В данной статье рассматривается метод выбора рационального соотношения между точностью и достоверностью выборочной оценки детерминированной генеральной характеристики путевых выключателей.

УДК621.316

В. П. Самошкин, канд. техн. наук,
Я. Б. Форкун, канд. техн. наук
Харьковская национальная академия городского хозяйства

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПУТЕВЫХ ВЫКЛЮЧАТЕЛЕЙ

Введение. Как известно основными характеристиками статистической оценки показателей надежности является точность и достоверность выборочной оценки генеральной характеристики. Точность оценки характеризуется величиной доверительного интервала, котрый с доверительной вероятностью, численно равной достоверности оценки, накрывает генеральную характеристику

$$a^* = \text{Вер}\left(Z_H < Z_O < Z_B\right) \qquad (1)$$

где a^* - достоверность выборочной оценки генеральной характеристики Z_O;
(Z_H, Z_B) - доверительный интервал, характеризующий точность выборочной оценки.

Существенный практический интерес представляет собой выбор рационального соотношения между точностью и достоверностью выборочной оценки генеральной характеристики, которая является случайной величиной с известной плотностью распределения.

Изложение основного материала. Пусть, например, производится статистическая оценка нормальной случайной величины Х, генеральная средняя которой является детерминированной и равна Хо.
Для случая, когда известно генеральное среднее квадратическое отключение σ, будем иметь

$$a^* = F_O(Z_B) - F(Z_H), \qquad (2)$$

или

$$a^* = \frac{[\Phi_O(Z_B) - \Phi(Z_H)]}{2}, \qquad (3)$$

где

$$Z_B = \frac{(X_B - X_O)\sqrt{m}}{\sigma}, \qquad (4)$$

$$Z_H = \frac{(X_O - X_H)\sqrt{m}}{\sigma}, \qquad (5)$$

$F_O(Z)$ – нормированная и центрированная функция нормального распределения;

$\Phi_O(Z)$ – функция Лапласа;

m – число измерений случайной величины.

При этом

$$F_o(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{6}$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{7}$$

Для симметричного доверительного интервала, когда

$$X_B-X_O=X_O-X_H=\varepsilon \tag{8}$$

Соотношения (2) и (3) принимают вид

$$a^*=F_O(Z)-1 \tag{9}$$

$$a^*=\Phi(Z) \tag{10}$$

где

$$Z=\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{m}} \tag{11}$$

Если же генеральное среднее квадратическое отклонение неизвестно, то

$$a^*=\int_{-y}^{y}\varphi(x)dx \tag{12}$$

где $\varphi(x)$ - плотность распределения Стьюдента, определяемая соотношением

$$\varphi(x)=\frac{r\left[\frac{(m+1)}{2}\right]}{\sqrt{m\pi}\;r\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{(m+1)}{2}} \tag{13}$$

При этом

$$y=\frac{\varepsilon}{s}\sqrt{m} \tag{14}$$

где s - выборочное среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

В качестве критерия условной оптимизации показателей статистической оценки(ε - точности и a^* - достоверности)рассматривается соотношение

$$\Delta a^*(r_{опт}, m)=\max \tag{15}$$

где

$$\Delta a^*(r_{опт}, m)=a^*(r,m)-a^*(r,1) \tag{16}$$

$r=\frac{\varepsilon}{\sigma}$, когда σ известно (17)

$r=\frac{\varepsilon}{s}$, когда σ неизвестно

физический смысл соотношений (15) и (16) заключается в том, что при заданном числе измерений m случайной величины x за оптимальный нормированный показатель точности $r=\varepsilon/\sigma$ r=ε/σ или $r=\varepsilon/s$ берут такое значение $r_{опт}$ при котором обеспечивается максимальное приращение показателя достоверности оценки $a*$ по сравнению со случаем когда число измерений $m=1$.

С учетом выражений (6), (9), (11) и (17) соотношение (16) представляется в виде

$$\Delta a*(r,\, m) = \frac{2}{2\pi}\left\langle \int_{-\infty}^{r\sqrt{m}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \int_{-\infty}^{r} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \right\rangle \tag{18}$$

Для исследования выражения (18) на экстремум относительно r берем производную

$$\frac{d[\Delta a*(r,m)]}{dt} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{m}\cdot e^{-\frac{(r,\sqrt{m})^2}{2}} - e^{-\frac{r^2}{2}}\right) \tag{19}$$

Приравнивая производную (19) нулю, получаем

$$\sqrt{m}\cdot e^{-\frac{(r,\sqrt{m})^2}{2}} - e^{-\frac{r^2}{2}} \tag{20}$$

Решая уравнение (20) относительно r, находим

$$r_{опт} = \sqrt{\frac{2\ln\sqrt{m}}{m-1}} \tag{21}$$

Наконец с учетом соотношений (9) - (11), (17), (21) получаем

$$a^*_{опт} = 2F_O\left(\sqrt{\frac{2m\ln\sqrt{m}}{m-1}}\right) - 1 \tag{22}$$

или

$$a^*_{опт} = \Phi\left(\sqrt{\frac{2m\ln\sqrt{m}}{m-1}}\right) \tag{23}$$

При этом с помощью выражения (21) нетрудно убедиться, что

$$\lim_{m\to 1} r_{опт} = 1 \tag{24}$$

т.е. $\varepsilon_{опт} = \sigma$ при $m=1$

В свою очередь, известно, что плотность нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

имеем две точки перегиба $x_1 = x_0 + \sigma$ x₁=x₀+σ и $x_2 = x_0 - \sigma$.

Вывод. При числе измерений m=1 ширина оптимального доверительного интервала числено равна разности координат точек перегиба плотности распределения.

На рис. 1 и 2 приведены зависимости $a* = f_1(r,m)$ и $\Delta a* = f_2(r,m)$ для нормального распределения с известным генеральным средним квадратическим отклонением.

На рис. 3 представлена рассчитанная по уравнению (21) зависимость $r_{опт} = f(m)$, позволяющая выбрать оптимальное значение нормированного показателя точности статистической (выборочной) оценки $r_{опт}$ для данного числа измерений m путевых выключателей.

На рис.4 приведена соответствующая уравнениям (22) и (23) зависимости $a^* = f(m)$ с помощью которой для данного числа измерений m определяется оптимальное значение показателя достоверности статистической (выборочной) оценки $a^*_{опт} = f(m)$ для путевых выключателей.

Из рис.3 следует, что максимальная ширина оптимального доверительного интервала имеет место для случая, когда число измерений $m = 1$ и равно удвоенному среднему квадратическому отклонению $(X_В - X_Н)_{опт} = 2\sigma$.

С увеличением числа измерений случайной величины x оптимальный доверительный интервал сужается. Напрмер, при m=10,100,1000 оптимальная ширина доверительного интервала соответственно составляет $(X_В - X_Н)_{опт} = \sigma$; $0{,}43\sigma$; $0{,}17\sigma$.

Из рис.4 видно, что минимальное значение оптимальной двусторонней доверительной вероятности имеет имеет место при числе измерений $m = 1$ и составляет $a^*_{опт} = 0{,}683$ (следовательно, минимальная величина односторонней доверительной вероятности равна $a_{опт} = 0{,}5(1 + a^*_{опт}) = 0{,}841$.

С увеличение числа измерений растет величина $a^*_{опт}$ которая при m=10,100,1000 соответственно составляет $a^*_{опт} = 0{,}89$; 0,97; 0,99.

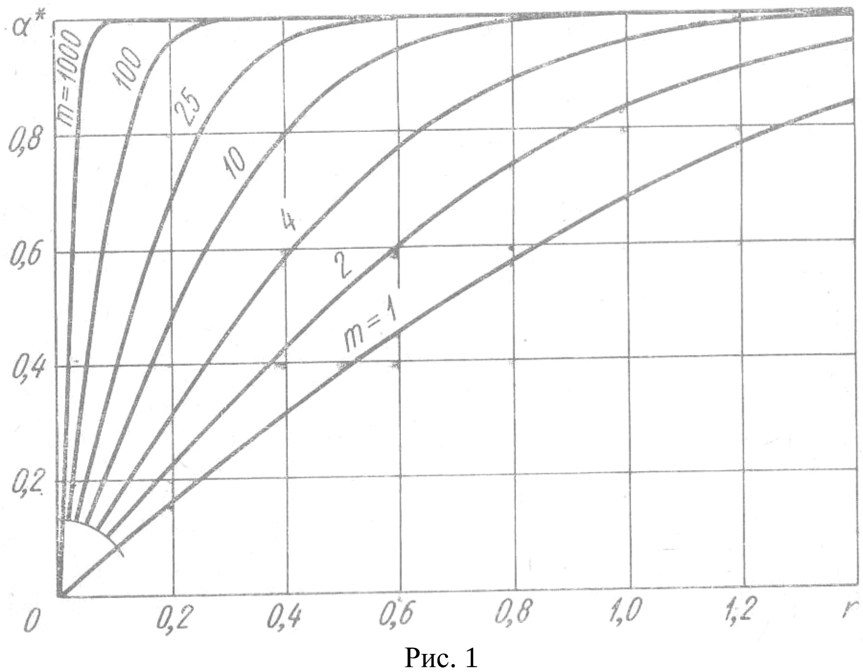

Рис. 1

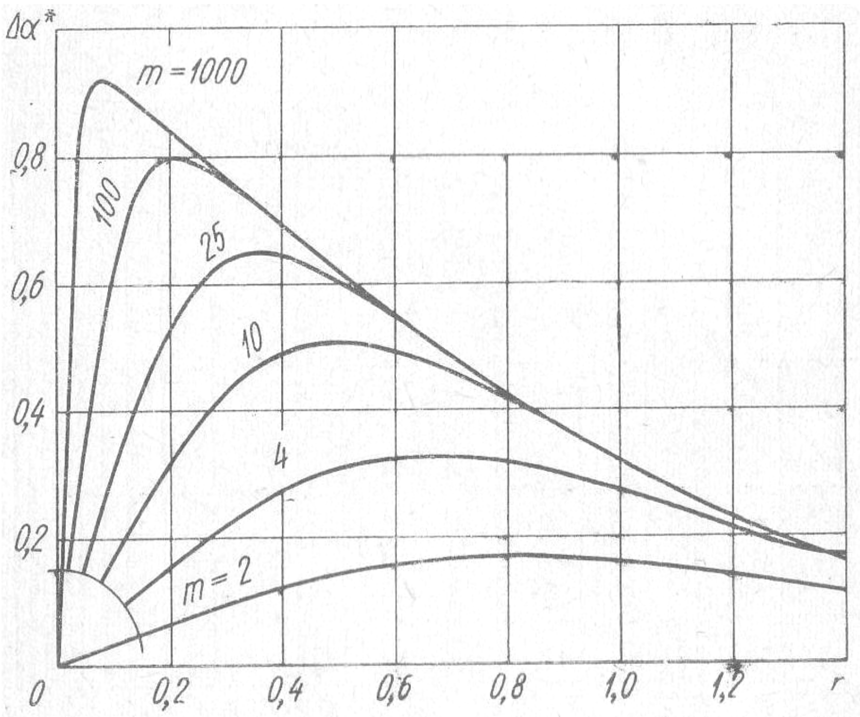
Δα*
m=1000
100
25
10
4
m=2
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
r

Рис. 2

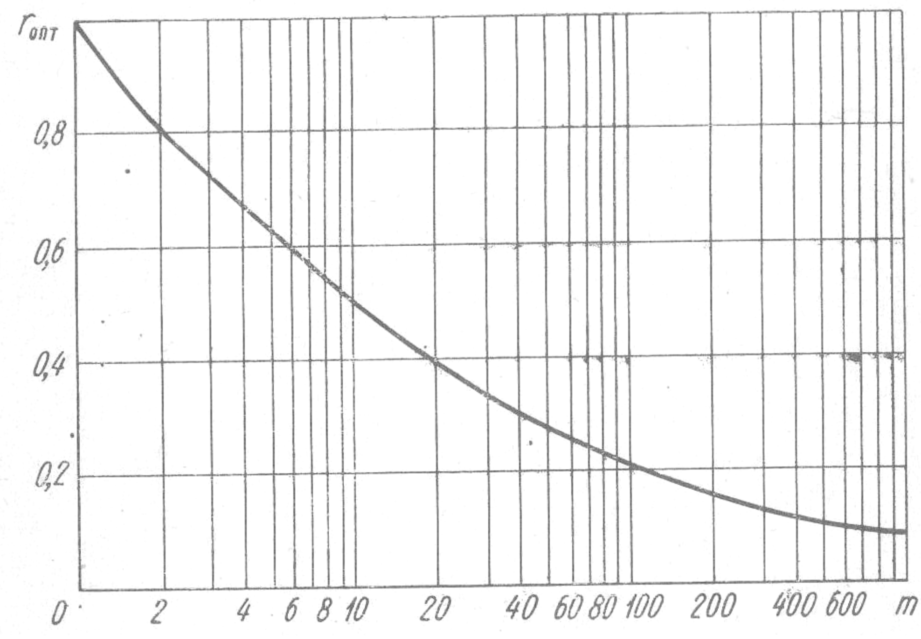
$r_{опт}$
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
20
40
60
80
100
200
400
600
m

Рис. 3

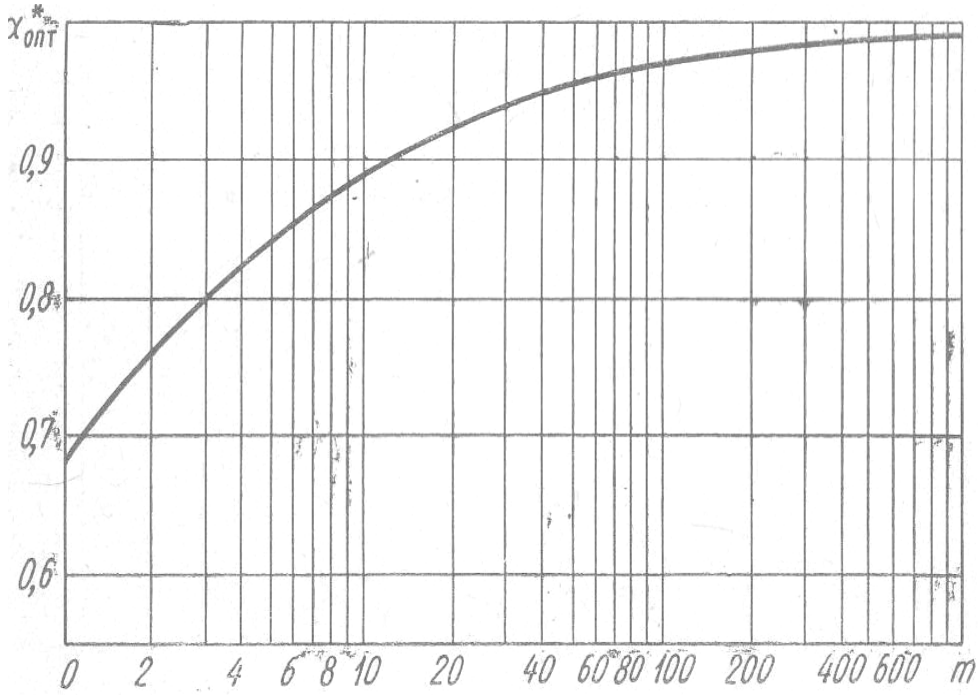

Рис.4

Литература

1. Ширяев А.Н. «Статистический последовательный анализ». Издательство «Наука»,1969г.
2. Румшинский Л.З. «Математическая обработка результатов эксперимента». Издательство «Наука», 1971г.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.: «Наука», 1969г.
4. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології.-К.: Вища школа, 1990р.
5. Шторм Р. «Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества».Перевод с немецкого под редакцией Н.С. Райбман. Издательство «Мир», 1970г.
6. Ширяев А.Н. «Статистический последовательный анализ». Издательство «Наука»,1969г.
7. Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В. Теория вероятностей.-К.: Высш. шк.,1990г.
8. Гурман В.Е. Теория вероятностей математическая статистика – М.: Высш. шк., 2002г.

СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ПУТНІХ ВИМИКАЧІВ

В. П. Самошкін, Я. Б. Форкун

У даній статті розглядається метод вибору раціонального співвідношення між точністю і достовірністю вибіркової оцінки детермінованої генеральної характеристики путніх вимикачів.

THE STATISTIC ESTIMATION OF RELIABILITY OF THE GROUND SWITCHES INDEXES

V. Samoshkin, Y. Forkyn

In this article is examined method of choice of rational betweenness by exactness and authenticity of selective estimation of the determined general description of the ground switches.