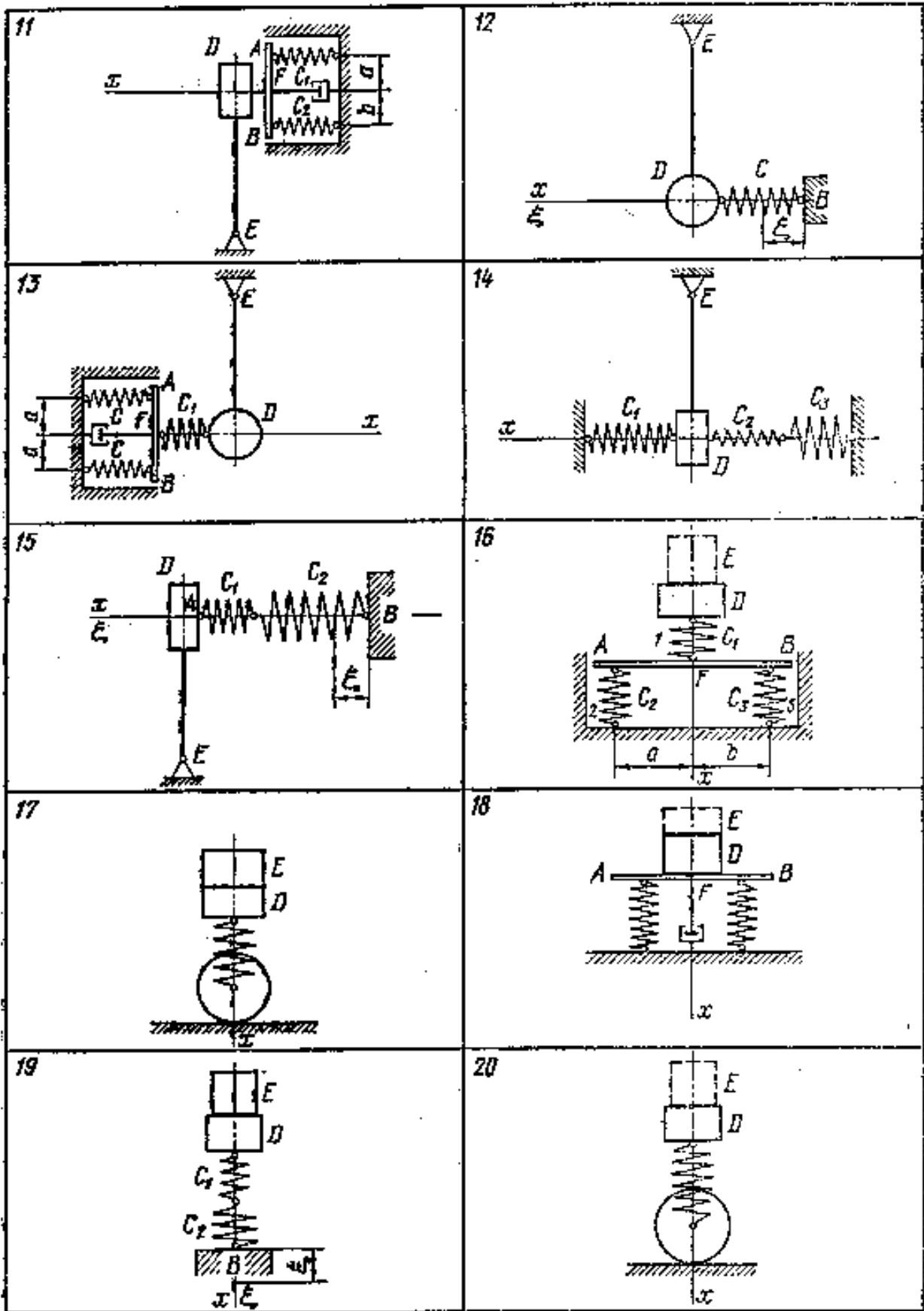


Рис. 4.13

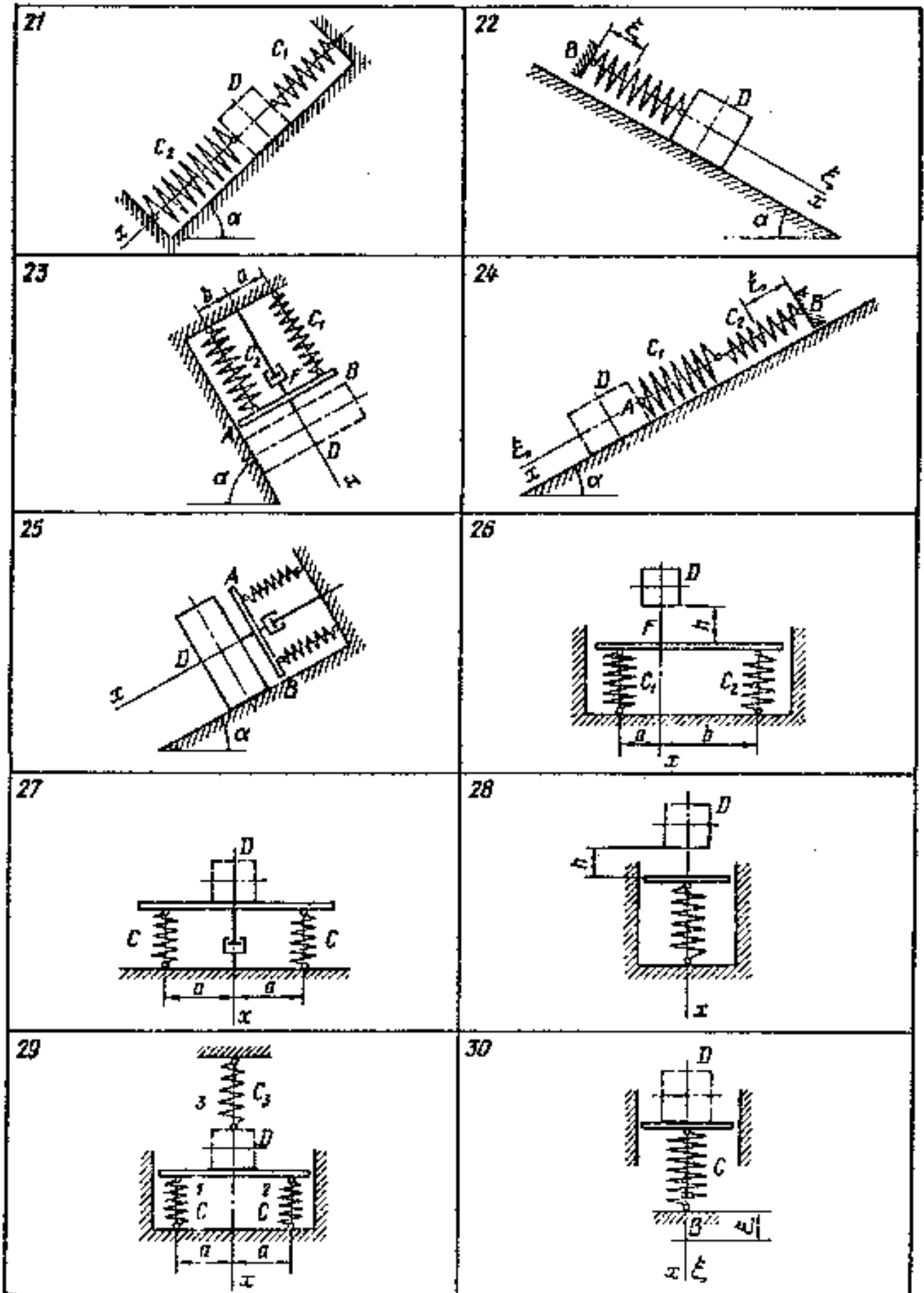


Рис. 4.14

ДЖЕРЕЛА

1. Шпачук В. П., Золотов М. С., Рубаненко О. І, Гарбуз А. О. Теоретична механіка: Навч.-метод. посібник для студентів технічних спеціальностей, Харків: ХДАМГ, 2001.
2. Теоретична механіка: навчально-методичний посібник / Е. В. Лукіна, А. І. Кузнецов. – Харків: ХДАМГ, 2005.
3. Методичні вказівки і завдання до самостійної роботи з курсу "Технічна механіка" (для студентів 1 курсу всіх форм навчання бакалаврів за напрямом 6.090600 – "Електротехнічні системи електроспоживання", "Світлотехніка і джерела світла") / Шпачук В. П., Жуков В. Ф. – Харків: ХДАМГ, 2004.
4. Техническая механика / Д. В. Чернилевский, Е. В. Лавров и др. – М.: Наука, 1982.
5. Методичні вказівки та завдання для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи з курсу "Технічна механіка"(для студентів 1 курсу денної та заочної форми навчання бакалаврів напряму підготовки 6.050701 – "Електротехніка та електротехнології") / В. П. Шпачук, В. О. Пушня. – Харків: ХНАМГ, 2010.
6. Курс лекцій с тестовими заданнями по дисципліне "Прикладная механика". Часть I. "Основы расчетов на прочность". / Э. В. Лукина, А. И. Кузнецов. Харьков: ХНАГХ, 2008.
7. Яблонский А. А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике.– М.: Высш. шк., 1982.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ВСТУП..... | 3 |
| 1. ВКАЗІВКИ ДО ЗАВДАННЯ 1. СТАТИКА..... | 4 |
| 1.1. В'язі і їхні реакції..... | 7 |
| 1.2. Система збіжних сил. Умови рівноваги системи збіжних сил (рис. 1.12)..... | 9 |
| 1.3. Методичні вказівки для розв'язання задач про рівновагу..... | 10 |
| 1.4. Момент сили. Векторний і алгебраїчний моменти сили відносно центра..... | 11 |
| 1.5. Момент пари сил (рис. 1.17)..... | 13 |
| 1.6. Умови рівноваги довільної системи сил..... | 15 |
| 1.7. Ферми. Способи визначення зусиль у стержнях ферми..... | 19 |
| 1.8. Завдання 1. Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми методами вирізання вузлів і Рітера..... | 22 |
| 2. ЗАВДАННЯ 2. СТАТИКА..... | 26 |
| 2.1. Згин..... | 26 |
| 2.2. Згинальний момент і поперечна сила в перерізі балки..... | 26 |
| 2.3. Побудова епюр внутрішніх сил..... | 28 |
| 2.4. Розрахунок на міцність при згині..... | 30 |
| 2.5. Завдання 2. Визначення реакцій опор балки, побудова епюр внутрішніх сил. Розрахунок на міцність..... | 35 |
| 3. ВКАЗІВКИ ДО ЗАВДАННЯ 3. КІНЕМАТИКА..... | 39 |
| 3.1. Кінематика точки..... | 39 |
| 3.2. Кінематика твердого тіла..... | 39 |
| 3.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла..... | 41 |
| 3.4 Вказівки для розв'язання задач з кінематичного аналізу плоского механізму..... | 45 |
| 3.5 Завдання 3. Кінематика. Кінематичний аналіз плоского механізму..... | 49 |
| 4. ВКАЗІВКИ ДО ЗАВДАННЯ 4. ДИНАМІКА..... | 53 |
| 4.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки..... | 53 |
| 4.2. Прямолінійні коливання матеріальної точки..... | 55 |
| 4.3. Методика розв'язання задач по дослідженню коливального руху матеріальної точки..... | 62 |
| 4.4. Завдання 4. Дослідження коливального руху матеріальної точки..... | 66 |
| ДЖЕРЕЛА..... | 74 |

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
до самостійної та розрахунково-графічної роботи
з курсу

«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»

*(для студентів 2 курсу заочної форми навчання бакалаврів
напрямку підготовки 6.050701 «Електротехніка та електротехнології»
та слухачів другої вищої освіти спеціальності
7.05070103 «Електротехнічні системи електроспоживання»)*

Укладачі : ЛУКІНА Ельміра Володимирівна
ЧЕРНУШЕНКО Олена Іванівна

Відповідальний за випуск *А. І. Кузнецов*

За редакцією автора

Комп'ютерне верстання *О. І. Чернушенко*

План 2012, поз. 626 М

Підп. до друку 07. 12. 2012 р.
Друк на ризографі
Зам. №

Формат 60x84/16
Ум. друк. арк. 4,6
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011р.