

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ**
**ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА**

**ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА
ДЛЯ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ
ПРОДУКЦИИ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА**

**Харьков
ХНАГХ
2013**

УДК [519.8:624:338.24]
ББК 22.1+38+65.291.213
Ф79

Авторы:

Торкатюк Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор;
Колосов Анатолий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор;
Бабаев Владимир Николаевич, доктор государственного управления, профессор;
Шутенко Леонид Николаевич, доктор технических наук, профессор;
Стадник Григорий Васильевич, кандидат экономических наук, профессор;
Пан Николай Павлович, кандидат технических наук, доцент;
Архипова Елена Семеновна, кандидат физико-математических наук, доцент;
Штерн Галина Юрьевна, кандидат экономических наук, доцент;
Коненко Виталина Владимировна, кандидат экономических наук;
Бутник Светлана Владимировна, кандидат технических наук, доцент;
Протопопова Валентина Петровна.

Рецензенты:

Тищенко А. Н., доктор экономических наук, профессор,
Научно-исследовательский центр индустриальных проблем развития НАН Украины;
Шевченко Л. С., доктор экономических наук, профессор,
Харьковская национальная академия городского хозяйства;
Тян Р. Б., доктор экономических наук, профессор,
Приднепровская академия строительства и архитектуры.

Рекомендовано

Ученым советом Харьковской национальной академии городского хозяйства
(протокол № 2 от 05 октября 2012 г.)

Формирование математического аппарата для выбора оптимальных параметров продукции капитального строительства: монография / В. И. Торкатюк, А. И. Колосов, В. Н. Бабаев и др; Харьк. нац. акад. гор. хоз-ва. – Х. : ХНАГХ, 2013. – 421 с.

ISBN 978-966-695-287-8

В монографии рассматриваются особенности формирования математического аппарата для выбора оптимальных решений по формированию качественных параметров продукции капитального строительства, обеспечивающие создание высококачественной строительной продукции. Излагаются особенности использования как традиционного математического аппарата и математических методов, так и новейшего процессного подхода в сочетании с внедрением системы стратегического управления.

Монография предназначена для специалистов проектных, строительных организаций, инвестиционных служб банков, занятых разработкой инвестиционных проектов и их управлением, а также будет полезна профессорско-преподавательскому составу, аспирантам, студентам строительных и экономических специальностей.

УДК [519.8:624:338.24]

ББК 22.1+38+65.291.213

© В. И. Торкатюк, А. И. Колосов, В. Н. Бабаев,
Л. Н. Шутенко, Г.В. Стадник, Н. П. Пан,
Е. С. Архипова, Г. Ю. Штерн, В. В. Коненко,
С. В. Бутник, В. П. Протопопова, 2013.

© Харьковская национальная академия
городского хозяйства, 2013

ISBN 978-966-695-287-8

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	10
РАЗДЕЛ 1. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	12
1.1. Матрицы и действия над ними	12
1.1.1. Матрицы и их классификация	12
1.1.2. Действия над матрицами	13
1.1.3. Технологическая матрица	15
1.2. Определители и их свойства	17
1.3. Обратная матрица. Ранг матрицы	18
1.3.1. Элементарные преобразования матриц	19
1.3.2. Ранг матрицы	20
1.4. Решение систем линейных уравнений	21
1.4.1. Общие понятия	21
1.4.2. Правило Крамера	21
1.4.3. Решение систем уравнений матричным способом (с помощью обратной матрицы)	22
1.4.4. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли	23
1.4.5. Правило решения произвольной системы m линейных уравнений с n неизвестными	24
1.4.6. Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных)	26
1.4.7. Метод Жордана-Гаусса (метод полного исключения)	28
1.4.8. Фундаментальная система решений	32
1.4.9. Связь между решениями неоднородной и однородной систем линейных уравнений	34
РАЗДЕЛ 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА	35
2.1. Основные понятия	35
2.2. Линейные операции над векторами	36
2.3. Координаты вектора	38
2.4. Деление отрезка в данном отношении	40
2.5. Направляющие косинусы. Орт вектора	41
2.6. Скалярное произведение векторов	42
2.7. Векторное произведение	46
2.8. Смешанное произведение векторов	47
2.9. Линейное n -мерное пространство	49
2.10. Линейная зависимость векторов	50
2.11. Разложение вектора по данному базису	52
РАЗДЕЛ 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	54
3.1. Понятие об уравнениях линий и поверхностей	54
3.1.1. Геометрические места точек	54
3.1.2. Полярная система координат	56
3.2. Поверхности и линии первого порядка. Плоскость и прямая	59

3.2.1. Плоскость	59
3.2.2. Прямая линия на плоскости	61
3.2.3. Прямая в пространстве и на плоскости	62
3.3. Линии второго порядка	70
3.3.1. Кривые второго порядка	70
3.3.2. Эллипс	70
3.3.3. Гипербола	71
3.3.4. Парабола	73
3.3.5. Фокально-директориальное свойство	73
3.3.6. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы, параллельно смещенных относительно осей координат	74
3.4. Поверхности второго порядка	75
3.4.1. Цилиндрические поверхности	75
РАЗДЕЛ 4. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	81
4.1. Основные определения и понятия математического анализа	81
4.1.1. Элементы теории множеств	81
4.1.2. Понятие функции	82
4.2. Предел числовой последовательности	88
4.3. Предел функции	90
4.3.1. Геометрическое определение предела функции в точке	90
4.3.2. Односторонние пределы функции	91
4.3.3. Бесконечно малые и их основные свойства. Сравнение двух бесконечно малых величин	91
4.3.4. Сравнение бесконечно малых величин	92
4.3.5. Арифметические действия с пределами	92
4.3.6. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых величинах	93
4.4 Непрерывность функции	94
4.4.1. Основные теоремы о непрерывных функциях	95
4.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке	96
4.6. Использование понятия последовательности и предела в экономике	97
РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	99
5.1. Производная	99
5.1.1. Правила вычисления производных	99
5.1.2. Дифференцирование неявных функций	101
5.1.3. Логарифмическое дифференцирование	101
5.2. Дифференциал функции	102
5.2.1. Геометрический смысл дифференциала функции	104
5.2.2. Инвариантность формулы дифференциала I порядка	104
5.2.3. Применение дифференциала к приближенным вычислениям	104
5.3. Производные и дифференциалы высших порядков	105
5.3.1. Дифференцирование параметрически заданных функций .	106

5.4. Применение производных к исследованию функций и построению графиков, нахождению пределов	107
5.4.1. Теоремы о среднем	107
5.4.2. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталья	108
5.4.3. Условия монотонности функции. Экстремумы	113
5.4.4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба	114
5.4.5. Асимптоты кривых	115
5.4.6. Общая схема исследования функции и построения графика	115
5.4.7. Дифференциальная и интегральная функции Лапласа	118
5.4.8. Наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке	121
5.5. Использование понятия производной в экономике	122
РАЗДЕЛ 6. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ, МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	131
6.1. Первообразная, свойства неопределенного интеграла	131
6.2. Методы интегрирования	135
6.2.1. Метод замены переменной	135
6.2.2. Метод интегрирования по частям	138
6.2.3. Интегрирование рациональных дробей	141
6.2.4. Интегрирование тригонометрических выражений	145
РАЗДЕЛ 7. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ	149
7.1. Свойства и геометрический смысл определенного интеграла	149
7.2. Методы вычисления определённого интеграла	151
7.3. Геометрические приложения определённых интегралов, вычисление площадей, объемов, длин дуг	160
7.4. Использование понятия определённого интеграла в теории вероятностей и экономике	167
7.4.1. Приложения определённого интеграла в теории вероятностей	167
7.4.2. Приложения определённого интеграла в экономике	168
РАЗДЕЛ 8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	172
8.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода) и их вычисление	172
8.1.1. Основные понятия	172
8.1.2. Геометрический смысл несобственного интеграла	172
8.1.3. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница	174
8.1.4. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода для неотрицательных функций	175
8.1.5. Несобственные интегралы от знакопеременных функций	175
8.2. Несобственные интегралы второго рода – интегралы от неограниченных функций	178
8.2.1. Основные понятия	178
8.2.2. Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода для неотрицательных функций	180

8.3. Применение несобственных интегралов в теории вероятностей и экономике	181
РАЗДЕЛ 9. ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	184
9.1. Основные понятия, частные производные	184
9.2. Частные производные	187
9.3. Дифференцируемость функции	188
9.3.1. Дифференциал	188
9.3.2. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях	189
9.4. Геометрические изображения функции двух переменных	189
9.5. Частные производные высших порядков	190
9.6. Дифференцирование сложных функций	192
9.6.1. Частные случаи	193
9.7. Дифференцирование неявных функций	195
9.7.1. Неявная функция двух переменных	195
9.8. Экстремум функции n переменных	197
9.8.1. Необходимые условия существования экстремума	198
9.8.2. Достаточные условия существования экстремума	198
9.8.3. Условный экстремум функции n переменных	199
9.8.4. Экстремум функции двух переменных	200
9.9. Производная по направлению	201
9.10. Градиент функции	203
9.11. Некоторые применения функции нескольких переменных в экономике	205
9.11.1. Графический метод нахождения максимума и минимума линейной функции в области. Использование понятия градиента	205
9.11.2. Нахождение экстремума в задачах потребительского выбора	210
9.11.3. Задачи на условный экстремум с использованием функции Лагранжа	214
РАЗДЕЛ 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	217
10.1. Дифференциальные уравнения I порядка	217
10.1.1. Уравнения с разделяющимися переменными	218
10.1.2. Однородные дифференциальные уравнения	221
10.1.3. Линейные дифференциальные уравнения	224
10.1.4. Уравнение Бернулли	226
10.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка	227
10.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения	228
10.3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	229
10.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных	233

10.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Метод неопределённых коэффициентов ...	235
10.6. Приложения дифференциальных уравнений к экономическим задачам	241
РАЗДЕЛ 11. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ	246
11.1. Числовые ряды. Основные понятия. Необходимый признак сходимости	246
11.2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов ...	247
11.2.1. Признаки сравнения	247
11.2.2. Признак Даламбера	248
11.2.3. Радиальный признак Коши	248
11.2.4. Интегральный признак сходимости Коши	249
11.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость ...	251
11.4. Функциональные ряды	253
11.4.1. Степенные ряды	255
11.4.2. Ряд Тейлора. Применение рядов в приближенных вычислениях	258
11.5. Ряды Фурье	261
11.5.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье	261
11.5.2. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций	265
11.5.3. Периодическое продолжение и разложение в ряд Фурье непериодической функции	269
11.5.4. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, l]$	272
РАЗДЕЛ 12. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	276
12.1. Двойные интегралы и их вычисление в декартовой системе координат	276
12.1.1. Правила расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле	276
12.1.2. Изменение порядка интегрирования	279
12.1.3. Замена переменных в двойном интеграле	281
РАЗДЕЛ 13. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ	284
13.1. Комбинаторика: предмет, основные задачи, основные правила	284
13.1.1. Основные правила комбинаторики	284
13.1.2. Формула включений и исключений	286
13.2. Комбинации без повторений	289
13.2.1. Перестановками из n элементов называются такие комбинации, которые отличаются лишь порядком следования этих элементов	289
13.2.2. Размещениями из n элементов по m элементов в каждом называются такие комбинации, из которых каждая содержит m элементов из данных n элементов, отличающихся друг от друга либо порядком их следования, либо самими элементами	290

13.2.3. Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие комбинации, из которых каждая состоит из m элементов, из данных n элементов, отличающихся хотя бы одним элементом	291
13.3. Комбинации с повторениями	291
13.3.1. Перестановки, в которых хоть один элемент встречается более одного раза, называются перестановками с повторениями	292
13.3.2. Размещениями из n элементов по m с повторениями называются такие комбинации, из которых каждая содержит m элементов из данных n элементов, записанных в каком-нибудь порядке, причем один и тот же элемент может входить в комбинацию более одного раза	293
13.3.3. Сочетаниями из n элементов по m с повторениями называются такие комбинации, из которых каждая содержит m элементов из данных n элементов, причем один и тот же элемент может входить в комбинацию более одного раза	293
РАЗДЕЛ 14. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	295
14.1. Интерполирование	295
14.1.1. Линейная интерполяция	295
14.2. Среднеквадратичное приближение	296
14.2.1. Наилучшее приближение	296
14.2.2. Линейная аппроксимация	297
14.2.3. Полиномиальная аппроксимация	298
14.3. МНК – основной метод математического моделирования в экономике	300
14.3.1. Основные определения. Примеры эконометрических моделей	301
14.4. Определение зависимостей между экономическими показателями	303
14.4.1. Модели математических зависимостей	303
14.5. Оценка параметров моделей	307
14.6. Примеры построения линейной и параболической эмпирической зависимости	310
РАЗДЕЛ 15. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ	316
15.1. Множества. Отображения. Отношения	316
15.1.1. Основы теории множеств	316
15.1.2. Соответствия. Отображения	319
15.1.3. Отношения. Отношения эквивалентности	320
15.1.4. Отношения порядка	322
15.1.5. Примеры решения задач	323
15.2. Элементы математической логики	324
15.2.1. Типы алгебр	324

15.2.2. Булевы функции. Нормальные формы. Минимизация ..	325
15.2.3. Полнота. Замкнутость. Непротиворечивость	337
15.2.4. Логика высказываний	340
15.2.5. Логика и исчисление предикатов	344
РАЗДЕЛ 16. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	352
16.1. Метод отсечения	352
16.2. Метод ветвей и границ	357
16.2.1. Сущность метода	357
16.2.2. Задача о коммивояжере	358
16.2.3. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ	359
16.2.4. Задача о коммивояжере с заданным началом и минимальным путем	363
16.3. Транспортная задача	364
16.3.1. Определение транспортной модели	364
16.3.2. Математическая модель задачи	365
16.3.3. Алгоритм решения транспортной задачи	367
16.3.4. Решение транспортной задачи методом потенциалов	370
16.3.5. Улучшение плана способом переброски груза по циклу	371
16.4. Задача о назначениях	381
16.4.1. Формулировка задачи (проблемы выбора)	381
16.4.2. Венгерский метод решения задачи о назначениях	383
16.5. Транспортная модель с промежуточными пунктами (Двухэтапная транспортная задача)	387
16.6. Транспортные сети	389
16.6.1. Задача о максимальном потоке	389
16.6.2. Разрез сети. Критерий оптимальности потока	391
РАЗДЕЛ 17. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНЫХ ИГР	393
17.1. Игры в чистых стратегиях	393
17.2. Матричные игры в смешанных стратегиях	396
17.3. Геометрическое решение матричных игр	397
17.4. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования	401
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	406
СПИСОК ИСТОЧНИКОВ	408
ПРИЛОЖЕНИЯ	415

ВВЕДЕНИЕ

В условиях рынка жилье перестает быть предметом распределения и становится товаром. Исследования показывают, что капиталовложения в жилищном строительстве относятся к производственным затратам. Для создания экономических предпосылок их эффективной окупаемости предусматривается:

- реализация права частной собственности на землю;
- демонополизация строительного производства;
- уменьшение и переориентация социальной направленности дотаций;
- развитие частнопредпринимательской деятельности.

Цель жилищной политики *состоит в реализации права человека на достойное жилище по его собственному выбору посредством создания рынка жилья, утверждению представления о жилье как о собственности, проведении разгосударствления строительства.*

Политика жилищного строительства базируется на разнообразии форм собственности, свободном выборе гражданами способов обеспечения жильем, множественности путей удовлетворения спроса, дифференцированном подходе к социальному и частному жилью, адаптации мирового опыта, постоянной его корректировке в соответствии с конъюнктурой, учетом местных условий.

Оценка рынка жилья является исходным пунктом формирования государственной политики в жилищном строительстве. Платежеспособный спрос населения определяет структуру и характер направлений развития строительства. Бюджетное финансирование ограничивается созданием жилья для социально незащищенных слоев населения. Государство переходит от поддержки граждан с недостаточным уровнем жилищного обеспечения к их поддержке при недостаточном уровне дохода. Расширение использования средств населения для жилищного строительства предусматривает не только использование наличных денег, части ежемесячных доходов, но и поддержку сбережений населения на основе эффективных кредитно-финансовых механизмов.

В градостроительной политике осуществляется переход городов на самофинансирование, возрастает роль генерального плана, регулирующего землепользование, повышаются экологические требования.

Для достижения целей жилищной политики необходим разветвленный строительный рынок недвижимости, земельных участков, проектов, материалов, подрядов и эксплуатационных услуг.

Указанные выше факторы обуславливают изменения структуры строительства по конструктивным системам и этажности. Этажность и конструктивная система должны выбираться исходя из требований инвестора, конкретных условий строительства, расположения земельного участка, его геологии и рельефа, состояния производственно-сырьевой базы, рыночных цен на изделия, работы и других экономических,

социальных и природных факторов. Поэтому целесообразность тех или иных решений в конкретном проекте должна выявляться на основе комплексной оценки затрат при различных технически и экономически возможных вариантах.

Структурные перемены диктуют необходимость изменений в проектировании и производстве. Нужны демонополизация проектирования, оптимизация этажности, приближение к требованиям индивидуальных застройщиков, развитие упрощенных энерго- и материалосберегающих технологий производства работ, расширение номенклатуры и объемов производства строительных материалов. Рассмотренные технологические системы формирования городского жилого фонда соответствуют этим изменениям и, таким образом, *область их применения будет неизбежно увеличиваться*. Мировой опыт подтверждает этот вывод. В странах с развитой рыночной экономикой доля частных инвестиций в развитие городского жилого фонда значительно выше, чем в Украине и СНГ (однако этого нельзя сказать об уровнях научных исследований, имеющих преимущественно прикладной характер). Этому способствовали следующие факторы:

- разнообразие объемов и источников финансирования, а также потребностей заказчиков;
- наличие многочисленных конкурирующих проектных фирм, способствующее выработке разнообразных объемно-планировочных решений даже для аналогичных объектов (но и затрудняющее унификацию и стандартизацию);
- высокая стоимость земельных участков, что определяет преимущества высотных зданий;
- высокие расходы на строительство и оборудование жилья;
- заинтересованность фирм, производящих строительное оборудование и материалы, в удовлетворении потребностей заказчиков и подрядчиков, а также применении инноваций.

Действие этих факторов приводит к образованию открытых, целостных, организованных систем, что и обуславливает эффективность производства. Парадоксально, но меньшая организованность, меньшая зависимость от индустриальной базы и даже меньшая изученность технологических основ совершенствования формирования городского жилого фонда становятся преимуществами, так как делают его технологию более восприимчивой к инновациям.

Наукове видання

**ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ
ДЛЯ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ
ПРОДУКЦІЇ КАПІТАЛЬНОГО БУДІВНИЦТВА**

(Рос. мовою)

МОНОГРАФІЯ

Відповідальний за випуск: *В. І. Торкатюк*

Редактор: *О. В. Тарасюк, С. В. Тимощук*

Комп'ютерне верстання: *В. В. Коненко*

Дизайн обкладинки: *Т. Є. Клочко*

Підп. до друку 22.10.2012
Друк на ризографі
Тираж 500 пр.

Формат 60x84/16
Ум. друк. арк. 24,8
Зам. №

Виконавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.