

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ

МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ**

**З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

*(для студентів 1 курсу заочної форми навчання за напрямом  
підготовки 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)»)*

Частина 1

Харків – ХНАМГ – 2012

Методичні вказівки до розв'язання задач з курсу вищої математики (для самостійної роботи студентів 1 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад. Л. П. Вороновська, Є. С. Пахомова, С.С. Шульгіна. – Х. : ХНАМГ, 2012. - 66 с.

**Укладачі: Л. П. Вороновська, Є. С. Пахомова, С. С. Шульгіна**

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рецензент: канд. ф-м. наук, доцент Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики,

протокол №3 від 24 жовтня 2012 р.

# 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

## 1.1 Короткі теоретичні відомості

1. Відстань  $d$  між точками  $A(x_1, y_1)$  та  $B(x_2, y_2)$  площини знаходять за формулою: 
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Якщо  $x_1$  і  $y_1$  - координати точки  $A$ , а  $x_2$  і  $y_2$  - координати точки  $B$ , то координати  $x$  і  $y$  точки  $C$ , яка поділяє відрізок  $AB$  в даному відношенні  $\lambda = \frac{AC}{CB}$ , знаходять за формулами :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо  $\lambda=1$ , то точка  $C(x, y)$  поділяє відрізок  $AB$  навпіл, і тоді координати  $x$  і  $y$  середини відрізка  $AB$  знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Площу трикутника за даними координатами вершин  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

4. Рівняння прямої:

- а) загальне рівняння прямої :  $Ax + By + C = 0$ , де  $A, B, C$  – деякі коефіцієнти;
- б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:  $y = kx + b$ , де  $k$  – кутовий коефіцієнт, а  $b$  – довжина відрізка, який відсікає пряма на осі  $Oy$ .
- в) рівняння прямої у відрізках:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , де  $a$  та  $b$  – довжини відрізків, які відсікає пряма відповідно на осях  $Ox$  та  $Oy$ .
- г) рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(x_0, y_0)$  з заданим кутовим коефіцієнтом  $k$ :

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

д) рівняння прямої, яка проходить через дві точки  $A(x_1, y_1)$  і  $B(x_2, y_2)$  :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5. Кут між двома прямими. Нехай дані дві прямі

$$y = k_1x + b_1 \text{ і } y = k_2x + b_2$$

Кутом між двома прямими на площині називають кут  $\theta$  (Рис. 1) на який необхідно повернути пряму (1) проти ходу годинникової стрілки до збігу із другою прямою (2) і знаходять за формулою:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

З цієї формули прямують дві умови:

а) умова паралельності прямих:  $k_1 = k_2$ ;

б) умова перпендикулярності прямих:  $k_1 = \frac{-1}{k_2}$ .

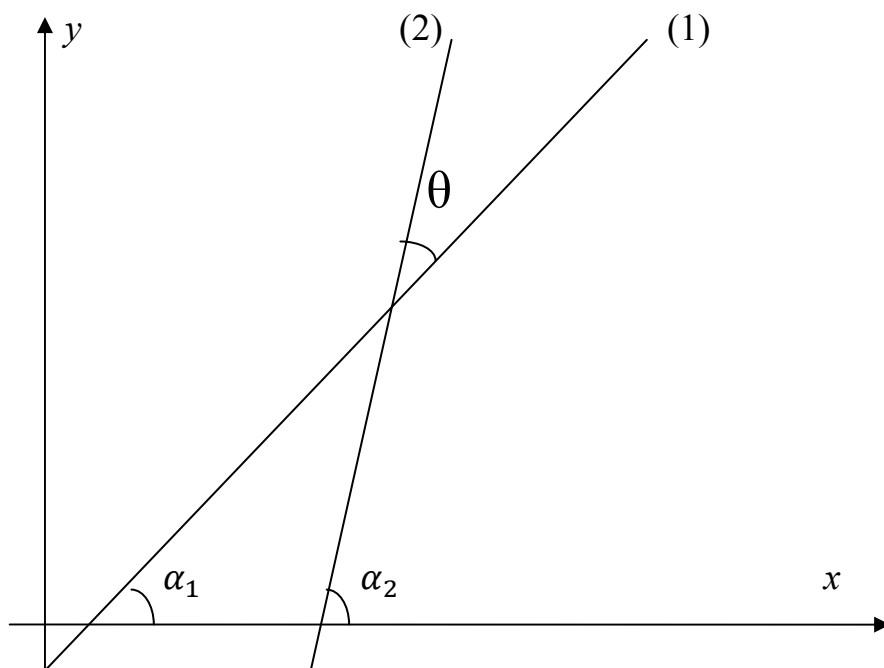


Рис. 1

6. Відстань від точки  $A(x_0, y_0)$  до прямої  $Ax + By + C = 0$  знаходять за формулою:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

## 1.2 Розв'язання задач

Для трикутника (рис. 2) з вершинами  $A(-2, -4)$ ,  $B(-6, 3)$ ,  $C(5, 1)$  розв'язати наступні задачі:

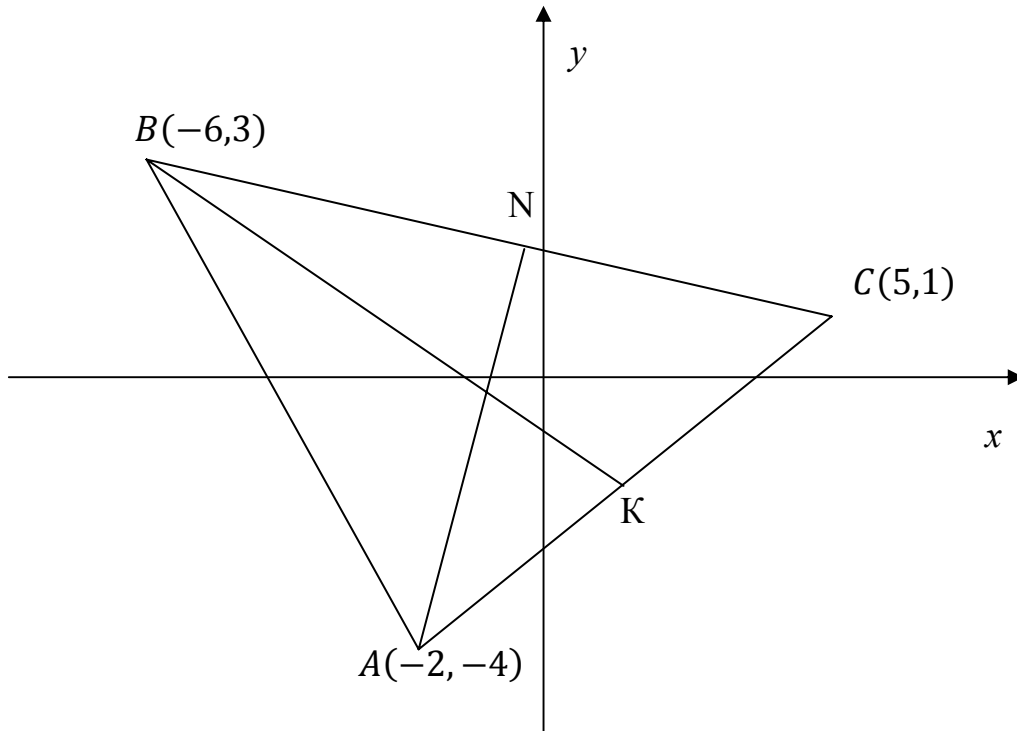


Рис. 2

**Приклад 1.** Обчислити довжину сторін трикутника.

**Розв'язання.** За формулою :  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , знаходимо:

$$d_{AB} = \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (3 - (-4))^2} = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (3 + 4)^2} = \sqrt{65} \text{ (од.)}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(5 - (-6))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{(5 + 6)^2 + 4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ (од.)}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (1 + 4)^2} = \sqrt{74} \text{ (од.)}$$

**Приклад 2.** Визначити вид трикутника.

**Розв'язання.** Вид трикутника можна визначити за довжинами сторін: необхідно порівняти квадрат довжини найбільшої сторони з сумою квадратів довжин менших сторін.

Якщо  $d_1^2 > d_2^2 + d_3^2$ , то такий трикутник має тупий кут; якщо  
 $d_1^2 = d_2^2 + d_3^2$ , то це прямокутний трикутник і якщо  
 $d_1^2 < d_2^2 + d_3^2$ , то це гострокутний трикутник. У даному разі маємо:

$$d_{BC}^2 < d_{AB}^2 + d_{AC}^2; \quad 125 < 65 + 74; \quad 125 < 139.$$

Отже: трикутник гострокутний, різносторонній.

**Приклад 3.** Обчислити площу трикутника.

**Розв'язання.** Площа даного трикутника за наведеною вище формулою дорівнює:

$$S = \frac{1}{2} |(-2 - 5)(3 - 1) - (-6 - 5)(-4 - 1)| = \frac{1}{2} |-14 - 55| = \left| \frac{-69}{2} \right|.$$

$$S = 34,5 \text{ (од. кв.)}$$

**Приклад 4.** Записати рівняння сторін трикутника.

**Розв'язання.** Рівняння сторони  $AB$ :  $A(-2, -4), B(-6, 3)$ . За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - (-2)}{-6 - (-2)} = \frac{y - (-4)}{3 - (-4)}$$

Після тотожних перетворень отримаємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін  $BC$  і  $AC$  знаходимо аналогічно:

$$BC: \quad B(-6, 3), \quad C(5, 1)$$

$$\frac{x - (-6)}{5 - (-6)} = \frac{y - 3}{1 - 3}. \quad \text{Звідси: } y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}.$$

$$AC: \quad A(-2, -4), \quad C(5, 1)$$

$$\frac{x - (-2)}{5 - (-2)} = \frac{y - (-4)}{1 - (-4)}. \quad \text{Звідси } y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}.$$

**Приклад 5.** Знайти внутрішні кути трикутника.

**Розв'язання.** Для виконання цього завдання скористаємося формулою

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут  $\alpha$  утворено перетином прямих  $AB$  і  $AC$  (рис. 2). Отже, тут

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \quad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4}. \text{ Маємо:}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{28}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = \operatorname{arctg} \frac{69}{7}.$$

Кут  $\beta$  утворено перетином прямих  $AB$  і  $BC$  (рис. 2). Отже, тут

$$k_1 = k_{AB} = -\frac{7}{4}, \quad k_2 = k_{BC} = -\frac{2}{11}. \text{ Маємо:}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-\frac{2}{11} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{11}} = \frac{\frac{69}{44}}{\frac{58}{44}} = \frac{69}{58}; \beta = \operatorname{arctg} \frac{69}{58}.$$

Кут  $\gamma$  утворено перетином прямих  $AC$  і  $BC$  (рис. 2). Отже, тут

$$k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{11}, \quad k_2 = k_{AC} = \frac{5}{7}. \text{ Маємо:}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{69}{77}}{\frac{67}{77}} = \frac{69}{67}; \gamma = \operatorname{arctg} \frac{69}{67}.$$

**Приклад 6.** Знайти рівняння медіани  $BK$ .

**Розв'язання.** Медіана – це відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки  $K$  (рис. 2) знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тут:  $A(-2, -4)$ ,  $C(5, 1)$ . Отже, маємо:

$$x_K = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_K = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Рівняння  $BK$  запишемо за формулою:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тут:  $B(-6, 3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ . Отже  $\frac{x + 6}{\frac{3}{2} + 6} = \frac{y - 3}{-\frac{3}{2} - 3}$ .

Після тотожних перетворень маємо рівняння медіани  $BK$ :

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

**Приклад 7.** Знайти рівняння висоти  $AN$ .

**Розв'язання.** Висота  $AN$ - це перпендикуляр проведений з вершини  $A$  до сторони трикутника  $BC$ . Отже, для прямих  $BC$  і  $AN$  виконується умова перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти  $AN$  знаходимо за формулою:  $y - y_0 = k(x - x_0)$ ,

де  $k = k_{AN}, A(x_0, y_0)$ . Тобто:  $k = \frac{11}{2}, \quad A(-2, -4)$ .

Маємо  $y + 4 = \frac{11}{2}(x + 2); \quad y = \frac{11}{2}x + 11 - 4$ .

Рівняння висоти  $AN$ :  $y = \frac{11}{2}x + 7$ .

**Приклад 8.** Обчислити довжину висоти  $CM$ .

**Розв'язання.** Довжину висоти  $CM$  знайдемо як відстань від точки  $C(x_0, y_0)$  до прямої  $AB$  за формулою:



$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Для цього перепишемо рівняння прямої  $AB$  в загальному виді:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}; \quad 4y = -7x - 30; \quad 7x + 4y + 30 = 0;$$

отже,  $A = 7, B = 4, C = 30$ . Точка  $C(x_0, y_0)$  має координати  $x_0 = 5, y_0 = 1$ .

$$\text{Отже: } d = \left| \frac{7 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 30}{\sqrt{7^2 + 4^2}} \right| = \frac{69}{\sqrt{65}} \text{ од. д.}$$

**Приклад 9.** Знайти координати точки перетину медіани  $BK$  та висоти  $AN$ .

**Розв'язання.** Позначимо цю точку буквою  $P$  (рис. 2). Для знаходження її координат треба розв'язати систему рівнянь медіани  $BK$  та висоти  $AN$ :

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{2}x + 7 \end{cases}; \quad \text{звідси маємо: } -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{11}{2}x + 7.$$

Після тотожних перетворень отримаємо:  $x = -\frac{76}{61}$ .

Знайдене значення  $x$  підставимо у перше рівняння і отримаємо :

$$y = \frac{9}{61}.$$

Отже, точка перетину медіани і висоти:  $P\left(-\frac{76}{61}, \frac{9}{61}\right)$ .

**Приклад 10.** Записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника  $B$  паралельно до його сторони  $AC$ .

**Розв'язання.** Позначимо рівняння шуканої прямої як  $BF$ . За умовою пряма  $BF$  паралельна прямій  $AC$ , а тому використавши умову паралельності двох прямих знайдемо кутовий коефіцієнт прямої  $BF$ :

$$k_{BF} = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Для прямої  $BF$  відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже використаємо наступне рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тут  $k = \frac{5}{7}$ ,  $B(6,3)$ . Маємо,  $y - 3 = \frac{5}{7}(x + 6)$ ;  $y = \frac{5}{7}x + \frac{30}{7} + 3$ .

Рівняння прямої  $BF$ :  $y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}$ .

## 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

### 2.1. Матриці. Визначники

Прямокутна таблиця чисел, складена з  $m$  рядків та  $n$  стовпців називається *матрицею* порядку  $m \times n$ . Матриця  $A$  має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ або } A = \|a_{ij}\|, \text{ або } A = \langle a_{ij} \rangle, \text{ де } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Тут  $a_{ij}$  - елемент матриці  $A$ , який розташований в  $i$ -му рядку та  $j$ -му стовпці. Матриця називається квадратною, якщо  $m = n$ . Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, m = n = 2 \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, m = n = 3.$$

Необхідно виділити деякі матриці:  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  - одинична;

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ - діагональна} \quad \text{та} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ -}$$

верхньотрикутна.

Визначник це число, яке знаходиться наступним чином:

1) для  $A = (a)$ ,  $n = 1$ ,  $\det A = a$ . Тут  $n$  - розмірність (порядок)  $\det A$ ,

2) для  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $n = 2$ :  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ;

3) для  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $n = 3$ ,  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ . Останній визначник

обчислюємо за правилом “зірки”. Правило “зірки” схематично виглядає наступним чином:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right|.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

**Приклад 1.** Дано матрицю  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Знайти  $\det A$ .

**Розв’язання.** Скористаємося правилом “зірки”

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - (1 \cdot 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 5) = -3 - 8 - 18 - 10 = -19.$$

*Загальний метод обчислення визначників полягає у його розкладанні за елементами рядка (або стовпця).*

Якщо візьмемо будь-який елемент визначника і викреслимо рядок і стовпець, в яких він розташований, то одержимо визначник меншого на одиницю порядку. Такий визначник називається *мінором*. Мінор помножений на  $(-1)^{m+n}$ , де  $m$  – номер рядка, а  $n$  – номер стовпця в яких знаходиться елемент, називається *алгебраїчним доповненням елемента*. Отже, визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчне доповнення.

Наприклад, якщо  $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ , то алгебраїчне доповнення для елемента  $a_{13}$  має такий вигляд:  $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ , а для елемента  $a_{32}$ :  $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ .

Тоді формула розкладання визначника за елементами першого рядка представляється наступним чином:  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ . Розкладання можна проводити як за елементами будь-якого рядка так і за елементами будь-якого стовпця. А саме:

**Приклад 2.** Обчислити визначник матриці  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  загальним методом.

**Розв'язання.** Для обчислення  $\det A$  для матриці  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  оберемо розкладання визначника за елементами другого стовпця:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} (-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2(-5 + 4) + 4(15 + 2) - 3(6 + 1) = -2 + 68 - 21 = 45. \end{aligned}$$

Визначник третього порядку можна обчислити за будь-яким з розглянутих методів. Для обчислення визначників порядку  $n \geq 4$  використовується лише метод розкладання за елементами рядка (або стовпця).

*Властивості визначників:*

- 1) Якщо визначник має нульовий рядок (стовпець) то  $\det A = 0$ .  
Наприклад

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Якщо визначник має два пропорційні або однакові рядки (стовпця), то  $\det A = 0$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 24 - 16 + 24 + 24 + 16 = 0, \text{ бо другий і}$$

третій рядок (перший і третій стовпець) пропорційні:  $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}$ .

3) Спільний множник якогось рядка (стовпця) можна винести за знак визначник:  $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ .

4) Якщо переставити місцями два рядка (стовпця), то визначник змінить знак:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5) Визначник не зміниться, якщо до будь-якого рядка додати інший рядок або рядок, помножений на довільне число.

## 2.2. Дії над матрицями

Деякі види матриць ми розглянули у розділі 2.1. В цьому розділі ми розглянемо дії над матрицями.

Квадратна матриця називається невинродженою, якщо  $\det A \neq 0$  і навпаки, якщо  $\det A = 0$ , матриця винроджена.

Сумою  $A + B$  двох матриць  $A = \langle a_{ij} \rangle$  і  $B = \langle b_{ij} \rangle$ , однакового розміру, називається матриця  $C = \langle c_{ij} \rangle$ , що має такий же розмір, а кожний елемент її дорівнює сумі відповідних елементів матриць  $A$  та  $B$ :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Добутком матриці  $A$  на число  $k$  називається матриця  $C = \langle c_{ij} \rangle$ , кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці  $A$  на число  $k$ :

$$c_{ij} = ka_{ij}.$$

**Приклад 3.** Обчислити  $5A + B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Першим кроком при виконанні цієї задачі буде знаходження матриці  $5A$ :

$$5A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 \\ 20 & 10 & -10 \\ 10 & 35 & 5 \end{pmatrix}, \text{ а тепер виконаємо наступну дію:}$$

$$5A + B = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 \\ 20 & 10 & -10 \\ 10 & 35 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 1 \\ 18 & 14 & -5 \\ 11 & 35 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Добуток матриць.* Добуток матриці  $A$  на матрицю  $B$  можна знайти тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців матриці  $A$  дорівнює кількості рядків матриці  $B$ . Тобто, якщо матриця  $A$  має розмірність  $m \times n$ , а  $B - n \times k$ , то  $C = AB - m \times k$ .

Кожний елемент матриці  $C$  дорівнює сумі добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  на відповідні елементи  $j$ -го стовпця матриці  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

**Приклад 4.** Знайти добуток двох матриць  $A \cdot B$  і  $B \cdot A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Спочатку звернемо увагу на те, що обидві матриці квадратичні однакового розміру, а отже в такому випадку завжди можливо виконати дію множення.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 0 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 27 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 & 4(-1) + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 0 \cdot 1 & 3(-1) - 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 & 5(-1) + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 9 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи отримані результати можемо зробити висновок:  $AB \neq BA$ . В загальному випадку множення матриць не комутативне.

**Приклад 5.** Знайти  $AB$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Розв'язання.** Звертаємо увагу, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці, а отже можемо виконати їх множення:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

А чи можна виконати дію  $BA$ ? Відповідь - так. Бо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці ( $2=2$ ).

Матриця, отримана з матриці  $A$ , заміною рядків стовпцями зі збереженням їхнього порядку, називається транспонованою стосовно матриці  $A$  й позначається  $A^T$ .

**Приклад 6.** Знайти транспоновану матрицю для матриці  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.**  $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

*Обернена матриця.* Для деяких задач нам необхідно вміти знаходити обернену матрицю. Матриця  $A^{-1}$  називається оберненою до матриці  $A$ , якщо

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Квадратна матриця  $A$  має обернену матрицю  $A^{-1}$ , коли  $\det A \neq 0$  (необхідна і достатня умови).

Якщо  $\det A \neq 0$ , то  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}^T A_{12}^T \dots A_{1n}^T \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{n1}^T A_{n2}^T \dots A_{nn}^T \end{pmatrix}$ , де  $A_{ij}$  - алгебраїчні доповнення до елементів транспонованої матриці.

**Приклад 7.** Знайти  $A^{-1}$  до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.**

1) обчислимо визначни матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 10 - 1 - 12 + 20 = 27. \text{ Отже, } \det A \neq 0;$$

2) знайдемо транспоновану матрицю  $A^T$ . Для цього міняємо рядки на стовпці:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

3) знайдемо алгебраїчні доповнення до всіх елементів  $A^T$ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$



$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(20 - 2) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 + 1) = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8;$$

4) запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix};$$

5) виконаємо перевірку:  $AA^{-1} = E$ .

$$\begin{aligned} \text{Отже, } AA^{-1} &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 + 30 - 3 & 0 + 6 - 6 & 0 + 12 - 12 \\ -54 + 55 - 1 & 18 + 11 - 2 & -18 + 22 - 4 \\ 27 - 35 + 8 & -9 - 7 + 16 & 9 - 14 + 32 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Отриманий результат вказує на те, що обернена матриця знайдена вірно.

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

### 2.3. Правило Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Правило Крамера застосовується лише для таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь і  $\det A \neq 0$ .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Правило Крамера має вигляд :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots \dots \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

де  $\Delta$  - це головний визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих, а визначники  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  одержуємо з головного визначника заміною  $i$ -го стовпця на стовпець вільних членів системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ і т.д.}$$

Якщо  $\Delta = 0$ , то система або несумісна (не має розв'язків), або має безліч розв'язків.

**Приклад 8.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases} .$$

**Розв'язання.**  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 21 - 140 + 2 - 3 = -176 \neq 0,$

отже система має єдиний розв'язок .

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 25 - 20 - 21 - 140 - 5 - 15 = -176;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 35 - 140 - 14 - 5 = -176;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 70 + 5 - 105 + 175 + 10 + 21 = 176;$$

$$x_1 = \frac{-176}{-176} = 1, \quad x_2 = \frac{-176}{-176} = 1, \quad x_3 = \frac{176}{-176} = -1.$$

Для перевірки підставляємо отримані значення невідомих в будь-яке рівняння системи.

$$\text{Перевірка: } x_1 + 5x_2 + x_3 = 5,$$

$$-1 + 5(-1) + 1 = 5.$$

Маємо  $5 = 5$ . Тотожність істинна, тому робимо висновок, що розв'язок знайдено вірно.

Відповідь:  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$ .

**Приклад 9.** Чи можна розв'язати систему за правилом Крамера?

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

**Розв'язання.** Головний визначник системи  $\Delta = 0$ , тому правилом Крамера користуватись неможливо.

#### 2.4. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Розглянемо систему  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими, яку подано на початку розділу 2.3. Цю систему запишемо у матричній формі:  $AX = B$ , де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо  $\det A \neq 0$ , то матриця  $A$  має  $A^{-1}$ . Помножимо обидві частини рівняння  $AX = B$  на  $A^{-1}$ :  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ , але  $AA^{-1} = E$ , тому  $EX = A^{-1}B$ . Враховуючи, що  $EX = X$ , маємо  $X = A^{-1}B$ .

**Приклад 10.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці: 
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

**Розв'язання.** Виконаємо наступне: 1) випишемо окремо матриці: 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

2) обчислимо значення визначника матриці  $A$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 + 27 - 12 - 12 + 15 = 20;$$

3) транспонуємо матрицю  $A$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

4) знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці  $A^T$ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(-15 + 8) = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 + 9) = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 4) = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 9) = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;$$

5) запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix};$$

6) знайдемо матрицю  $X$ :  $X = A^{-1}B = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 + 56 + 0 \\ 56 - 16 + 0 \\ 20 - 40 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже ми отримали такі значення для невідомих:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -1$ ;

7) зробимо перевірку отриманих результатів. Для цього підставимо знайдені значення невідомих в будь-яке рівняння системи:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$$

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4(-1) = -4$$

$$-4 = -4.$$

Отримана тотожність істинна, а отже рішення знайдено вірно.

Відповідь:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -1$ .

## 2.5. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Для системи  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими запишемо *розширену*

матрицю :  $\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$ . За допомогою елементарних

перетворень приведемо її до виду верхньотрикутної матриці. Під елементарними перетвореннями мають на увазі множення рядків на деякі числа і додавання їх до інших рядків.

Метою перетворень є отримання іншої еквівалентної системи простішого вигляду.

**Приклад 11.** Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

**Розв'язання.** Обчислимо головний визначник системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 8 + 8 - 2 - 8 = 6, \det A \neq 0, \text{ а отже система має рішення.}$$

Запишемо розширену матрицю:  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right)$ .

Виконаємо наступні елементарні перетворення:

1) помножимо перший і другий рядки на такі числа, щоб отримати однакові перші елементи в рядках. В даному випадку помножимо перший рядок на 2 і з першого рядка віднімемо другий. Перший рядок переписуємо в тому ж вигляді, а результат елементарного перетворення записуємо у другий

рядок:  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right)$ ;

Ті ж самі дії виконуємо з першим та третім рядками. Перший рядок помножимо на 4 і віднімемо третій рядок. Результат перетворення запишемо у третій рядок. Перший і другий рядки переписуємо такими, як ми їх

одержали у пункті 1):  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{array} \right)$ ;

2) працюємо тепер з другим та третім рядками. Необхідно отримати однакові другі елементи в цих рядках. В даному випадку вони вже рівні, тому виконаємо дію віднімання (з другого рядка віднімемо третій, а результат

запишемо в третій рядок):  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$ .

Отримали матрицю, у якій всі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

3) за виглядом отриманої матриці записуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = -11; \\ -2x_3 = 2 \end{cases}$$

4) третє рівняння системи має одну невідому, тому почнемо роз'язання системи з цього рівняння:  $-2x_3 = 2$ ,  $x_3 = -1$ ; перейдемо до другого рівняння:  $3x_2 + 2x_3 = -11$ ; підставимо в нього  $x_3 = -1$  і отримаємо  $x_2 = -3$ ; перейдемо до першого рівняння  $x_1 + x_2 + 2x_3 = -4$ ; підставимо в нього  $x_3 = -1$  та  $x_2 = -3$  і отримаємо  $x_1 = 1$ .

5) перевірка:  $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ ;

$$2 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot (-1) = 3;$$

$$3 = 3.$$

Отримана тотожність істинна, рішення знайдено вірно.

Відповідь:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = -1$ .

### 3. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

#### 3.1. Короткі теоретичні відомості

Число  $A$  називається *границею функції*  $f(x)$  при  $x$ , яке прямує до  $x_0$ , якщо для будь-якого малого наперед заданого додатного числа  $\varepsilon$  можна знайти таке додатне  $\delta$ , яке залежить від  $\varepsilon$ , що при всіх значеннях  $x$ , які входять до області визначення функції, відмінних від  $x_0$  і виконуючих умову  $|x - x_0| < \delta$ , має місце нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Розглянемо необхідні теоретичні дані з теорії границь.

1. *Нескінченно малі і нескінченно великі функції:*

a) функція  $f(x)$  називається нескінченно малою при  $x \rightarrow x_0$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0;$$

b) функція  $f(x)$  називається нескінченно великою при  $x \rightarrow x_0$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

2. *Властивості нескінченно малих функцій:*

а) якщо функції  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  нескінченно малі, то їх сума, різниця та добуток є нескінченно малою;

б) якщо при  $x \rightarrow x_0$  функція  $f(x)$  нескінченно мала, а функція  $\varphi(x)$  - обмежена, то їх добуток  $f(x)\varphi(x)$  нескінченно мала.

### 3. Властивості нескінченно великих функцій:

Якщо при  $x \rightarrow x_0$  функція  $f(x)$  має скінчену границю ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ ), а функція  $\varphi(x)$  - нескінченно велика ( $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ ), то:

а) сума їх - нескінченно велика, тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + \varphi(x)] = \infty$ , а границя відношення  $f(x)$  до  $\varphi(x)$  дорівнює нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$

б) якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$  ( $b > 0$ ), а  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ , при цьому  $\varphi(x)$  додатна в околиці точки  $x_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$ ;

с) добуток двох нескінченно великих функцій є функція нескінченно велика, тобто якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = \infty$ .

### 4. Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими функціями:

а) якщо  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  - нескінченно велика функція, то функція  $\frac{1}{f(x)}$  нескінченно мала;

б) якщо при  $x \rightarrow x_0$  функція  $\varphi(x)$  нескінченно мала, то функція  $\frac{1}{\varphi(x)}$  - нескінченно велика, при цьому вважаємо, що в околиці точки  $x_0$  функція  $\varphi(x)$  в нуль не обертається.

### 5. Правила граничного переходу:

а) якщо при  $x \rightarrow x_0$  функція  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  мають скінчені границі, то і їх алгебраїчна сума має границю, яка дорівнює сумі їх границь, тобто якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = c$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b \pm c;$$



б) якщо при  $x \rightarrow x_0$  функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  мають границі, то їх добуток також має границю, яка дорівнює добутку їх границь, тобто якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = c$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = bc;$$

с) якщо при  $x \rightarrow x_0$  функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  мають границі і границя функції  $\varphi(x)$  не дорівнює нулю, то границя їх відношення існує і дорівнює відношенню їх границь, тобто якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = c$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{b}{c}.$$

## 3.2. Методи обчислення границь

### 3.2.1. Знаходження границь від дробово-раціональної функції

Для того щоб знайти границю від дробово-раціональної функції у випадку, коли при  $x \rightarrow x_0$  чисельник і знаменник дроби мають границі, рівні нулю (маємо невизначеність  $\left|\frac{0}{0}\right|$ ), необхідно чисельник і знаменник дроби розділити на  $x - x_0$  і перейти до границі. Якщо і після цього чисельник і знаменник нового дроби мають границі рівні нулю при  $x \rightarrow x_0$ , то необхідно провести повторне ділення на  $x - x_0$ .

#### Приклад 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 8} = \frac{4 - 2 + 2}{4 - 4 + 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

#### Приклад 2.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{3x^2 - 19x + 28} = \frac{16 - 4 - 12}{48 - 76 + 28} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

За правилом, наведеним вище, розділимо чисельник і знаменник на  $x - 4$ .

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3);$$

$$3x^2 - 19x + 28 = (x - 4)(3x - 7);$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 4)(3x - 7)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 3}{3x - 7} = \frac{4 + 3}{12 - 7} = \frac{7}{5}.$$

### Приклад 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 10}{x^3 + 6x^2 + x - 14} &= \frac{16 - 16 - 12 + 2 + 10}{-8 + 24 - 2 - 14} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^3 - 3x + 5)}{(x+2)(x^2 + 4x - 7)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 + 4x - 7} = \frac{-8 + 6 + 5}{4 - 8 - 7} = -\frac{3}{11}. \end{aligned}$$

Розглянемо декілька задач на знаходження границь дробово-раціональної функції при  $x \rightarrow \infty$ .

При  $x \rightarrow \infty$  і чисельник, і знаменник дробу функції нескінченно великі. Отже, ми маємо справу з відношенням двох нескінченно великих функцій (маємо невизначеність  $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ ). В такому випадку необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищу степінь  $x$ , яка зустрічається в членах дробу.

### Приклад 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 6x}{7x^3 - 4x + 3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

(найвища степінь  $x$  дорівнює 3, тому розділимо кожен елемент дробу на  $x^3$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{7 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 7 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)} = \\ &= \frac{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2}}{7 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3}} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Тут  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} = 0$  (за властивостями нескінченно великих величин).

### Приклад 5.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{6x^3 - 9x^2 - 7x + 2} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^5}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5} - \frac{9x^2}{x^5} - \frac{7x}{x^5} + \frac{2}{x^5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2} - \frac{9}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{2}{x^5}} = \frac{5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x^3} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^4} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^5}} = \frac{5}{0} = \infty.\end{aligned}$$

### Приклад 6.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{4x^6 - 7x^5 + 2x} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8x^3}{x^6} + \frac{3x^2}{x^6} - \frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6} - \frac{7x^5}{x^6} + \frac{2x}{x^6}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{9}{x^6}}{4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x^3} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^4} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x^6}}{4 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^5}} = \frac{0}{4} = 0.\end{aligned}$$

### 3.2.2. Знаходження границі від ірраціональної функції

Щоб знайти границю дробу, яка має ірраціональний вираз у випадку, коли і чисельник, і знаменник дробу дорівнює нулю (маємо невизначеність  $\left| \frac{0}{0} \right|$ ), необхідно помножити чисельник і знаменник на вираз спряжений до даного ірраціонального виразу.

### Приклад 7.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 9} = \frac{\sqrt{3+6} - 3}{9 - 9} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

(спряженим до виразу  $\sqrt{x+6} - 3 \in \sqrt{x+6} + 3$ , тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 9}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+6} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{12}.$$

**Приклад 8.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x})}{(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x})(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x})}{(\sqrt{7-x})^2 - (\sqrt{11+x})^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x})}{7-x-11-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x})}{-4-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x})}{-2(2+x)} = -\frac{6}{2} = -3. \end{aligned}$$

**Приклад 9.**

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

(в даному випадку ми маємо ірраціональні вирази і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на відповідні вирази їм спряжені)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x})(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9})(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{((\sqrt{x^2+7})^2 - (\sqrt{7-3x})^2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9})}{((\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x^2-9})^2)(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+7-7+3x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9})}{(x+3-x^2+9)(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+3x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9})}{-(x^2-x-12)(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9})}{-(x-4)(x+3)(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x})} = \frac{-3(0+0)}{7(4+4)} = 0. \end{aligned}$$

### 3.2.3. Перша важлива границя

Перша важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

При знаходженні границь будемо використовувати наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

**Приклад 10.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x \cdot x^2 \cos x} = \left[ \begin{array}{l} 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 \cos x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x \cdot x \cdot \cos x} = \left( \text{помножимо і чисельник і знаменник на } \frac{1}{4} \right) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{2} x \cdot \cos x} = \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 11.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 3x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot 9x^2}{\sin^2 3x \cdot 9x^2} = \left[ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{\sin^2 3x} = 1 \end{array} \right] = \frac{1}{9}.$$

**Приклад 12.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x \cdot 15x}{\sin 3x \cdot 15x} = \left[ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{5x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1 \end{array} \right] = \frac{5}{3}.$$

### Приклад 13.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x+2x}{2} \sin \frac{4x-2x}{2}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin x}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x \sin x}{3x \cdot x} = -6.\end{aligned}$$

### 3.2.4. Друга важлива границя

В цьому розділі ми розглянемо границі від показниково-степеневі функції  $f(x)^{\varphi(x)}$ , коли  $f(x) \rightarrow 1$  і  $\varphi(x) \rightarrow \infty$ ; тобто маємо невизначеність  $|1^\infty|$ . Друга важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx} = |1^\infty| = e^k \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{k}{x}} = |1^\infty| = e^k.$$

Число  $e$  – ірраціональне ( $e \approx 2,718 \dots$ ), його називають експонентою. Коротко *exp*.

### Приклад 14.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2} = \left[ \begin{array}{l} \frac{3x-1}{4+3x} \rightarrow 1, \text{ коли } x \rightarrow \infty \\ 5x-2 \rightarrow \infty, \text{ коли } x \rightarrow \infty \end{array} \right] = |1^\infty| =$$

(до основи показниково-степеневі функції додамо та віднімемо одиницю)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x-1}{4+3x} - 1\right)^{5x-2} =$$

(приведемо до єдиного знаменника другий та третій елементи основи)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2} =$$

(помножимо степінь на дріб обернену до дробу, яку додаємо до одиниці у основі функції, а потім на таку ж, яку маємо)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{(-5)}{4+3x} \right)^{\frac{4+3x}{-5} \cdot \frac{(-5)}{4+3x} \cdot (5x-2)} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5(5x-2)}{4+3x} \right) \\
&= \exp \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10-25x}{4+3x} \right) = \exp \left( -\frac{25}{3} \right)
\end{aligned}$$

**Приклад 15.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x-3} \right)^{3x+2} &= |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4x-1}{4x-3} - 1 \right)^{3x+2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4x-1-4x+3}{4x-3} \right)^{3x+2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{4x-3} \right)^{\frac{4x-3}{2} \cdot \frac{2}{4x-3} \cdot (3x+2)} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+4}{4x-3} \right) = \sqrt{e^3}
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли у дужках знаходиться раціональний дріб максимальна степінь змінних чисельника і знаменника однакові, а коефіцієнти при них різні:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{kx} = \left( \frac{a}{c} \right)^\infty$$

У такому випадку є два рішення: 1) якщо  $a > c$ , то  $\left( \frac{a}{c} \right)^\infty = \infty$

2) якщо  $a < c$ , то  $\left( \frac{a}{c} \right)^\infty = 0$ .

**Приклад 16.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x-4}{9x+3} \right)^{x+2} = \left( \frac{7}{9} \right)^\infty = 0.$$

**Приклад 17.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+8}{2x-6} \right)^{7x} = \left( \frac{5}{2} \right)^\infty = \infty.$$

## 4. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### 4.1. Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним з основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних, економічних та управлінських задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

**Визначення.** *Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідну функції  $f(x)$  позначають одним із символів:  $f'(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$

$$\text{Отже, } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням*. Функція  $y = f(x)$ , яка має похідну в кожній точці інтервалу  $(a; b)$ , називається *диференційованою в цьому інтервалі*.

Значення похідної функції  $y = f(x)$  в точці  $x = x_0$  позначається  $f'(x_0)$  або  $y'(x_0)$ .

### Правила диференціювання

Нехай функції  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дві диференційовані в інтервалі  $(a, b)$  функції, тоді мають місце наступні правила:

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;

2.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ;

3.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ;

4.  $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ ;

5.  $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$ ;

6.  $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$ .



### Таблиця похідних

1.  $(C)' = 0$ ;                      2.  $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ;
- 2а.  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ ;                      2б.  $(\frac{1}{u})' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$ ;
3.  $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ ;                      3а.  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ;
4.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ ;                      4а.  $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ ;
5.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ;                      6.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
7.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ ;                      8.  $(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$ ;
9.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ ;                      10.  $(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ ;
11.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ ;                      12.  $(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$ .

#### 4.1.1. Приклади знаходження похідних

**Знайти похідні від функцій:**

а)  $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$ ,                      б)  $y = 3\sin 5x$ ,

в)  $y = \operatorname{tg} 3x^2$ ,                      г)  $y = \arccos \sqrt{5x^4 - 3}$ ,                      д)  $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}$ ,

е)  $y = \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12}$ ,                      ж)  $y = \operatorname{arcctg}^5 x \cdot \log_5(x^2 + 2)$ ,                      з)  $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{\sin x}}$ .

**Розв'язання.**

а)  $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$ ,

дана функція є сумою степеневих функцій і сталої величини. Похідні від степеневих функцій знаходимо за другою формулою в таблиці похідних,

пам'ятаючи перше правило диференціювання, похідну сталої величини шукаємо за першою формулою в таблиці:

$$\begin{aligned} y' &= (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' = \\ &= 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7. \end{aligned}$$

$$\text{б) } y = 3\sin 5x,$$

за четвертим правилом диференціювання виносимо сталу за знак похідної, потім використовуємо п'яту формулу з таблиці похідних, де  $u = 5x$

$$y' = (3\sin 5x)' = 3 \cdot (\sin 5x)' = 3 \cdot \cos 5x \cdot (5x)' = 3 \cdot \cos 5x \cdot 5 = 15\cos 5x;$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg} 3x^2, \quad y' = (\operatorname{tg} 3x^2)' = \frac{1}{\cos^2 3x^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{\cos^2 3x^2} \cdot 6x = \frac{6x}{\cos^2 3x^2};$$

у цьому випадку знаходили похідну, користуючись сьомою формулою таблиці похідних, де  $u = 3x^2$ ;

$$\text{г) } y = \arccos \sqrt{5x^4 - 3},$$

використовуючи десятю формулу таблиці похідних, де  $u = \sqrt{5x^4 - 3}$ . В свою чергу  $u = u(v)$ , де  $v = 5x^4 - 3$ . Отже, знаходимо:

$$\begin{aligned} y' &= (\arccos \sqrt{5x^4 - 3})' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{5x^4 - 3})^2}} \cdot (\sqrt{5x^4 - 3})' = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4 - 5x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^4 - 3}} \cdot (5x^4 - 3)' = \frac{-10x^3}{\sqrt{4 - 5x^4} \cdot \sqrt{5x^4 - 3}}. \end{aligned}$$

$$\text{д) } y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}$$

запишемо функцію в інший спосіб та використаємо другу формулу таблиці похідних:

$$y' = \left( \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4} \right)' = \left( (5x^4 - 3x^3 + 7)^{\frac{4}{5}} \right)' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)' = \\
&= \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (20x^3 - 9x^2) = \frac{80x^3 - 36x^2}{5\sqrt[5]{5x^4 - 3x^3 + 7}}.
\end{aligned}$$

$$\text{е) } y = \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12},$$

спочатку розкладемо похідну за другим правилом диференціювання, потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$\begin{aligned}
y' &= (\cos 2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + \cos 2x^3 \cdot ((5x - 2)^{12})' = \\
&= -\sin 2x^3 \cdot (2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + \cos 2x^3 \cdot 12(5x - 2)^{11} \cdot (5x - 2) = \\
&= -6x^2 \sin 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12} + 60 \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{11}.
\end{aligned}$$

$$\text{ж) } y = \operatorname{arctg}^5 x \cdot \log_5(x^2 + 2),$$

знаходимо похідну також, як у прикладі е) :

$$\begin{aligned}
y' &= (\operatorname{arctg}^5 x)' \cdot \log_5(x^2 + 2) + \operatorname{arctg}^5 x \cdot (\log_5(x^2 + 2))' = \\
&= 5 \operatorname{arctg}^4 x (\operatorname{arctg} x)' \log_5(x^2 + 2) + \operatorname{arctg}^5 x \frac{1}{(x^2 + 2) \ln 5} (x^2 + 2)' = \\
&= \frac{-5 \operatorname{arctg}^4 x \cdot \log_5(x^2 + 2)}{1 + x^2} + \frac{2x \cdot \operatorname{arctg}^5 x}{(x^2 + 2) \ln 5}.
\end{aligned}$$

$$\text{з) } y = \frac{(4x + 2)^2}{e^{\sin x}},$$

в цьому прикладі спочатку використовуємо третє правило диференціювання, потім – формули з таблиці похідних:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{((4x + 2)^2)' \cdot e^{\sin x} - (4x + 2)^2 \cdot (e^{\sin x})'}{(e^{\sin x})^2} = \\
&= \frac{2(4x + 2)(4x + 2)' e^{\sin x} - (4x + 2)^2 e^{\sin x} (\sin x)'}{e^{2\sin x}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{\sin x}(8(4x+2) - (4x+2)^2 \cos x)}{e^{2\sin x}} = \frac{(4x+2)(8 - (4x+2)\cos x)}{e^{\sin x}}.$$

#### 4.1.2. Похідна функції, заданої у параметричній формі.

Нехай функцію задано у параметричній формі:  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  де  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  – неперервні і диференційовані, коли параметр  $t \in (\alpha; \beta)$ . Нехай функція  $x = \varphi(t)$  має обернену  $t = t(x)$ , яка також диференційована (це означає, що у деякій точці  $t_0 \in (\alpha; \beta)$  похідна  $x'_t \neq 0$ ), тоді має місце формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (*)$$

**Приклад 1.** Знайти  $y'_x$ , якщо  $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ .

**Розв'язання.** Знаходимо  $x'_t = (1 - t^2)' = -2t$  і  $y'_t = (t - t^3)' = 1 - 3t^2$ . Підставляючи знайдені вирази для  $x'_t$  і  $y'_t$  до формули (\*), отримаємо:

$$y'_x = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$

**Приклад 2.** Знайти  $y'_x$ , якщо  $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctg t \end{cases}$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$x'_t = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для  $x'_t$  і  $y'_t$  до формули (\*), дістанемо:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

**Приклад 3.** Знайти  $y'_x$ , якщо  $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

**Розв'язання:** Знаходимо  $x'_t$  і  $y'_t$ :

$$x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t);$$

$$y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t).$$

$$y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

#### 4.1.3. Похідна неявно заданої функції.

Якщо функція задана рівнянням  $F(x, y) = 0$  (неявно), то для знаходження похідної від  $y$  по  $x$  необхідно продиференціювати рівняння по  $x$ , вважаючи, що  $y$  є функцією від  $x$  (тобто  $(x)' = 1$ ,  $(y)' = y'$ ); отримане рівняння слід розв'язати відносно  $y'$ .

**Приклад 1.** Знайти  $y'_x$ , якщо  $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$ .

**Розв'язання.** Диференціюємо функцію по  $x$ , вважаючи, що  $y$  є функцією від  $x$ :

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно  $y'$ :

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \quad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

**Приклад 2.** Знайти  $y'_x$ , якщо  $\sin 2x + \cos 3y = \sin^2 y + 1$ .

**Розв'язання.** Диференціюємо функцію по  $x$ , вважаючи, що  $y$  є функцією від  $x$ :

$$2\cos 2x - 3\sin 3y \cdot y' - 2\sin y \cdot \cos y \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно  $y'$ :

$$y' \cdot (3\sin 3y + 2\sin y \cdot \cos y) = 2\cos 2x,$$

$$y' = \frac{2\cos 2x}{3\sin 3y + 2\sin y \cdot \cos y}.$$

#### 4.1.4. Логарифмічне диференціювання.

а) Якщо функція  $y = f(x)$  являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

**Приклад.** Знайти  $y'$ , якщо  $y = \sqrt[5]{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}^2 x \cdot \sqrt[4]{\cos x}$ .

**Розв'язання.** Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$\ln y = \ln(\sqrt[5]{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}^2 x \cdot \sqrt[4]{\cos x}),$$

$$\ln y = \frac{1}{5} \ln \sin x + 2 \ln \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \cos x,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам'ятаючи, що  $(x)' = 1$ ,  $(y)' = y'$ :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\operatorname{ctg} x}{5} + \frac{2}{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)} - \frac{\operatorname{tg} x}{4}.$$

Знайдемо шукану похідну. Для цього помножимо ліву та праву частину на  $y$ :

$$y' = y \cdot \left( \frac{\operatorname{ctgx}}{5} + \frac{2}{\operatorname{arctgx} \cdot (1+x^2)} - \frac{\operatorname{tgx}}{4} \right),$$

$$y' = \sqrt[5]{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}^2 x \cdot \sqrt[4]{\cos x} \cdot \left( \frac{\operatorname{ctgx}}{5} + \frac{2}{\operatorname{arctgx} \cdot (1+x^2)} - \frac{\operatorname{tgx}}{4} \right).$$

б) Похідна показниково-степеневі функції.

Функція  $y = (u(x))^{v(x)}$  називається *показниково-степеневі* функцією. Похідна від неї знаходиться за допомогою логарифмічного диференціювання.

Розглянемо приклади.

**Приклад.** Знайти  $y'$ , якщо  $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$ .

**Розв'язання.** Прологарифмуємо  $\ln y = \ln(x^2 + 1)^{\sin x}$ , скористаємося властивістю логарифмів  $\ln y = \sin x \cdot \ln(x^2 + 1)$ .

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Знаходимо  $y'$ :  $y' = y \cdot \left( \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right)$ .

На місце  $y$  записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot \left( \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right).$$

Остаточно:  $y' = (x^2 + 1)^{\sin x - 1} \cdot \left[ (x^2 + 1) \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + 2x \sin x \right]$ .

#### 4.1.5. Похідні вищих порядків

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована у проміжку  $(a; b)$ . Похідна цієї функції  $f'(x)$  є функцією аргументу  $x$ . Якщо функція  $f'(x)$

диференційована у цьому ж проміжку, то її похідна називається *похідною другого порядку* і позначається  $f''(x)$  ( або  $y''$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ,  $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$  ). Таким чином,  $y'' = (y')'$ .

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається *похідною третього порядку* і позначається  $f'''(x)$  ( або  $y'''$ ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$ ,  $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$  ).

Таким чином,  $y''' = (y'')'$ .

*Похідною  $n$  – го порядку* (або  $n$ -ю похідною, якщо вона існує) називається похідна від похідної  $(n - 1)$  порядку:

Таким чином,  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ .

Похідні, порядок яких вище першого, називають *похідними вищих порядків*.

**Приклад 1.** Знайти  $y'''$ , якщо  $y = 2e^{3x}$ .

**Розв'язання.**  $y' = 6 \cdot e^{3x}$ ;  $y'' = (6 \cdot e^{3x})' = 18 \cdot e^{3x}$ ;

$$y''' = (18 \cdot e^{3x})' = 54 \cdot e^{3x}.$$

**Приклад 2.** Знайти  $y'''$  в точці  $x_0 = 1$ , якщо  $y = 7x^5 - 3x^3 + 8x - 4$ .

**Розв'язання.**  $y' = 35x^4 - 9x^2 + 8$ ,  $y'' = 140x^3 - 18x$ ,  $y''' = 520x^2 - 18$ ,  $y'''(1) = 520 - 18 = 502$ .

#### 4.1.6. Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ )

**Теорема (Правило Лопіталя).** Нехай функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  неперервні і диференційовні в околі точки  $x_0 = a$ , тобто  $0 < |x - a| < \varepsilon$ , причому  $\varphi'(x) \neq 0$ , тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення



похідних  $f'(x)$  і  $\varphi'(x)$  при  $x \rightarrow a$ , то відношення функцій має границю, тобто:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| \text{ або } \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо  $a = \infty$ ,

тобто: 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| \text{ або } \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 2: існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірне, оскільки границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні  $f'(x)$  і  $\varphi'(x)$  будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна брати границю відношень других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Для інших невизначенностей треба виконати тотожні перетворення до розглянутих:  $\left| \frac{0}{0} \right|$  або  $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ , щоб застосувати правило Лопіталя.

**Приклад 1.** Знайти границі функцій

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{2x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{2} = \frac{3}{2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{5x}}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^{5x}}{2x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25e^{5x}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty;$$

(застосували правило Лопіталя двічі).

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln x = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^4 \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2} = 0;$$

Виконали тотожне перетворення  $|0 \cdot \infty|$  до  $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ . Для цього замінили множення діленням на обернене.

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x}{8x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1 + 16x^2}{8}} = \frac{1}{8};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x \cdot \ln(x-1)) = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{1/\ln x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x-1}{-1/x \cdot (\ln x)^2} =$$

$$-\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{x-1} = \left| \frac{0}{0} \right| = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^2 + \frac{2x \ln x}{x}}{1} = 0;$$

(Виконали тотожне перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

$$е) \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2\arctg x) \cdot \ln x = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{1/\ln x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2/1+x^2}{-1/x(\ln x)^2} =$$

$$= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(\ln x)^2}{1+x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\ln x)^2 + 4\ln x}{2x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4\ln x}{x} + \frac{4}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\ln x + 1)}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

(Виконали тотожне перетворення і застосували правило Лопіталя 4 рази)

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} =$$

$$= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2};$$

(Виконали тотожне перетворення, а саме, привели дробі до спільного знаменника і застосували правило Лопіталя двічі).

**Приклад 2.** Знайти границі функцій

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = |0^0| = A ,$$

функція є показниково-степенною, тому позначимо границю функції через  $A$ , та прологарифмуємо її:

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \arcsin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arcsin x}{\operatorname{ctg} x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \end{aligned}$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування маємо:

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} = \left| \frac{0}{0} \right|$$

Знову застосовуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1-x^2}}{x \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{0}{1} = 0 , \end{aligned}$$

Отже,  $\ln A = 0$  і тоді  $A = e^0 = 1$ .

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = |\infty^0| = A ,$$

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \operatorname{ctg} x =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x} = \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x \cdot \cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -1,
\end{aligned}$$

отримали  $\ln A = -1$ , тоді  $A = e^{-1}$ .

## 4.2 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

### 4.2.1 Зростання і спадання функції

**Теорема.** Для того, щоб диференційована на проміжку  $(a; b)$  функція  $f(x)$  зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) при будь-якому  $x \in (a; b)$ .

**Приклад.** Знайти проміжки зростання і спадання функції  $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ .

**Розв'язання.** Знайдемо область визначення функції:  $x \neq 4$ , тобто  $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ . Знайдемо похідну цієї функції:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(2x - 4)(x - 4) - (x^2 - 4x + 1)}{(x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 4x + 16 - x^2 + 4x - 1}{(x - 4)^2} = \\
&= \frac{x^2 - 8x + 15}{(x - 4)^2} = \frac{(x - 5)(x - 3)}{(x - 4)^2};
\end{aligned}$$

Для визначення проміжків зростання і спадання функції, визначимо знак похідної:  $y' = 0$ ;  $\frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2} = 0$ .

Звідси знаходимо корені похідної:  $x = 5$  і  $x = 3$ . На Рис. 4 зображено

інтервали зростання і спадання даної функції.

Знак  $y'$ :

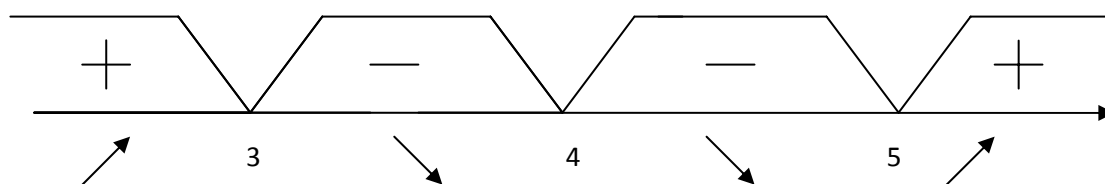


Рис. 4

Зробимо висновок, що функція зростає, коли:  $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ ,  
функція спадає, коли:  $x \in (3; 4) \cup (4; 5)$ .

#### 4.2.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція  $f(x)$  визначена в точці  $x_0$  і її околі. Точка  $x_0$  називається *точкою максимуму (мінімуму) функції  $f(x)$* , якщо значення функції у точці  $x_0$  більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки  $x_0$ :  $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$  (або  $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ ), коли  $\Delta x > 0$  або  $\Delta x < 0$ .

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції*.

**Теорема (необхідна умова існування екстремуму).** Якщо диференційована функція  $f(x)$  має у точці  $x_0$  максимум або мінімум, то необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Геометрично рівність  $f'(x_0) = 0$  означає, що в точці екстремуму функції  $f(x)$  дотична до її графіка паралельна осі  $Ox$ , а якщо  $f'(x_0) = \infty$ , то дотична паралельна осі  $Oy$ .

Зауважимо, що умова  $f'(x_0) = 0$  не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції  $y = x^3$  її похідна  $y' = 3x^2$  дорівнює нулю при  $x = 0$ , але  $x = 0$  не є точкою екстремуму.

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, неперервна функція  $y = |x|$  в точці  $x = 0$  похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними*.

**Теорема (достатня умова існування екстремуму).** Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку  $x_0$  диференційованої в деякому околі цієї точки функції  $f(x)$  її похідна  $f'(x)$  змінює знак з плюса на мінус, то  $x_0$  – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то  $x_0$  – є точкою мінімуму.

**Приклад.** Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції:  $y = x^3 - 3x$ .

**Розв'язання.** Нагадаємо, що будь-яке дослідження функції необхідно розпочинати з знаходження її області визначення. Тут  $D(y) = R$ .

Похідна цієї функції:  $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ ;  $f'(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ;  $f'(x) < 0$  при  $x \in (-1; 1)$ .

При переході через точку  $x_0 = -1$  похідна функції змінює знак з «+» на «-», тобто в точці  $x_0 = -1$  знаходиться максимум функції. При переході через точку  $x_0 = 1$  похідна функції змінює знак з «-» на «+», в точці  $x_0 = 1$  знаходиться мінімум функції.

Отже, функція  $y = x^3 - 3x$  зростає на проміжках  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$  і спадає на проміжку  $(-1; 1)$ . Максимум її знаходиться в точці  $x_0 = -1$ , мінімум-в точці  $x_0 = 1$ .

### 4.2.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину.

Нехай функція  $f(x)$  диференційована на проміжку  $(a, b)$ .

Графік функції  $f(x)$  називається *опуклим (угнутим)* на проміжку  $(a, b)$ , якщо усі точки кривої  $f(x)$  розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь-якій точці графіка на цьому проміжку.

Точку графіка функції  $f(x)$ , у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину*.

У подальшому вважаємо, що функція  $f(x)$  має другу похідну на проміжку  $(a, b)$ .

#### **Теорема (достатня умова опуклості графіка функції).**

Якщо друга похідна функції  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ ) в усіх точках проміжку  $(a, b)$ , то графік функції опуклий вгору (опуклий вниз) на цьому проміжку.

#### **Теорема (достатня умова існування точок перегину).**

Якщо друга похідна  $f''(x)$  при переході через точку  $x_0$ , в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

**Приклад.** Дослідити функцію  $y = x^5 - 2x + 5$  на опуклість і знайти точки перегину.

**Розв'язання.** Область визначення  $D(y) = R$ . Знайдемо першу і другу похідні даної функції:  $y' = 5x^4 - 2$ ,  $y'' = 20x^3$ . Друга похідна дорівнює нулю  $y'' = 0$  при  $x = 0$ . Тому  $y' > 0$  при  $x > 0$ ;  $y' < 0$  при  $x < 0$

Отже, графік функції функцію  $y = x^5 - 2x + 5$  є опуклим на проміжку  $(-\infty; 0)$  і угнутим на проміжку  $(0; \infty)$ . Точка  $(0; 5)$  є точкою перегину.

#### 4.2.4 Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про поведінку графіка функції при віддаленні його точок на нескінченність.

*Асимптотою графіка функції  $y = f(x)$  називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.*

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма  $x = a$  є *вертикальною асимптотою* графіка функції  $y = f(x)$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b,$$

$$\text{де } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx).$$

Таким чином, якщо існує похила асимптота  $y = kx + b$ , то  $k$  і  $b$  знаходять за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для  $k$  і  $b$ , то пряма  $y = kx + b$  є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо  $k = 0$ , то  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Тому  $y = b$  – рівняння *горизонтальної асимптоти*.

Зауваження. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при  $x \rightarrow -\infty$  і при  $x \rightarrow +\infty$ .

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні  $k$  і  $b$  не існує або дорівнює  $\infty$ , то похилих асимптот немає.



**Приклад.** Знайти асимптоти графіка функцій  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ .

Область визначення  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Шукаємо вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty;$$

звідси  $x = -1$  і  $x = 1$  є вертикальними асимптотами.

Похили асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0. \end{aligned}$$

Підставляючи  $k = 1$  і  $b = 0$  в рівняння  $y = kx + b$ , отримаємо:  $y = x$ , це шукана похила асимптота.

#### 4.2.5. Повна схема дослідження функції

При дослідженні графіка функції в цілому, рекомендується, наприклад, загальна схема, за якою слід:

- 1) знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
- 2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
- 3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- 4) знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
- 5) знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;

б) знайти асимптоти графіка функції;

7) побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

**Приклад** . Дослідити функцію  $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення:  $x \neq \pm 1$ ; тобто  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

Прямі  $x = \pm 1$  служать вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$$

2. Обчислимо  $y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$ , тобто виконується

рівність  $y(-x) = y(x)$ , одже, функція парна і її графік симетричний відносно осі  $Oy$ .

3. Точка перетину з віссю  $Oy$ :  $x=0$ ;  $y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$ . Маємо точку  $A(0;1)$ .

Точок перетину з віссю  $Ox$  нема. При  $y=0$ , рівняння  $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$  не має рішень.

4. Інтервали монотонності та екстремуми.

$$\text{Знайдемо } y'(x): \quad y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$y'(x) = 0$ , якщо  $x = 0$  та  $y'(x)$  не існує, якщо  $x = \pm 1$ , тобто критичною є тільки точка  $x = 0$ , оскільки точки  $x = \pm 1$  не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на Рис. 5.

Знак  $y'$ :

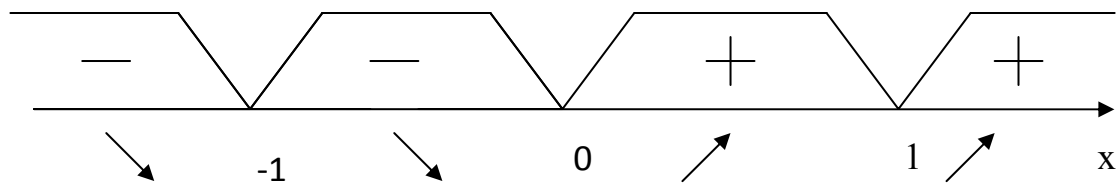


Рис. 5

На інтервалах  $(-\infty; -1)$  та  $(-1; 0)$  функція спадає, оскільки тут  $y'(x) < 0$ .

На інтервалах  $(0; 1)$  та  $(1; +\infty)$  функція зростає, оскільки тут  $y'(x) > 0$ . Зміна знака похідної при переході через точку  $x = 0$  ( $y(0) = 1$ ), вказує на те, що точка  $B(0; 1)$  – екстремальна. Це точка мінімуму функції.

5. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

Знайдемо другу похідну даної функції:

$$y''(x) = \left( \frac{4x}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на Рис. 6.

Знак  $y''$ :

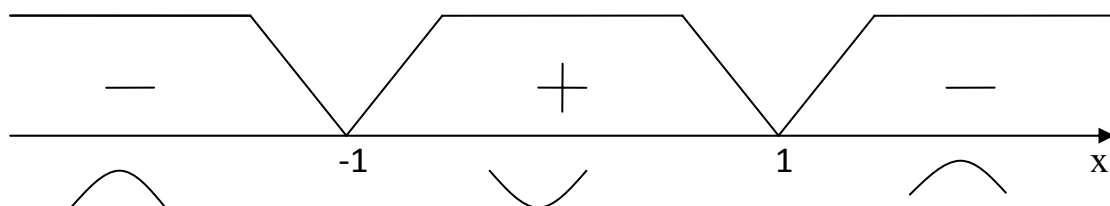


Рис. 6

На інтервалах  $(-\infty; -1)$  та  $(1; +\infty)$  графік функції опуклий, тому що

тут  $y''(x) < 0$ . На інтервалі  $(-1, 1)$  графік функції угнутий, тому що тут  $y''(x) > 0$ . Точок перегину немає.

**6.** Знайдемо вертикальні асимптоти:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{2}{0} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Отже  $x = -1$  та  $x = 1$  – вертикальні асимптоти.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y = kx + b$$

Знайдемо параметри  $k$  та  $b$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптоту:  $y = -1$ .

**7.** Побудуємо ескіз графіка функції, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 7):

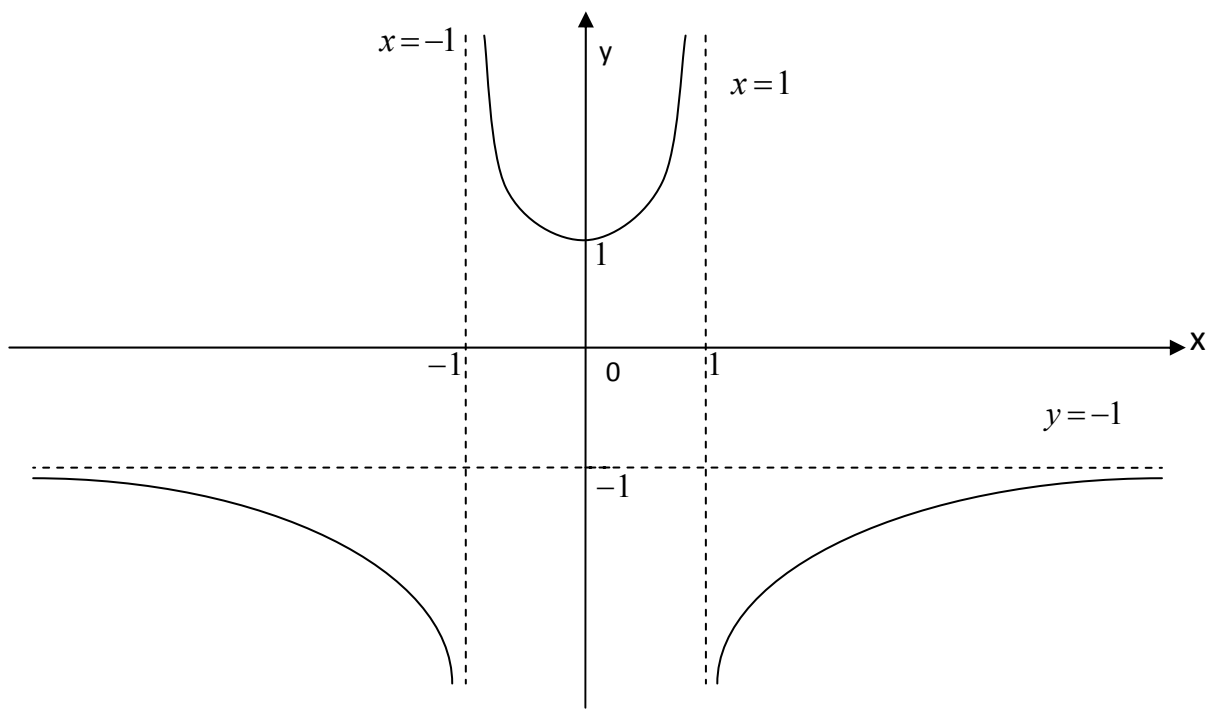


Рис. 7

## 5. Контрольна робота.

### Варіант 1

1. Дано  $\triangle ABC : A(6;2), B(9;5), C(10;2)$ . Знайти: а) рівняння медіани  $BD$ ; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони  $AC$ ; в) площу  $\triangle ABC$ ; г)  $\angle BAC$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -7; \\ 3x + y + z = -1; \\ -3x + 5y + 6z = 14. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x \sin 2x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x}{4x - 3} \right)^{5x-3}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 - x^2} - 4}{\sqrt{25 + x^2} - 5}$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 + x + 1}$ .

4. Знайти похідні наступних функцій:

а)  $y = (5x - 2)^2(6x + 1)^2$ ;      б)  $y = \frac{2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$ ;      в)  $y = (\operatorname{arccot} x)^{\log_2 7^x}$ ;

г)  $(e^x - 1)(e^y - 1) - 4y = 0$ ;      д)  $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = -2\sin \frac{2}{t} - e^t \end{cases}$

5. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x + \operatorname{tg} 5x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{3}{x}}$ .

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

### Варіант 2

1. Дано  $\triangle ABC : A(2;2), B(5;5), C(6;2)$ . Знайти: а) рівняння медіани  $CP$ ; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони  $AB$ ; в) площу  $\triangle ABC$ ; г)  $\angle CAB$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} x + y - z = 1; \\ 8x + 3y - 6z = 2; \\ -4x - y + 3z = -3. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

$$а) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^3 - 8}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos^3 5x}{4x^2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{2x-6}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 16x + 5}{x^2 - 2x - 15}.$$

4. Знайти похідні наступних функцій:

$$а) y = \frac{x^3}{8 - x^4}; \quad б) y = \sqrt{\ln x} + \ln \sqrt{x}; \quad в) y = (\arctg x)^{\cos^2 x};$$

$$г) x^2 y = e^{\frac{y}{x}}; \quad д) \begin{cases} x = t - \ln(\sin t) \\ y = t + \ln(\cos t) \end{cases}$$

5. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\arctg^2 3x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))^{tg x}.$$

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

### Варіант 3

1. Дано  $\Delta ABC$ :  $A(-2;2), B(1;5), C(2;2)$ . Знайти: а) рівняння медіани  $AM$ ; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони  $BC$ ; в) площу  $\Delta ABC$ ; г)  $\angle ABC$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 20; \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x-4} \right)^{5x+1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 6x + \sin 2x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + 5x - 1}{x^2 - 4x - 5}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - \sqrt{x^2 + 60}}{\sqrt{x^2 + 12} - 4}.$$

4. Знайти похідні наступних функцій:

$$a) y = \left( \frac{x}{x-1} \right)^3; \quad б) y = (1+x-x^2)(1-2x^2)^2; \quad в) y = (\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{arctg} x};$$

$$г) \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad д) \begin{cases} x = \cos \frac{2}{t} \\ y = t - \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

5. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x^2}{1 - \cos 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x^2}.$$

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 4}.$$

#### Варіант 4

1. Дано  $\triangle ABC$ :  $A(-6;2), B(-3;5), C(-2;2)$ . Знайти: а) рівняння висоти  $BD$ ; б) рівняння середньої лінії трикутника, що паралельна до сторони  $AC$ ; в) площу  $\triangle ABC$ ; г)  $\angle ABC$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

2. Обчислити границі .

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{16 - x^2}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-5} \right)^{2x-1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 - \sqrt{49 + x^2}}{6 - \sqrt{36 + x^2}}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

4. Знайти похідні наступних функцій:



$$a) y = \frac{4x + 5}{\sqrt{x}}; \quad б) y = (3x^2 - 1)^2(1 - x^3); \quad в) y = (\log_5 x)^{\cos \frac{1}{x}};$$

$$г) x - y = -\arctg y; \quad д) \begin{cases} x = e^{2t} + 2^t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

5. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\arctg x + \operatorname{tg} 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x)^{1/x}.$$

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^3 - 8}{2x^2}.$$

### Варіант 5

1. Дано  $\triangle ABC$ :  $A(-10;2), B(-7;5), C(-6;2)$ . Знайти: а) рівняння висоти  $CK$ ; б) рівняння прямої, що проходить через середини сторін  $AC$  і  $AB$ ; в) площу  $\triangle ABC$ ; г)  $\angle CAB$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 17x + 6}{x^3 - 27}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x}{4x - 5} \right)^{3x+1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - \cos 2x}{3x^2}; \quad г) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{10 + x} - 3}{\sqrt{x^2 + 15} - 4}.$$

4. Знайти похідні наступних функцій:

$$a) y = \frac{x^2}{x^4 + 2x}; \quad б) y = \sqrt{1 - 2x}(x^3 - 2x); \quad в) y = (\arcsin x)^{\operatorname{tg}^3 x};$$

$$г) y^3 x^2 = \ln \frac{y}{x}; \quad д) \begin{cases} x = 2t + \ln(\cos t) \\ y = t - \ln(\sin 3t) \end{cases}$$

5. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^3 + \operatorname{tg} 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{tg} x}.$$

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка.

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}.$$

### Варіант 6

1. Дано  $\triangle ABC$ :  $A(6;2), B(9;2), C(10;-2)$ . Знайти: а) рівняння висоти  $AD$ ; б) довжину сторони  $AC$ ; в) площу  $\triangle KLM$ , якщо точки  $K, L, M$  – середини відповідно сторін  $AB, AC, BC$ ; г)  $\angle ACB$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8; \\ 2x - y - 3z = -4; \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 7x + 2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - \sqrt{x + 24}}{x^2 - 5x + 4}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x + 2}{7x + 3} \right)^{3x-1}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{x \cdot \arcsin x}$ .

4. Знайти похідні наступних функцій:

а)  $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{\sin^3 x}$ ;

б)  $y = \frac{4^x}{1 + x^2}$ ;

в)  $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{\arcsin 3x}$ ;

г)  $2x - y^2 = \operatorname{arcctg} y$ ;

д)  $\begin{cases} x = 3 \sin \frac{2}{t} \\ y = t - \cos \frac{t^2}{\sqrt{2}} \end{cases}$

5. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 4x}{\cos x - e^x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{1/x^2}$ .

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{(x + 3)^2}{x + 4}.$$

### Варіант 7

1. Дано  $\triangle ABC$ :  $A(2;-2), B(5;-5), C(6;-2)$ . Знайти: а) рівняння медіани  $BD$ ; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони  $AC$ ; в) площу  $\triangle ABC$ ; г)  $\angle BAC$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} \right)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x^2 - 32x + 12}{x^2 - 36}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 15} - 4}{\sqrt{x^2 + 8} - 3}$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 7}{2x - 8} \right)^{x-1}$ .

4. Знайти похідні наступних функцій:

а)  $y = \frac{2x^4}{e^{3\sin x}}$ ;      б)  $y = \arccos \sqrt[3]{\frac{5}{x}}$ ;      в)  $y = (\arcsin 2x)^{\ln 3x}$ ;

г)  $(e^{x^2} + 4x)(2e^y - 1) - 3y = 0$ ;      д)  $\begin{cases} x = 3\sqrt{\cos t} \\ y = 2\sqrt{\sin \frac{2}{t}} - e^{3t} \end{cases}$

5. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{1/\operatorname{ctg} x}$ .

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{1 - 2x^3}{x^2 - 4}$$

### Варіант 8

1. Дано  $\triangle ABC$ :  $A(-2;-2), B(1;-5), C(2;-2)$ . Знайти: а) довжину висоти  $BD$ ; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони  $AB$ ; в) площу  $\triangle ABC$ ; г)  $\angle ABC$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 3; \\ 2x + 4y - 3z = 2; \\ 3x - y - 3z = -7. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

$$а) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 17x + 6}{x^2 - x - 6}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3 + x^2} - 2}{3 - \sqrt{8 - x}};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5x + 4}{5x - 1} \right)^{3x+7}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}.$$

4. Знайти похідні наступних функцій:

$$а) y = \frac{(x + 2)^3}{\operatorname{tg}^2 3x}; \quad б) y = \sqrt{2 \ln x^2} + 3 \ln \sqrt{3x + 8}; \quad в) y = (\operatorname{arctg} x^3)^{\cos 4x};$$

$$г) x y^3 - 5y = e^{\frac{2y}{x}}; \quad д) \begin{cases} x = t - \ln(\operatorname{tg} t) \\ y = t + \ln(\operatorname{ctg} t) \end{cases}$$

5. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{arcsin} x^2}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} (x + \ln x)^{1/\ln x}.$$

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$$

### Варіант 9

1. Дано  $\triangle ABC$ :  $A(-6; -2), B(-3; -5), C(-2; -2)$ . Знайти: а) довжину медіани  $CP$ ; б) рівняння перпендикуляра до сторони  $BC$ , проведеного з точки  $M(1; -3)$ ; в) площу  $\triangle ABN$ , де  $N$  – середина сторони  $BC$ ; г)  $\angle ANB$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) матричним методом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1; \\ x - 2y + 4z = 3; \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

3. Обчислити границі .

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \operatorname{tg} 3x}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x + 3}{2x - 1} \right)^{2-3x}.$$

4. Знайти похідні наступних функцій:

$$a) y = \left( \frac{2x}{1 - 7x} \right)^2; \quad б) y = \ln(\operatorname{tg}^3 2x); \quad в) y = (\cos 4x)^{\operatorname{arctg} 3x^5};$$

$$г) 2x^3 - y^2 = -\operatorname{arctg}^2 y; \quad д) \begin{cases} x = \cos \frac{3}{t^2} \\ y = 3t - \sin \frac{t^3}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

5. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{1/\ln x}.$$

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}.$$

### **Варіант 10**

1. Дано  $\triangle ABC$ :  $A(-10; -2), B(-7; -5), C(-6; -2)$ . Знайти: а) довжину висоти  $CK$ ; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони  $AC$ ; в) площу  $\triangle ALC$ , де  $L$  – середина сторони  $AB$ ; г)  $\angle ACL$ .

2. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0; \\ 2x + 3y - 7z = -4; \\ 5x + y + z = 14. \end{cases}$$

3. Обчислити границі.

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{5x + 5} - 5}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x - 6};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \operatorname{tg} 2x}; \quad г) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x + 5}{6x - 2} \right)^{2x-3}.$$

4. Знайти похідні наступних функцій:

$$a) y = \frac{x^3}{e^{\cos x}}; \quad б) y = \sqrt[3]{3x^2 + 7} \cdot \cos 4x; \quad в) y = (\ln 9x)^{\arcsin 5x};$$

$$г) \sin x \cdot \cos y + y = 0; \quad д) \begin{cases} x = \ln(t^2 + \sqrt{t+3}) \\ y = e^{\cos^3 4t} + t \end{cases}.$$

5. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin(x+1)}{x^2 - 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x+1))^{1/\ln 2x}.$$

6. Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}.$$

## Список джерел

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.
2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.1. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. Кн.1. Основні розділи. – 400 с. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985.
5. Станішевський С.О. Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. Наука, 1985. – 383 с.
8. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

## Зміст

1. Аналітична геометрія на площині	3
1.1. Короткі теоретичні відомості	3
1.2. Розв'язання задач	5
2. Лінійна алгебра	10
2.1. Матриці. Визначники	10
2.2. Дії над матрицями	13
2.3. Правило Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	17
2.4. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці	19
2.5. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса	21
3. Границі функції	23
3.1. Короткі теоретичні відомості	23
3.2. Методи обчислення границь	24
3.2.1. Знаходження границь від дробово-раціональної функції	24
3.2.2. Знаходження границі від ірраціональної функції	27
3.2.3. Перша важлива границя	28
3.2.4. Друга важлива границя	29
4. Диференційне числення функцій однієї змінної	32
4.1. Похідна і диференціал функції	32
4.1.1. Приклади знаходження похідних	33
4.1.2. Похідна функції, заданої у параметричній формі	36



4.1.3. Похідна неявно заданої функції	37
4.1.4. Логарифмічне диференціювання	38
4.1.5. Похідні вищих порядків	39
4.1.6. Правило Лопітала (розкриття невизначеностей виду $\left \frac{0}{0}\right $ та $\left \frac{\infty}{\infty}\right $ )	40
4.2. Дослідження функції за допомогою похідної	43
4.2.1. Зростання і спадання функції	44
4.2.2. Максимум і мінімум функції	44
4.2.3. Опуклість графіка функції. Точки перегину	46
4.2.4. Асимптоти графіка функції	48
4.2.5. Повна схема дослідження функції	49
5. Контрольні роботи	54
Список джерел	63

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ  
З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

(для самостійної роботи студентів 1 курсу заочної форми навчання за  
напрямом підготовки 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)»)

Частина 1

Укладачі: **Вороновська** Лариса Петрівна

**Пахомова** Євгенія Серафимівна

**Шульгіна** Світлана Сергіївна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2012, поз.140М

---

Підп. до друку 21.11.2012  
Друк на ризографі.  
Зам. №

Формат 60x84/16  
Ум. друк. арк. 1,5  
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:  
Харківська національна академія міського господарства,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.