

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ  
УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

К. Ю. Аксьонова , Ю. Д. Оксюк, Є. Б. Сидоренко

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
З ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ І КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ  
З КУРСУ  
ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ**

(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів за напрямками 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.060101 «Будівництво», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій», 6.170202 «Охорона праці»)

**ХАРКІВ  
ХНАМГ  
2012**

**Аксьонова К. Ю.** Конспект лекцій і методичні вказівки з проведення практичних і контрольних робіт з курсу загальної фізики (для студентів I курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів за напрямками 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.060101 «Будівництво», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природо-користування», 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій», 6.170202 «Охорона праці») / К. Ю. Аксьонова, Ю. Д. Оксюк, Є.Б. Сидоренко; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. - Х. : ХНАМГ, 2012. – 189 с.

Автори: К. Ю. Аксьонова, Ю. Д. Оксюк, Є. Б. Сидоренко

Рецензент: д.фіз.-мат. н., проф. О. І. П'ятак

Рекомендовано кафедрою фізики,  
протокол № 2 від 18 жовтня 2011 р.

## ЗМІСТ

	Стор.
1. ПЕРЕДМОВА .....	5
2. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ .....	5
2.1. Розв'язання задач .....	5
2.2. Виконання контрольних робіт .....	7
3. МЕХАНІКА .....	8
3.1. Кінематика поступального й обертального рухів .....	8
3.2. Динаміка поступального руху .....	11
3.2.1. Закони Ньютона .....	11
3.2.2. Закон збереження імпульсу .....	13
3.2.3. Види взаємодій. Сили в механіці .....	15
3.2.4. Енергія, робота, потужність .....	17
3.2.5. Кінетична і потенціальна енергія. Повна енергія тіла .....	19
3.2.6. Закон збереження енергії в механіці .....	21
3.3. Динаміка обертального руху твердого тіла .....	22
3.3.1. Основне рівняння динаміки обертального руху. Момент інерції. Момент імпульсу .....	22
3.3.2. Закон збереження моменту імпульсу .....	25
3.3.3. Кінетична енергія тіла, що обертається .....	25
3.4. Приклади розв'язання задач з механіки .....	26
Контрольна робота №1 (механіка) .....	35
4. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА .....	43
4.1. Основні поняття і величини .....	43
4.2. Рівняння стану ідеального газу .....	44
4.3. Графічне предствлення газових законів .....	45
4.4. Перший закон термодинаміки .....	46
4.5. Робота, що виконується газом при розширенні .....	46
4.6. Теплосмність ідеального газу .....	47
4.7. Внутрішня енергія .....	48
4.8. Адиабатичний процес .....	48
4.9. Цикл Карно .....	49
4.10. Приклади розв'язання задач з молекулярної фізики і термодинаміки .....	49
Контрольна робота №2 (молекулярна фізика і термодинаміка) .....	58
5. ЕЛЕКТРОСТАТИКА .....	62
5.1. Електричні заряди. Взаємодія зарядів .....	62
5.2. Електричне поле. Напруженість електричного поля .....	63
5.3. Робота сил електричного поля. Потенціал .....	64
5.4. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля .....	67
5.5. Електроємність. Енергія електричного поля .....	67
6. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ .....	70
6.1. Електричний струм. Носії заряду .....	70
6.2. Закон Ома. Опір провідників .....	72
6.3. Електрорушійна сила (е.р.с.) джерела струму. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола .....	73
6.4. Приклади розв'язання задач з електрики .....	76
Контрольна робота №3 (електростатика) .....	88
Контрольна робота №4 (постійний струм) .....	96
7. МАГНЕТИЗМ .....	103
7.1. Магнітне поле у вакуумі .....	103

7.1.1. Природа магнетизму. Магнітна індукція. Магнітна взаємодія струмів .....	103
7.1.2. Закон Біо – Савара – Лапласа. Теорема про циркуляцію .....	108
7.1.3. Сила Лоренца. Рух заряджених частинок у магнітному полі .....	112
7.2. Магнітне поле в речовині .....	114
7.3. Електромагнітна індукція. Правило Ленца .....	118
7.3.1. Самоіндукція. Енергія магнітного поля .....	121
7.4. Приклади розв'язання задач з магнетизму .....	122
Контрольна робота № 5 (магнетизм).....	126
8. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ.....	138
8.1. Механічні коливання .....	138
8.1.1. Гармонічні коливання.....	138
8.1.2. Вільні коливання. Пружинний маятник .....	139
8.1.3. Математичний маятник. Фізичний маятник .....	142
8.1.4. Згасаючі коливання .....	143
8.1.5. Вимушені коливання. Резонанс.....	144
8.2. Електромагнітні коливання .....	145
8.3. Хвильові процеси. Основні властивості електромагнітних хвиль .....	147
9. ХВИЛЬОВА ОПТИКА.....	150
9.1. Розвиток уявлень про природу світла.....	150
9.2. Інтерференція світлових хвиль.....	152
9.3. Дифракція світла.....	154
9.4. Поляризація світла.....	160
10. КВАНТОВА ФІЗИКА.....	163
10.1. Теплове випромінювання.....	163
10.2. Гіпотеза де Бройля. Корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей речовини .....	166
10.3. Фотоелектричний ефект .....	167
11. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ .....	170
11.1 Приклади розв'язання задач з розділів 8,9,10,11.....	172
Контрольна робота № 6 (Коливання і хвилі, хвильова оптика, квантова фізика, теорія відносності .....	176
Довідкові таблиці .....	187
Список джерел.....	188

## 1. ПЕРЕДМОВА

Мета цього учбово-методичного посібника – подати допомогу студентам інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів у вивченні курсу фізики. Основний навчальний матеріал програми курсу в посібнику розподілений на дві частини (по семестрах). У кожному з них дані відповідні розділи з короткими теоретичними відомостями, прикладами розв’язання типових задач і контрольних завдань, а також загальні методичні вказівки, деякі довідкові таблиці і контрольні завдання.

## 2. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Навчальна робота студента з вивчення курсу фізики складається з наступних основних елементів: самостійного вивчення і пророблення на підставі настановних лекцій відповідних розділів учбово-методичного посібника, вивчення методики розв’язання типових задач, виконання запланованої кількості лабораторних робіт, виконання контрольних завдань, здачі заліків і іспитів.

### 2.1. Розв’язання задач

Систематичне розв’язання задач – необхідна умова успішного вивчення курсу фізики. Розв’язання задач допомагає усвідомити фізичний зміст явищ, закріплює в пам’яті формули, закрепляючи навички практичного застосування теоретичних знань.

При розв’язанні задачі необхідно виконувати наступне:

1. Вказати основні закони і формули, на яких базується розв’язання задачі, і дати словесне формулювання цих законів, роз’яснити літерні позначення, уживані при написанні формул. Якщо при розв’язанні задачі застосовується формула, отримана для окремого випадку, що не виражає якої-небудь фізичної величини, то її слід виводити.

2. Дати креслення, що пояснює зміст задачі (у тих випадках, коли це можливо); виконувати його треба акуратно за допомогою креслярських приладів.

3. Розв’язання задачі супроводжувати короткими, але вичерпними поясненнями.

4. Розв’язати задачу в загальному вигляді, тобто виразити величину, яку треба знайти, в літерних позначеннях величин, заданих в умові задачі й узятих з таблиці.

Фізичні задачі досить різноманітні, і дати універсальну схему їхнього розв’язання неможливо. Однак, як правило, фізичні задачі слід розв’язувати в загальному вигляді. При цьому способі не виконуються

обчислення проміжних величин; числові значення підставляються тільки в остаточну формулу, що виражає шукану величину.

5. Виразити усі величини, що входять в остаточну формулу, в одиницях СІ і виписати їх для наочності стовпчиком.

6. Підставити в остаточну формулу, отриману в результаті розв'язання задачі в загальному вигляді, числові значення в одиницях однієї системи. Недотримання цього правила призводить до невірною результату. Виключення з цього правила допускається лише для тих однорідних величин, що входять у вигляді співмножників у чисельник і знаменник формули з однаковими показниками степеня. Такі величини необов'язково виражати в одиницях тієї системи, в якій ведеться розв'язання задачі. Їх можна виразити в будь-яких, але тільки однакових одиницях.

7. Обчислити величини, підставлені у формулу, керуючись правилами наближених обчислень (див. п.10), записати у відповіді числове значення і скорочене найменування одиниці виміру шуканої величини.

8. При підстановці в робочу формулу, а також при запису відповіді, числові значення величин записати як добуток десяткового дробу з однією значущою цифрою перед комою на десять у відповідному степені. Наприклад, замість 3520 треба записати  $3,52 \times 10^3$ , замість 0,00129 записати  $1,29 \times 10^{-3}$  і т.і.

9. Оцінити правдоподібність чисельної відповіді. У ряді випадків така оцінка допоможе знайти помилковість отриманого результату. Наприклад, коефіцієнт корисної дії теплової машини не може бути більше одиниці, електричний заряд не може бути менше елементарного заряду  $e = 1,60 \times 10^{-19}$  Кл, швидкість тіла не може бути більше швидкості світла у вакуумі і т.і.

10. Округлення чисел здійснюється простим відкиданням останніх значущих цифр, якщо перша з цифр, що відкидаються, менше ніж 5 і збільшенням на одиницю цифри, що знаходиться перед тією, що відкидається, якщо остання більше 5. Якщо цифра, що відкидається, дорівнює 5 і за нею немає значущих цифр, то округлення здійснюється так, щоб остання цифра, що залишається, була парною, наприклад: 0,675 замінюється 0,68, а 0,625 округляється до 0,62. Якщо ж перша цифра, що відкидається, дорівнює 5, а за нею знаходиться цифра більше 5, то при округленні необхідно цифру, яка знаходиться перед тією, що відкидається, збільшити на 1.

У випадку округлення при додаванні і відніманні його потрібно робити в кожному доданку (від'ємнику) до розряду, на одиницю меншого, ніж розряд найменш точного числа, а в результаті слід зберегти стільки десяткових знаків, скільки їх у значенні найменш точного числа:

$$0,423 + 5,386 + 12,3 \approx 0,42 + 5,39 + 12,3 = 18,11 \approx 18,1.$$

При множенні і діленні в результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх утримується в значенні величини з найменшим числом значущих цифр:

$$25,7 \cdot 3,356 = 86,2492 \approx 86,2.$$

При піднесенні до степеня у результаті зберігають стільки значущих цифр, скільки їх утримується в числі, яке підносять до степеня:

$$(7,32)^2 = 53,5824 \approx 53,6.$$

При добуванні коренів у результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має підкореневе число. При обчисленні логарифма наближеного числа потрібно залишати стільки значущих цифр, скільки їх утримується в даному числі. В усіх цих операціях, природно, повинні дотримуватися зазначені вище правила округлення чисел.

Уміння розв'язувати задачі здобувається тривалими і систематичними вправами. Щоб навчитися розв'язувати задачі і підготуватися до виконання контрольної роботи, слід після вивчення чергового розділу уважно розібрати поміщені в даному посібнику приклади розв'язання типових задач, а також ряд задач із задачників з фізики.

## 2.2. Виконання контрольних робіт

Виконання контрольних робіт студентом і рецензування їх викладачем переслідує дві мети: по-перше, здійснення контролю за роботою студента; по-друге, надання йому допомоги в питаннях, що виявилися слабко засвоєними або незрозумілими.

Виконання контрольних робіт з кожного розділу курсу фізики студент починає тільки після вивчення теоретичного матеріалу, що відповідає даному розділу програми, уважного ознайомлення з прикладами і після розв'язання задач, призначених для самостійного розв'язання, приведених у посібнику з кожного розділу курсу.

При виконанні контрольних робіт студенту необхідно керуватися наступним:

1. Контрольні роботи виконуються тільки за умовами задач даного посібника. Заміна якої-небудь контрольної роботи іншою не дозволяється.

2. Розв'язання задач повинні супроводжуватися вичерпними, але короткими поясненнями, що розкривають фізичний зміст уживаних формул, і виконуватися відповідно до правил, викладених в пункті **2.1. Розв'язання задач.**

### 3. МЕХАНІКА

#### 3.1. Кінематика поступального й обертального рухів

Будь-який рух твердого тіла можна представити як результат додавання поступального й обертального рухів.

Про рух тіла судять по його переміщенню щодо інших тел. Це означає, що рух і спокій тіл відносні. Тіло, прийняте за нерухоме, зв'язана з ним система координат і спосіб відліку часу утворюють *систему відліку*.

При вивченні руху тіл часто буває доцільно абстрагуватися від їхніх розмірів. У цих випадках говорять про рух матеріальної точки. *Матеріальною точкою* називається тіло, розміри і форму якого можна не враховувати в даній задачі. Матеріальною точкою вважають, наприклад, Землю при розгляді її руху навколо Сонця. Будь-яке тіло можна вважати сукупністю матеріальних точок.

Тіло, взаємне розташування часток якого не змінюється згодом, називається абсолютно твердим.

Рух твердого тіла є *поступальним*, якщо пряма, що з'єднує дві будь-які його точки, залишається паралельною самій собі. Тобто, усі точки тіла рухаються за однаковими траєкторіями, і тому при поступальному русі твердого тіла досить розглядати рух тільки однієї його точки.

Розглянемо рух матеріальної точки на ділянці криволінійної траєкторії. *Переміщенням* між двома точками траєкторії називається вектор, що з'єднує ці точки. На рис.3.1 це вектор  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

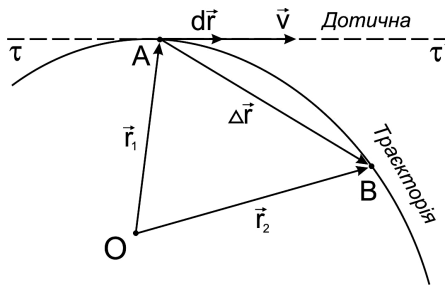


Рис. 3.1

Переміщення зроблене за час  $\Delta t$ .

*Радіусом-вектором* точки в просторі називається вектор  $\vec{r}$ , проведений з початку координат у дану точку. На ділянці траєкторії



АВ вектор *середньої швидкості* дорівнює  $\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  і спрямований уздовж хорди АВ у той бік, що і вектор переміщення  $\Delta \vec{r}$ .

Вираз для швидкості  $\vec{v}$  в момент  $t$  (у точці А) можна одержати як границя вектора  $\vec{v}_{cp}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  хорда АВ зливається з дотичною  $\tau\tau'$ , і вектор миттєвої швидкості  $\vec{v}$  буде спрямований по дотичній до траєкторії у бік руху. Оскільки модуль вектора  $d\vec{r}$  дорівнює довжині малої ділянки траєкторії (шляху  $ds$ ), то

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}. \quad (3.1)$$

Тобто, модуль швидкості дорівнює похідній шляху за часом.

Швидкість руху може мінятися як за модулем, так і за напрямком. Швидкість зміни швидкості характеризується вектором *прискорення*  $\vec{a}$ . Зміна швидкості на ділянці АВ траєкторії за час  $\Delta t$  (рис.3.2) дорівнює  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ .

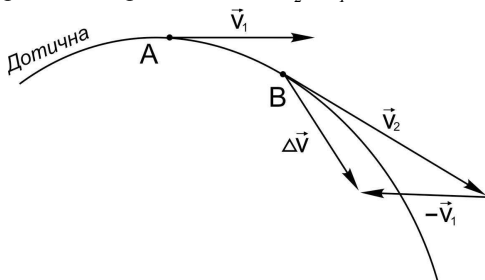


Рис. 3.2

При  $\Delta t \rightarrow 0$  одержимо

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Але вектор  $\Delta \vec{v}$  можна розкласти (рис. 3.3) на дві складові:  $\Delta \vec{v}_\tau$  (уздовж дотичної  $\tau\tau'$ ) і  $\Delta \vec{v}_n$  (уздовж нормалі  $\square op'$ ).

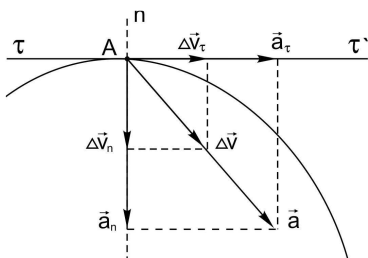


Рис. 3.3

Тому

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Повне прискорення  $\vec{a}$  має дві взаємно перпендикулярні складові:  $\vec{a}_\tau$  і  $\vec{a}_n$ .

*Тангенціальне прискорення*  $\vec{a}_\tau$ , спрямоване за дотичною, визначає швидкість зміни модуля

швидкості; *нормальне (доцентрове) прискорення*  $\vec{a}_n$  характеризує зміну швидкості за напрямком ( $\vec{a}_n \neq 0$  тільки в криволінійному русі).

Модуль тангенціального прискорення дорівнює похідній модуля швидкості за часом або другій похідній шляху за часом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (3.2)$$

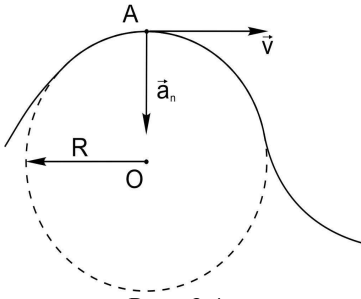


Рис. 3.4

Вектор  $\vec{a}_n$  спрямований до центра кривизни O (рис.3.4) і перпендикулярний вектору швидкості.

Радіусом кривизни траєкторії в даній точці називається величина, зворотна кривизні  $c = \frac{d\alpha}{ds}$ , де  $d\alpha$  – нескінченно малий кут повороту траєкторії (дотичної до неї) на довжині  $ds$ :  $R = \frac{1}{c}$ .

Розрахунки, що ми опускаємо, доводять, що модуль вектора  $\vec{a}_n$  визначається формулою

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (3.3)$$

При рівномірному русі точки по колу  $a_n = const$  і  $a_\tau = 0$ .

При *обертальному* русі твердого тіла всі його точки описують кола, центри яких лежать на одній прямій - осі обертання.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі лінійні швидкості і прискорення для різних його точок будуть різні. Тому обертальний рух заведено характеризувати кутовими величинами, однаковими в даний момент часу для всіх точок тіла, яке обертається.

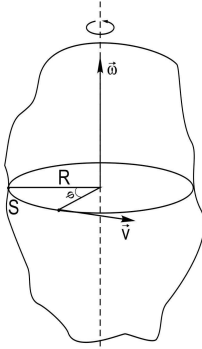


Рис.3.5

Якщо за час  $\Delta t$  тіло повертається на кут  $\Delta\varphi$ , то швидкість його обертання в даний момент характеризується вектором *кутової швидкості*  $\vec{\omega}$ , модуль якої

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Осьовий вектор  $\vec{\omega}$  спрямований уздовж осі обертання. Його напрямок визначається правилом правого гвинта: якщо напрямок обертання голівки гвинта збігається з напрямком обертання тіла, то поступальний рух гвинта вказує напрямком вектора  $\vec{\omega}$  (рис.3.5).

Вектор  $\vec{\omega}$  визначає модуль кутової швидкості, напрямок обертання і положення осі обертання. Модуль кутової швидкості вимірюється в *радіанах у секунду* ( $\text{rad}/\text{c}$ ).

При рівномірному обертанні модуль кутової швидкості  $\vec{\omega}$  зв'язаний з періодом обертання  $T$  і частотою обертання  $n$  таким чином:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n .$$

Швидкість зміни кутової швидкості характеризується *кутовим прискоренням*  $\vec{\varepsilon}$ , модуль якого

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Кутове прискорення також являє собою осьовий вектор. Напрямки векторів  $\vec{\varepsilon}$  і  $\vec{\omega}$  збігаються при прискореному обертанні і протилежні при сповільненому. Модуль кутового прискорення  $\varepsilon$  вимірюється в *радіанах на секунду в квадраті* ( $\text{rad}/\text{c}^2$ ).

Зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями можна одержати на основі рівності, що зв'язує довжину дуги  $s$ , пройденої точкою, що рухається, центральний кут  $\varphi$  і радіус  $R$  кола:

$$s = R\varphi .$$

Якщо продиференціювати цю рівність за часом, одержимо

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{або} \quad v = R\omega . \quad (3.4)$$

Якщо від останньої рівності взяти другу похідну, одержимо співвідношення між тангенціальним і кутовим прискореннями:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt}, \quad \text{або} \quad a_{\tau} = R\varepsilon . \quad (3.5)$$

## 3.2. Динаміка поступального руху.

### 3.2.1. Закони Ньютона

Основу класичної механіки складають три закони, сформульовані Ньютоном у результаті узагальнення численних досвідних даних.

**1 Перший закон Ньютона (закон інерції):** **усяке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки вплив з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан.**

Системи відліку, в яких виконується перший закон Ньютона, називаються *інерціальними*. З високим ступенем наближення інерціальною системою відліку є, як показали спостереження, геліоцентрична система з

початком координат у центрі Сонця й осями, спрямованими до вилучених зірок. Будь-яка система, що рухається прямолінійно і рівномірно щодо деякої інерціальної системи, також є інерціальною.

*Всі інерціальні системи відліку рівноправні: механічні явища в них протікають однаково і закони Ньютона для всіх таких систем відліку мають однакову форму. Тому ніякими механічними досвідами всередині даної системи відліку не можна установити, чи вона знаходиться у спокої або рухається з деякою постійною швидкістю  $\vec{v} = const$ .*

Це положення, взяте з досвіду, було сформульоване Галілеєм (1636 р.) і називається *принципом відносності Галілея (механічним принципом відносності)*.

А. Ейнштейн (1905 р.) узагальнив цей принцип на явища будь-якої природи (*загальний принцип відносності*).

Системи відліку, що рухаються з прискоренням відносно інерціальних систем, є *неінерціальними*. У них перший закон Ньютона не виконується. Система відліку, зв'язана з Землею, строго кажучи, є неінерціальною, тому що вона рухається з прискоренням, роблячи добуве обертання й орбітальний рух навколо Сонця. Однак це прискорення мале, і в більшості випадків Землю можна вважати інерціальною системою відліку.

**2. Другий закон Ньютона: сила, що діє на тіло, дорівнює добутку маси тіла на прискорення, яке надає тілу ця сила.**

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.6)$$

При цьому важливо уявляти, що в наведеному рівнянні  $\vec{a}$  є функцією від  $\vec{F}$  і  $m$ , тобто, модуль  $a$  прискорення, що здобувається тілом при взаємодії з іншими тілами, пропорційний модулю сили і обернено пропорційний масі тіла:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Напрямки векторів прискорення  $\vec{a}$  і сили  $\vec{F}$  збігаються

Тіло змінює швидкість свого руху, тобто здобуває прискорення за рахунок взаємодії з іншими тілами. Кількісною мірою взаємодії тіл є сила  $\vec{F}$ . Властивість тіла, що характеризує його здатність зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, називається *інертністю*. Кількісною мірою інертності тіла є його маса  $m$ . Крім того, маса є мірою *тяжіння й енергії*.

Самим Ньютоном другий закон механіки був сформульований не через прискорення, а через іншу фізичну величину - *імпульс тіла*. Імпульсом матеріальної точки або тіла при поступальному русі  $\vec{p}$  називається добуток маси тіла (точки)  $m$  на швидкість його руху  $\vec{v}$ :

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Оскільки  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , а маса є величина постійна, то формулу (3.6) можна записати так:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Остання рівність справедлива і для тіла, що рухається не поступально. При цьому імпульс його є сумою імпульсів усіх матеріальних точок, з яких складається тіло:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \quad (3.7)$$

Тому більш загальне формулювання другого закону Ньютона виглядає так:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.8)$$

**Сила, що діє на тіло, дорівнює швидкості зміни імпульсу тіла.**

Другий закон Ньютона є одночасно і визначенням поняття сили.

Одиницею сили в системі СІ є *Ньютон (Н)*:

$$1H = 1 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}$$

Одиниця імпульсу не має назви.

Якщо на тіло одночасно діє кілька сил, то в лівій частині рівностей (3.6) і (3.8) слід поставити рівнодіючу (результуючу) силу, яка дорівнює векторній сумі всіх прикладених до тіла сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i.$$

Остання рівність заснована на *принципі незалежності дії сил*, який отримано з досвіду: прискорення, що викликане якою-небудь однією силою, не залежить від того, чи діють на дане тіло одночасно будь-які інші сили.

**3. Третій закон Ньютона: сили, з якими діють одне на одного тіла, рівні за модулем і протилежні за напрямком:**

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \quad (3.9)$$

Взаємодія тіл є обопільною: якщо тіло 1 діє на тіло 2 із силою  $\vec{F}_{2,1}$ , то тіло 2 діє на тіло 1 із силою  $\vec{F}_{1,2}$ . Ці сили прикладені до різних тіл.

### 3.2.2. Закон збереження імпульсу

Вплив тіл одне на одного приводить до зміни імпульсу кожного з них. Але у визначених умовах загальний імпульс системи тіл може зберігатися.

Сили, що діють у системі тіл, підрозділяють на *внутрішні* (сили

взаємодії тіл системи між собою) і *зовнішні* (сили, що діють на тіла системи з боку тіл, що не входять у неї). *Замкнутою* називається система тіл, якщо на неї не діють зовнішні сили або векторна сума їх дорівнює нулю.

Для кожного з  $n$  тіл деякої системи зміну її імпульсу за час  $dt$  можна знайти за другим законом Ньютона:

$$d\vec{p}_1 = (\vec{f}_1 + \vec{F}_1)dt, \quad d\vec{p}_2 = (\vec{f}_2 + \vec{F}_2)dt, \dots, \quad d\vec{p}_n = (\vec{f}_n + \vec{F}_n)dt,$$

де  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$  і  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  – рівнодіючі внутрішніх і зовнішніх сил для кожного з тіл. Складемо векторно ліві і праві частини всіх  $n$  рівностей.

Оскільки  $\sum_{i=1}^n \vec{f}_i = 0$  (за третім законом Ньютона), то

$$d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 + \dots + d\vec{p}_n = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt$$

Для замкнутої системи  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ . Тому

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{const} . \quad (3.10)$$

Остання рівність є аналітичним виразом *закону збереження імпульсу*:

**Сумарний імпульс замкнутої системи залишається постійним.**

При цьому імпульс кожного з тіл системи може змінюватися .

Строго замкнутих систем у природі не існує, але деякі системи можна вважати практично замкнутими, якщо зовнішні сили малі в порівнянні з внутрішніми.

Закон збереження імпульсу є одним з основних законів фізики. Він однаково строго виконується як для макроскопічних тіл, так і для мікрочастинок.

Поступальний рух усіх точок тіла або системи тіл можна представити рухом єдиної точки, в якій вважають зосередженою всю масу системи, - *центра мас*. Радіус –вектор  $\vec{r}$  центра мас визначається наступним виразом:

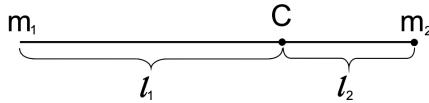
$$\vec{r} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i ,$$

де  $m_i$  і  $\vec{r}_i$  - маса і радіус – вектор  $i$ -ої матеріальної точки,  $m$  – сумарна маса тіла.

Підсумовування виконується по всіх матеріальних точках, з яких складається тіло або система.

У найпростішому випадку двох точкових мас  $m_1$  і  $m_2$  центр мас  $S$  поділяє відстань  $l$  між ними на дві частини  $l_1$  і  $l_2$  так, що  $m_1 l_1 = m_2 l_2$ .

Імпульс і швидкість центра мас замкнутої системи не змінюються згодом.



### 3.2.3 Види взаємодій. Сили в механіці

Всі відомі сили можна звести до чотирьох основних видів взаємодії: 1) *гравітаційна*; 2) *електромагнітна*; 3) *сильна*; 4) *слабка*.

Гравітаційна взаємодія є універсальною і зв'язує всі без винятку тіла. Однак ця взаємодія відіграє істотну роль лише у випадку тіл великої маси (Земля, Сонце й ін.). У мікросвіті вона є мізерно малою.

Електромагнітна взаємодія є невимірно більшою за гравітаційну і здійснюється за посередництвом електромагнітних полів. Електромагнітну природу має взаємодія атомів і молекул і, отже, обумовлені цією взаємодією хімічні, біологічні процеси.

Сильна (ядерна) взаємодія має різко обмежений радіус дії ( $10^{-15}$  м) і тому виявляється тільки всередині атомних ядер, де вона в сотні разів більша за електромагнітну взаємодію.

Слабка взаємодія обумовлює нестабільність ряду мікрочастинок (наприклад, при бета – розпаді).

У рамках класичної механіки розглядаються лише сили гравітаційної й електромагнітної природи.

2. **Сили тяжіння** (*гравітаційні сили*) підкоряються закону всесвітнього тяжіння Ньютона

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.11)$$

справедливому для матеріальних точок. Тут  $m_1$  і  $m_2$  - маси тіл, що

притягуються,  $r$  - відстань між ними,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$  -

*гравітаційна стала*, яка визначається з досвіду. Сили тяжіння

( $\vec{F}_{1,2}$  і  $\vec{F}_{2,1}$ ) спрямовані вздовж прямої, що з'єднує матеріальні точки.

$$\vec{F}_{1,2} = - \vec{F}_{2,1} \quad \left| \vec{F}_{1,2} \right| = \left| \vec{F}_{2,1} \right| = F$$

Взаємодія тіл на відстані здійснюється за посередництвом фізичних полів. Будь-яке тіло оточене гравітаційним полем, що діє на внесені в нього тіла із силами, пропорційними їх масам. Силовою характеристикою поля є *напруженість*

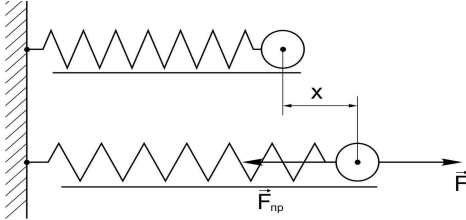
$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Напруженість гравітаційного поля чисельно дорівнює силі, що діє на тіло одиничної маси в даній точці поля. На поверхні Землі  $|\vec{g}| \approx 9,8 \text{ м/с}^2$  (з точністю до поправки, зв'язаної з обертанням Землі і відхиленням від сферичності). Вектор  $\vec{g}$  спрямований до визначеної точки – силовому центру поля, і збігається з прискоренням сили тяжіння (прискоренням вільного падіння).

Силу тяжіння  $m\vec{g}$  не слід ототожнювати з вагою тіла. *Вагою* тіла називають силу, з якою тіло діє на горизонтальну опору або підвіс завдяки силам тяжіння; на вагу тіла впливає також характер руху системи відліку. Якщо опора знаходиться у спокою або рухається рівномірно, вага тіла за модулем дорівнює силі тяжіння.

При русі опори з прискоренням  $\vec{a} = \vec{g}$  настає стан невагомості: тіло не давить на опору, і явища в системі відліку, що зв'язана з такою опорою, протікають так, що де-хто уявляє собі, ніби земне тяжіння зникло. Але навпаки: єдиною силою, що діє на тіло в стані невагомості, є сила тяжіння. Для живих організмів у стані невагомості порушується звичний режим, і плин багатьох біологічних процесів змінюється.

2. **Сили пружності** виникають в результаті безпосередньої взаємодії тіл, що супроводжується їхньою деформацією. Сила пружності має напрямок, протилежний зсувові часток і зовнішній силі. Якщо, наприклад, дія зовнішньої сили  $\vec{F}$  викликає подовження  $x$  пружини (рис. 3.6), то при пружних деформаціях (в умовах рівноваги, тобто при  $\vec{F}_{np} = -\vec{F}$ ) проекція сили пружності пропорційна подовженню  $x$ :



$$F_{np.x} = -kx. \quad (3.12)$$

Це закон Гука.

Сила пружності тіл обумовлена електромагнітною взаємодією часток, з яких складаються тіла.

Рис. 3.6

3. **Сили тертя** обумовлені взаємодією поверхонь стичних тіл, спрямовані по дотичній до цих поверхонь і перешкоджають відносному переміщенню тіл. Тертя між поверхнями різних тіл називається *зовнішнім* (*сухим*), а тертя між частинами того ж самого тіла (шарами рідини, газу) – *внутрішнім*.

Зовнішнє тертя може бути трьох виглядів: тертя ковзання, тертя



катання і тертя спокою.

Сила тертя ковзання спрямована проти руху тіла і дорівнює за модулем

$$F_{\text{тр.ковз}} = kF_n, \quad (3.13)$$

де  $F_n$  – сила нормального тиску, що притискає третьові поверхні друг до друга,  $k$  – безрозмірний *коефіцієнт тертя*, що залежить від роду і стану стичних поверхонь.

Сила тертя спокою дорівнює за величиною і протилежна за напрямком зовнішній силі, що намагається перемістити тіла вздовж поверхні їхнього зіткнення:

$$\vec{F}_{\text{тр.спок}} = -\vec{F}_{\text{зовн}}.$$

Максимальна сила тертя спокою дорівнює силі тертя ковзання

$$\vec{F}_{\text{тр.спок.макс}} = \vec{F}_{\text{тр.ковз}}.$$

Сили тертя обумовлені взаємодією часток тіл, що доторкаються і мають електромагнітну природу.

Сили внутрішнього тертя розглядаються в молекулярній фізиці.

### 3.2.4. Енергія, робота, потужність

Форми руху матерії досить різноманітні – механічне переміщення тіл, тепловий рух часток речовини, ядерні і біологічні процеси, хімічні реакції і т.ін. Рух у будь-якій його формі – невід’ємна властивість матерії. Універсальною кількісною мірою різних форм руху матерії є *енергія*.

Відповідно до різних форм руху матерії говорять про різні види енергії – механічну, внутрішню, ядерну і т.ін. У процесі взаємодії тіл форми руху матерії можуть змінюватися; при цьому змінюється і вид енергії. Так, тіла при терті нагріваються: їхня механічна енергія переходить у внутрішню. Зміна виду енергії обумовлена дією на тіло сил і зв’язана зі здійсненням роботи.

Поняття енергії і роботи нерозривно зв’язані між собою, тому що енергія тіла (системи тіл) характеризує його здатність виконувати роботу. Інакше кажучи, робота є кількісною мірою зміни енергії тіла (системи тіл) при переході його з одного стану в інший.

**Робота, яка здійснюється постійною силою  $\vec{F}$  при переміщенні тіла на прямолінійній ділянці шляху  $s$  (рис.3.7), дорівнює добутку проекції сили  $F_s$  (на напрямок переміщення) і модуля переміщення  $s$ :**

$$A = F_s s = F s \cos \alpha, \quad (3.14)$$

де  $\alpha$  - кут між векторами сили  $\vec{F}$  і переміщення  $\vec{s}$ .

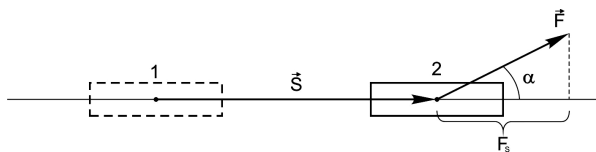


Рис. 3.7

Одиницею роботи в системі СІ є *Джоуль* (Дж):  $1\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot \text{м}$ .

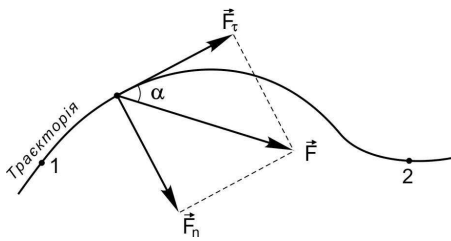


Рис. 3.8

У загальному випадку руху тіла за криволінійною траєкторією під дією змінної сили  $\vec{F}$  (рис.3.8) спочатку знаходять елементарну роботу  $dA$  на малому переміщенні  $d\vec{s}$ , на якому модуль і напрямок сили можна вважати

незмінними, а траєкторію прямолінійною:  $dA = F_s ds$ .

Сумарну роботу  $A$  сили  $\vec{F}$  на ділянці траєкторії від точки 1 до

точки 2 знаходять інтегруванням:  $A = \int_1^2 dA = \int_1^2 F_s ds$ .

Якщо силу  $\vec{F}$  розкласти на тангенціальну і нормальну складові  $\vec{F}_\tau$  і  $\vec{F}_n$  (див. рис. 3.8), то, як видно з формули, роботу виконує тільки тангенціальна складова  $\vec{F}_\tau$ , дотична до траєкторії:

$$A = \int_1^2 |\vec{F}_\tau| ds = \int_1^2 F_s ds.$$

*Консервативною (потенціальною)* називають силу, робота якої визначається тільки початковим і кінцевим положеннями тіла і не залежить від шляху його переходу з одного положення в інше. Консервативними є, наприклад, сили тяжіння, сили пружності. Усі центральні сили, як показує розрахунок, консервативні. Силове поле, в якому діють консервативні сили, називається *потенціальним*. Отже, робота консервативних сил по замкнутій траєкторії дорівнює нулю.

Потужність – це робота, що виконується в одиницю часу.

Миттєва потужність визначається за формулою:  $N_{\text{мит}} = \frac{dA}{dt}$ .

Середня потужність визначається за формулою:  $N = \frac{A}{t}$ .

У випадку рівномірного руху з постійними за модулем швидкістю  $v$  і силою опору  $F_{on}$   $N = F_{on} v$ .

### 3.2.5. Кінетична і потенціальна енергія. Повна енергія тіла

В механіці розрізняють два види енергії – *кінетичну* енергію  $W_k$  (енергія руху) і *потенціальну* енергію  $W_p$  (енергія взаємодії). Сума  $W_k + W_p = W$  є повна механічна енергія тіла (системи тіл).

Неважко встановити зв'язок між зміною кінетичної енергії  $W_k$  і роботою  $A$  сили  $\vec{F}$ , що змінює швидкість тіла від  $v_1$  до  $v_2$ . Елементарна робота сили  $\vec{F}$  на шляху  $ds$  дорівнює:

$$dA = F_s ds = m \frac{dv}{dt} dt = m v dv.$$

Тому 
$$A = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1}. \quad (3.15)$$

Кінетична енергія поступального руху тіла визначається за формулою:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Згідно (3.15) робота результуючої сили дорівнює збільшенню кінетичної енергії тіла. Для елементарної роботи можна записати:

$$dA = dW_k. \quad (3.16)$$

Кінетична енергія тіла вимірюється тією роботою, яку треба виконати, щоб збільшити його швидкість від нуля до даної величини, або роботою, яку це тіло, що володіє швидкістю  $v$ , може виконати до повної зупинки. У будь-якому випадку  $W_k \geq 0$ . Одиниці виміру енергії збігаються з одиницями роботи.

Потенціальною називається енергія, що залежить від взаємного розташування взаємодіючих тіл або частин одного тіла (конфігурації системи). Потенціальна енергія тісно зв'язана з існуванням силових полів (гравітаційного, електричного й ін.).

Якщо стан системи змінюється під дією тільки консервативних сил, то робота  $A_{1 \rightarrow 2}$  цих сил залежить лише від початкової 1 і кінцевої 2 конфігурацій системи. Це означає, що робота  $A_{1 \rightarrow 2}$  визначається зміною потенціальної енергії системи:  $A_{1 \rightarrow 2} = W_{p2} - W_{p1} = -(W_{p1} - W_{p2})$ ,

де  $W_{p1}, W_{p2}$  - значення потенціальної енергії, що відповідають конфігураціям 1 і 2. **Робота консервативних сил дорівнює збитку потенціальної енергії.** Для елементарної роботи це твердження записується так:  $dA = -dW_p$ .

Потенціальна енергія може бути визначена з точністю до довільної постійної величини  $C$ , значення якої не змінює різниці  $W_{p1} - W_{p2}$ , або величини  $dW_p$ . Тому в кожному конкретному випадку вибирають «нульову» конфігурацію системи, в якій потенціальна енергія приймається рівної нулю (нульовий рівень відліку  $W_p$ ). Отже, **потенціальна енергія дорівнює роботі консервативних сил при переході системи з даної конфігурації в «нульову».** Так, для тіла масою  $m$ , що піднято над поверхнею Землі (нульовий рівень) на висоту  $h$ , потенціальна енергія виражається формулою

$$W_{p1} = A_{1-0} = mgh.$$

Універсальної формули для розрахунку потенціальної енергії немає: її вид визначається характером взаємодії тіл (частин тіла) і їхнім розташуванням. Так, для випадку дії на тіло сил пружності одержимо:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} + C,$$

де  $C$  – довільна стала величина. Якщо прийняти  $W_p = 0$  при  $x = 0$  (деформації відсутні), то  $C = 0$ . При такому виборі нульового рівня потенціальна енергія тіла, що знаходиться під дією сил пружності, виражається формулою

$$W_p = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенціальна енергія двох матеріальних точок, що притягаються за законом всесвітнього тяжіння, у випадку, якщо вона прагне до нуля при нескінченно великій відстані між точками:

$$W_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Механічна енергія лише один з виглядів енергії. *Повна енергія* тіла без врахування його взаємодії з іншими тілами може бути визначена за формулою, запропонованою Ейнштейном:

$$W = mc^2, \quad (3.17)$$

де  $m$  – маса тіла і  $c$  – швидкість світла у вакуумі. Співвідношення (3.17) є універсальним. З його допомогою можна визначити енергію, зв'язану з будь-яким видом матерії – речовиною, полем. З масою

спокою  $m_0$  зв'язана найменша енергія – енергія спокою:

$$W_0 = m_0 c^2 .$$

Різниця  $mc^2 - m_0 c^2$  характеризує кінетичну енергію тіла.

Зміна повної енергії тіла супроводжується пропорційною зміною його маси:

$$\Delta W = \Delta mc^2 . \quad (3.18)$$

Швидкість руху макроскопічних тіл звичайно мала в порівнянні зі швидкістю світла ( $v \ll c$ ). Тому

$$\frac{mv^2}{2} \ll mc^2 .$$

Енергія не може існувати сама за собою, у відриві від матеріального носія – речовини, поля. Співвідношення (3.17) і (3.18) підтверджують існування глибокого і нерозривного зв'язку між матерією і рухом.

### 3.2.6. Закон збереження енергії в механіці

Якщо в замкнутій системі діють тільки консервативні сили, то робота  $dA$  цих сил при зміні конфігурації системи супроводжується зміною кінетичної й одночасно рівною їй за модулем, але протилежною за знаком зміною потенціальної енергії системи:

$$dA = dW_k = -dW_p .$$

Звідси

$$dW_k + dW_p = d(W_k + W_p) = 0 ,$$

або

$$W = W_k + W_p = const .$$

**Повна механічна енергія замкнутої системи тіл, в якій діють тільки консервативні сили, не змінюється згодом.**

У цьому полягає закон збереження механічної енергії. Значення величин  $W_k$  і  $W_p$  окремо можуть змінюватися, але їхня сума залишається постійною.

В реальних умовах у будь-якій системі поряд з консервативними діють також неконсервативні сили (наприклад, сили тертя) і повна механічна енергія системи зменшується, поступово переходячи в інші види. Зміна механічної енергії системи вимірюється роботою неконсервативних сил.

Крім механічної, відомі й інші види енергії: ядерна, електромагнітна, хімічна й ін., здатні перетворюватися друг у друга. Досвід показує:

**В замкнутій системі загальна кількість енергії усіх видів залишається строго постійною незалежно від того, які процеси відбуваються в цій системі.**

Так формулюється закон збереження і перетворення енергії, що є найбільш загальним законом природи. Він отриманий на основі узагальнення великої кількості досвідних даних. Він однаково добре виконується для макро- і мікросистем у всіх областях природознавства без яких-небудь порушень і виключень.

На основі законів збереження імпульсу й енергії можна пояснити поведінку тіл або часток при зіткненнях. Тіла, які зштовхуються, можна вважати замкнутою системою, тому що виникаючі при короткочасному ударі внутрішні сили системи в багато разів перевершують зовнішні.

При абсолютно непружному ударі, коли в результаті зустрічі тіла поєднуються (зіткнення куль із сирої глини, стрибок людини в човен, влучення нейтрона в атомне ядро і т.ін.), закон збереження імпульсу виражається наступною рівністю:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v} ,$$

де  $m_1 \vec{v}_1, m_2 \vec{v}_2$  – імпульси тіл до удару,  $(m_1 + m_2) \vec{v}$  – загальний імпульс після удару.

Якщо  $m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2$  (зустрічний рух тіл з рівними імпульсами), то після зустрічі тіла зупиняються ( $\vec{v} = 0$ ).

При абсолютно пружному ударі (близький до нього удар сталевих куль) тіла після зіткнення цілком відновлюють свою форму і внутрішню енергію. Це означає, що сумарна кінетична енергія тіл або часток при абсолютно пружному ударі не змінюється, а лише перерозподіляється між ними. При такому зіткненні виконуються закон збереження імпульсу і закон збереження кінетичної енергії. За цими законами можна визначити швидкості і кінетичні енергії часток після зіткнення.

### 3.3. Динаміка обертального руху твердого тіла

#### 3.3.1. Основне рівняння динаміки обертального руху.

##### Момент інерції. Момент імпульсу

Нехай тверде тіло обертається навколо закріпленої осі під дією сили  $\vec{F}$ , розташованої в площині, перпендикулярній осі обертання (на рисунку 3.9 точка  $O$  – слід осі обертання). Викликати обертання або змінити його швидкість може лише сила, момент якої щодо даної осі відмінний від нуля.

Модуль  $M$  моменту сили  $\vec{F}$  щодо деякої осі дорівнює добутку модуля  $F$  сили

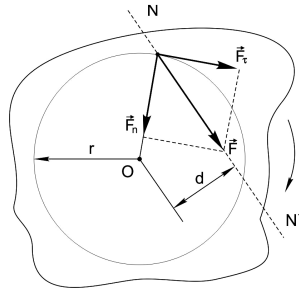


Рис. 3.9

на плече  $d$  цієї сили (найкоротша відстань між віссю обертання і лінією дії сили NN):  $M = Fd$ .

Силу  $\vec{F}$  розкладемо на складові: тангенціальну  $\vec{F}_\tau$  і нормальну  $\vec{F}_n$ . Відмінний від нуля момент має тільки сила  $\vec{F}_\tau$  (її плечем є радіус  $r$  кола). Тому  $M = F_\tau r$ .

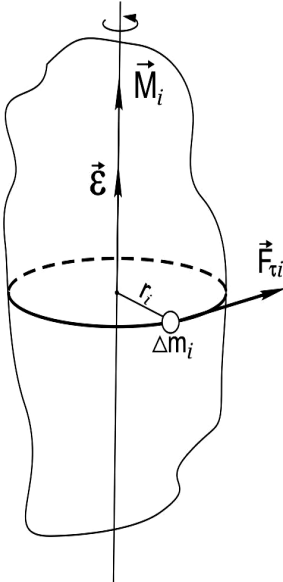


Рис. 3.10

Момент сили – осьовий вектор, його напрямок визначається *правилом правого гвинта*.

Розділимо уявно тверде тіло, що обертається, на  $n$  елементарних мас (матеріальних точок)  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ , що знаходяться на відстанях  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , від осі обертання. Усі вони в даний момент мають однакові кутові швидкості  $\vec{\omega}$  й однакові кутові прискорення  $\vec{\epsilon}$ . Матеріальна точка масою  $\Delta m_i$  під дією сили  $F_a$  здобуває прискорення  $a_a$ , рухаючи по колу з радіусом  $r_i$  (рис. 3.10).

За другим законом Ньютона  $F_{ci} = \Delta m_i a_a$ .

Якщо помножити цю рівність на  $r_i$  і виразити лінійне прискорення  $a_a$  через кутове  $\epsilon$ , одержимо:

$$F_{ci} r_i = \Delta m_i r_i^2 \epsilon,$$

або у векторній формі  $\vec{M}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\epsilon}$ .

Вектори  $\vec{M}_i$  і  $\vec{\epsilon}$  мають однакові напрямки.

Добуток  $\Delta m_i \cdot r_i^2$  називається *моментом інерції  $i$ -тої матеріальної точки щодо деякої осі*:

$$I_i = \Delta m_i \cdot r_i^2.$$

Склавши вектори  $\vec{M}_i$  для всіх матеріальних точок, одержимо:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{\epsilon} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2, \quad (3.19)$$

де  $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$  - сумарний момент сил, прикладених до тіла, і

$$I = \sum_i^n \Delta m_i \cdot r_i^2$$

момент інерції тіла, що дорівнює сумі моментів інерції всіх його матеріальних точок щодо осі обертання. З огляду на ці позначення, можна рівність (3.19) записати так:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}, \text{ або } \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}. \quad (3.20)$$

Ця формула виражає *основне рівняння динаміки обертального руху твердих тіл* (другий закон Ньютона для обертального руху):

**Кутове прискорення тіла, що обертається, прямо пропорційне сумарному моменту сил, прикладених до тіла, і обернено пропорційне моменту інерції тіла щодо осі обертання.**

Векторна величина  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  називається *моментом імпульсу*. Напрямки векторів  $\vec{L}$  і  $\vec{\omega}$  збігаються. Для матеріальної точки з масою  $m$  модуль моменту імпульсу дорівнює:  $L = mr^2\omega = mr^2 \frac{v}{r} = mrv$ ,

де  $r$  – радіус кругової траєкторії і  $v$  – модуль лінійної швидкості матеріальної точки (рис. 3.11).

Підставляючи в (3.20) вираз  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  і вважаючи для твердого тіла  $I = \text{const}$ , одержимо

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (3.21)$$

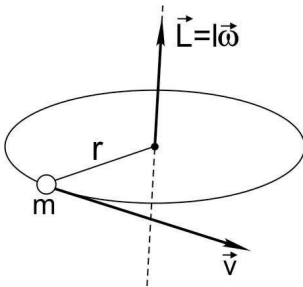


Рис. 3.11

щодо осі обертання. Момент інерції обчислюється за формулою

$$I = \int_V r^2 \rho dV, \quad (3.22)$$

де  $\rho$  – густина речовини,  $V$  – об'єм тіла. На рисунках 3.12 і 3.13 приведені приклади моментів інерції для різних тіл щодо зазначених



осей обертання, обчислених за формулою (3.22).

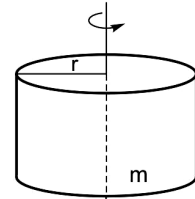
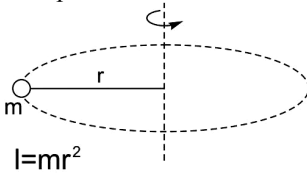


Рис. 3.12

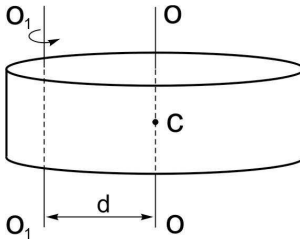


Рис.3.14

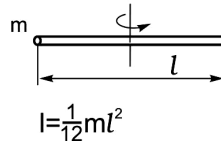
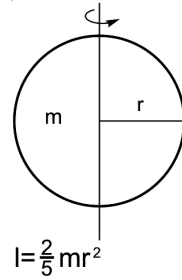


Рис. 3.13

Якщо знати момент інерції  $I_0$  даного тіла щодо осі  $OO$ , що проходить через центр мас  $C$  (рис.3.14), можна за *теоремою Гюйгенса – Штейнера* знайти момент інерції  $I$  цього тіла щодо осі  $O_1O_1$ , паралельної до даної осі  $OO$ :

$$I = I_0 + md^2,$$

де  $d$  – відстань між осями і  $m$  – маса тіла.

### 3.3.2. Закон збереження моменту імпульсу

Якщо сумарний момент зовнішніх сил, що діють на тіло або систему тіл, дорівнює нулю ( $\vec{M} = 0$ ), то з формули (3.21) випливає,

що 
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

або 
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const.$$

**Якщо сума моментів зовнішніх сил дорівнює нулю, то момент імпульсу системи не змінюється згодом.**

У цьому складається *закон збереження моменту імпульсу*.

### 3.3.3. Кінетична енергія тіла, що обертається

Кінетична енергія тіла, що обертається, дорівнює сумі

кінетичних енергій його часток:

$$W_k = \sum \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}.$$

$$\text{Оскільки } v_i = \omega r_i, \text{ то } W_k = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}, \quad (3.23)$$

де  $I$  – момент інерції тіла щодо осі обертання.

Якщо тіло масою  $m$  одночасно бере участь у поступальному й обертальному рухах (наприклад, якщо котиться колесо), то вираз для кінетичної енергії має вигляд:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3.24)$$

де  $v$  – швидкість центра мас,  $\omega$  – кутова швидкість,  $I$  – момент інерції тіла щодо осі обертання, що проходить через центр мас.

### 3.4. Приклади розв'язання задач з механіки

**Приклад 1.** Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі має вигляд  $x = A + Bt + Ct^3$ , де  $A = 2 \text{ м}$ ,  $B = 1 \text{ м/с}$ ,  $C = -0,5 \text{ м/с}^3$ . Знайти координату  $x$ , проекції швидкості  $v_x$  і прискорення  $a_x$  точки в момент часу  $t = 2 \text{ с}$ .

**Розв'язання.** Координату  $x$  знайдемо, підставивши в рівняння руху числові значення коефіцієнтів  $A, B, C$  і часу  $t$ :

$$x = (2 + 1 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^3) \text{ м} = 0.$$

Проекція швидкості на вісь  $x$  є перша похідна координати за часом:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Проекцію прискорення точки знайдемо, узявши першу похідну від проекції швидкості за часом:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct.$$

В момент часу  $t = 2 \text{ с}$

$$v_x = (1 - 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2) \text{ м/с} = -5 \text{ м/с}; \quad a_x = 6(-0,5) \cdot 2 \text{ м/с}^2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

**Приклад 2.** На похилій площині знаходиться вантаж  $m_1 = 5 \text{ кг}$ , зв'язаний ниткою, що перекинута через блок, з іншим вантажем  $m_2 = 2 \text{ кг}$  (рис.3.15). Коефіцієнт тертя між першим вантажем і площиною  $k = 0,1$ ; кут нахилу площини до обрію  $\alpha = 37^\circ$ . Визначити прискорення вантажів. При яких значеннях  $m_2$  система буде знаходитися в рівновазі?

**Розв'язання.** У задачі розглядаються два тіла, які зв'язані ниткою і здійснюють поступальний рух. Якщо нитку, як завжди, вважати нерозтяжною, то прискорення цих тіл рівні за модулем:  $a_1 = a_2$ .

На тіло маси  $m_1$  діють сила ваги  $m_1 \vec{g}$ , сила нормальної реакції  $\vec{N}$  похилої площини, сила натягу  $\vec{T}$  нитки і сила тертя  $\vec{f}_{\text{тр}}$ . Сила тертя спрямована у бік, протилежний швидкості тіла; якщо ж напрямок руху системи невідомий, то не можна вказати напрямок сили тертя. Але тому що сила тертя не може змінити напрямку руху на протилежний, то слід визначити спочатку напрямок руху при відсутності тертя, а потім уже розв'язувати задачу з урахуванням сили тертя.

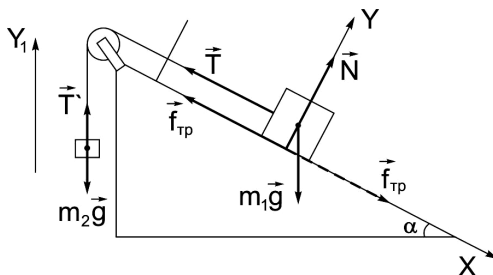


Рис. 3.15

Другий закон Ньютона для першого тіла без урахування сили тертя має вигляд:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T} + \vec{N} \quad (1)$$

На тіло  $m_2$  діють сила ваги  $m_2 \vec{g}$  і сила натягу  $\vec{T}'$  нитки:

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}' \quad (2)$$

Якщо ввести осі координат і замінити векторні рівняння (1) і (2) скалярними, одержимо систему рівнянь, розв'язання якої дозволить визначити напрямок прискорення  $\vec{a}_1$ . Оскільки тіла не мали початкової швидкості, миттєва швидкість кожного з тіл збігається за напрямком з його прискоренням, отже, напрямок сили тертя, що діє на тіло  $m_1$ , буде відомо. Після цього можна розв'язувати задачу вже з урахуванням сили тертя. При цьому в рівняння (1) треба ввести в праву частину силу тертя, рівняння (2), мабуть, не зміниться. При розгляді умов рівноваги слід повторити всі міркування, з огляду на те, що в цьому випадку

$$a_1 = a_2 = 0. \quad (3)$$

Для заміни векторних рівнянь (1) і (2) скалярними, введемо для опису руху тіла  $m_1$  осі  $x$  і  $y$ , тіла  $m_2$  – вісь  $u$  (рис.3.15). З огляду на те, що внаслідок невагомості нитки і блоку  $T' = T$ , одержуємо:

$$m_1 a_{1x} = m_1 g \sin \alpha - T, m_2 a_{2y} = T - m_2 g, a_{1x} = a_{2y} \quad (4)$$

Після спільного розв'язання рівнянь (4) одержуємо:

$$a_{1x} = g \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} = 9,8 \frac{5 \cdot 0,6 - 2}{7} > 0.$$

Проекція вектора  $\vec{a}$  на вісь  $x$  позитивна; це значить, що тіло  $m_1$

рухається вниз по похилій площині, отже, сила тертя спрямована нагору по похилій площині.

Можна, не завертаючи до векторних рівнянь, ввести силу тертя в перше з рівнянь (4). При цьому слід врахувати, що

$$a_{1x} = a_{2y} = a, \quad f_{\text{мп}x} = -f_{\text{мп}} = -kN.$$

Тоді  $m_1 a = m_1 g \sin \alpha - T - kN, \quad m_2 a = T - m_2 g.$

Силу нормальної реакції  $N$  знайдемо з рівняння (1), записаного в скалярному вигляді для проекцій на вісь  $y$ :

$$a_{1y} = 0; \quad 0 = N - m_1 g \cos \alpha,$$

Відкіля  $N = m_1 g \cos \alpha.$

Остаточо

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin \alpha - T - k m_1 g \cos \alpha \\ m_2 a &= T - m_2 g \end{aligned} \quad (5)$$

Спільне розв'язання системи (5) дає

$$a = g \frac{m_1 (\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 0,84 \text{ м/с}^2.$$

Умови рівноваги, що відповідають рівності нулю результуючої сили, що діє на кожне тіло, залежать, мабуть, від наявності сили тертя і її напрямків.

Якщо тертя немає, то, як впливає з розв'язання системи (4),

$$a_{1x} = g (m_1 \sin \alpha - m_2) / (m_1 + m_2).$$

В умовах рівноваги  $a_{1x} = 0$  і  $m_2 = m_2^* = m_1 \sin \alpha = 3 \text{ кг}.$

Якщо  $m_2 < m_2^*, \quad a_{1x} > 0$  і тіло  $m_1$  рухається вниз по похилій площині; якщо  $m_2 > m_2^*, \quad a_{1x} < 0$  і тіло  $m_1$  рухається вгору по похилій площині.

В умовах рівноваги сила тертя є силою тертя спокою і її напрямок протилежний напрямкові можливого руху тіла  $m_1$ .

У першому випадку сила тертя спрямована нагору по похилій площині, і систему (4) з урахуванням того, що  $a_{1x} = a_{2y} = 0$ , можна переписати у вигляді

$$0 = m_1 g \sin \alpha - T - f_{\text{мп}}, \quad 0 = T - m_2 g, \quad (6)$$

Відкіля  $m_2 = m_1 \sin \alpha - \frac{f_{\text{мп}}}{g}.$  (7)

В другому випадку ( $m_2 > m_2^*$ ) сила тертя спрямована вниз по

похилій площині і рівняння (6) приймуть вид

$$0 = m_1 g \sin \alpha - T + f_{mp}, \quad 0 = T - m_2 g .$$

В обох випадках сила тертя спокою  $f_{mp} \leq kN = km_1 g \cos \alpha$  .

З урахуванням цієї нерівності вирази (7) і (8) приймуть вид

$$m_2 \geq m_1(\sin \alpha - k \cos \alpha) = 2,6 \text{ кг}$$

$$m_2 \leq m_1(\sin \alpha + k \cos \alpha) = 3,4 \text{ кг}$$

Легко бачити, що перша нерівність має сенс тільки, коли  $\sin \alpha > \cos \alpha$  . Обидві нерівності не суперечать одна одній, і рівновага має місце при  $2,6 \text{ кг} \leq m_2 \leq 3,4 \text{ кг}$  .

Граничним значенням маси  $m_2$  відповідає найбільша сила тертя спокою ( $f_{mp, \text{ макс}} = kN$ ) . Якщо  $m_2 = 2,6 \text{ кг}$  або  $m_2 = 3,4 \text{ кг}$ , то при найменшому поштовху (у першому випадку – униз, у другому – нагору) почнеться рух системи. В обох випадках рух буде рівномірним.

**Приклад 3.** На спокійній воді ставка перпендикулярно до берега носом до нього стоїть човен масою  $M$  і довжиною  $L$ . На кормі стоїть людина масою  $m$ . На яку відстань  $s$  віддаляться човен від берега, якщо людина перейде з корми на ніс човна? Силами тертя й опору знехтувати.

**Розв'язання.** Систему людина – човен щодо горизонтального напрямку можна розглядати як замкнуту. Відповідно до наслідку з закону збереження імпульсу, внутрішні сили замкнутої системи тіл не можуть змінити положення центра мас системи. Застосовуючи цей наслідок до системи людина – човен, можна вважати, що при переміщенні людини по човну центр мас системи не змінить свого положення, тобто залишиться на колишній відстані від берега.

Нехай центр мас системи людина-човен знаходиться на вертикалі, що проходить у початковий момент через точку  $C_1$  човна (рис.3.16), а після переміщення човна – через іншу її точку  $C_2$ . Оскільки вертикаль нерухома щодо берега, то шукане переміщення  $s$  човна щодо берега дорівнює переміщенню човна щодо вертикалі.

А останнє легко визначити за переміщенням центра мас  $O$  човни. Як видно з рис.3.16, у початковий момент точка  $O$  знаходиться на відстані  $l_1$  ліворуч від вертикалі, а після переходу людини – на відстані  $l_2$  праворуч від вертикалі. Отже, шукане переміщення човна

$$s = l_1 + l_2 . \quad (1)$$

Для визначення  $l_1$  і  $l_2$  скористаємося тим, що результуючий момент сил, що діють на систему щодо горизонтальної осі, перпендикулярної до поздовжньої осі човна, дорівнює нулю. Тому для

початкового положення системи  $Mgl_1 = mg(l - l_1)$ , відкіля

$$l_1 = ml / (M + m).$$

Після переміщення човна  $Mgd_2 = mg(L - d_2 - l)$ , відкіля

$$L_2 = m(L - l) / (M - m) \text{ const}$$

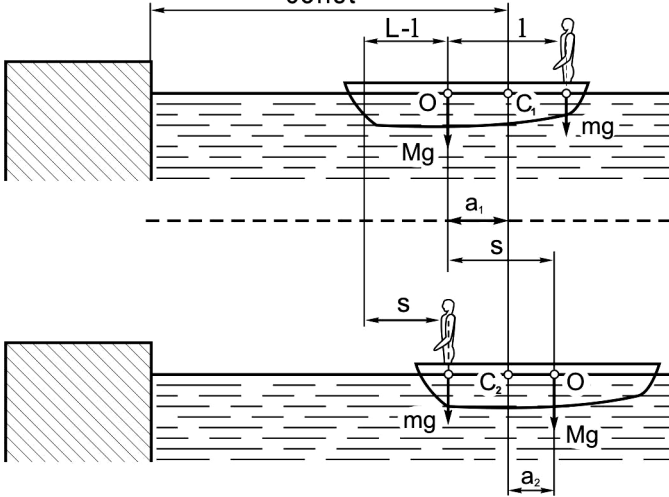


Рис.3.16

Підставивши отримані вирази  $l_1$  і  $l_2$  в рівняння ( 1 ), знайдемо:

$$s = \frac{m}{M + m} l + \frac{m}{M + m} (L - l), \text{ або } s = \frac{m}{M + m} L.$$

**Приклад 4.** При пострілі з пружинного пістолета вертикально вгору куля масою  $m = 20 \text{ г}$  піднялася на висоту  $h = 5 \text{ м}$ . Визначити жорсткість  $k$  пружини пістолета, якщо вона була стиснута на  $x = 10 \text{ см}$ . Масою пружини і силами тертя знехтувати.

**Розв'язання.** Розглянемо систему пружина – куля. Оскільки на тіла системи діють тільки консервативні сили, то для розв'язання задачі можна застосувати закон збереження енергії в механіці. Відповідно до нього повна механічна енергія  $E_1$  системи в початковому стані (у даному випадку перед пострілом) дорівнює повної енергії  $E_2$  у кінцевому стані (коли куля піднялася на висоту  $h$ ), тобто

$$E_1 = E_2, \text{ або } T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (1)$$

де  $T_1, T_2, \Pi_1, \Pi_2$  – кінетичні і потенціальні енергії системи в початковому і кінцевому станах.

Тому що кінетичні енергії кулі в початковому і кінцевому

станах дорівнюють нулю, то рівність (1) приймає вигляд:

$$P_1 = P_2. \quad (2)$$

Прийmemo потенціальну енергію кулі в поле сил тяжіння Землі, коли куля знаходиться на стиснутій пружині, рівною нулю, а висоту підйому кулі будемо відраховувати від торця стиснутої пружини. Тоді енергія системи в початковому стані буде дорівнювати потенціальній енергії стиснутої пружини, тобто  $P_1 = \frac{1}{2}kx^2$ , а в кінцевому стані – потенціальній енергії кулі на висоті  $h$ , тобто  $P_2 = mgh$ .

Підставивши вирази  $P_1$ ,  $P_2$  у формулу (2), знайдемо  $\frac{1}{2}kx^2 = mgh$ , відкіля  $k = \frac{2mgh}{x^2}$ . (3)

Підставимо у формулу (3) значення величин і зробимо обчислення:

$$k = \frac{2 \cdot 0,02 \cdot 9,81 \cdot 5}{(0,1)^2} \text{ Н / м} = 196 \text{ Н / м}.$$

**Приклад 5.** Куля масою  $m_1$ , що рухається горизонтально з деякою швидкістю  $v_1$ , зіштовхнулася з нерухомою кулею масою  $m_2$ . Кулі абсолютно пружні, удар прямий, центральний. Яку частку  $\varepsilon$  своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

**Розв'язання.** Частка енергії, переданої першою кулею другій, виразиться співвідношенням

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{u_2}{v_1} \right)^2, \quad (1)$$

де  $T_1$  – кінетична енергія першої кулі до удару;  $u_2$  і  $T_2$  – швидкість і кінетична енергія другої кулі після удару.

Як видно з формули (1), для визначення  $\varepsilon$  треба знайти  $u_2$ . Відповідно до умови задачі, імпульс системи двох куль щодо горизонтального напрямку не змінюється і механічна енергія куль в інші види не переходить. Користуючись цим, знайдемо:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (2)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3)$$

Вирішимо спільно рівняння (2) і (3):  $u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ .

Підставивши цей вираз  $u_2$  у формулу (1), одержимо:

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \left[ \frac{2m_1 v_1}{v_1(m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Зі знайденого співвідношення видно, що частка переданої енергії залежить тільки від мас куль, що зіштовхуються.

**Приклад 6.** Через блок у вигляді суцільного диска, що має масу  $m = 80$  г (рис. 3.17), перекинута тонка гнучка нитка, до кінців якої підвішено вантажі з масами  $m_1 = 100$  г і  $m_2 = 200$  г. Визначити прискорення, з яким будуть рухатися вантажі, якщо їх надати самим собі. Тертям і масою нитки знехтувати.

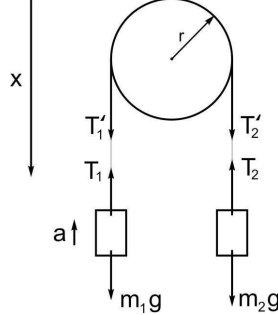


Рис.3.17

**Розв'язання.** Розглянемо сили, що діють на кожен вантаж і на блок

окремо. На кожен вантаж діють дві сили: сила ваги і сила пружності (сила натягу нитки). Направимо вісь  $x$  вертикально вниз і напишемо для кожного вантажу рівняння руху (другий закон Ньютона) у проекціях на цю вісь.

Для першого вантажу

$$T_1 - m_1 g = m_1 a; \quad (1)$$

для другого вантажу

$$m_2 g - T_2 = m_2 a. \quad (2)$$

Під дією моментів сил  $T_1$  і  $T_2$  щодо осі  $z$ , перпендикулярної до площини креслення і спрямованої за креслення, блок здобуває кутове прискорення  $\varepsilon$ . Відповідно до основного рівняння динаміки обертального руху,

$$T_2 r - T_1 r = J_z \varepsilon, \quad (3)$$

де  $\varepsilon = a/r$ ;  $J_z = 1/2 m r^2$  – момент інерції блоку (суцільного диска) щодо осі  $z$ .

Відповідно до третього закону Ньютона, з урахуванням невагомості нитки  $T_1' = T_1$ ,  $T_2' = T_2$ . Скориставшись цим, підставимо в рівняння (3) замість  $T_1'$  і  $T_2'$  вирази  $T_1$  і  $T_2$ , одержавши їх попередньо з рівнянь (1),(2) і

$$(m_2 g - m_2 a)r - (m_1 g + m_1 a)r = m r^2 a / (2r).$$

Після скорочення на  $r$  і перегрупування членів знайдемо:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g. \quad (4)$$



Формула (4) дозволяє маси  $m_1$ ,  $m_2$  і  $m$  виразити в грамах, як вони дані в умові задачі, а прискорення – в одиницях СІ. Після підстановки числових значень у формулу (4) одержимо

$$a = \frac{(200 - 100)g}{(200 + 100 + 80/2)g} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 2,88 \text{ м/с}^2.$$

**Приклад 7.** Маховик у вигляді суцільного диску з радіусом  $R = 0,2 \text{ м}$  і масою  $m = 50 \text{ кг}$ , розкручений до частоти обертання  $n_1 = 480 \text{ хв}^{-1}$  і наданий сам собі. Під дією сил тертя маховик зупинився через  $t = 50 \text{ с}$ . Знайти момент  $M$  сил тертя.

**Розв'язання.** Для розв'язання задачі скористаємося основним рівнянням динаміки обертального руху у вигляді :

$$dL_z = M_z dt, \quad (1)$$

де  $dL_z$  – зміна проекції на вісь  $z$  моменту імпульсу маховика, що обертається щодо осі  $z$ , яка збігається з геометричною віссю маховика, за інтервал часу  $dt$ ;  $M_z$  – момент зовнішніх сил (у даному випадку момент сил тертя), що діють на маховик, щодо осі  $z$ .

Можна вважати, що момент сил тертя не змінюється з часом ( $M_z = \text{const}$ ), тому інтегрування рівняння (1) приводить до виразу:

$$\Delta L_z = M_z \Delta t. \quad (2)$$

При обертанні твердого тіла щодо нерухомої осі зміна проекції моменту імпульсу

$$\Delta L_z = J_z \Delta \omega, \quad (3)$$

де  $J_z$  – момент інерції маховика щодо осі  $z$ ;  $\Delta \omega$  – зміна кутової швидкості маховика.

Дорівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$M_z \Delta t = J_z \Delta \omega,$$

відкіля: 
$$M_z = J_z \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \quad (4)$$

Момент інерції маховика у вигляді суцільного диска визначається за формулою:

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Зміну кутової швидкості  $\Delta \omega = \omega - \omega_1$  виразимо через кінцеву  $n_2$  і початкову  $n_1$  частоти обертання, користуючись співвідношенням

$$\omega = 2\pi n;$$

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi (n_2 - n_1).$$

Підставивши в формулу (4) вирази  $J_z$  і  $\Delta \omega$ , одержимо:

$$M_z = \pi m^2 (n_2 - n_1) / \Delta t. \quad (5)$$

Перевіримо, чи дає розрахункова формула одиницю моменту сили ( $H \cdot m$ ). Для цього в праву частину формули замість символів величин підставимо їхні одиниці виміру:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ с}^{-1}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Підставимо в рівняння (5) числові значення величин і зробимо обчислення, враховуючи, що  $n_1 = 480 \text{ хв}^{-1} = 480/60 \text{ с}^{-1} = 8 \text{ с}^{-1}$ :

$$M_z = \frac{3,14 \cdot 50 \cdot (0,2)^2 \cdot (0 - 8)}{50} \text{ Н} \cdot \text{м} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Знак мінус показує, що момент сил тертя справляє на маховик гальмуючу дію.

**Приклад 8.** Платформа у вигляді суцільного диска з радіусом  $R = 1,5 \text{ м}$  і масою  $m = 180 \text{ кг}$  обертається навколо вертикальної осі з частотою  $n = 10 \text{ хв}^{-1}$ . У центрі платформи стоїть людина масою  $m_2 = 60 \text{ кг}$ . Яку лінійну швидкість  $v$  підлоги приміщення буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи?

**Розв'язання.** Відповідно до умови задачі, момент зовнішніх сил щодо осі обертання  $z$ , що збігається з геометричною віссю платформи, можна вважати рівним нулю. При цій умові проекція  $L_z$  моменту імпульсу системи платформи – людина залишається постійною:

$$L_z = \text{const}, \quad (1)$$

З урахуванням початкового і кінцевого станів рівняння (1) прийме вигляд:

$$(J_{10} + J_{20}) \omega_0 = (J_1 + J_2) \omega, \quad (2)$$

де значення моментів інерції  $J_{10}$  і  $J_{20}$  платформи і людини відповідно відносяться до початкового стану системи;  $J_1$  і  $J_2$  - до кінцевого стану;  $\omega_0$ ,  $\omega$  – початкова і кінцева кутові швидкості.

Момент інерції платформи щодо осі  $Z$  при переході людини не змінюється:

$$J_{10} = J_1 = 1/2 m_1 R^2.$$

Момент інерції людини щодо тієї ж осі буде змінюватися. Якщо розглядати людину як матеріальну точку, то її момент інерції  $J_{20}$  в початковому стані (в центрі платформи) можна вважати рівним нулю. В кінцевому стані (на краю платформи) момент інерції людини  $J_2 = m_2 R^2$ .

Підставимо у формулу (2) вирази моментів інерції, початкової кутової швидкості обертання платформи з людиною ( $\omega = 2\pi n$ ) і кінцевої кутової швидкості ( $\omega = v/R$ ), де  $v$  – швидкість людини щодо підлоги і одержимо:

$$(1/2 m_1 R^2 + 0) 2\pi n = (1/2 m_1 R^2 + m_2 R^2) v/R.$$

Після скорочення на  $R^2$  і простих перетворень знаходимо швидкість:

$$v = 2\pi n R m_1 / (m_1 + 2m_2).$$

## Контрольна робота № 1 (механіка)

101. Матеріальна точка рухається в площині  $xOy$ . Залежності її координат від часу даються рівняннями  $x(t)=(3+7t-2t^2)$  м і  $y(t)=(2-t+0,2t^2)$  м. Знайти модуль швидкості і прискорення точки в моменти часу  $t=0$ ; 5 с.
102. Дві матеріальні точки рухаються так, що залежність координат від часу мають вигляд  $x_1=(10+32t-3t^2)$  м і  $x_2=5(1+t^2)$  м. У який момент часу швидкості цих точок однакові? Чому дорівнюють швидкості і прискорення точок у цей момент часу? Знайти координату зустрічі точок.
103. Точка рухається прямолінійно відповідно до рівняння  $x=(6t+0,125t^3)$  м. Визначити середню швидкість точки в інтервалі часу від 2 до 6 с. Знайти прискорення точки в моменти  $t_1=2$  с і  $t_2=6$  с.
104. Дві матеріальні точки рухаються відповідно до рівнянь  $x_1=(2t+8t^2-16t^3)$  м і  $x_2=(2t-4t^2+t^3)$  м. У який момент часу прискорення цих точок будуть однакові? У який момент часу вони зустрінуться, і чому буде дорівнювати координата зустрічі? Які будуть швидкості і прискорення точок у цей момент часу?
105. Закони руху двох матеріальних точок можна виразити рівняннями  $x_1=(20+2t-4t^2)$  м і  $x_2=(2+2t+0,5t^2)$  м. У який момент часу швидкості цих точок будуть однакові? Знайти час і координату зустрічі цих точок. Чому дорівнюють швидкості і прискорення в цей момент?
106. Точка рухається по колу радіусом 0,3 м із постійним кутовим прискоренням. Визначити тангенціальне прискорення точки, якщо відомо, що за час 4 с вона зробила 3 оберти і наприкінці третього оберту її нормальне прискорення дорівнює  $2,7$  м/с<sup>2</sup>. Знайти залежність кута повороту точки від часу.
107. Точка рухається по колу радіусом 4 м. Закон по якому змінюється її координата є рівняння  $S=(8-2t^2)$  м. Знайти момент часу, коли нормальне прискорення точки буде дорівнювати  $9$  м/с<sup>2</sup>, швидкість, тангенціальне і повне прискорення точки в цей момент часу. Визначити кількість обертів, що зробить точка до цього моменту.
108. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу дається рівнянням  $\varphi=(2+t+t^2+t^3)$  рад. Знайти радіус колеса, якщо відомо, що до кінця другої секунди обертання для точок, що лежать на ободі колеса, нормальне прискорення дорівнює  $3,46 \cdot 10^2$  м/с<sup>2</sup>. Визначити число обертів, що зробить колесо за цей час, кутову швидкість і кутове прискорення в момент часу 2 с.

109. Знайти в скільки разів нормальне прискорення точки, що лежить на ободі колеса, більше її тангенціального прискорення для того моменту, коли вектор повного прискорення цієї точки складає кут  $30^\circ$  із вектором її лінійної швидкості. Знайти цей момент часу, повне прискорення і лінійну швидкість точки, якщо залежність кута повороту від часу  $\alpha = (3t^3)$  рад і  $R = 0,5$  м.
110. Точка рухається по колу радіусом  $10$  см. Залежність шляху від часу дається рівнянням  $S = (0,001t^3)$  м. Визначити нормальне, тангенціальне і повне прискорення точки в момент, коли лінійна швидкість точки дорівнює  $0,3$  м/с. Який кут складає вектор повного прискорення з вектором лінійної швидкості в цей момент часу?
111. На кінцях канату довжиною  $12$  м і масою  $6$  кг укріплені два вантажі, маси яких рівні  $2$  і  $12$  кг. Канат, який перекинуто через нерухомий блок, починає ковзати по ньому без тертя. Який натяг канату буде в його середині в той момент, коли довжина його по один бік блока досягне  $8$  м?
112. Велосипедист має масу  $70$  кг і може розвивати потужність  $600$  Вт. По якому максимальному ухилу може підніматися велосипедист при коефіцієнті тертя  $0,2$ ? З якою швидкістю він буде при цьому рухатись?
113. Яка повинна бути максимальна довжина опуклого мосту радіусом  $100$  м, щоб автомобіль міг проходити по ньому зі швидкістю  $90$  км/ч, не відриваючись від полотна дороги?
114. М'яч, що котиться без ковзання по підлозі, після пружного удару об стінку відлетів від неї під кутом  $45^\circ$  до горизонту. Чому дорівнює коефіцієнт тертя між м'ячем і стінкою?
115. Тіло штовхають нагору по похилій площині, що утворює кут  $30^\circ$  з горизонтом. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює  $0,2$ , початкова швидкість тіла  $3$  м/с. Визначити швидкість, із якої тіло повернеться у початкову точку і час руху тіла.
116. На якій відстані від центру Землі знаходиться точка, у якій напруженість сумарного гравітаційного поля Землі і Місяця дорівнює нулю? Прийняти, що маса Землі в  $81$  раз більше, ніж маса Місяця, і що відстань від центру Землі до центру Місяця дорівнює  $60$  радіусам Землі.
117. На екваторі деякої планети вага тіл удвічі менша, ніж на полюсі. Визначити середню густину речовини планети, якщо період її обертання навколо власної осі дорівнює  $2$  год.  $27$  хв.  $30$  с.
118. Період обертання штучного супутника Землі дорівнює  $2$  год. Вважаючи орбіту супутника коловою, знайти, на якій висоті над поверхнею Землі рухається супутник, чому дорівнює прискорення сили тяжіння на цій висоті?

119. На яку висоту підніметься ракета, яка запускається вертикально вгору, якщо початкова швидкість ракети буде дорівнювати першій космічній швидкості?
120. Яку швидкість відносно поверхні Землі повинний мати штучний супутник, щоб летіти по коловій орбіті, розташованій в площині екватора на висоті  $1600 \text{ км}$  над Землею?
121. Вантаж масою  $0,5 \text{ кг}$  падає з висоти  $2 \text{ м}$  на верхній кінець спіральної пружини з жорсткістю  $10 \text{ кН/м}$  і масою  $1 \text{ кг}$ . Визначити найбільше стискання пружини, якщо удар абсолютно пружний.
122. Дві пружини однакової довжини, що мають жорсткості  $980 \text{ Н/м}$  і  $1960 \text{ Н/м}$  з'єднані між собою кінцями. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягти пружини на  $1 \text{ см}$ ? Чому буде дорівнювати ця робота, якщо пружини будуть з'єднані між собою тільки одним кінцем?
123. Дві пружини жорсткістю  $\kappa_1=1 \text{ кН/м}$  і  $\kappa_2=3 \text{ кН/м}$  з'єднані паралельно. Визначити стискання пружин, якщо на них падає тіло масою  $2 \text{ кг}$  із висоти  $5 \text{ м}$ . Удар вважати абсолютно neprужним.
124. Дві пружини жорсткістю  $\kappa_1=300 \text{ Н/м}$  і  $\kappa_2=500 \text{ Н/м}$  з'єднані послідовно. Визначити роботу розтягання обох пружин, якщо друга пружина була розтягнута  $x_2=3 \text{ см}$ .
125. З пружинного пістолета стріляють вертикально вгору. На яку висоту підніметься кулька масою  $10 \text{ г}$  при пострілі, якщо пружину було стиснуто на  $5 \text{ см}$ , а її жорсткість –  $200 \text{ кН/м}$ ? Чому буде дорівнювати швидкість кульки в момент вильоту?
126. Вантаж масою  $0,5 \text{ кг}$  падає з деякої висоти на плиту масою  $1 \text{ кг}$ , укріплену на пружині з жорсткістю  $10^3 \text{ Н/м}$ . Визначити найбільший стиск пружини, якщо в момент удару вантаж мав швидкість  $5 \text{ м/с}$ . Удар вважати neprужним.
127. Вагон масою  $20 \text{ т}$ , що рухався зі швидкістю  $1 \text{ м/с}$ , налетів на пружинний буфер, що складається з чотирьох паралельно розташованих пружин, і зупинився, стиснувши пружини на  $10 \text{ см}$ . Визначити жорсткість кожної пружини.
128. Гиря, покладена на верхній кінець спіральної пружини, стискає її на  $x_1=2 \text{ мм}$ . На скільки стисне пружину та ж гиря, якщо впаде на кінець пружини з висоти  $10 \text{ см}$ .
129. Є дві пружини жорсткістю  $1 \text{ кН/м}$  і  $3 \text{ кН/м}$ . Визначити якому (послідовному або паралельному) з'єднанню пружин відповідає мінімум потенціальної енергії системи при абсолютній деформації  $\Delta l=5 \text{ см}$ .
130. Пластика масою  $0,2 \text{ кг}$  лежить на горизонтальному столі. У центрі пластинки укріплена легка пружинка жорсткістю  $1 \text{ кН/м}$ . Яку роботу

потрібно виконати, щоб на пружині підняти пластинку на висоту  $10\text{ см}$  над поверхнею столу?

131. Яку максимальну частину своєї кінетичної енергії може передати частинка масою  $m_1 = 2 \cdot 10^{25}\text{ кг}$ , пружньо зіштовхуючись із частинкою масою  $m_2 = 8 \cdot 10^{25}\text{ кг}$ , що до зіткнення була нерухомою?
132. Абсолютно пружна куля масою  $m_1 = 1,8\text{ кг}$ , що рухається зі швидкістю  $4\text{ м/с}$ , стикається з нерухомою пружною кулею більшої маси. В результаті центрального прямого удару куля втратила  $36\%$  своєї кінетичної енергії. Визначити масу більшої кулі і швидкості куль після зіткнення.
133. На нерухомих кулю налітає зі швидкістю  $4\text{ м/с}$  інша куля, маса якої вдвічі більше першої. У результаті зіткнення куля змінила напрямку руху на кут  $30^\circ$ . Визначити швидкості куль після зіткнення. Удар вважати абсолютно пружним.
134. Куля масою  $0,2\text{ кг}$ , що рухається зі швидкістю  $10\text{ м/с}$ , стикається з нерухомою кулею масою  $0,8\text{ кг}$ . Швидкості куль після удару складають кут  $90^\circ$ . Визначити швидкості куль після зіткнення. Удар вважати абсолютно пружним.
135. Снаряд, що летить із швидкістю  $300\text{ м/с}$ , розірвався на два осколки. Менший осколок, маса якого складає  $20\%$  від загальної маси снаряда, полетів із швидкістю  $200\text{ м/с}$ , спрямованою під кутом  $30^\circ$  до напрямку швидкості снаряда. Визначити швидкість і напрямку руху більшого осколка. Яка частина енергії снаряда була втрачена в результаті вибуху?
136. Куля, що рухалася горизонтально, зіштовхнулася з нерухомою кулею і передала їй  $64\%$  своєї кінетичної енергії. Кулі абсолютно пружні, удар прямий центральний. В скільки разів маса другої кулі більше маси першої?
137. Дерев'яна куля масою  $10\text{ кг}$  підвішена на нитці довжиною  $2\text{ м}$ . У кулю потрапляє кулька масою  $5\text{ г}$ , що летить горизонтально, і застряє в ній. Визначити мінімальну швидкість кульки необхідну для того, щоб куля з кулькою зробила повний оберт. Розміром кулі знехтувати, зіткнення кульок вважати центральним.
138. Куля масою  $2\text{ кг}$  рухається зі швидкістю  $3\text{ м/с}$  і стикається з кулею масою  $1\text{ кг}$ , що рухається йому назустріч із швидкістю  $4\text{ м/с}$ . Визначити швидкості куль після прямого центрального удару. Удар вважати абсолютно пружним.
139. Куля масою  $2\text{ кг}$  рухається зі швидкістю  $3\text{ м/с}$  і стикається з кулею масою  $1\text{ кг}$ , що рухається зі швидкістю  $4\text{ м/с}$  так, що кут між швидкостями дорівнює  $60^\circ$ . Визначити швидкості куль після центрального абсолютно непружного удару.

140. Куля масою  $2 \text{ кг}$  рухається зі швидкістю  $4 \text{ м/с}$  і стикається з нерухомою кулею масою  $5 \text{ кг}$ . Визначити швидкості куль після прямого центрального абсолютно непружного удару й обчислити роботу, здійснену при деформації куль.
141. Атом розпадається на дві частини масами  $m_1 = 1,6 \cdot 10^{25} \text{ кг}$  і  $m_2 = 2,3 \cdot 10^{25} \text{ кг}$ . Визначити кінетичні енергії частин атома, якщо їхня загальна кінетична енергія складає  $2,2 \cdot 10^{11} \text{ Дж}$ . Кінетичною енергією й імпульсом атома до розпаду знехтувати.
142. Двом однаковим маховикам, що знаходяться в спокої, надали однакову кутову швидкість  $63 \text{ рад/с}$  і дозволили рухатися довільно. Під дією сил тертя перший маховик зупинився через одну хвилину, а другий зробив до повної зупинки  $360$  обертів. У якого маховика гальмуючий момент був більше і в скільки разів?
143. На вал, жорстко прикріплений до стелі ліфта, намотано шнур, до якого прив'язана гиря масою  $1 \text{ кг}$ . З яким прискоренням буде рухатися гиря відносно ліфта і відносно землі, якщо маса вала  $12 \text{ кг}$ , а ліфт піднімається з прискоренням  $2 \text{ м/с}^2$ .
144. На східчастий циліндричний блок ( $R_1 = 0,1 \text{ м}$  і  $R_2 = 0,25 \text{ м}$ ) намотано в протилежних напрямках дві невагомні нерозтяжні нитки, до кінців яких прикріплено вантажі масами  $1 \text{ кг}$  і  $3 \text{ кг}$ . Знайти кутове прискорення блока, сили натягу, що діють на нього, якщо момент інерції всього блока дорівнює  $0,37 \text{ кг м}^2$ .
145. Через блок, виконаний у вигляді колеса, перекинута нитка, до кінців якої прив'язані вантажі масами  $0,1 \text{ кг}$  і  $0,3 \text{ кг}$ . Маса колеса  $0,2 \text{ кг}$  і можна вважати, що вона рівномірно розподілена по його ободу. Визначити прискорення, з яким будуть рухатися вантажі, і сили натягу нитки з обох боків блока.
146. Диск радіусом  $0,2 \text{ м}$  і масою  $7 \text{ кг}$  обертається так, що залежність кута повороту від часу описується рівнянням  $\varphi = (3-t + 0,1t^3) \text{ рад}$ . Знайти закон, по якому змінюється обертальний момент, що діє на диск. Визначити момент сил, кутову швидкість і прискорення диска в момент часу  $2 \text{ с}$ .
147. Суцільний циліндр скотився без прослизання з похилої площини висотою  $1,5 \text{ м}$ . Визначити швидкість центру інерції циліндра біля основи похилої площини.
148. Через блок радіусом  $0,1 \text{ м}$  перекинули шнур, до кінців якого прив'язані вантажі масами  $0,1 \text{ кг}$  і  $0,2 \text{ кг}$ . Система починає рухатися, при цьому вантажі рухаються з прискоренням  $3 \text{ м/с}^2$ . Визначити момент інерції блока. Тертям при обертанні знехтувати.
149. Через нерухомий блок масою  $0,2 \text{ кг}$  перекинута шнур, до кінців якого підвішені вантажі масами  $0,3 \text{ кг}$  і  $0,5 \text{ кг}$ . Визначити прискорення

- вантажів і сили натягу шнура з обох боків блока під час руху вантажів, якщо вважати, що маса блока рівномірно розподілена по ободі.
150. Куля котиться по горизонтальній поверхні зі швидкістю  $2 \text{ м/с}$  без прослизання і вкочується на похилу площину, яка складає з горизонтом кут  $45^\circ$ . Визначити шлях, що пройде куля по похилій площині до повної зупинки.
  151. На барабан радіусом  $0,5 \text{ м}$ , момент інерції якого дорівнює  $0,1 \text{ кг м}^2$ , намотано шнур, до кінця якого прив'язано вантаж масою  $0,5 \text{ кг}$ . До початку обертання барабана висота вантажу над підлогою дорівнювала  $1 \text{ м}$ . Через який час вантаж опуститься до підлоги? Знайти кінетичну енергію вантажу в момент удару об підлогу, силу натягу нитки і прискорення вантажу. Тертя знехтувати.
  152. Кулька радіусом  $6 \text{ см}$  катається по дну сферичної чашки радіусом  $1,2 \text{ м}$ . Припускаючи, що ці коливання можна вважати незатухаючими, визначити їхній період.
  153. На лавці Жуковського стоїть людина і тримає у витягнутих руках на відстані  $1,5 \text{ м}$  одне від одного дві гири. Лавка обертається з частотою  $1 \text{ об/с}$ . Людина зближує гири до відстані  $0,8 \text{ м}$  і частота обертів збільшується до  $1,5 \text{ об/с}$ . Визначити роботу, здійснену людиною, якщо кожна гиря має масу  $2 \text{ кг}$ . Момент інерції людини відносно осі обертання лавки вважати постійним.
  154. Вертикальний стовп висотою  $5 \text{ м}$  підпилюється в основі і падає на землю. Визначити лінійну швидкість його верхнього кінця в момент удару об землю. Яка точка стовпа буде в будь-який момент падіння стовпа мати ту ж швидкість, яку мало б тіло, падаючи з такої ж висоти, як і дана точка?
  155. На лавці Жуковського стоїть людина і тримає в руках стрижень, розташований вертикально уздовж осі обертання лавки. Стрижень співпадає з віссю обертання колеса, розташованого на верхньому кінці стрижня. Лавка нерухома, колесо обертається з частотою  $10 \text{ об/с}$ . З якою кутовою швидкістю буде обертатися лавка, якщо людина поверне стрижень на кут  $180^\circ$  і колесо опиниться на нижньому кінці стрижня? Сумарний момент інерції лавки і людини  $6 \text{ кг м}^2$ , радіус колеса  $0,2 \text{ м}$ , маса колеса  $3 \text{ кг}$  і розподілена по його ободу. Вважати, що центр ваги колеса знаходиться на осі платформи.
  156. Людина стоїть на лавці Жуковського і ловить рукою м'яч масою  $0,4 \text{ кг}$ , що летить у горизонтальному напрямку зі швидкістю  $20 \text{ м/с}$ . Траєкторія м'яча проходить на відстані  $0,8 \text{ м}$  від вертикальної осі обертання лавки. З якою кутовою швидкістю почне обертатися лавка Жуковського з людиною, що впіймала м'яч? Вважати, що сумарний момент інерції людини і лавки дорівнює  $6 \text{ кг м}^2$ .



157. Платформа у вигляді диска масою  $240 \text{ кг}$  обертається по інерції з частотою  $60 \text{ об/хв}$ . На краю платформи стоїть людина, маса якої  $80 \text{ кг}$ . З якою частотою буде обертатися платформа, якщо людина перейде в її центр? Момент інерції людини розраховувати, як для матеріальної точки.
158. На лавці Жуковського (диск радіусом  $1 \text{ м}$  і масою  $80 \text{ кг}$ ) стоїть людина і тримає в руках стрижень довжиною  $1,5 \text{ м}$  і масою  $5 \text{ кг}$ , розташований вертикально по осі обертання лавки. Лавка з людиною обертається з кутовою швидкістю  $1 \text{ рад/с}$ . З якою кутовою швидкістю буде обертатися лавка з людиною, якщо повернути стрижень так, щоб він зайняв горизонтальне положення? Вважати що центр ваги стрижня з людиною знаходиться на осі платформи. Момент інерції людини відносно осі лавки  $0,75 \text{ кг м}^2$ .
159. Платформа, що має форму диска, може обертатися біля вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина. На який кут повернеться платформа, якщо людина піде уздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться у початкову точку? Маса платформи  $240 \text{ кг}$ , маса людини  $60 \text{ кг}$ .
160. Кулька масою  $50 \text{ г}$ , прив'язана до кінця нитки довжиною  $1 \text{ м}$ , обертається з частотою  $1 \text{ об/с}$ , спираючись на горизонтальну площину. Нитка стає коротшою, наближуючи кульку до осі обертання на відстань  $0,5 \text{ м}$ . З якою частотою буде при цьому обертатися кулька? Яку роботу виконує зовнішня сила, що робить нитку коротшою? Тертям кульки об площину знехтувати.
161. Кулька, радіус якої дорівнює  $10 \text{ см}$ , зкочується по похилому жолобу й описує "мертву петлю" радіуса  $1 \text{ м}$ . Не враховуючи тертя, знайти найменшу висоту центру кульки над центром петлі, при котрій це можливо.
162. На тіло масою  $10 \text{ кг}$  діє сила що пропорційна часу:  $F=kt$ , де  $k=3 \text{ Н/с}$ . Знайти закон руху тіла при умовах, що при  $t=0$  тіло має початкову швидкість  $0,6 \text{ м/с}$  і координату  $8 \text{ м}$ .
163. Молоток масою  $1 \text{ кг}$ , що рухається зі швидкістю  $6 \text{ м/с}$ , ударяє по цвяху і заганяє цього на  $1,5 \text{ см}$  в деревний брусок. Визначити час, необхідний для зупинки молотка після удару і силу, що діє на цвях. Вважати рух молотка рівноуповільненим.
164. Через невагомий блок, що обертається без тертя, перекинуто нитку, до кінців якої прикріплено вантажі  $2 \text{ кг}$  і  $4 \text{ кг}$ . Більший вантаж піднімають настільки, щоб другий вантаж торкнувся підлоги і відпускають. На яку висоту підніметься менший вантаж після того, як більший вдариться об підлогу, якщо висота підйому більшого вантажу дорівнює  $0,3 \text{ м}$ ?

165. На клин масою  $1 \text{ кг}$  і кутом з горизонтом  $30^\circ$ , що лежить на столі, покладено брусок масою  $0,3 \text{ кг}$ . Визначити прискорення бруска та клина відносно столу і сили реакції, що діють на клин та брусок. Тертям знехтувати.
166. Трамвайний вагон до початку гальмування рухався рівномірно. В момент зупинки на нього діяла гальмуюча сила  $400 \text{ кН}$ . Визначити залежність гальмуючої сили від часу і її значення через  $3 \text{ с}$  після початку гальмування, якщо відомо, що шлях гальмування в залежності від часу змінювався за законом  $S(t) = (196t - t^3) \text{ м}$ .
167. По похилій площині з кутом  $45^\circ$  до горизонту ковзає шайба і в кінці спуску вдаряється об стінку розташовану перпендикулярно похилій площині. Визначити, на яку висоту піднімається шайба по площині, якщо спочатку шайба знаходилась на висоті  $4 \text{ м}$ . Коефіцієнт тертя шайби об площину дорівнює  $0,2$ . Удар вважати абсолютно пружним.
168. Сейф масою  $10 \text{ т}$  має бути завантажено у вантажівку висотою  $1,5 \text{ м}$  за допомогою дошок довжиною  $6 \text{ м}$ . Визначити найменшу силу необхідну для переміщення сейфу, якщо коефіцієнт тертя  $0,35$ . Чому дорівнює робота по завантаженню сейфа у вантажівку?
169. Швидкість вітру, що надимає парус площею  $25 \text{ м}^2$  дорівнює  $20 \text{ м/с}$ . Сила, що при цьому діє на парус, має вигляд  $F = \alpha s \rho (v_0 - v)^2/2$ , де  $\alpha = 3$  – безрозмірний коефіцієнт,  $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$  – густина повітря,  $v$  – швидкість судна,  $v_0$  – швидкість вітру. Визначити умови, при яких потужність вітру максимальна. Знайти роботу сили вітру за час  $60 \text{ с}$ .

## 4. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

### 4.1. Основні поняття і величини

Молекулярна фізика на основі уявлень про молекулярний рух пояснює фізичні властивості речовини в газоподібному, рідкому і твердому стані, явища переходу з одного стану в інший, а також фізичні процеси, що відбуваються в речовині при зовнішніх впливах.

Молекулярна фізика вивчає явища, що є результатом сукупної дії величезної кількості частинок.

Відповідно до молекулярно-кінетичних уявлень будь-яке тіло (газоподібне, рідке чи тверде) складається з дрібних відокремлених частинок, атомів, молекул, взаємодіючих між собою. Вони перебувають в безладному, хаотичному русі, інтенсивність якого залежить від температури тіла.

Термодинамічний стан речовини характеризується сукупністю величин, які називаються параметрами стану. У найпростіших випадках параметрами системи є тиск  $P$ , температура  $T$  і об'єм  $V$ . Зміна двох чи відразу всіх трьох параметрів стану системи називається термодинамічним  $\square$ оренцо $\square$ ю.

**Температура.** Температуру можна визначити як величину, що характеризує ступінь нагрітості тіла. У фізиці користуються термодинамічною шкалою температур (шкалою Кельвіна). Термодинамічна (абсолютна) температура є величина, пропорційна середній енергії поступального руху молекули

$$\langle \varepsilon_{\text{ном}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad \text{де } k \text{ – стала Больцмана.}$$

Термодинамічна температура  $T$  зв'язана з температурою  $t$  за шкалою Цельсія співвідношенням  $T = t + 273,15$ .

Одиницею виміру абсолютної температури є *кельвін* ( $K$ ), одна з основних одиниць у системі СІ.

**Тиск.** При своєму русі молекули газу стикаються зі стінкою посудини, у якій вміщено газ, створюючи тим самим тиск газу на стінку.

У замкненій системі тиск газу пропорційний середньому квадрату швидкості руху молекул або температурі  $P = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = nkT$ ,

де  $n$  – концентрація молекул,  $m_0$  – маса однієї молекули,  $\langle v^2 \rangle$  – середнє значення квадрата швидкості хаотичного руху молекул.

**Кількість речовини однорідного газу.** Кількість речовини у характеризує кількість структурних елементів, що містяться в даній системі. Це можуть бути атоми, молекули й інші частинки. Одиниця кількості речовини – 1 моль. Це така кількість речовини, у якій міститься стільки ж структурних елементів, скільки міститься атомів у  $0,012 \text{ кг}$  ізотопу вуглецю  $^{12}\text{C}$  — число Авогадро  $N_A$ .

$$\text{Число молів речовини однорідного газу} \quad \nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A},$$

де  $N_A$  – число Авогадро,  $m$  – маса газу,  $M$  – молярна маса,  $N$  – кількість структурних елементів.

Якщо система являє собою суміш декількох газів з числом структурних елементів  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , то кількість речовини системи

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_n}{N_A},$$

$$\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n},$$

Або

де  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – маси компонентів газової суміші,  $M_1, M_2, \dots, M_n$  – їх молярні маси.

Тиск суміші газів визначається за законом Дальтона і дорівнює  $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ , де  $P_1, P_2, \dots$  – парціальні тиски,  $n$  – число компонентів газової суміші.

$$\text{Молярна маса суміші газів дорівнює} \quad M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n}.$$

Середня квадратична швидкість молекул газу визначається за формулою

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

де  $R = N_A k$  – універсальна газова стала,  $m_0$  – маса однієї молекули.

## 4.2. Рівняння стану ідеального газу

Ідеальний газ – це фізична модель газу, у якому його структурні елементи (атоми чи молекули) є матеріальними точками, які не взаємодіють між собою на відстані, а взаємодіють коли зіштовхуються як пружні кулі. Те, що молекули можуть складатися з декількох атомів, враховується введенням поняття числа ступенів свободи, від яких залежать теплоємність і внутрішня енергія газу. На формальну модель ідеального газу це ніяк не впливає.

Рівняння стану ідеального газу і рівняння Менделєєва-Клапейрона визначають зв'язок між параметрами системи  $P, V$  і  $T$ . Для постійної маси

$$\text{ідеального газу рівняння стану} \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}, \text{ чи } \frac{PV}{T} = \text{const},$$

де  $P_1, V_1, T_1$  – тиск, об'єм і температура в стані 1,

$P_2, V_2, T_2$  – тиск, об'єм і температура в стані 2.

Рівняння Менделєєва-Клапейрона є узагальненням рівняння стану ідеального газу у випадку змінної маси. Рівняння стану ідеального газу поєднує в собі три окремі випадки (три газових закони, що описують три ізопроеци).

**Закон Бойля-Маріота**, ізотермічний процес,  $T = const$ .

$$PV = const \text{ або } P_1V_1 = P_2V_2.$$

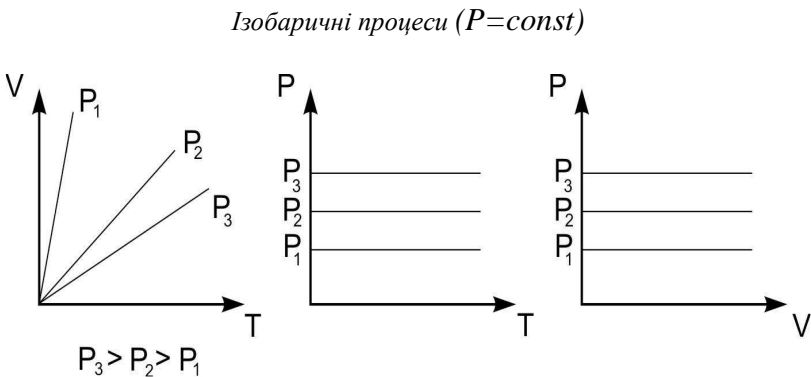
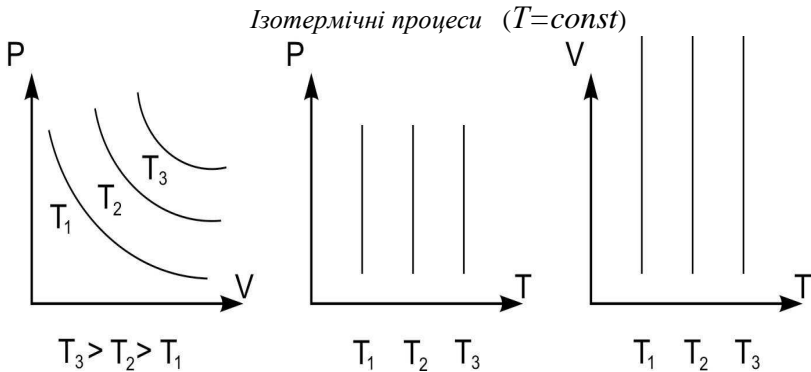
**Закон Гей-Люссака**, ізобаричний процес,  $P = const$

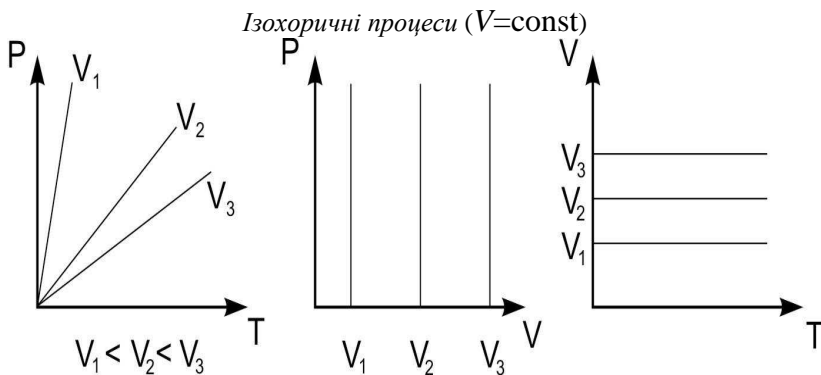
$$\frac{V}{T} = const \text{ або } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

**Закон Шарля**, ізохоричний процес,  $V = const$

$$\frac{P}{T} = const \text{ або } \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

### 4.3. Графічне зображення газових законів





#### 4.4. Перший закон термодинаміки

Усі термодинамічні процеси супроводжуються обміном або перетворенням енергії. При цьому завжди виконується перший закон термодинаміки.

Закон збереження енергії набуває в термодинаміці спеціального вигляду. При його застосуванні необхідно враховувати внутрішню енергію тіла, тобто кінетичну і потенціальну енергію його молекул.

##### ***Перший закон термодинаміки.***

Кількість тепла, що підведена до термодинамічної системи, витрачається на підвищення її внутрішньої енергії і роботу, що виконує система проти зовнішніх сил:

$$Q = \Delta U + A ,$$

де  $Q$  – підведена до системи кількість тепла;

$A$  – виконана системою робота;

$\Delta U$  – зміна внутрішньої енергії системи.

При нескінченно малих значеннях величин (у диференціальному вигляді) перший закон термодинаміки записується так:

$$dQ = dU + dA.$$

Якщо робота  $A'$  виконується над системою, то  $A' = -A$ . При збільшенні внутрішньої енергії системи  $\Delta U > 0$ , при зменшенні  $\Delta U < 0$ .

#### 4.5. Робота, що виконується газом при розширенні

Виконана газом робота являє собою роботу при збільшенні об'єму газу. Елементарна робота (див. рис. 4.1)

$$dA = Fdx = PSdx = PdV .$$

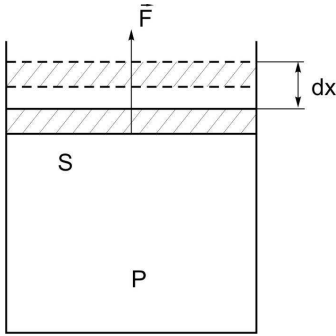


Рис. 4.1

Повна робота при зміні об'єму газу від  $V_1$  до  $V_2$  дорівнює:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

При ізохоричному процесі  $A = 0$ .

При ізобаричному процесі

$$A = p(V_2 - V_1) .$$

При ізотермічному процесі

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

#### 4.6. Теплоємність ідеального газу

Теплоємність тіла  $C_{тіла}$  – це кількість тепла, необхідного для нагрівання його на  $1 K$ .

$$C_{тіла} = \frac{Q}{\Delta T} \text{ (якщо } Q \text{ не залежить від } T \text{)}$$

$$C_{тіла} = \frac{dQ}{dT} \text{ (якщо } Q \text{ залежить від } T \text{)}$$

$Q$  і  $dQ$  – кінцева або нескінченно мала кількість тепла, необхідна для нагрівання тіла на  $\Delta T$  або  $dT$  кельвінів.

$C_{тіла}$  залежить від маси, його природи (речовини, структури молекул) і процесу нагрівання.

Питома теплоємність  $c_{nm}$  – це кількість тепла, необхідна для нагрівання  $1 \text{ кг}$  речовини:

$$c_{nm} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} = \frac{C_{тіла}}{m} .$$

$C_{nm}$  залежить від тих же величин, що і  $C_{тіла}$ , крім маси.

Молярна теплоємність  $C_M$  – це кількість тепла, необхідна для нагрівання одного моля на  $1 K$ :

$$C_M = \frac{M}{m} \frac{dQ}{dT} = M c_{nm} = \frac{M}{m} C_{тіла}$$

$C_M$  залежить тільки від структури молекул і процесу нагрівання.

Молярна теплоємність при постійному об'ємі  $C_V = \frac{i}{2} R$ , при постій-

ному тиску  $C_p = \frac{i+2}{2}R$ . де  $i$  – число ступенів свободи молекули, тобто число незалежних координат необхідних для опису положення молекули.

#### 4.7. Внутрішня енергія

Внутрішня енергія системи це сума кінетичної енергії теплового руху її молекул і потенціальної енергії взаємодії всіх частинок системи між собою. Для ідеального газу остання дорівнює нулю.

Внутрішня енергія системи є функцією стану системи, тобто залежить тільки від параметрів стану і не залежить від способу, яким цей стан було досягнуто.

Кожному термодинамічному стану системи відповідає певне значення внутрішньої енергії. Зміна внутрішньої енергії системи залежить тільки від початкового і кінцевого стану системи.

Внутрішня енергія певної кількості речовини ідеального газу залежить від температури і числа ступенів свободи молекул, яке, у свою чергу, залежить від структури молекул і температури

$$U = \frac{m}{M} C_v T = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} PV ,$$

де  $C_v$  – молярна теплоємність при постійному об'ємі,  $I$  – число ступенів свободи.

Для одноатомного газу  $I = 3$ , для двоатомного –  $I = 5$  і для багатоатомного –  $I = 6$  при  $100 \leq T \leq 2000 K$  (без врахування , коливального руху атомів, що виникає при  $T \geq 2000 K$  ). При врахуванні коливального руху двоатомних молекул  $i = 7$ .

#### 4.8. Адіабатичний процес

Адіабатичний процес протікає без теплообміну з навколишнім середовищем, тобто при повній теплоізоляції  $dQ = 0$ .

У цьому випадку перший закон термодинаміки має вигляд  $0 = dU + pdV$  . Оскільки  $dU = \nu C_v dT$  і  $p = \nu RT / V$  , у результаті підстановки одержимо:  $\nu C_v dT = \nu RT dV / V$ .

Підставляємо  $R = C_p - C_v$  і інтегруємо обидві частини рівняння. Маємо:

$$C_v \frac{dT}{T} = (C_p - C_v) \frac{dV}{V} ; \quad \frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

$$const - \ln T = (\gamma - 1) \ln V ; \quad TV^{\gamma-1} = const$$

$$TV^{\gamma-1} = const ; \quad PV^\gamma = const ; \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = const$$



Кожна з останніх трьох рівностей являє собою рівняння адиабатичного процесу.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \text{ – стала Пуассона.}$$

Умова  $dQ = 0$  на практиці не може бути здійсненою. Вона наближено виконується тільки для дуже швидких процесів

#### 4.9. Цикл Карно

Цикл Карно – оборотний цикл, що відбувається у тепловій машині і складається з двох ізотермічних і двох адиабатичних процесів.

Теплова машина (двигун) – це періодично діючий двигун, що виконує роботу за рахунок отриманого ззовні тепла.

Коефіцієнт корисної дії будь-якої теплової машини  $\eta$  (к.к.д.) – це відношення виконаної за цикл роботи  $A$  до отриманої за цикл кількості тепла  $Q_1$  від нагрівача при розширенні газу (робочої речовини):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де  $Q_2$  – теплота, що віддана холодильнику при стисканні газу.

К.к.д. теплової машини, що працює за циклом Карно, визначається температурами нагрівача  $T_1$  і холодильника  $T_2$ :

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

#### 4.10. Приклади розв’язання задач з молекулярної фізики і термодинаміки

**Приклад 1.** Визначити кількість молекул, що містяться в об’ємі  $V = 1 \text{ мм}^3$  води, і масу  $m_0$  молекули води. Вважаючи умовно, що молекули води мають вигляд кульок, що стикаються одна з одною, знайти діаметр  $d$  молекул.

**Розв’язання.** Число  $N$  молекул, що містяться в тілі деякої маси  $m$ , дорівнює добутку числа Авогадро  $N_A$  на число  $\nu$  молей речовини:

$$N = \nu N_A.$$

Тому що число молей  $\nu = \frac{m}{M}$ ,

де  $M$  – маса одного моля, то:

$$N = \frac{m}{M} N_A.$$

Якщо виразити в цій формулі масу як добуток густини  $\rho$  на об'єм

$$V, \text{ одержимо: } N = \frac{\rho V}{M} N_A. \quad (1)$$

Підставимо у формулу (1) наступні числові значення величин:  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $V = 1 \text{ мм}^3 = 10^{-9} \text{ м}^3$ ;  $M = 0,018 \text{ кг/моль}$ ;  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  і зробимо обчислення:

$$N = \frac{10^3 \cdot 10^{-9}}{0,018} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ молекул} = 3,34 \cdot 10^{19} \text{ молекул.}$$

Масу  $m_0$  однієї молекули можна знайти, якщо поділити масу

$$\text{одного моля на число Авогадро: } m_0 = \frac{M}{N_A}.$$

Підставивши сюди числові значення  $M$  і  $N_A$ , знайдемо масу молекули води:  $m_0 = \frac{0,018}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ кг} = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$

Якщо молекули води щільно прилягають одна до одної, то можна вважати, що на кожну молекулу приходить об'єм (кубічний осередок)  $V_0 = d^3$ , де  $d$  — діаметр молекули. Звідси

$$d = \sqrt[3]{V_0}. \quad (2)$$

Об'єм  $V_0$  знайдемо, поділивши об'єм  $V_M$  одного моля речовини на число молекул у молі, тобто на число Авогадро  $N_A$ :  $V_0 = \frac{V_M}{N_A}.$

Підставимо отриманий вираз  $V_0$  у формулу (2):  $d = \sqrt[3]{\frac{V_M}{N_A}}.$

Об'єм одного моля визначається виразом  $V_M = \frac{M}{\rho}.$  Тоді шука-

$$\text{ний діаметр молекули: } d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}. \quad (3)$$

Перевіримо, чи дає права частина виразу (3) одиницю виміру довжини:

$$[d] = \left\{ \frac{[M]}{[\rho][N_A]} \right\}^{1/3} = \left\{ \frac{1 \text{ кг} / \text{моль}}{1 \text{ кг} / \text{м}^3 \cdot 1 \text{ моль}^{-1}} \right\}^{1/3} = 1 \text{ м}.$$

Тепер підставимо числові значення фізичних величин у формулу (3) і зробимо обчислення:

$$d = \sqrt[3]{\frac{0,018}{10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}} \text{ м} = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

**Приклад 2.** У балоні об'ємом  $V = 10$  л знаходиться гелій під тиском  $p_1 = 1$  Мпа і при температурі  $T_1 = 300$  К. Після того як з балона було узято  $m = 10$  кг гелію, температура в балоні зменшилася до  $T_2 = 290$  К. Визначити тиск  $p_2$  гелію, що залишився в балоні.

*Розв'язання.* Для розв'язання задачі скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона, застосувавши його для кінцевого стану газу:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} RT_2, \quad (1)$$

де  $m_2$  – маса гелію в балоні в кінцевому стані;  $M$  – маса одного моля гелію;  $R$  – універсальна газова стала.

$$\text{З рівняння (1) виразимо шуканий тиск } p_2: \quad p_2 = \frac{m_2}{M} \frac{RT_2}{V}. \quad (2)$$

Масу гелію  $m_2$  виразимо через масу  $m_1$ , що відповідає початковому стану, і масу  $m$  гелію, узятото з балона:

$$m_2 = m_1 - m. \quad (3)$$

Масу гелію  $m_1$  знайдемо також з рівняння Менделєєва- Клапейрона, застосувавши його до початкового стану:

$$m_1 = \frac{Mp_1 V}{RT_1}. \quad (4)$$

Підставляючи у вираз (3) масу  $m_1$ , з формули (4), а потім отриманий

$$\text{вираз } m_2 \text{ у формулу (2), знайдемо:} \quad p_2 = \left( \frac{Mp_1 V}{RT_1} - m \right) \frac{RT_2}{MV},$$

$$\text{або після перетворення і скорочення:} \quad p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M} \frac{RT_2}{V}. \quad (5)$$

Переконавшись у тому, що розмірність правої і лівої частин формули (5) однакова, виразимо величини, що входять у цю формулу, в одиницях СІ і зробимо обчислення:

$$p_1 = 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}; m = 10 \text{ кг} = 10^{-2} \text{ кг}; M = 0,004 \text{ кг / моль};$$

$$R = 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}; T_1 = 300 \text{ К}; T_2 = 290 \text{ К};$$

$$V = 10 \text{ л} = 10^{-2} \text{ м}^3;$$

$$p_2 = \left( \frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{0,004} \cdot \frac{8,31}{10^{-2}} \cdot 290 \right) \text{ Па} = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,364 \text{ МПа}.$$

**Приклад 3.** Балон містить  $m_1 = 80$  г кисню і  $m_2 = 320$  г аргону. Тиск суміші  $p = 1$  Мпа, температура  $T = 300$  К. Приймаючи дані гази за ідеальні, визначити ємність  $V$  балона.

*Розв'язання.* За законом Дальтона, тиск суміші дорівнює сумі парціальних тисків газів, що входять до складу суміші. Парціальним тиском газу називається тиск, що здійснював би цей газ, якби тільки він один знаходився в посудині, зайнятій сумішшю. За рівнянням Менделєєва–Клапейрона парціальні тиски кисню  $p_1$  й аргону  $p_2$  виражаються

$$\text{формулами: } p_1 = \frac{m_1}{M_1} \frac{RT}{V}, \quad p_2 = \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V}.$$

Отже, за законом Дальтона, тиск суміші газів

$$p = p_1 + p_2 = \left[ \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right] \frac{RT}{V}.$$

$$\text{Відкіля ємність балона} \quad V = \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{p}. \quad (1)$$

Виразимо в одиницях СІ числові значення величин, що входять у цю формулу:  $m_1 = 80 \text{ г} = 0,08 \text{ кг}$ ;  $M_1 = 0,032 \text{ кг/моль}$ ;  $m_2 = 320 \text{ г} = 0,32 \text{ кг}$ ;  $M_2 = 0,040 \text{ кг/моль}$ ;  $p = 1 \text{ Мпа} = 10^6 \text{ Па}$ ;  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

Підставимо числові значення у формулу (1) і зробимо обчислення:

$$V = \left( \frac{0,08}{0,032} + \frac{0,32}{0,040} \right) \cdot \left( \frac{8,31 \cdot 300}{10^6} \right) = 0,0262 \text{ м}^3$$

**Приклад 4.** Знайти середню кінетичну енергію обертального руху однієї молекули кисню при температурі  $T = 350$  К, а також кінетичну енергію обертального руху всіх молекул, що містяться в  $m = 4$  г кисню.

*Розв'язання.* Відомо, що на кожну ступінь свободи молекули газу приходить однакова середня енергія, що визначається формулою:

$$\langle w_i \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

де  $k$  – стала Больцмана;  $T$  – абсолютна температура газу.

Обертальному руху двохатомної молекули (молекула кисню – двохатомна) приписуються дві ступіні свободи, тому середня енергія обертального руху молекули кисню буде мати такий вигляд:

$$\langle w_{об} \rangle = 2 \frac{1}{2} kT \quad (1)$$

Підставивши у формулу (1) значення  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  і  $T = 350$  К, одержимо:

$$\langle w_{об} \rangle = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 \text{ Дж} = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$

Кінетична енергія обертального руху всіх  $N$  молекул газу визначається рівністю:  $W = \langle w_{об} \rangle \cdot N$ .

Число всіх молекул газу можна обчислити за формулою:

$$N = N_A \nu, \quad (3)$$

де  $N_A$  - число Авогадро,  $\nu$  - число молів газу.

Якщо врахувати, що число молів  $\nu = \frac{m}{M}$ , де  $m$  – маса газу;  $M$  – маса одного моля газу, то формула (3) буде мати вигляд:

$$N = N_A \frac{m}{M}.$$

Підставивши цей вираз для  $N$  у формулу (2), одержимо:

$$W = N_A \frac{m}{M} \langle w_{об} \rangle \quad (4)$$

Величини, що входять у цю формулу, в одиницях СІ мають такі значення:  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ ;  $m = 4g = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ ;  $M = 0,032 \text{ кг/моль}$ ;  $\langle w \rangle = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ .

Підставивши ці значення у формулу (4), знайдемо:

$$W = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,032} \cdot 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 364 \text{ Дж}.$$

**Приклад 5.** Обчислити питомі теплоємності при постійному об'ємі  $c_v$  і при постійному тиску  $c_p$  неону і водню, приймаючи ці гази за ідеальні.

*Розв'язання.* Питомі теплоємності ідеальних газів виражаються за формулами:

$$c_v = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

$$c_p = \frac{i + 2}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

де  $i$  – число ступінів свободи молекул газу;  $M$  – маса одного моля.

Для неону (одноатомний газ)  $i=3$  і  $M=0,020 \text{ кг/моль}$  (див. довідкову таблицю). Обчислюючи за формулами, одержимо:

$$c_v = \frac{3}{2} \cdot \frac{8,31}{0,02} \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)} = 6,24 \cdot 10^2 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)};$$

$$c_p = \frac{3 + 2}{2} \cdot \frac{8,31}{0,02} \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)} = 1,04 \cdot 10^3 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)}.$$

Для водню (двохатомний газ)  $i=5$  і  $M=0,002 \text{ кг/моль}$ . Обчислюючи за тими ж формулами, одержимо:

$$c_v = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31}{0.002} \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)};$$

$$c_p = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8,31}{0.002} \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)}.$$

**Приклад 6.** Обчислити питомі теплоємності  $c_v$  і  $c_p$  суміші неону і водню, якщо маса  $m_1$  неону складає  $g_1 = 0,8$  маси суміші, маса  $m_2$  водню –  $g_2 = 2$  маси суміші. Значення питомих теплоємностей газів узяти з попереднього прикладу.

*Розв'язання.*  $P = 0$ , отому теплоємність суміші при постійному об'ємі  $c_v$  знайдемо шляхом наступних міркувань.

Теплоту, необхідну для нагрівання суміші на  $\Delta T$ , виразимо двома способами (вважаючи гази ідеальними):

$$Q = c_v (m_1 + m_2) \Delta T, \quad (1)$$

$$Q = (c_{v,1} m_1 + c_{v,2} m_2) \Delta T, \quad (2)$$

де  $c_{v,1}$  – питома теплоємність неону;  $c_{v,2}$  – питома теплоємність водню.

Якщо прирівняти праві частини (1) і (2) і розділити обидві частини отриманої рівності на  $\Delta T$ , отримаємо:

$$c_v (m_1 + m_2) = c_{v,1} m_1 + c_{v,2} m_2,$$

відкіля:

$$c_v = c_{v,1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{v,2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Відношення  $g_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$  і  $g_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  показують, яку частку маси суміші складає маса першого газу (неону) і другого газу (водню). Після підстановки  $g_1$  і  $g_2$  у вираз (3) одержимо:

$$c_v = c_{v,1} g_1 + c_{v,2} g_2. \quad (4)$$

Підставляємо у формулу (4) числові значення величин і знаходимо:

$$\begin{aligned} c_v &= (6,24 \cdot 10^2 \cdot 0,8 + 1,04 \cdot 10^4 \cdot 0,2) \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)} = \\ &= 2,58 \cdot 10^3 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)}. \end{aligned}$$

Міркуючи в такий же спосіб, одержимо формулу для обчислення питомої теплоємності суміші при постійному тиску:

$$c_p = c_{p,1} g_1 + c_{p,2} g_2. \quad (5)$$

Підставимо у формулу (5) числові значення:

$$c_p = (1,04 \cdot 10^3 \cdot 0,8 + 1,46 \cdot 10^4 \cdot 0,2) \text{ Дж / (кг} \cdot \text{K)}.$$

**Приклад 7.** Кисень масою  $m = 2 \text{ кг}$  займає об'єм  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  і знаходиться під тиском  $p_1 = 0,2 \text{ Мпа}$ . Газ був нагрітий спочатку при постійному тиску до об'єму  $V_2 = 3 \text{ м}^3$ , а потім при постійному об'ємі до тиску  $p_3 = 0,5 \text{ Мпа}$ . Знайти зміну  $\Delta U$  внутрішньої енергії газу, виконану їм роботу  $A$  і теплоту  $Q$ , надану газу.

*Розв'язання.* Зміна внутрішньої енергії газу визначається за формулою:

$$\Delta U = c_v m \Delta T = \frac{i}{2} \frac{R}{M} m \Delta T, \quad (1)$$

де  $i$  – число ступінів свободи молекул газу (для двохатомних молекул кисню  $i=5$ );  $M$  – маса одного моля.

Початкову і кінцеву температуру газу знайдемо, використовуючи рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (2)$$

Розв'язуючи його відносно  $T$ , одержимо:

$$T = \frac{pVM}{mR}. \quad (3)$$

Запишемо задані величини в одиницях СІ:

$m = 2 \text{ кг}$ ;  $M = 0,032 \text{ кг/моль}$ ;  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ ;  $V_1 = 1 \text{ м}^3$ ;  $V_2 = V_3 = 3 \text{ м}^3$ ;  $p_1 = p_2 = 0,2 \text{ Мпа} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;  $p_3 = 0,5 \text{ Мпа} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

Підставимо ці значення у вираз (3) і одержимо:

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 0,032}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 0,032}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 0,032}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 2887 \text{ К}.$$

Підставимо у вираз (1) числові значення величин, що до нього входять і знаходимо:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31}{0,032} \cdot 2(2887 - 385) \text{ Дж} = 3,24 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Робота розширення газу при постійному тиску визначається за формулою:

$$A = p \cdot \Delta V = R \frac{m}{M} \Delta T.$$

Підставимо числові значення величин і одержимо:

$$A = 8,31 \cdot \frac{2}{0,032} (1155 - 385) \text{ Дж} = 0,40 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Робота газу, що нагрівається при постійному об'ємі, дорівнює нулю, тобто  $A_2 = 0$ . Отже, повна робота, яка виконується газом, дорівнює:

$$A = A_1 + A_2 = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Відповідно до першого закону термодинаміки теплота  $Q$ , що передається газу, дорівнює сумі зміни внутрішньої енергії  $\Delta U$  і роботи  $A$ :

$$Q = \Delta U + A,$$

отже,  $Q = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Дж} + 3,24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3,64 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3,64 \text{ МДж}$ .

**Приклад 8.** У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою  $m = 0,02 \text{ кг}$  при температурі  $T = 300 \text{ К}$ . Водень спочатку розширився адіабатично, збільшивши свій об'єм у  $n_1 = 5$  разів, а потім його було стиснуто ізотермічно, причому об'єм газу зменшився в  $n_2 = 5$  разів. Знайти температуру наприкінці адіабатичного розширення і роботу, виконану газом при цих процесах.

*Розв'язання.* Температура й об'єм газу при адіабатичному процесі зв'язані між собою співвідношенням:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \text{ або } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}},$$

де  $\gamma$  – відношення теплоємності газу при постійному тиску до теплоємності при постійному об'ємі ( для водню як для двохатомного газу  $\gamma = 1,4$ );

$$n_1 = \frac{V_2}{V_1} = 5.$$

Звідси отримуємо наступний вираз для кінцевої температури  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{T_1}{n_1^{\gamma-1}}.$$

Підставляємо числові значення заданих величин і знаходимо:

$$T_2 = \frac{300}{5^{1,4-1}} \text{ К} = \frac{300}{5^{0,4}} \text{ К}.$$

Оскільки  $5^{0,4} = 1,91$ , то  $T_2 = \frac{300}{1,91} \text{ К} = 157 \text{ К}$ .

Робота  $A_1$  газу при адіабатичному розширенні може бути визначена за формулою:

$$A_1 = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2),$$

де  $C_v$  — молярна теплоємність газу при постійному об'ємі.

Підставивши числові значення величин:  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ ;  $i = 5$  (для водню як для двохатомного газу);  $M = 0,002 \text{ кг/моль}$ ;  $m = 0,02 \text{ кг}$ ;  $T_1 = 300 \text{ К}$ ;  $T_2 = 157 \text{ К}$  в праву частину останньої формули, одержимо:

$$A_1 = \frac{0,02 \cdot 5 \cdot 8,31}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} (300 - 157) \text{ Дж} = 2,98 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Робота  $A_2$  газу при ізотермічному процесі може бути записана у вигляді:



$$A_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \text{ або } A_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{1}{n_2},$$

$$\text{де } n_2 = \frac{V_2}{V_3} = 5.$$

Підставляємо відомі числові значення величин, що входять у праву частину цієї рівності, і знаходимо:

$$A_2 = 8,31 \cdot 157 \cdot \frac{0,02}{2} \ln \frac{1}{5} = -2,10 \cdot 10 \text{ Дж}.$$

Знак мінус показує, що при стисканні газу робота здійснюється над газом зовнішніми силами.

**Приклад 9.** Теплова машина працює за оборотним циклом Карно. Температура нагрівача  $T_1 = 500 \text{ К}$ . Визначити термічний к.к.д.  $\eta$  циклу і температуру  $T_2$  охолоджувача теплової машини, якщо за рахунок кожного кілоджоуля теплоти, отриманої від нагрівача, машина виконує роботу  $A = 350 \text{ Дж}$ .

*Розв'язання.* Термічний к.к.д. теплової машини, який називається також коефіцієнтом використання теплоти, показує, яка частка теплоти, отриманої від нагрівача, перетворюється в механічну роботу. Термічний

к.к.д. визначається за формулою:  $\eta = \frac{A}{Q_1},$

де  $Q_1$  - теплота, отримана від нагрівача;  $A$  - робота, виконана робочим тілом теплової машини.

Підставимо числові значення  $A$  і  $Q_1$  і одержимо:  $\eta = \frac{350}{1000} = 0,35.$

Якщо знати к.к.д. циклу, можна за формулою  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

визначити температуру охолоджувача  $T_2$ :  $T_2 = T_1(1 - \eta).$

Підставивши сюди отримане значення к.к.д. і температуру  $T_1$  нагрівача, отримаємо:  $T_2 = 500(1 - 0,35) \text{ К} = 325 \text{ К}.$

### Контрольна робота №2 (молекулярна фізика і термодинаміка)

201. Дві однакових посудини наповнені киснем при температурі  $300\text{ K}$  і з'єднані між собою трубкою, об'єм якої мізерно малий у порівнянні з об'ємом посудин. В скільки разів зміниться тиск кисню в посудинах, якщо одну з них нагріти до температури  $400\text{ K}$ , а в другій підтримувати початкову температуру?
202. Скільки електронів містяться в одному літрі кисню при тиску  $1\text{ МПа}$  і температурі  $473\text{ K}$ ?
203. Густина пари деякого з'єднання вуглецю і водню дорівнює  $2,5\text{ кг/м}^3$  при температурі  $283\text{ K}$  і тиску  $101\text{ кПа}$ . Яка молекулярна формула цього з'єднання?
204. Скільки гелію буде потрібно для наповнення повітряної кулі діаметром  $10\text{ м}$ , щоб куля могла підняти вантаж масою  $10^2\text{ кг}$  при нормальному тиску і температурі  $290\text{ K}$ ? Об'ємом і масою оболонки кулі знехтувати.
205. Один балон ємністю  $20\text{ л}$  містить азот під тиском  $2,5\text{ МПа}$  а, інший балон ємністю  $44\text{ л}$  містить кисень під тиском  $1,6\text{ МПа}$ . Обидва балони були з'єднані між собою, і обидва гази змішалися, утворивши однорідну суміш. Знайти парціальні тиски обох газів у суміші і повний тиск суміші. Процес змішування ізотермічний.
206. Знайти густину газової суміші, що складається по масі з однієї частини водню і восьми частин кисню при тиску  $0,1\text{ МПа}$  і температурі  $290\text{ K}$ .
207. Балон ємністю  $30\text{ л}$  містить суміш водню і гелію при температурі  $300\text{ K}$  і тиску  $0,8\text{ МПа}$ . Визначити масу водню і масу гелію.
208. Дві посудини однакової ємності містять кисень. В одній посудині тиск  $1\text{ МПа}$  і температура  $400\text{ K}$ , в іншому  $1,5\text{ МПа}$  і  $250\text{ K}$  відповідно. Посудини з'єднали трубкою й остудили кисень, що знаходиться в них, до температури  $300\text{ K}$ . Визначити сталий тиск у посудинах.
209. У балоні ємністю  $20\text{ л}$  знаходиться аргон під тиском  $800\text{ кПа}$  і температурі  $325\text{ K}$ . Коли з балона була вилучена деяка кількість аргону, тиск у балоні знизився до  $600\text{ кПа}$ , а температура встановилася  $300\text{ K}$ . Визначити масу аргону, взятого з балона.
210. У балоні ємністю  $20\text{ л}$  знаходиться суміш, що містить  $10\text{ г}$  водню,  $54\text{ г}$  водяного пари і  $60\text{ г}$  окису вуглецю. Температура суміші  $27^\circ\text{ C}$ . Визначити тиск газів у балоні, молярну масу суміші газів.
211. Газ розширюється адіабатично і при цьому об'єм його збільшується вдвічі, а температура падає в  $1,32$  рази. Яке число ступенів волі мають молекули цього газу?
212. Двохатомний газ, що знаходиться при температурі  $27^\circ\text{ C}$  і тиску  $2\text{ МПа}$  стискається адіабатично так, що об'єм його зменшується вдвічі. Знайти температуру і тиск газу після стискання.

213. До якої температури охолодиться повітря, що знаходиться при температурі  $0^\circ\text{C}$ , якщо воно розширюється адіабатично від об'єму  $V_1 = 2\text{ л}$  до об'єму  $V_2 = 6\text{ л}$ ?
214. В скільки разів зменшиться середня квадратична швидкість молекул двохатомного газу при адіабатичному збільшенні об'єму газу в два рази?
215.  $7,5\text{ л}$  кисню адіабатично стискають до об'єму  $1\text{ л}$ , причому наприкінці процесу встановився тиск  $1,6\text{ МПа}$ . Під яким тиском знаходився газ в початковому стані?
216. Два різних гази, із яких один одноатомний, а інший – двохатомний, знаходяться при однаковій температурі і займають однаковий об'єм. Гази стискаються адіабатично так, що об'єм їх зменшується в два рази. Який із газів нагріється більше і в скільки разів?
217. Газ розширюється адіабатично так, що його тиск падає від  $0,2\text{ МПа}$  до  $0,1\text{ МПа}$ . Потім він нагрівається при постійному об'ємі до початкової температури, причому його тиск зростає до  $0,122\text{ МПа}$ . Визначити відношення  $C_p/C_v$  для цього газу. Накреслити графік цього процесу.
218. У посудині під невагомим поршнем знаходиться газ при нормальних умовах. Відстань між дном посудини і поршнем  $25\text{ см}$ . Коли на поршень поклали вантаж масою  $20\text{ кг}$ , поршень опустився на  $13,4\text{ см}$ . Вважаючи стискання адіабатичним, знайти для даного газу відношення  $C_p/C_v$ . Площа поперечного перетину поршня дорівнює  $10\text{ см}^2$ .
219. Необхідно стиснути  $1 \cdot 10^2\text{ м}^3$  повітря до об'єму  $2 \cdot 10^2\text{ м}^3$ . Як вигідніше його стискувати: адіабатично чи ізотермічно?
220. Повітря, що знаходиться під тиском  $0,1\text{ МПа}$  було адіабатично стиснуто до тиску  $1\text{ МПа}$ . Який буде тиск, коли стиснуте повітря, зберігаючи об'єм незмінним, охолодиться до первинної температури?
221. Обчислити теплоємність при постійному об'ємі газу, вміщеного в посудину ємністю  $20\text{ л}$  при нормальних умовах. Газ двохатомний.
222. Молярна маса газу дорівнює  $4 \cdot 10^3\text{ кг/Моль}$ . Відношення теплоємностей  $C_p/C_v = 1,67$ . Обчислити питомі теплоємності газу.
223. Суміш складається з двох молей одноатомного газу й одного моля двохатомного газу. Визначити молярні теплоємності  $C_p$  і  $C_v$  суміші.
224. Питомі теплоємності деякого газу  $C_p = 10,4\text{ кДж/кгК}$  і  $C_v = 14,6\text{ кДж/кгК}$ . Визначити молярні теплоємності цього газу.
225. Деякий газ знаходиться при температурі  $350\text{ К}$  в балоні ємністю  $100\text{ л}$  під тиском  $0,2\text{ МПа}$ . Теплоємність цього газу при постійному об'ємі  $14\text{ кДж/К}$ . Визначити для цього газу коефіцієнт Пуассона ( $C_p/C_v$ ). Скільки атомів містить молекула цього газу?
226. При деяких умовах  $40\%$  молекул водню розпалися на атоми. Знайти питомі теплоємності  $C_p$  і  $C_v$  такого водню.

227. Які питомі теплоємності  $C_p$  і  $C_v$  суміші газів, що містить кисень масою  $10\text{ г}$  і азот масою  $20\text{ г}$ ?
228. Суміш газів складається з двох молей одноатомного і трьох молей двоатомного газу. Визначити молярні теплоємності  $C_p$  і  $C_v$  суміші.
229. Знайти відношення  $C_p/C_v$  для суміші газів, що складається з гелію масою  $10\text{ г}$  і водню масою  $4\text{ г}$ .
230. Обчислити молярні і питомі теплоємності газу, якщо молярна маса його  $0,030\text{ кг/Моль}$ , а відношення теплоємностей  $\gamma=1,4$ .
231. Один моль ідеального газу знаходиться в циліндрі при нормальних умовах. Газ ізобарично нагрівається до температури  $320\text{ К}$ , потім ізохорично охолоджується до температури  $240\text{ К}$ , після чого ізобарично стискається до початкового об'єму і потім ізохорично доводиться до початкового стану. Яку роботу виконав газ за цикл? Зобразити процес графічно.
232. Вуглекислий газ розширюється за законом  $P=2,6V$ . Знайти роботу, виконану газом, зміну його внутрішньої енергії і кількість наданої теплоти при збільшенні об'єму газу від  $5\text{ л}$  до  $10\text{ л}$ .
233. У процесі ізобаричного нагрівання повітря виконало роботу  $1,23\text{ кДж}$ . На скільки збільшилася внутрішня енергія газу і яка кількість теплоти була витрачена на нагрівання повітря ( $M_{\text{повітря}}=0,029\text{ кг/Моль}$ )
234.  $7\text{ г}$  кисню знаходиться в циліндрі під поршнем, на якому лежить вантаж. Кисень нагрівають на  $16\text{ К}$ . Знайти роботу, виконану газом, зміну його внутрішньої енергії, кількість теплоти, отриманої газом. Тертя між циліндром і поршнем знехтувати.
235. При ізотермічному розширенні одного моля водню, що мав температуру  $300\text{ К}$ , витрачена теплота  $2\text{ кДж}$ . В скільки разів збільшився об'єм газу?
236. При адіабатичному стисканні кисню масою  $1\text{ кг}$  виконана робота  $100\text{ кДж}$ . Яка кінцева температура газу, якщо до стискання кисень знаходився при температурі  $300\text{ К}$ ?
237. Кисень масою  $2\text{ кг}$  займає об'єм  $1\text{ м}^3$  і знаходиться під тиском  $0,3\text{ МПа}$ . При нагріванні газ розширився ізобарично до об'єму  $3\text{ м}^3$ , а потім його тиск зріс до  $0,5\text{ МПа}$  ізохорично. Знайти зміну внутрішньої енергії газу, виконану їм роботу і теплоту, що передається газу. Побудувати графік процесу.
238. У циліндрі під поршнем знаходиться азот масою  $20\text{ г}$ . Газ був нагрітий від температури  $300\text{ К}$  до температури  $450\text{ К}$  при постійному тиску. Визначити теплоту, передану газу, виконану газом роботу і зміну внутрішньої енергії.
239. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою  $0,02\text{ кг}$  при температурі  $300\text{ К}$ . Водень спочатку розширився адіабатично,

- збільшивши свій об'єм у 5 разів, а потім був стиснутий ізотермічно, причому об'єм газу зменшився в 5 разів. Знайти кінцеву температуру і повну роботу, виконану газом. Зобразити процес графічно.
240. Водень займає об'єм  $10 \text{ м}^3$  при тиску  $0,14 \text{ МПа}$ . Газ нагріли при постійному об'ємі до тиску  $0,3 \text{ МПа}$ . Визначити зміну внутрішньої енергії газу, роботу, виконану газом і теплоту, надану газу. Зобразити процес графічно в координатах  $P, V$ .
241. Один кубічний метр повітря, що знаходиться при температурі  $0^\circ \text{C}$  и тиску  $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$  ізотермічно розширюється від  $V_1$  до об'єму  $V_2$ . Знайти зміну ентропії при цьому процесі.
242. У результаті нагрівання  $22 \text{ г}$  азоту його абсолютна температура збільшилася в  $1,2$  рази, а ентропія збільшилася на  $4,2 \text{ Дж/К}$ . При яких умовах відбувалося нагрівання (при постійному об'ємі або постійному тиску)?
243.  $10 \text{ г}$  кисню нагріваються від  $50^\circ \text{C}$  до  $150^\circ \text{C}$ . Знайти зміну ентропії, якщо нагрівання відбувається: 1) ізохорично; 2) ізобарично.
244. Знайти зміну ентропії при ізотермічному розширенні  $6 \text{ г}$  водню від тиску  $10^5 \text{ Па}$  до тиску  $0,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .
245.  $10,5 \text{ г}$  азоту ізотермічно розширюються від об'єму  $2 \text{ л}$  до об'єму  $5 \text{ л}$ . Знайти приріст ентропії при цьому процесі.
246. Знайти зміну ентропії при ізобаричному розширенні  $8 \text{ г}$  гелію від об'єму  $10 \text{ л}$  до об'єму  $25 \text{ л}$ .
247.  $6,6 \text{ г}$  водню розширюються ізобарично до подвоєння об'єму. Знайти зміну ентропії при цьому процесі.
248. Знайти зміну ентропії при переході  $6 \text{ г}$  водню від об'єму в  $20 \text{ л}$  під тиском  $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$  до об'єму в  $60 \text{ л}$  під тиском  $1 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .
249. Знайти зміну ентропії при переході  $8 \text{ г}$  кисню від об'єму в  $10 \text{ л}$  при температурі  $80^\circ \text{C}$  до об'єму в  $40 \text{ л}$  при температурі  $300^\circ \text{C}$ .
250. При нагріванні  $1$  киломоля двохатомного газу його абсолютна температура збільшується в  $1,5$  рази. Знайти зміну ентропії, якщо нагрівання відбувається: 1) ізохорично; 2) ізобарично.

## 5. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

### 5.1. Електричні заряди. Взаємодія зарядів

Електричний заряд – скалярна фізична величина, що є мірою електромагнітних взаємодій. Існують два види зарядів – позитивні і негативні. Найменша порція електричного заряду називається елементарним зарядом:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Заряди не існують окремо від часток, так само, як і маса часток. Так, електрон володіє негативним елементарним зарядом, протон – позитивним елементарним зарядом.

Усі тіла живої і неживої природи побудовані з атомів, до складу яких входять заряджені частки – електрони і протони. Протони разом з нейтронами утворюють позитивно заряджене атомне ядро, що утримує при собі оболонку з електронів, що обертаються навколо ядра й несуть елементарні негативні заряди. Електричні сили взаємодії зв'язують ядро й електронну оболонку в єдину систему – електрично нейтральний атом. Унаслідок зовнішніх впливів деякі атоми, що входять до складу тіла, можуть утратити по одному-двох електронів, слабкіше за інші зв'язаних з ядром, і перетворюються в позитивні іони, а тіло в цілому здобуває позитивний заряд. Одержання надлишкового заряду в тілі називається його *електризацією*. Тіло електризується позитивно, якщо його атоми втрачають електрони, і негативно, якщо тіло приймає надлишкові електрони ззовні.

Заряд тіла може мати значення, які кратні *елементарному* заряду:

$$q = \pm ne \quad (n=0,1,2,3\dots)$$

Поняття *точкові заряди* позначає заряджені тіла чи частки, розміри яких малі в порівнянні з відстанями в даних умовах.

Досвід показує, що в ізольованій системі тіл алгебраїчна сума зарядів зберігається постійною незалежно від того, які процеси відбуваються в цій системі. Це фундаментальне положення називається *законом збереження заряду*.

Сили взаємодії двох точкових нерухомих зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , що знаходяться на відстані  $r$ , визначаються *законом Кулона* (1785 р.):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}, \quad (5.1)$$

де  $\epsilon_0$  – *електрична стала*, що залежить від вибору одиниць вимірювання,  $\epsilon$  — *діелектрична проникність середовища*, у якій знаходяться заряди, що взаємодіють (для вакууму  $\epsilon = 1$ ).

Сили взаємодії між точковими зарядами спрямовані вздовж прямої, що з'єднує заряди (центральні сили). Для різноіменних зарядів це сили притягання, а для однойменних – сили відштовхування. Кулонівські сили відносяться до класу електромагнітних взаємодій. Між зарядами, що рухаються, існує також магнітна взаємодія, що тим більше значна, чим швидкість руху ближче до швидкості світла у вакуумі  $c$ . Модуль заряду від швидкості його руху не залежить.

При взаємодії електронів і ядер в атомах основну роль грають саме кулонівські сили. Дія гравітаційних сил в атомних системах узагалі не враховується, тому що вони дуже малі. Наприклад, гравітаційна сила взаємодії електронів між собою в  $10^{42}$  разів менше за кулонівську, для протонів з електронами – у  $10^{39}$  разів менше.

## 5.2. Електричне поле. Напруженість електричного поля

Силова взаємодія між будь-якими тілами не може відбуватися без участі матерії. Заряджені частки і тіла, знаходячись на відстані, взаємодіють один з одним за посередництвом їхніх електричних полів, що являють собою один з видів матерії, який існує поряд з речовиною. Поле нерухомих зарядів називається *електростатичним*.

Електричне поле виявляє себе по силовій дії на заряди, наприклад, на позитивний *спробний* заряд  $q$  (настільки малий, щоб він не викликав перерозподілу зарядів у навколишніх тілах, і точковий, щоб визначити поле в точці).

Силовою характеристикою поля є *напруженість*  $\vec{E}$  – векторна величина, яка дорівнює відношенню сили, що діє з боку поля на поміщений у дану точку спробний заряд, до значення цього заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} .$$

Напруженість електричного поля виражається в ньютонах на кулон ( $H/Кл$ ). На заряд  $q$ , що знаходиться в точці поля з напруженістю  $\vec{E}$ , діє сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ . (5.2)

Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{F}$  збігаються за напрямком при  $q > 0$  і протилежні за напрямком, якщо  $q < 0$ . Поле називається *однорідним*, якщо напруженість поля  $\vec{E}$  у всіх точках простору однакова за модулем і напрямком.

Вираз для модуля напруженості поля точкового заряду впливає з закону Кулона і має вигляд:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} . \quad (5.3)$$

Напруженість поля  $\vec{E}$ , створюваного системою зарядів  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , на основі принципу незалежності дії сил можна знайти як векторну суму напруженостей полів цих зарядів:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

Це положення називається *принципом суперпозиції* і використовується для розрахунку полів.

Електричне поле прийнято зображувати графічно за допомогою *ліній напруженості*, тобто ліній, дотична до яких у кожній точці збігається з напрямком вектора  $\vec{E}$ .

Число ліній напруженості, що пронизують уявлювану одиничну площадку, перпендикулярну до цих ліній, вибирається рівним модулю напруженості в даній точці.

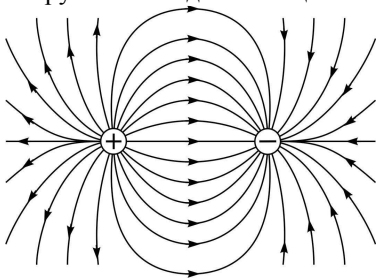


Рис. 5.1

Лінії напруженості електростатичного поля починаються на позитивних і закінчуються на негативних зарядах, ніде не замикаються і не перетинаються. На рисунку 5.1 лініями напруженості показана картина електричного поля диполя – двох однакових за модулем різнойменних зарядів, розташованих на деякій відстані.

Однорідне поле зображується паралельними прямими, що знаходяться на однакових відстанях одна від одної. Поле точкового заряду являє собою розбіжні (чи що сходяться) від нього промені.

### 5.3 Робота сил електростатичного поля. Потенціал

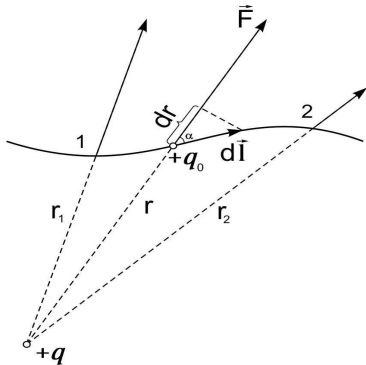


Рис. 5.2

Розрахуємо роботу, яку виконує поле позитивного точкового заряду  $q$  при переміщенні позитивного спробоного заряду  $q_0$  із точки 1 у точку 2 (рис.5.2). У процесі його руху сила взаємодії

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

зарядів  $q$  і  $q_0$  буде мінатися. Спочатку визначимо елементарну роботу на малій ділянці шляху  $dl$ , на якому цю силу можна вважати постійною:



$$dA = Fdl \cos \alpha ,$$

де  $\alpha$  – кут між переміщенням  $d\vec{l}$  і силою  $\vec{F}$ . Зважаючи на те, що  $d\vec{l} \cos \alpha = dr$ , знайдемо повну роботу підсумуванням елементарних робіт на всьому шляху  $1 \rightarrow 2$ .

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} \quad (5.4)$$

Звідси видно, що робота кулонівських сил визначається тільки початковим і кінцевим положеннями спробного заряду  $q_0$ . Це означає, що *електростатичне поле є потенціальним, а кулонівські сили – консервативними*. Робота консервативних сил дорівнює збитку потенційної енергії:  $A_{1 \rightarrow 2} = W_{p1} - W_{p2}$

Зіставляючи цю рівність з виразом (5.4), одержимо формулу для потенціальної енергії заряду  $q_0$ , що знаходиться в полі заряду  $q$ :

$$W_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + C .$$

Якщо прийняти в нескінченності  $W_p=0$ , то постійна  $C$  буде дорівнювати нулю. Тоді  $W_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ .

Відношення  $\frac{W_p}{q_0} = \varphi$  не залежить від значення спробного заряду  $q_0$  і є енергетичною характеристикою поля, яка називається *потенціалом*.

**Потенціал – скалярна фізична величина, що характеризує здатність поля виконувати роботу і дорівнює відношенню потенціальної енергії спробного точкового заряду, поміщеного в дану точку поля, до значення цього заряду. Можна також сказати, що потенціал даної точки поля дорівнює роботі, яку виконує поле при переміщенні одиничного позитивного заряду з цієї точки поля в нескінченність:**

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0} = \frac{A}{q_0} .$$

Потенціал поля точкового заряду  $q$  виражається формулою:  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ .

Якщо заряд  $q$  переміщується з точки з потенціалом  $\varphi_1$  у точку з потенціалом  $\varphi_2$ , то сили поля виконують роботу

$$A = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (5.5)$$

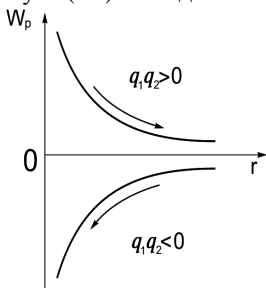
яка дорівнює добутку заряду на різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

Знак потенціалу визначається знаком заряду, що створює поле. Якщо поле утворене системою зарядів, то потенціал  $\varphi$  дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів, створюваних кожним із зарядів окремо:  $\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$ .

Точки простору, в яких потенціал має однакові значення, утворюють поверхню, названу *еквіпотенціальною*. Переміщення заряду вздовж цієї поверхні не супроводжується виконанням роботи ( $\varphi = const, d\varphi = 0$ ). Це означає, що сили електричного поля, а отже, і *лінії напруженості перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь*.

За одиницю потенціалу прийнятий вольт (В);  $1В = 1Дж/1Кл$ .

В атомній фізиці широко застосовується позасистемна одиниця енергії – е л е к т р о н в о л ь т (eВ). За 1 eВ приймається енергія, яку здобуває електрон, пройшовши різницю потенціалів 1В. На основі формули (5.5) знаходимо:  $1eВ = 1,6 \cdot 10^{-19} Кл \cdot 1В = 1,6 \cdot 10^{-19} Дж$ .



Для порівняння помітимо, що енергія теплового руху молекул при кімнатній температурі ( $T \approx 300 К$ ) має порядок:

$$kT = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} eВ \approx \frac{1}{40} eВ.$$

Тут  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} Дж / К$  - стала Больцмана.

Криві потенціальної енергії взаємодії двох точкових зарядів на рисунку 5.3 виражають залежність її від відстані  $r$  між

Рис. 5.3

ними (для однойменних зарядів  $W_p > 0$  і для різнойменних  $W_p < 0$ ). Тому що обидві потенціальні криві не мають мінімуму (потенціальної ями), то система з двох нерухомих зарядів не може знаходитися в стійкій рівновазі: під дією кулонівських сил однойменні заряди розходяться на нескінченно велику відстань, а різнойменні – зближаються до злиття і нейтралізації. Це твердження виявляється справедливим для будь-якого числа зарядів при будь-якій їхньому розташуванні: *усяка конфігурація нерухомих електричних зарядів хитлива, якщо між ними діють тільки кулонівські сили*.

Це положення називається *теоремою Ірншоу*. З неї, зокрема, випливає, що модель атома, як система, що складається з електричних зарядів, не може бути статичною. Безперервний рух електронів в атомах, коливання ядер у молекулах, іонів у кристалах – необхідна умова стійкості цих систем. Дослідження показують, що ці рухи не припиняються навіть при абсолютному нулі температури.

### 5.4. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля

Дві основні характеристики електричного поля – напруженість  $\vec{E}$  і потенціал  $\varphi$  - зв'язані між собою. Це можна показати, якщо переміщати позитивний точковий заряд  $q_0$  на малу відстань  $dl$  із точки 1 у точку 2 в полі з напруженістю  $\vec{E}$  (рис.5.4).

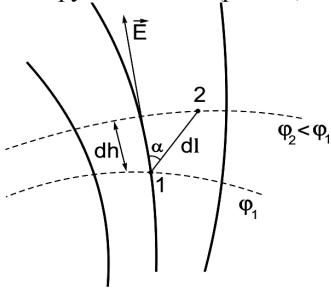


Рис. 5.4

Через точки 1 і 2 проходять екіпотенціальні поверхні з потенціалами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  (нехай  $\varphi_1 > \varphi_2$ ). Якщо переміщення  $dl$  складає кут  $\alpha$  з напрямком вектора  $\vec{E}$ , то роботу  $dA$  можна виразити так:  $dA = q_0 E dl \cos \alpha$ . (5.6)

З іншого боку, відповідно до формули (5.5):  $dA = -q_0 d\varphi$ , де  $d\varphi$  – нескінченно мала різниця потенціалів.

Дорівнявши вирази для роботи з двох останніх формул і зважаючи на те, що  $dl \cos \alpha = dh$  є найкоротша відстань між екіпотенціальними поверхнями, вимірювана по нормалі до них, тобто вздовж лінії напруженості, одержимо:

$$E = - \frac{d\varphi}{dh}$$

Це значить, що модуль напруженості поля в даній точці визначається швидкістю падіння потенціалу вздовж лінії напруженості.

Знак “-” показує, що вектор  $\vec{E}$  спрямований у бік зменшення потенціалу. Величина  $\frac{d\varphi}{dh}$  називається *градієнтом потенціалу*.

Для однорідного поля вираз (5.7) здобуває простий вигляд:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}, \quad (5.8)$$

де  $d$  – відстань уздовж лінії напруженості між точками з потенціалами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ .

Відповідно до формули (5.7) напруженість електричного поля може виражатися у вольтах на метр, причому  $1 \text{ В/м} = 1 \text{ Н/Кл}$ .

### 5.5 Електроємність. Енергія електричного поля

Якщо відокремленому провідникові надавати заряди  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , то він буде мати потенціали  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$  відповідно. Для кожного провідника

відношення  $\frac{q_1}{\varphi_1} = \frac{q_2}{\varphi_2} = \frac{q_3}{\varphi_3} \dots$  є величина стала; ця величина називається

електроємністю (ємністю) провідника і позначається через  $C$ :  $C = \frac{q}{\varphi}$ .

Одиниця ємності – Фарад (Ф):  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл} / 1 \text{ В}$ .

У більшості випадків користаються частковими одиницями – мікрофарадами і пікофарадами:  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Ємність провідника визначається його розмірами, формою, діелектричною проникністю навколишнього середовища і, крім того, залежить від присутності і розташування оточуючих тіл, що впливають на конфігурацію поля і, отже, на потенціал зарядженого провідника.

Система двох близько розташованих провідників, розділених шаром діелектрика, називається конденсатором (рис.5.5).

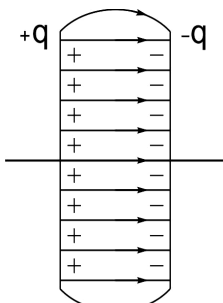


Рис.5.5

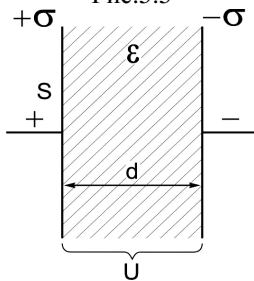


Рис.5.6

Ємність конденсатора визначається

$$\text{формулою } C = \frac{q}{U}, \quad (5.9)$$

де  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів між провідниками (обкладками конденсатора), що несуть заряди  $+q$ ,  $-q$ .

Тому що електричне поле конденсатора зосереджене між його обкладками, то зовнішні тіла не впливають на нього і, отже, не змінюють ємність конденсатора.

На рисунку 5.6 показаний плоский конденсатор ( $S$  – площа кожної пластини,  $d$  – відстань між ними,  $\sigma$  – поверхнева густина заряду на пластинках і  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинками).

Якщо відстань між пластинками мала в порівнянні з розмірами пластин, то поле між ними можна вважати однорідним. Напруженість поля в цьому випадку визначається за формулою:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

З цієї формули і з (5.8) випливає: 
$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Підставивши цей вираз в (5.9) і вважаючи, що  $q = \sigma S$ , одержимо формулу для ємності плоского конденсатора: 
$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (5.10)$$

За допомогою конденсатора можна визначити на досвіді діелектричну проникність  $\epsilon$  речовини, яку поміщено між його пластинами. Для цього досить вимірити ємність  $C$  конденсатора з досліджуванним діелектриком між обкладками і потім ємність  $C_0$  під час відсутності діелектрика.

Очевидно, що для досліджуваного діелектрика:  $\epsilon = \frac{C}{C_0}$ .

У зарядженому конденсаторі накопичується електрична енергія. Вона вимірюється роботою, яка виконується при його зарядці. Уявимо собі, що зарядка відбувається шляхом послідовного переносу малих порцій заряду з однієї обкладки на іншу (рис.5.6). Якщо  $q$  і  $U$  — миттєві значення заряду і різниці потенціалів, то при переносі чергової

порції заряду  $dq$  відбувається робота  $dA = Udq = \frac{q}{C} dq$ .

Повна робота, витрачена на зарядку, дорівнює енергії конденсатора  $W_{el.}$

$$W_{el.} = A = \int_0^q \frac{1}{C} qdq = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} .$$

Виразимо енергію плоского конденсатора через напруженість  $E$  електричного поля між обкладками. Підставивши у формулу

$W_{el.} = \frac{CU^2}{2}$  вираз для  $C$  і  $U = \Delta\phi$  з рівнянь (5.10) і (5.8), одержимо:

$$W_{el.} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V . \quad (5.11)$$

Тут  $V$  – об'єм конденсатора. Величина  $w_{el.} = \frac{W_{el.}}{V}$  називається об'ємною густиною енергії електричного поля. З рівності (5.11) випливає, що

$w_{el.} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$ . Можна показати, що ця формула справедлива також

для неоднорідних і нестационарних полів.

Електричне поле є матеріальним носієм енергії. У рамках електростатики це не можна перевірити, оскільки поле нерозривно зв'язане з нерухомими зарядами і переносу енергії немає. Але електричне поле може існувати й у відриві від зарядів, будучи зв'язане зі змінним магнітним полем. Сукупність цих полів у вигляді електромагнітних хвиль поширюється в просторі і переносить енергію (передача світлових, теле-, радіосигналів).

## 6. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

### 6.1. Електричний струм. Носії заряду

*Електричним струмом* називається спрямований рух електричних зарядів. Якщо в речовині містяться *вільні носії заряду* — електрони, іони, здатні переміщатися на значні відстані, то при накладенні електричного поля вони здобувають спрямований рух, що накладається на їхній тепловий хаотичний рух. У результаті цього вільні носії заряду виконують дрейфовий рух у визначеному напрямку. Говорячи про електричний струм як про спрямований рух вільних носіїв заряду, ми відволікаємося від хаотичного руху, тому що він не дає внеску в утворення електричного струму.

Основною характеристикою струму є *сила струму* яка чисельно дорівнює заряду, що протікає через поперечний переріз провідника в одиницю часу. Якщо сила струму  $I$  постійна, то  $I = \frac{q}{t}$ , а в

загальному випадку 
$$I = \frac{dq}{dt} \quad (6.1)$$

Одиниця сили струму – ампер ( $A$ ), основна одиниця в системі СІ. Струм, що не змінюється з часом, називається *постійним*.

В утворенні струму можуть брати участь як позитивні, так і негативні носії; електричне поле переміщає їх у протилежних напрямках. Напрямок струму прийнятий визначати за напрямком руху позитивних носіїв. Якщо в електричному полі одночасно рухаються позитивні (по полю) і негативні (проти поля) носії, то повний струм визначається як сума струмів, утворених носіями кожного знаку.

*Густиною струму*  $j$  називається векторна величина, модуль якої дорівнює відношенню сили струму  $I$ , що протікає крізь площадку  $S_{\perp}$  перпендикулярну напрямку руху носіїв, до площі цієї площадки:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} .$$

Одиниця густини струму –  $A/m^2$ . Густина струму – векторна величина; вона має напрямок середньої швидкості  $\vec{v}_+$  упорядкованого руху позитивних носіїв: 
$$\vec{j} = q_0 n \vec{v}_+ ,$$

де  $n$  – концентрація носіїв і  $q_0$  – заряд носіїв. Якщо  $q_0 < 0$ , то вектори  $\vec{j}$  і  $\vec{v}_+$  мають протилежні напрямки.

Середовище робить руху зарядів визначений опір. Тому в однорідній речовині при постійній напруженості поля заряди рухаються з постійною

середньою швидкістю  $\bar{v}_+$ , пропорційною напруженості поля:  $\bar{v} = u\bar{E}$ , де  $u$  — рухливість носіїв, що дорівнює швидкості спрямованого руху під дією поля з напруженістю  $E = IB/m$ . Рухливість носіїв залежить від їхньої природи, а також густини і стану речовини. Найбільшою рухливістю володіють вільні електрони.

У металах носіями зарядів є вільні електрони (електрони провідності). Іони металу, що утворюють кристалічні ґрати, у переносі заряду не приймають участі. Тому струм у металах не супроводжується переносом речовини і хімічними змінами. Метали мають гарну провідність за рахунок великої концентрації носіїв ( $n = 10^{28} - 10^{23} \text{ м}^{-3}$ ) і значної їхньої рухливості.

Відповідно до класичних представлень електрони провідності в металах утворюють так називаний електронний газ, подібний до ідеального газу. Взаємодія електронів один з одним і з іонами кристалічних ґрат не враховується. Вважається, що кінетична енергія вільних електронів, пропорційна абсолютній температурі, може приймати будь-які значення. Заснована на цих представленнях класична теорія провідності металів допомогла зрозуміти і пояснити ряд фізичних явищ. Однак деякі експериментальні факти (надпровідність металів, значення їхньої теплоємності й ін.) не одержали свого пояснення за допомогою класичної електронної теорії і послужили поштовхом до створення нової квантової теорії металів.

Електричний струм у розчинах і розплавах електролітів обумовлений спрямованим рухом іонів обох знаків під дією електричного поля. У цьому випадку проходження електричного струму зв'язане з переносом речовини і супроводжується хімічними явищами (виділення речовин на електродах – електроліз). Рідини, що не мають у своєму складі іонів, не проводять струму. Річкова і морська вода є гарним провідником, тому що містить розчинені речовини (в основному, солі), які дисоціюють на іони.

Гази в природних умовах є поганими провідниками струму, тому що концентрація носіїв заряду – електронів і іонів – у них дуже мала. При іонізації газів їхня провідність різко зростає. Провідність високоіонізованого газу порівняна з провідністю металів.

У діелектриках вільних носіїв дуже мало, через що ці речовини при звичайних умовах погано проводять електричний струм. Накладення електричного поля в основному приводить до невеликих зсувів зарядів усередині діелектрика і його поляризації.

При проходженні струму крізь речовину електрична енергія може перетворюватися у внутрішню, хімічну і т.п. Однак найбільш загальним проявом електричного струму в будь-яких умовах є виникнення магнітного поля в навколишній просторі.

## 6.2. Закон Ома. Опір провідників.

Найбільш прості закони електричного струму для металів. Для них добре виконується пропорційність між силою струму і різницею потенціалів (напругою)  $\Delta\varphi = U$  на кінцях провідника:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (6.2)$$

Цей закон Ома для однорідної ділянки кола. Тут  $R$  – опір провідника. Одиниця опору –  $1 \text{ Ом} = 1\text{В}/1\text{А}$ . Величина  $1/R$ , зворотна опору, називається *провідністю провідника*.

Графік залежності сили струму  $I$  від напруги  $U$  називається *вольт-амперною характеристикою* провідника. Для металу при постійній температурі вона лінійна (рис.6.1, а). Для газів вольт-амперна характеристика може мати складну форму (рис.6.1, б); закон Ома виконується в цьому випадку лише при малій силі струму (ділянка  $OA$ ).

Вольт-амперні характеристики напівпровідників і рідин у широкому діапазоні напруг також нелінійні. Це означає, що їхня провідність не залишається постійною.

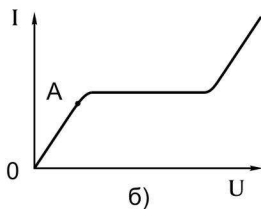
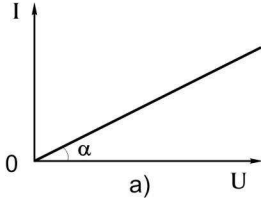


Рис. 6.1

Кількість тепла, яке виділяється провідником при проходженні по ньому електричного струму, дорівнює роботі струму і визначається законом Джоуля – Ленца:  $dQ = I^2 R dt$ .

Опір однорідного провідника довжиною  $l$  і площею поперечного перерізу  $S$  виражається формулою

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де  $\rho$  – *питомий опір* речовини (одиниця цієї величини –  $1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ). Величина, зворотна питомому опору,  $\gamma = \frac{1}{\rho}$  називається *питомою електричною провідністю* провідника.

Знайдемо зв'язок між векторами густини струму  $\vec{j}$  і напруженості поля  $\vec{E}$  в деякій точці провідника. В околиці цієї точки уявно виділимо малий циліндр, орієнтований уздовж ліній напруженості (рис.6.2).

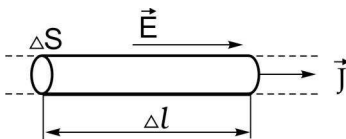


Рис. 6.2



Напруга на довжині  $\Delta l$  циліндра дорівнює  $E\Delta l$ , сила струму через його перетин  $\Delta S$  дорівнює  $j\Delta S$ , а опір циліндра -  $\rho \frac{\Delta l}{\Delta S}$ . Підставивши ці

значення у формулу (6.2), одержуємо (після скорочень):  $j = \frac{1}{\rho} E$ .

Тому що напрямки вектора  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  збігаються, то можна записати:  $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}$ .

Ця формула виражає закон Ома в диференціальній формі: **густина струму пропорційна напруженості електричного поля і має однаковий з нею напрямок.** У такій формі закон Ома виражає зв'язок між величинами, що відносяться до даної точки (локально), і тому застосовується до неоднорідних провідників.

Величини  $\rho$  і  $R$  залежать від температури провідника. Для металів і сплавів ця залежність виражається наближеними формулами: де  $\rho \approx \rho_0(1 + \alpha t)$ ,  $R \approx R_0(1 + \alpha t)$ , де  $\rho_0$  і  $R_0$  – значення  $\rho$  і  $R$  при  $t = 0^\circ C$ ,  $\alpha$  – температурний коефіцієнт опору, що характеризує відносну зміну  $\rho$  чи  $R$  при зміні температури на  $1 K$ . Величину  $\alpha$  можна вважати постійною тільки у визначеному інтервалі температур.

У ряду металів опір при низьких температурах (до  $10 K$ ) різко падає до нуля (надпровідний стан). У замкнутому колі з надпровідників струм, один раз викликаний, може існувати дуже довго, тому що не супроводжується виділенням тепла. Густина струму в надпровідниках може досягати  $10^7 A/m^2$ . Явище *надпровідності* можна пояснити тільки на основі квантової теорії. За допомогою надпровідникових соленоїдів можна створювати магнітні поля величезної напруженості. В даний час явище надпровідності уже використовується на практиці.

### 6.3. Електрорушійна сила (е.р.с.) джерела струму. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

Нехай у замкнутому колі тече постійний струм. Якщо до полюсів джерела струму підключений однорідний металевий провідник (рис.6.3,а), то всередині цього провідника (зовнішня ділянка кола) існує електричне поле, під дією якого переміщуються заряди. Для існування цього поля на полюсах джерела повинна бути різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Ця різниця потенціалів визначає наявність електричного поля й усередині джерела. Якщо в зовнішньому колі заряди переміщуються під дією електричного поля, то всередині джерела заряди повинні переміщатися проти сил поля.

Це можливо при наявності всередині джерела сил неелектричного походження – сторонніх сил. На рис.6.3,б умовно представлений розподіл потенціалу уздовж замкнутого кола (по вертикалі відкладені значення потенціалу  $\varphi$ ). Сторонніми можуть бути сили будь-якої природи, крім кулонівських (у гальванічних елементах це хімічні сили).

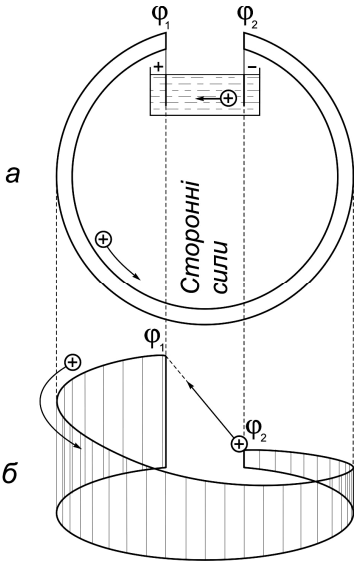


Рис. 6.3

Фізична величина, яка дорівнює роботі сторонніх сил при переміщенні одиничного заряду на даній ділянці кола, називається *електро-рушійною силою* (е.р.с.), що діє на цій ділянці (позначається буквою  $\varepsilon$ ):

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор.}}}{q}.$$

Е.р.с. — найважливіша енергетична характеристика джерела, що вимірюється, як і потенціал, у вольтах (В).

Ділянка кола називається *неоднорідною*, якщо на ній, крім кулонівських, діють сторонні сили. Такою є ділянка 1—2 на рисунку 6.4.

Опір цієї ділянки  $R_{12}$ , а е.р.с. —  $\varepsilon_{12}$ . Між точками 1 і 2 підтримується різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Розглянута ділянка є складовою частиною кола, в якому можуть бути й інші джерела, тому напрямок струму на цій ділянці може

бути будь-яким. Нехай струм тече від точки 1 до точки 2. За час  $dt$  протікає заряд  $dq = Idt$ . Робота кулонівських і сторонніх сил, що переносять цей заряд

$$dA_{\text{кул.}} + dA_{\text{стор.}} = (\varphi_1 - \varphi_2) dq + \varepsilon_{12} dq$$

дорівнює кількості тепла, що виділяється на ділянці

$$dQ = I^2 R_{12} dt = IR_{12} dq.$$

Дорівнюючи праві частини цих двох рівностей, одержимо:

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}, \quad (6.3)$$

чи

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R_{12}} \quad (6.4)$$

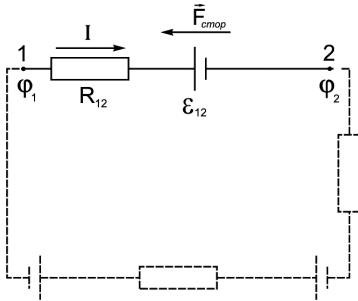


Рис. 6.4

Формула (6.4) дає вираз закону Ома для неоднорідної ділянки кола. Добуток  $IR_{12} = U_{12}$  у рівності (6.3) називається *напругою* на ділянці кола. Знаки напруги  $U_{12}$ , різниці потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  і е.р.с.  $\varepsilon_{12}$  можуть бути як позитивними, так і негативними, і визначаються щодо обраного напрямку обходу ділянки кола.

Нехай, наприклад, обраний напрямок обходу ділянки кола буде від точки 1 до точки 2. Якщо струм йде за напрямком обходу, то  $I > 0$ . Е.р.с. позитивна ( $\varepsilon_{12} > 0$ ), якщо напрямок обходу збігається з напрямком сторонніх сил. У випадку, який показано на рисунку 6.4,  $I > 0$ ,  $\varepsilon < 0$ . Для неоднорідної ділянки кола характерно, що напруга  $IR$  за модулем не дорівнює різниці потенціалів  $\Delta\varphi$ .

Прикладом неоднорідної ділянки є судина з підкисленою водою у відомому досвіді по розкладанню води струмом. Струм крізь електроліт проходить при виконанні умови

$$\varphi_1 - \varphi_2 > U_p,$$

де  $U_p$  – так називана *напруга розкладання електроліту*, існування якої зв'язане з дією сторонніх сил, що перешкоджають протіканню струму й обумовлених хімічними явищами на електродах (при виділенні на них речовин, відмінних від матеріалу електродів).

Помітимо, що вольтметр показує різницю потенціалів між точками, до яких він підключений. У випадку однорідної ділянки, що не містить сторонніх сил, ця різниця потенціалів збігається з напругою.

Якщо ділянка не містить сторонніх сил ( $\varepsilon_{12} = 0$ ), то формула (6.4) переходить у закон Ома для однорідної ділянки кола (6.2). При розімкненому колі ( $I = 0$ ) е.р.с. джерела чисельно дорівнює різниці потенціалів на полюсах:  $\varepsilon = \Delta\varphi$ . Нарешті, якщо  $\varphi_1 = \varphi_2$  (кінці ділянки з'єднані між собою), то формула (6.4) виражає закон Ома для замкнутого кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

де  $r$  – внутрішній опір джерел струму,  $R$  – опір інших елементів кола (зовнішній опір). Важливим у практичному відношенні є напруга  $IR$ , що у випадку однорідності зовнішньої ділянки кола вимірюється вольтметром, підключеним до затисків джерела (рис.6.4). Ця напруга залежить від сили

струму  $I$  у колі. Дійсно, з рівності (6.4) випливає, що

$$IR = \varepsilon - Ir .$$

Звідси видно, що з ростом сили струму  $I$  напруга  $IR$  убуває за лінійним законом. Напруга на зовнішній ділянці кола може бути значно менше за е.р.с.. При  $R=0$  сила струму в колі ставатиме максимальною (струм короткого замикання  $I_{к.з.} = \frac{\varepsilon}{r}$ ), а напруга  $IR$  падає до  $0$ .

#### 6.4. Приклади розв'язання задач з електрики

**Приклад 1.** Два точкових заряди  $9Q$  і  $-Q$  закріплені на відстані  $l = 50$  см один від одного. Третій заряд  $Q_1$  може переміщатися тільки уздовж прямої, що проходить через заряди. Визначити положення заряду  $Q_1$ , при якому він буде знаходитися в рівновазі. При якому знаку заряду  $Q_1$  рівновага буде стійкою?

**Розв'язання.** Заряд  $Q_1$  знаходиться в рівновазі в тому випадку, якщо геометрична сума сил, що діють на нього, дорівнює нулю. Це означає, що на заряд  $Q_1$  повинні діяти дві сили, рівні по модулю і протилежні за напрямком. Розглянемо, на якому з трьох ділянок I, II, III (рис. 6.5) може бути виконана ця умова. Для визначеності будемо вважати, що заряд  $Q_1$  – позитивний.

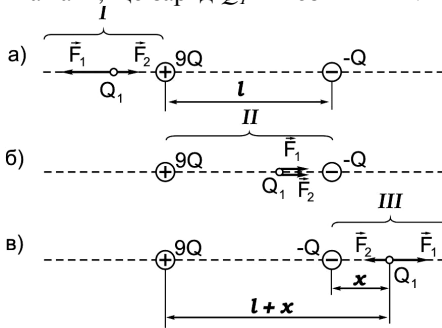


Рис. 6.5

На ділянці I (рис.6.5) на заряд  $Q_1$  будуть діяти дві протилежно спрямовані сили:  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ . Сила  $F_1$ , що діє з боку заряду  $9Q$ , у будь-якій точці цієї ділянки більше сили  $F_2$ , що діє з боку заряду  $-Q$ , тому що більший заряд  $9Q$  знаходиться завжди ближче до заряду  $Q_1$ , ніж менший (за модулем) заряд  $-Q$ . Тому рівновага на цій ділянці неможлива.

На ділянці II (рис.6.5) обидві сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  спрямовані в один бік – до заряду  $-Q$ . Отже, і на другій ділянці рівновага неможлива.

На ділянці III (рис.6.5) сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  спрямовані в протилежні сторони, так само як і на ділянці I, але на відміну від неї менший заряд  $-Q$  завжди знаходиться ближче до заряду  $Q_1$ , ніж більший заряд  $9Q$ . Це

означає, що можна знайти таку точку на прямій, де сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  будуть однакові за модулем, тобто

$$F_1 = F_2. \quad (1)$$

Нехай  $x$  и  $l + x$  – відстані від меншого і більшого зарядів до заряду  $Q_1$ . Виражаючи в рівності (1)  $F_1$  і  $F_2$  відповідно до закону Кулона, одержимо  $9QQ_1/(l+x)^2 = QQ_1/x^2$ , чи  $l+x = \pm 3x$ , відкіля

$$x_1 = +l/2, \quad x_2 = -l/4.$$

Корінь  $x_2$  не задовольняє фізичній умові задачі (у цій точці сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  хоча і рівні за модулем, але збігаються за напрямком).

Визначимо знак заряду  $Q_1$ , при якому рівновага буде стійкою. Рівновага називається стійкою, якщо при зсуві заряду від положення рівноваги виникають сили, що повертають його в положення рівноваги. Розглянемо зсув заряду  $Q_1$  у двох випадках: коли заряд позитивний і негативний.

Якщо заряд  $Q_1$  позитивний, то при зсуві його вліво обидві сили  $F_1$  і  $F_2$  зростають. Тому що сила  $F_1$  зростає повільніше, то результуюча сила, що діє на заряд  $Q_1$ , буде спрямована в ту ж сторону, у яку зміщений цей заряд, тобто вліво. Під дією цієї сили заряд  $Q_1$  буде віддалятися від положення рівноваги. Те ж відбувається і при зсуві заряду  $Q_1$  вправо. Сила  $F_1$  убуває швидше, ніж  $F_2$ . Геометрична сума сил у цьому випадку спрямована вправо. Заряд під дією цієї сили також буде переміщатися вправо, тобто віддалятися від положення рівноваги. Таким чином, у випадку позитивного заряду рівновага є хитливою.

Якщо заряд  $Q_1$  негативний, то його зсув уліво викликає збільшення сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , але сила  $\vec{F}_1$  зростає повільніше, ніж  $\vec{F}_2$ , тобто  $|F_2| > |F_1|$ . Результуюча сила буде спрямована вправо. Під її дією заряд  $Q_1$  повертається до положення рівноваги. При зсуві  $Q_1$  вправо сила  $F_1$  убуває швидше, ніж  $F_2$ , тобто  $|F_1| > |F_2|$ , результуюча сила спрямована вліво і заряд  $Q_1$  знову буде повертатися до положення рівноваги. При негативному заряді рівновага є стійкою.

Величина самого заряду  $Q_1$  є несуттєвою.

**Приклад 2.** Три точкових заряди  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  нКл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника. Який заряд  $q_4$  потрібно помістити в центрі трикутника, щоб зазначена система зарядів знаходилася в рівновазі?

**Розв'язання.** Усі три заряди, розташовані по вершинах трикутника, знаходяться в однакових умовах. Тому досить з'ясувати, який заряд варто помістити в центрі трикутника, щоб який-небудь один із трьох зарядів, наприклад  $q_1$ , знаходився в рівновазі. Заряд  $q_1$

буде знаходитися в рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнює нулю (рис. 6.6):

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_{2,3} + \vec{F}_4 = 0 \quad (1)$$

де  $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  – сили, з якими відповідно діють на заряд  $q_1$  заряди  $q_2, q_3, q_4$ ;  $\vec{F}_{2,3}$  – рівнодіюча сил  $\vec{F}_2$  і  $\vec{F}_3$ .

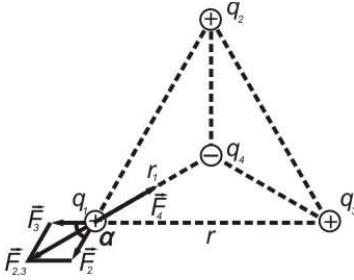


Рис. 6.6

Сили  $\vec{F}_{2,3}$  і  $\vec{F}_4$  спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони, тому векторну рівність (1) можна замінити скалярною:  $F_{2,3} - F_4 = 0$ , відкіля:  $F_{2,3} - F_4 = 0$ . Виразимо в останній рівності  $F$  через  $F_2$  і  $F_3$  і зважаючи на те, що  $F_3 = F_2$ , одержимо:

$$F_4 = F_2 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Застосувавши закон Кулона і маючи на увазі, що  $q_2 = q_3 = q_1$ , знайдемо:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)},$$

відкіля:

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}. \quad (2)$$

З геометричних побудов у рівносторонньому трикутнику випливає, що

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos(\alpha/2)} = \frac{r}{2 \cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}, \cos \alpha = \cos 60^\circ = 1/2$$

З урахуванням цього формула (2) набуває вигляд:  $q_4 = q_1 / \sqrt{3}$

Зробимо обчислення:

$$q_4 = 10^{-9} / \sqrt{3} \text{ Кл} = 5,77 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} = 0,577 \text{ нКл}$$

Слід зазначити, що рівновага системи зарядів буде стійкою.

**Приклад 4.** Два точкових електричних заряди  $Q_1 = 1 \text{ нКл}$  і  $Q_2 = -2 \text{ нКл}$  знаходяться в повітрі на відстані  $d = 10 \text{ см}$  один від одного. Визначити напруженість  $\vec{E}$  і потенціал  $\phi$  поля, створюваного цими зарядами в точці А, що знаходиться від заряду  $Q_1$  на відстані  $r_1 = 9 \text{ см}$  і від заряду  $Q_2$  на відстані  $r_2 = 7 \text{ см}$ .

**Розв'язання.** Відповідно до принципу суперпозиції електричних полів, кожен заряд створює поле незалежне від присутності в просторі інших зарядів. Тому напруженість  $\vec{E}$  електричного поля в шуканій точці може бути знайдена як векторна сума напруженостей  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  полів, створюваних кожним зарядом окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Напруженості електричного поля, створюваного в повітрі ( $\epsilon = 1$ ) зарядами  $Q_1$  і  $Q_2$ :

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}, \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (2)$$

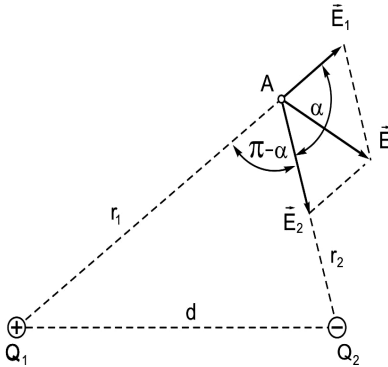


Рис. 6.7

де  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$ , що може бути знайдений із трикутника зі сторонами  $r_1$ ,  $r_2$  і  $d$ :

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

У даному випадку, щоб уникнути громіздких записів, зручно значення  $\cos \alpha$  обчислити окремо:

$$\cos \alpha = \frac{(0,1)^2 - (0,09)^2 - (0,07)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = -0,238.$$

Підставляємо вирази  $E_1$  з (1) і  $E_2$  з (2) у (3), виносимо загальний множник  $1/(4\pi\epsilon_0)$  за знак кореня і одержуємо

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{|Q_1||Q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}. \quad (4)$$

Відповідно до принципу суперпозиції електричних полів потенціал  $\varphi$  результуючого поля, створюваного двома зарядами  $Q_1$  і  $Q_2$ , дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (5)$$

Потенціал електричного поля, створюваного у вакуумі точковим зарядом  $Q$  на відстані  $r$  від нього, виражається формулою:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

У нашому випадку відповідно до формул (5) і (6) одержимо:

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

чи

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right).$$

Зробимо обчислення:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0,09)^4} + \frac{(210^{-9})^2}{(0,07)^4} + 2 \frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(0,09)^2 (0,07)^2}} (0,238) \text{ В / м} = \\ &= 3,58 \cdot 10^3 \text{ В / м} = 3,58 \text{ кВ / м}; \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{10^{-9}}{0,09} + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) \text{ В} = 157 \text{ В}. \end{aligned}$$

**Приклад 5.** По тонкому кільцю рівномірно розподілений заряд  $Q = 40 \text{ нКл}$  із лінійною густиною  $\tau = 50 \text{ нКл/м}$ . Визначити напруженість  $\vec{E}$  електричного поля, створюваного цим зарядом у точці А, що лежить на осі кільця і розташована від його центра на відстань, яка дорівнює половині радіуса.

**Розв'язання.** Сполучимо координатну площину  $xOy$  з площиною кільця, а вісь  $Oz$  – з віссю кільця (рис.6.8).

На кільці виділимо малу ділянку довжиною  $dl$ . Тому що заряд  $dQ = \tau dl$ , який знаходиться на цій ділянці, можна вважати точковим, то напруженість  $d\vec{E}$  електричного поля, створюваного цим зарядом,

може бути записана у виді:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, спрямований від елемента  $dl$  до точки А.



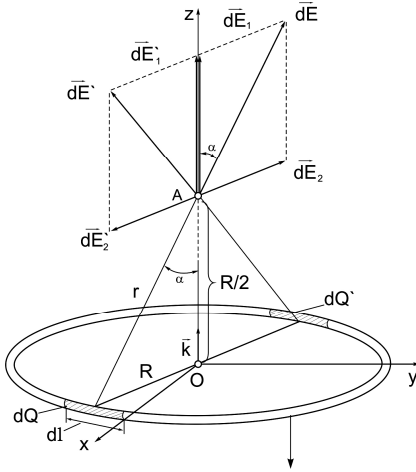


Рис.6.8

Помітимо, що для кожної пари зарядів  $dQ$  і  $d'Q$  ( $dQ=d'Q$ ), розташованих симетрично відносно центра кільця, вектори  $d\vec{E}_2$  і  $d\vec{E}'_2$  у точці А рівні за модулем і протилежні за напрямком:  $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}'_2$ . Тому векторна сума (інтеграл)

$$\int_L d\vec{E}_2 = 0 .$$

Складові  $d\vec{E}_1$  для всіх елементів кільця збігаються з віссю Oz (одичинним вектором  $\vec{k}$ ), тобто  $d\vec{E}_1 = \vec{k}dE_1$ .

$$\text{Тоді} \quad \vec{E} = k \int_L d\vec{E}_1 .$$

Тому що

$$dE = \frac{rdl}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r = \sqrt{R^2 + (R/2)^2} = \sqrt{5} R/2 ,$$

$$\cos \alpha = (R/2) / r = 1/\sqrt{5},$$

$$\text{то} \quad dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\tau}{5R^2\sqrt{5}} dl = \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2} .$$

$$\text{Таким чином,} \quad E = k \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2} = k \frac{2\tau}{5\sqrt{5}\epsilon_0 R} .$$

Зі співвідношення  $Q=2\pi R\tau$  визначимо радіус кільця:  $R=Q/(2\pi\tau)$ . Тоді модуль напруженості :

Розкладемо вектор  $d\vec{E}$  на дві складові:  $d\vec{E}_1$ , перпендикулярну площині кільця (вздовж осі Oz), і  $d\vec{E}_2$ , паралельну площині кільця (площині xOy), тобто  $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$ .

Напруженість  $\vec{E}$  електричного поля в точці А знайдемо інтегруванням:

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E}_1 + \int_L d\vec{E}_2 ,$$

де інтегрування ведеться по всіх елементах зарядженого кільця.

$$E = k \frac{2\tau 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 Q} = k \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 Q}. \quad (1)$$

Перевіримо, чи дає права частина отриманої рівності одиницю напруженості (В/м):

$$\frac{[\tau^2]}{[\varepsilon_0][Q]} = \frac{(1\text{Кл}/\text{м})^2}{1\text{Ф}/\text{м} \cdot 1\text{Кл}} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{Ф} \cdot 1\text{м}} = 1\text{В}/\text{м}.$$

Виразимо фізичні величини, що входять у формулу (1), в одиницях СІ:

$$(\tau = 5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} / \text{ м}, Q = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}, \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{ м})$$

і зробимо обчислення:

$$E = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2}{5\sqrt{5} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}} \text{ В} / \text{ м} = 7,92 \text{ кВ} / \text{ м}.$$

**Приклад 10.** На пластинах плоского конденсатора знаходиться заряд  $Q=10\text{нКл}$ . Площа  $S$  кожної пластини конденсатора дорівнює  $100 \text{ см}^2$ , діелектрик – повітря. Визначити силу  $F$ , з якою притягаються пластини. Поле між пластинами вважати однорідним.

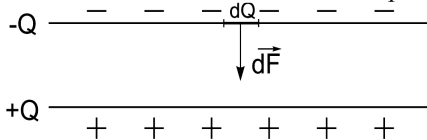


Рис. 6.9

**Розв'язання.** Заряд  $Q$  однієї пластини знаходиться в поле напруженості  $\vec{E}$ , створеному зарядом іншої пластини конденсатора (рис.6.9).

Отже, на перший заряд діє сила:

$$\vec{F} = Q\vec{E}. \quad (1)$$

Тому що  $E = \sigma / (2\varepsilon_0) = Q / (2\varepsilon_0 S)$ ,

де  $\sigma$  – поверхнева густина заряду пластини, то формула (1) буде мати вигляд:  $F = Q^2 / (2\varepsilon_0 S)$ .

Виконаємо обчислення:

$$F = \frac{10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} \text{ Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН}.$$

**Приклад 11.** Електричне поле створене довгим циліндром радіусом  $R=1\text{см}$ , рівномірно зарядженим з лінійною густиною  $\tau = 20 \text{ нКл}/\text{м}$ . Визначити різницю потенціалів двох точок цього поля, що знаходяться на відстані  $a_1=0,5 \text{ см}$  і  $a_2=2 \text{ см}$  від поверхні циліндра, у середній його частині.

**Розв'язання.** Для визначення різниці потенціалів скористаємося

співвідношенням між напруженістю поля і зміною потенціалу:  $\vec{E} = - \text{grad } \varphi$ . Для поля з осью симетрії, яким є поле циліндра, це співвідношення можна записати у виді

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \text{ або } d\varphi = -E dr.$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо різницю потенціалів двох точок, що відстоять на відстанях  $r_1$  і  $r_2$  від осі циліндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr. \quad (1)$$

Тому що циліндр довгий і точки взяті поблизу його середньої частини, то для виразу напруженості поля можна скористатися формулою напруженості поля, створеного нескінченно довгим циліндром

$$E = \tau / (2\pi\epsilon_0 r).$$

Підставивши вираз  $E$  в (1), одержимо

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

або 
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2)$$

Зробимо обчислення, вважаючи, що величини  $r_1$  і  $r_2$ , що входять у формулу (2) у виді відносини, можна виразити в сантиметрах ( $r_1 = R + a_1 = 1,5$  см,  $r_2 = R + a_2 = 3$  см):

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \ln(3/1,5) = \\ &= 3,6 \cdot 10^2 \cdot 2,3 \ln 2 \text{ В} = 250 \text{ В}. \end{aligned}$$

**Приклад 12.** Визначити різницю потенціалів  $U$ , яку повинний пройти в електричному полі електрон, який має швидкість  $v = 106$  м/с, щоб швидкість його зросла в  $n = 2$  рази.

**Розв'язання.** Різницю потенціалів, що прискорює електрон, можна знайти, обчисливши роботу  $A$  сил електростатичного поля. Ця робота визначається добутком елементарного заряду  $e$  на різницю потенціалів  $U$ :

$$A = eU. \quad (1)$$

Робота сил електростатичного поля в даному випадку дорівнює зміні кінетичної енергії електрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}, \quad (2)$$

де  $T_1$  і  $T_2$  — кінетична енергія електрона до і після проходження поля,

що прискорює його;  $m$  – маса електрона;  $v_1$  і  $v_2$  – початкова і кінцева швидкості його.

Дорівнявши праві частини рівностей (1) і (2), одержимо

$$eU = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = \frac{m n^2 v_1^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2},$$

де  $n = v_2/v_1$ .

Звідси шукана різниця потенціалів:

$$U = \frac{m v_1^2 (n^2 - 1)}{2e}.$$

Зробимо обчислення:

$$U = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) \text{В} = 8,83 \text{ В}.$$

**Приклад 13.** З поверхні нескінченного рівномірно зарядженого ( $\tau = 50 \text{ нКл/м}$ ) прямого циліндра вилітає  $\alpha$ -частка

( $v_0 = 0$ ). Визначити кінетичну енергію  $W_2$   $\alpha$ -частки (кеВ) у точці 2 на відстані  $8R$  від поверхні циліндра (рис.6.10).

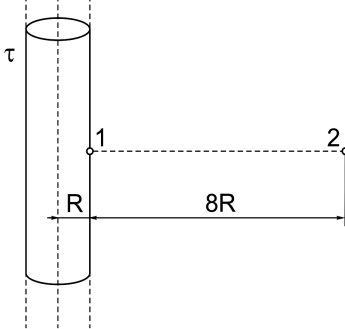


Рис. 6.10

**Розв'язання.** Сили електростатичного поля є консервативними, тому для визначення кінетичної енергії  $\alpha$ -частки в точці 2 скористаємося законом збереження енергії, записаному у виді  $W_1 = W_2$ , де  $W_1$  і  $W_2$  – повні енергії  $\alpha$ -частки в точках 1 і 2.

Тому що  $W_1 = T_1 + U_1$  і  $W_2 = T_2 + U_2$  ( $T_1$  і  $T_2$  – кінетичні енергії  $\alpha$ -частки;  $U_1$  і  $U_2$  – потенціальні енергії), то, зважаючи на те, що  $T_1 = 0$  ( $v_0 = 0$ ), можна записати:  $U_1 = T_2 + U_2$ , відкіля  $T_2 = U_1 - U_2 = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

$Q$  – заряд  $\alpha$ -частки; ( $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – потенціали точок 1 і 2).

Використовуючи розв'язання приклада 10, запишемо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 9.$$

Тоді 
$$T_2 = \frac{Q\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 9.$$

Перевірка одиниць аналогічна проведеній в прикладі 11.

Виразимо усі величини в одиницях СІ

$$Q = 2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

$$\tau = 50 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м},$$

$$1/(2\pi\epsilon_0) = 18 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$

і зробимо обчислення:

$$T_2 = 18 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^{-9}}{1,60 \cdot 10^{-19}} 2,20 \text{ eВ} = 3,96 \text{ кеВ}.$$

**Приклад 14.** Конденсатор ємністю  $C_1 = 3 \text{ мкФ}$  був заряджений до різниці потенціалів  $U_1 = 40 \text{ В}$ . Після відключення від джерела струму конденсатор з'єднали паралельно з іншим незарядженим конденсатором ємністю  $C_2 = 5 \text{ мкФ}$ . Яка енергія  $W$  витратиться на утворення іскри в момент приєднання другого конденсатора?

**Рішення.** Енергія, витрачена на утворення іскри:

$$W = W_1 - W_2, \quad (1)$$

де  $W_1$  – енергія, якою володів перший конденсатор до приєднання до нього другого конденсатора;  $W_2$  – енергія, що має батарея, складена з двох конденсаторів.

Енергія зарядженого конденсатора визначається за формулою:

$$W = 1/2 C U^2, \quad (2)$$

де  $C$  — ємність конденсатора або батареї конденсаторів.

Виразивши у формулі (1) енергії  $W_1$  і  $W_2$  за формулою (2) і прийнявши в увагу, що загальна ємність паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів, одержимо:

$$W = 1/2 C_1 U_1^2 - 1/2 (C_1 + C_2) U_2^2, \quad (3)$$

де  $U_2$  — різниця потенціалів на затисках батареї конденсаторів.

Зважаючи на те, що заряд після приєднання другого конденсатора залишився колишнім, виразимо різницю потенціалів  $U_2$  у такий спосіб:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}. \quad (4)$$

Підставивши вираз  $U_2$  у (3), знайдемо

$$W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

чи

$$W = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

Зробимо обчислення:  $W = \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж}.$

**Приклад 15.** Потенціометр з опором  $R = 100 \text{ Ом}$  підключений до батареї з е.р.с.  $\varepsilon = 150 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $R_i = 50 \text{ Ом}$ .

Визначити: 1) показання вольтметра опором  $R_v = 500 \text{ Ом}$ , з'єднаного з однією з клем потенціометра і рухливим контактом, установленим посередині потенціометра; 2) різницю потенціалів між тими ж точками потенціометра при відключенні вольтметра.

**Розв'язання.** Показання вольтметра, підключеного до точок А і В (рис.6.11), визначимо за формулою

$$U_I = I_I R_I,$$

де  $R_I$  — опір паралельно з'єднаних вольтметра і половини потенціометра;  $I_I$  — сумарна сила струму в ділянках цього з'єднання (вона дорівнює силі струму в нерозгалуженій частині ланцюга).

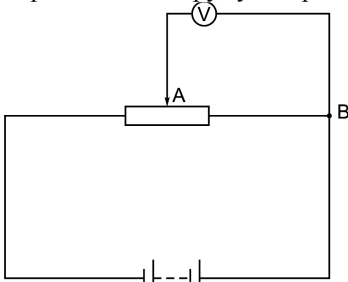


Рис. 6.11

Силу струму  $I_I$  знайдемо за законом Ома для повного кола:

$$I_I = \varepsilon / (R_e + R_i), \quad (1)$$

де  $R_e$  — опір зовнішньої частини кола. Цей опір є сума двох опорів:

$$R_e = R / 2 + R_I. \quad (2)$$

Опір  $R_I$  знайдемо за формулою паралельного з'єднання провідників:

$$\frac{1}{R_I} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R / 2},$$

відкіля

$$R_I = \frac{R R_v}{R + 2 R_v}.$$

Підставивши в (1) вираз  $R_e$  із (2), знайдемо

$$I_I = \frac{\varepsilon}{R / 2 + R_I + R_i}.$$

У даному випадку розв'язання задачі в загальному виді було б громіздким. Тому зручно обчислення величин провести роздільно:

$$R_I = \frac{100 \cdot 500}{100 + 2 \cdot 500} \text{ Ом};$$

$$I_I = \frac{150}{50 + 45,5 + 50} \text{ А} = 1,03 \text{ А};$$

$$U_I = 1,03 \cdot 45,5 \text{ В} = 46,9 \text{ В}.$$

$$U_2 = I_2 \cdot R / 2, \quad (3)$$

де  $I_2$  — сила струму в ланцюзі при відключеному вольтметрі.

Її визначимо за формулою:  $I_2 = \varepsilon / (R + R_i)$ .

Підставивши вираз  $I_2$  у (3), знайдемо  $U_2 = \varepsilon / (R + R_i) \cdot R / 2$ .

Зробимо обчислення:  $U_2 = \frac{150}{100+50} \frac{100}{2} B = 50B.$

**Приклад 16.** Сила струму в провіднику опором  $R=20 \text{ Ом}$  наростає протягом часу  $\Delta t = 2 \text{ с}$  за лінійним законом від  $I_0 = 0$  до  $I = 6 \text{ А}$  (рис.6.12). Визначити теплоту  $Q_1$ , що виділилася в цьому провіднику за першу секунду, і  $Q_2$  — за другу, а також знайти відношення  $Q_2/Q_1$ .

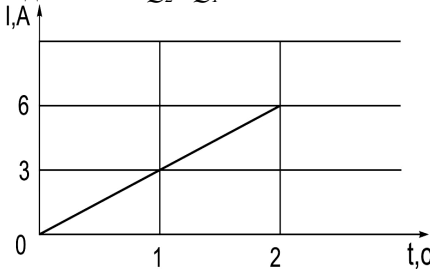


Рис. 6.12

**Розв'язання.** Закон Джоуля-Ленца у вигляді  $Q = I^2 R t$  справедливий для постійного струму ( $I = \text{const}$ ). Якщо ж сила струму в провіднику змінюється, то зазначений закон справедливий для нескінченно малого інтервалу часу і записується у вигляді:  $dQ = I^2 R dt.$  (1)

Тут сила струму  $I$  є деякою функцією часу. У даному випадку

$$I = kt, \quad (2)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, що характеризує швидкість зміни сили струму:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{6}{2} \text{ А/с} = 3 \text{ А/с}.$$

З урахуванням формули (2) формула (1) здобуває вигляд:

$$dQ = k^2 R t^2 dt. \quad (3)$$

Для визначення теплоти, що виділилася за кінцевий інтервал часу  $\Delta t$ , вираз (3) треба інтегрувати у межах від  $t_1$  до  $t_2$ :

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3)$$

$$Q_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20 (1 - 0) \text{ Дж} = 60 \text{ Дж};$$

Зробимо обчислення:

$$Q_2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20 (8 - 1) \text{ Дж} = 420 \text{ Дж}.$$

Отже,  $Q_2 / Q_1 = 420 / 60 = 7$ ,

тобто. За другу секунду виділиться теплоти в сім разів більше, ніж за першу.

### Контрольна робота №3 (електростатика)

301. Тонка квадратна рамка рівномірно заряджена з лінійною густиною заряду  $100 \text{ нКл/м}$ . Визначити потенціал поля в точці перетинання діагоналей.
302. Дві маленькі провідні кульки підвішені на довгих непровідних нитках до одного гака. Кульки заряджені однаковими зарядами і знаходяться на відстані  $5 \text{ см}$  одна від одної. Що відбудеться після того, як одну з кульок розрядити?
303. На двох однакових крапельках води знаходиться по одному зайвому електрону, причому сила відштовхування крапельок врівноважує силу їхнього взаємного тяжіння. Відстань між крапельками велика в порівнянні з їхніми радіусами. Який радіус крапельок?
304. Дві однакові металеві заряджені кулі знаходяться на відстані  $0,6 \text{ м}$ . Сила взаємодії куль  $70 \text{ мкН}$ . Після того як кулі привели в зіткнення і віддалили одну від одної на колишню відстань, сила відштовхування змінилася в  $2,3$  рази. Визначити заряди, що були на кулях до зіткнення. Діаметр куль вважати багато менше відстані між ними.
305. Дві однакові заряджені кульки підвішені в одній точці на нитках однакової довжини. При цьому нитки розійшлися на кут  $\alpha$ . Кульки занурюють у масло густиною  $800 \text{ кг/м}^3$ . Яка діелектрична проникність масла, якщо кут розбіжності ниток при зануренні кульок у масло залишається незмінним? Густина матеріалу кульок  $1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .
306. Три однакові маленькі кульки масою  $0,12 \text{ г}$  підвішені до однієї точки на нитках довжиною  $0,2 \text{ м}$ . Які заряди треба надати кулькам, щоб кожна нитка складала з вертикально кут  $30^\circ$ ? Масу ниток не враховувати.
307. Дві маленькі заряджені кульки, однакові за розміром, притягаються одна до одної з деякою силою. Після того як кульки були приведені в зіткнення і розсунуті на відстань у  $n$  ( $5$ ) разів більше, ніж раніше, сила взаємодії між ними зменшилася в  $m$  ( $9$ ) разів. Який був заряд першої кульки до зіткнення, якщо друга кулька мала заряд  $10^{-8} \text{ Кл}$ ?
308. Дві алюмінієвих кульки радіусами  $2$  і  $1 \text{ см}$  з'єднані легкою довгою непровідною ниткою, довжина якої  $1 \text{ м}$ . Кульки знаходяться на гладкій горизонтальній поверхні, що теж не проводить. У кожних  $z=10^9$  атомів більшої кульки узятю по одному електрону, і усі вони перенесені на меншу кульку. Яку мінімальну силу потрібно прикласти до системи, щоб нитка натягнулася?  $\rho=2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$   $M=2,7 \cdot 10^2 \text{ кг/Моль}$ .
309. Два позитивні точкові заряди  $Q$  і  $4Q$  закріплено на відстані  $60 \text{ см}$  один від одного. Визначити, у якій точці на прямій, що проходить через заряди, треба вмістити третій заряд, так, щоб він знаходився в рівновазі. Визначити, який знак повинний мати цей заряд для того, щоб рівновага



була стійкою, якщо переміщення заряду можливі тільки уздовж прямої, що проходить через закріплені заряди.

310. Тонкий стрижень довжиною  $10\text{ см}$  рівномірно заряджений. Лінійна густина заряду  $1\text{ мкКл/м}$ . На продовженні осі стрижня на відстані  $20\text{ см}$  від найближчого його кінця знаходиться точковий заряд, величина якого  $100\text{ нКл}$ . Визначити силу взаємодії стрижня і точкового заряду.
311. Тонкий довгий стрижень рівномірно заряджений з лінійною густиною  $1,5\text{ нКл/м}$ . На продовженні осі стрижня на відстані  $12\text{ см}$  від його кінця знаходиться точковий заряд  $0,2\text{ мкКл}$ . Визначити силу взаємодії зарядженого стрижня і точкового заряду.
312. Тонкий стрижень довжиною  $0,5\text{ м}$  рівномірно заряджений із лінійною густиною заряду  $10\text{ мкКл/м}$ . Визначити силу, що діє на точковий заряд, величина якого  $10\text{ нКл}$ , що знаходиться на перпендикулярі до одного з кінців стрижня на відстані  $10\text{ см}$  від нього.
313. Тонкий стрижень довжиною  $20\text{ см}$  несе рівномірно розподілений по довжині заряд із лінійною густиною  $1\text{ мкКл/м}$ . На відстані  $20\text{ см}$  від стрижня знаходиться точковий заряд величина якого  $10\text{ нКл}$ , рівновіддалений від кінців стрижня. Визначити силу взаємодії точкового заряду з зарядженим стрижнем.
314. Дві довгі  $\square$ оренціо $\square$ юч заряджені нитки розташовані на відстані  $10\text{ см}$  одна від одної. Лінійні густини зарядів на нитках  $10^{-7}\text{ Кл/м}$  і  $5\cdot 10^{-7}\text{ Кл/м}$ . Знайти значення напруженості результуючого електричного поля в точці, що знаходиться на відстані  $10\text{ см}$  від кожної нитки.
315. Дві круглі рівні пластини радіусом  $10\text{ см}$  знаходяться на малій відстані одна від одної. Пластинам надали рівні по модулю, протилежні за знаком заряди. Визначити величину цих зарядів, якщо пластини притягаються із силою  $2\text{ мН}$ . Вважати, що заряди розподіляються по пластинах рівномірно.
316. Електрон знаходиться в зовнішньому електричному полі напруженістю  $1\text{ кВ/м}$ , спрямованому вертикально вниз. Де розташована точка, в якій напруженість результуючого поля дорівнює нулю?
317. Велика рівномірно заряджена пластина, розташована горизонтально, має поверхневу густина електричного заряду  $9\text{ мкКл/м}^2$ . Над ній знаходиться алюмінієва кулька з зарядом  $0,37\text{ мкКл}$ . Який радіус повинна мати кулька, щоб вона не падала?
318. По кільцю з тонкого дроту радіусом  $5\text{ см}$  рівномірно розподілений заряд  $17\text{ нКл}$ . Визначити максимальну напруженість поля на осі кільця.
319. По тонкому кільцю радіусом  $6\text{ см}$  рівномірно розподілений заряд  $24\text{ нКл}$ . Яка напруженість поля в точці, що знаходиться на осі кільця на відстані  $18\text{ см}$  від центру кільця? Знайти також силу, що діє в цій точці на точковий заряд  $0,5\text{ нКл}$ .

320. Паралельно нескінченній площині, зарядженій з поверхневою густиною заряду  $1 \text{ мкКл/м}^2$ , розташована нескінченно довга пряма нитка, заряджена з лінійною густиною заряду  $10 \text{ нКл/м}$ . Визначити силу, що діє з боку площини на одиницю довжини нитки.
321. З якою силою (на одиницю довжини) взаємодіють дві заряджені нескінченно довгі паралельні нитки з лінійною густиною заряду  $10 \text{ нКл/м}$  і  $18 \text{ нКл/м}$ , що знаходяться на відстані  $6 \text{ см}$  одна від одної.
322. Дві довгі прямі паралельні нитки знаходяться на відстані  $10 \text{ см}$  одна від одної. На нитках рівномірно розподілені заряди з лінійною густиною  $-2 \text{ нКл/см}$  і  $4 \text{ нКл/см}$ . Визначити напруженість електричного поля в точці, віддаленій від першої нитки на відстань  $6 \text{ см}$  і від другої на відстань  $8 \text{ см}$ .
323. Дві однакові круглі пластини площею  $100 \text{ см}^2$  кожна розташовані паралельно одна одній. Заряд однієї пластини  $100 \text{ нКл}$ , іншої  $-200 \text{ нКл}$ . Визначити силу взаємного притягання пластин, якщо відстань між ними: а)  $2 \text{ мм}$ ; б)  $10 \text{ м}$ .
324. Тонке півкільце радіусом  $10 \text{ см}$  несе рівномірно розподілений заряд  $0,1 \text{ мкКл}$ . Визначити напруженість поля в центрі кривизни півкільця, а також силу, що діє в цій точці на точковий заряд  $10 \text{ нКл}$ .
325. Кільце з тонкого дроту радіусом  $5 \text{ см}$  рівномірно заряджене зарядом  $240 \text{ нКл}$ . Визначити: 1) потенціал і напруженість електричного поля в центрі кільця; 2) потенціал точки, що лежить на перпендикулярі до площини кільця, як функцію відстані точки від площини кільця; 3) потенціал і напруженість електричного поля на відстані  $10 \text{ см}$  від площини кільця.
326. Заряджена куля радіусом  $2 \text{ см}$  з'єднується з незарядженою кулею, радіус якої  $3 \text{ см}$ . Після того як кулі роз'єднали, енергія другої кулі стала рівною  $0,4 \text{ Дж}$ . Який заряд був на першій кулі до з'єднання, чому дорівнює його енергія до і після з'єднання з другою кулею? Знайти роботу розряду при з'єднанні.
327. Кулю радіусом  $10 \text{ см}$ , заряджену до потенціалу  $3 \text{ кВ}$ , з'єднують довгим дротом спочатку з віддаленою незарядженою кулею, радіус якої дорівнює  $10 \text{ см}$ , потім, від'єднують цю кулю, першу з'єднують з іншою віддаленою незарядженою кулею радіусом  $10 \text{ см}$ . Знайти початкову енергію системи куль, кінцеву енергію цієї системи, роботу розряду при кожному з'єднанні.
328. Є три кулі однакового радіуса рівного  $10 \text{ см}$ , що знаходяться на відстані значно більшій їх радіусів. Перша куля заряджена і її заряд дорівнює  $8 \text{ мкКл}$ . Тонким дротом по черзі з'єднують кулі: першу з другою, потім другу з третьою і, нарешті, третю з першою. Знайти потенціали всіх куль після з'єднань.

329. Відстань між пластинами плоского конденсатора  $2\text{ см}$ , різниця потенціалів  $6\text{ кВ}$ . Заряд кожної пластини  $10\text{ нКл}$ . Визначити енергію поля конденсатора і силу взаємного притягання пластин.
330. Дві металеві кульки радіусами  $3\text{ см}$  і  $2\text{ см}$  мають: перша – заряд  $10\text{ нКл}$ , друга – потенціал  $9\text{ кВ}$ . Знайти енергію, що виділиться при розряді, якщо кулі з'єднати провідником. (Відстань між кулями значно більше їх радіусів).
331. Двадцять сім крапельок ртуті радіусом  $1\text{ мм}$  кожна зливаються в одну загальну краплю. Знайти потенціал великої краплі, якщо потенціали кожної маленької краплі були однакові і рівні  $30\text{ В}$ .
332. Два плоских конденсатори, ємності яких  $5\text{ нФ}$  і  $12\text{ нФ}$ , заряджені до різниці потенціалів  $5\text{ кВ}$  і  $2\text{ кВ}$  відповідно. Знайти зміну загальної електростатичної енергії цих конденсаторів після попарного з'єднання □оренцо □ючи заряджених пластин.
333. Два плоских конденсатори з ємностями  $3\text{ мкФ}$  і  $8\text{ мкФ}$  заряджені до різниці потенціалів  $5\text{ кВ}$  і  $2\text{ кВ}$  відповідно. Знайти зміну загальної електростатичної енергії у випадку їх паралельного з'єднання.
334. Біля зарядженої нескінченної площини знаходиться точковий заряд  $20\text{ нКл}$ . Під дією поля заряд переміщується по силовій лінії на відстань  $2\text{ см}$ , при цьому здійснюється робота  $5\cdot 10^6\text{ Дж}$ . Визначити поверхневу густину заряду на площині.
335. Електричне поле утворене позитивно зарядженою нескінченною ниткою з лінійною густиною заряду  $2\text{ нКл/м}$ . Яку швидкість отримає електрон під дією поля, наблизившись до нитки з відстані в  $1\text{ см}$  до відстані  $0,5\text{ см}$  від нитки?
336. На відстані  $4\text{ см}$  від нескінченно довгої зарядженої нитки знаходиться точковий заряд  $20\text{ нКл}$ . Під дією поля заряд переміщується до відстані  $2\text{ см}$ , при цьому здійснюється робота  $5\cdot 10^6\text{ Дж}$ . Знайти лінійну густину заряду нитки.
337. Дві кульки з зарядами  $10^{-8}\text{ Кл}$  і  $10^{-7}\text{ Кл}$  знаходяться на відстані  $40\text{ см}$  одна від одної. Яку треба виконати роботу, щоб зблизити їх до відстані  $25\text{ см}$ ?
338. Заряд розподілено рівномірно з однаковою густиною по поверхні двох концентричних сфер із радіусами  $5\text{ см}$  і  $10\text{ см}$ . Знайти густину заряду на сферах, якщо потенціал у центрі цієї системи дорівнює  $300\text{ В}$ .
339. Знайти різницю потенціалів між двома концентричними провідними сферами і напруженість електричного поля, створеного ними в точках, що відстоять від центру сфер на відстанях  $5\text{ см}$ ,  $12\text{ см}$  і  $20\text{ см}$ . Радіуси сфер рівні  $10\text{ см}$  і  $15\text{ см}$ , а заряди відповідно  $10\text{ нКл}$  і  $50\text{ нКл}$ .
340. Металева куля радіусом  $2\text{ см}$  оточена сферичною металевою оболонкою радіусом  $4\text{ см}$ , концентричною з кулею. На кулі

- знаходиться заряд  $20 \text{ нКл}$ , на оболонці – заряд  $-40 \text{ нКл}$ . Визначити напруженість і потенціал електричного поля на відстані від центру кулі: 1)  $1 \text{ см}$ ; 2)  $3 \text{ см}$ ; 3)  $5 \text{ см}$ .
341. Порошинка масою  $10 \text{ мкг}$ , що несе на собі заряд  $10 \text{ нКл}$ , влетіла в електричне поле в напрямку силових ліній. Після проходження різниці потенціалів  $150 \text{ кВ}$  порошинка мала швидкість  $20 \text{ м/с}$ . Визначити швидкість порошинки до того, як вона влетіла в поле.
342. Електрон, що має кінетичну енергією  $5 \text{ еВ}$ , влітає в однорідне електричне поле в напрямку силових ліній поля. Яка швидкість буде у електрона, якщо він пройде в цьому полі різницю потенціалів  $2 \text{ В}$ ?
343. Знайти енергію взаємодії системи трьох точкових зарядів  $10 \text{ нКл}$ ,  $20 \text{ нКл}$  і  $-30 \text{ нКл}$ , розташованих у вершинах рівностороннього трикутника з стороною  $10 \text{ см}$ .
344. Тонкий стрижень зігнутий у кільце радіусом  $0,1 \text{ м}$ . Він рівномірно заряджений із лінійною густиною заряду  $300 \text{ нКл/м}$ . Визначити потенціал у точці, розташованій на перпендикулярі до його площини на відстані  $0,2 \text{ м}$  від його центру.
345. Електрон влітає в плоский горизонтальний конденсатор паралельно його пластинам з швидкістю  $10^6 \text{ м/с}$ . Напруженість поля в конденсаторі  $100 \text{ В/см}$ , довжина конденсатора  $5 \text{ см}$ . Знайти величину і напрямок швидкості електрона при вильоті його з конденсатора.
346. Протон і  $\alpha$ -частинка, прискорені однаковою різницею потенціалів, влітають у плоский конденсатор паралельно його пластинам. В скільки разів відхилення протона полем конденсатора буде більше, ніж  $\alpha$ -частинки?
347. Відстань між пластинами плоского конденсатора  $4 \text{ см}$ . Електрон починає рухатися від негативної пластини в той момент, коли від позитивної пластини починає рухатися протон. На якій відстані від позитивної пластини вони зустрінуться?
348. Електрон, пройшовши в плоскому конденсаторі шлях від однієї пластини до другої, набуває швидкість  $10^6 \text{ м/с}$ . Знайти: 1) різницю потенціалів між пластинами; 2) напруженість електричного поля усередині конденсатора; 3) поверхневу густина заряду на пластинах.
349. Електрон летить від однієї пластини плоского конденсатора до другої. Різниця потенціалів між пластинами дорівнює  $3 \text{ кВ}$ , відстань між пластинами  $5 \text{ мм}$ . Знайти: 1) силу, що діє на електрон; 2) прискорення електрона; 3) швидкість електрона коло позитивної пластини; 4) поверхневу густина заряду на пластинах конденсатора.
350. Електрон з деякою початковою швидкістю влітає в плоский конденсатор паралельно його пластинам на рівній відстані від них. До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів  $300 \text{ В}$ . Відстань

- між пластинами  $2\text{ см}$ , довжина пластин конденсатора  $10\text{ см}$ . Яка повинна бути гранична швидкість електрона, щоб він не вилетів із конденсатора?
351. Електрон влітає в плоский горизонтальний конденсатор паралельно його пластинам із швидкістю  $9 \cdot 10^6\text{ м/с}$ . Знайти повне, нормальне і тангенціальне прискорення електрона через час  $10^{-8}\text{ с}$  після початку його руху в конденсаторі. Різниця потенціалів між пластинами дорівнює  $100\text{ В}$ , відстань між пластинами дорівнює  $1\text{ см}$ .
352. Протон влітає в плоский горизонтальний конденсатор паралельно його пластинам з швидкістю  $1,2 \cdot 10^5\text{ м/с}$ . Напруженість поля усередині конденсатора  $3\text{ кВ/м}$ , довжина пластин конденсатора  $10\text{ см}$ . В скільки разів швидкість протона при вильоті з конденсатора буде більше його початкової швидкості?
353. Порошинка масою  $1\text{ нг}$ , що несе на собі  $5$  електронів, влітає в горизонтальний плоский конденсатор довжиною  $10\text{ см}$  паралельно його пластинам на рівній відстані від них. Відстань між пластинами конденсатора  $2\text{ см}$ , різниця потенціалів між ними  $3\text{ кВ}$ . З якою граничною швидкістю повинна влетіти в конденсатор порошинка, щоб вона не вилетіла з нього?
354. Радіус внутрішньої кулі повітряного сферичного конденсатора  $1\text{ см}$ , радіус зовнішньої сфери  $4\text{ см}$ . Між ними прикладена різниця потенціалів  $3\text{ кВ}$ . Яку швидкість одержить електрон, наблизившись до центру системи з відстані  $3\text{ см}$  до відстані  $2\text{ см}$  від центру?
355. Металева куля радіусом  $3\text{ см}$  опущена наполовину в гас і заряджена до потенціалу  $1800\text{ В}$ . Визначити заряд, що знаходиться на ній, і ємність кулі.
356. Визначити ємність плоского конденсатора з площею обкладинок  $200\text{ см}^2$  кожна. Між обкладинками знаходиться скло (товщина  $1\text{ мм}$ ) покрите по обидва боки шарами парафіну (товщина кожного шару  $0,2\text{ мм}$ ).
357. Пробивна напруга для пресшпата товщиною в  $1\text{ мм}$  дорівнює  $18\text{ кВ}$ . Два конденсатори з ізолюючим шаром з такого матеріалу, один ємністю  $1100\text{ нФ}$ , другий –  $400\text{ нФ}$ , з'єднані послідовно. Чи буде ця батарея пробита, якщо подати на неї напругу  $30\text{ кВ}$ ?
358. Діелектрик пробивається при напруженості поля  $1,8\text{ МВ/м}$ . Два плоских конденсатора ємностями  $600\text{ нФ}$  і  $1500\text{ нФ}$  з ізолюючими шарами з цього діелектрика товщиною  $2\text{ мм}$  з'єднані послідовно. При якій напрузі буде пробита ця батарея?
359. Плоский конденсатор має ємність  $600\text{ нФ}$ . На скільки вона зміниться, якщо ввести між обкладинками паралельно їм мідний лист, товщина

- якого дорівнює  $\frac{1}{4}$  відстані між обкладками? Чи буде впливати на результат положення листа відносно пластин?
360. Два однакові повітряні конденсатори ємністю  $0,01 \text{ мкФ}$  з'єднані послідовно і підключені до джерела живлення з напругою  $10 \text{ В}$ . Знайти заряд, що протече по колу, якщо в простір між обкладками одного з конденсаторів увести діелектрик із діелектричною проникністю рівною 5.
361. Плоский конденсатор, пластини якого розташовані горизонтально, наполовину залили парафіном. Конденсатор заряджений до напруги  $300 \text{ В}$ . Визначити напруженість електричного поля, поверхневу густину заряду на обкладках і границі поділу діелектриків, густину енергії в обох частинах конденсатора, якщо відстань між пластинами дорівнює  $2 \text{ см}$ .
362. Плоский конденсатор, пластини якого розташовані вертикально, наполовину залили гасом. Конденсатор заряджений до напруги  $120 \text{ В}$ . Визначити напруженість електричного поля, поверхневу густину заряду на обкладках і густину енергії в обох частинах конденсатора, якщо відстань між пластинами дорівнює  $2 \text{ см}$ .
363. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнено двома шарами діелектриків: шаром скла товщиною  $1 \text{ см}$  і шаром парафіну товщиною  $2 \text{ см}$ . Різниця потенціалів між обкладками  $3 \text{ кВ}$ . Визначити напруженість поля і падіння потенціалу в кожному із шарів.
364. Яка напруженість електричного поля в повітряному зазорі плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів між пластинами  $200 \text{ В}$ ? Відстань між пластинами  $2 \text{ мм}$  і між ними знаходиться лист скла товщиною  $1 \text{ мм}$ .
365. Від позитивної пластини конденсатора під дією електричного поля одночасно починають рухатися протон і  $\alpha$  - частинка. На якій відстані від негативної пластини буде  $\alpha$  - частинка в той момент, коли протон досягне пластини, якщо відстань між пластинами  $2 \text{ см}$ ?
366. Дві кульки з масами  $3 \text{ г}$  і  $9 \text{ г}$ , що несуть на собі заряди  $8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$  і  $-2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ , рухаються назустріч одна одній під дією електричної сили притягання. Початкова відстань між ними  $0,2 \text{ м}$ , а початкові швидкості дорівнюють нулю. Визначити швидкості, які будуть мати кульки у ті моменти, коли відстань між ними буде дорівнювати  $0,08 \text{ м}$  (при зближенні та розльоті).
367. Визначити напруженість і потенціал електричного поля в центрі кільця з зовнішнім діаметром  $0,8 \text{ м}$  і внутрішнім діаметром  $0,4 \text{ м}$ , якщо на ньому рівномірно розподілений заряд  $6 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ .
368. Дві концентричні сферичні поверхні, що знаходяться у вакуумі, заряджені однаковою кількістю електрики  $3 \cdot 10^6 \text{ Кл}$ . Радіуси цих

- поверхонь  $1 \text{ м}$  і  $2 \text{ м}$ . Визначити енергію електричного поля, що міститься між цими сферами.
369. П'ять паралельно з'єднаних конденсаторів ємностями по  $0,1 \text{ мкФ}$  заряджаються до загальної різниці потенціалів  $30 \text{ кВ}$ . Визначити середню потужність розряду, якщо батарея розряджається за  $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ . Залишкова напруга дорівнює  $0,5 \text{ кВ}$ .
370. На відстані  $0,6 \text{ м}$  від точкового заряду  $10^{-8} \text{ Кл}$  розташована провідна куля радіусом  $0,1 \text{ м}$ , яка з'єднується з землею тонким довгим дротом. Визначити негативний заряд, що індукується на кулі. Впливом дроту знехтувати.
371. Дві тонкі концентричні металеві сфери радіусами  $0,5 \text{ м}$  і  $1 \text{ м}$  мають однакову поверхневу густину зарядів  $10^{-7} \text{ Кл/м}^2$ . Визначити потенціали на сферах і енергію такої системи.
372. Два одноіменних точкових зарядів  $10^{-8} \text{ Кл}$  і  $5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$  масами  $10^{-6} \text{ кг}$  і  $10^{-7} \text{ кг}$  рухаються назустріч один одному. В момент, коли відстань між зарядами дорівнює  $0,01 \text{ м}$  вони мають швидкості  $30 \text{ м/с}$  і  $60 \text{ м/с}$ . До якої мінімальної відстані наблизяться заряди?
373. По тонкому кільцю радіуса  $0,5 \text{ м}$  рівномірно розподілено заряд  $10^{-7} \text{ Кл}$ . Визначити швидкість негативного точкового заряду  $-5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$  в той момент, коли він проходить крізь центр кільця, якщо цей заряд спочатку знаходився у спокої в точці достатньо віддаленій від кільця на його осі. Маса точкового заряду дорівнює  $10^{-9} \text{ кг}$ . Кільце нерухоме.
374. Два плоских конденсатори ємностями  $12 \text{ нФ}$  і  $18 \text{ нФ}$  заряджені до різниці потенціалів  $8 \text{ кВ}$  і  $6 \text{ кВ}$  відповідно. Наскільки зменшиться їхня загальна електростатична енергія при паралельному з'єднанні?
375. Дві прямокутні пластини довжиною  $0,2 \text{ м}$  і площею  $100 \text{ см}^2$  розташовані паралельно одна одній на відстані  $1 \text{ см}$ . На пластині підтримується постійна різниця потенціалів  $3 \text{ кВ}$ . В простір між пластинами всувається діелектрик ( $\epsilon = 6$ ). Товщина діелектрика  $1 \text{ см}$ , ширина –  $0,2 \text{ м}$ , а довжина більша за довжину пластин. Знайти залежність сили, що діє на діелектрик з боку поля, від відстані, на яку він всувається між пластинами. Чому буде дорівнювати ця сила?
376. Металеву кульку радіусом  $2 \text{ см}$  підвісили на діелектричній нитці і надали їй заряд  $1,5 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ . Після цього на нитку нанизали другу кульку радіусом  $1 \text{ см}$  і масою  $0,1 \text{ г}$ . На яку висоту підніметься верхня кулька після торкання до нижньої кульки? Електростатичну індукцію не враховувати.
377. Площа кожної пластини плоского повітряного конденсатора  $0,1 \text{ м}^2$ , заряд  $10^{-6} \text{ Кл}$ . Пластини розташовані вертикально. До позитивної пластини на нитці прикріплено кульку масою  $1 \text{ г}$ , що несе на собі заряд  $10^{-9} \text{ Кл}$ . Визначити кут, що утворює нитка з вертикаллю.

378. Електрон, що має початкову швидкість  $2 \cdot 10^6$  м/с, рухається в однорідному полі плоского конденсатора в напрямку силових ліній. Яка різниця потенціалів на обкладках конденсатора, якщо електрон губить всю швидкість на шляху 3 см, а відстань між пластинами 5 см? Скільки часу рухається електрон до зупинки?
379. Маленьку металеву кульку масою 1 г, якій надано заряд  $3 \cdot 10^{-7}$  Кл, кидають здалека зі швидкістю 2 м/с в металеву сферу, заряджену зарядом  $10^{-6}$  Кл. При якому найменшому радіусі сфери кулька досягне її поверхні?
380. Визначити взаємну потенціальну енергію для системи, що складається з двох позитивних і двох негативних зарядів (кожний по  $10^{-7}$  Кл), які знаходяться в вершинах квадрата зі стороною 0,1 м. Розглянути всі можливі випадки розташування зарядів.

#### Контрольна робота №4 (постійний струм)

401. Визначити густину струму в мідному дроті довжиною 10 м, якщо різниця потенціалів на її кінцях дорівнює 1,2 В.
402. Два циліндричних провідники один із міді, а другий з алюмінію мають однакову довжину й однаковий опір. В скільки разів мідний провід важче алюмінієвого?
403. Котушка з мідного дроту має опір 10,8 Ом. Маса мідного дроту 3,41 кг. Скільки метрів дроту і якого діаметра намотано на котушці?
404. Яку напругу можна дати на котушку, що має 1000 витків мідного дроту, із середнім діаметром витків 6 см, якщо припустима густина струму  $6$  А/мм<sup>2</sup>?
405. В електронній лампі струм іде від металевого циліндра до натягнутої нитки, розташованої по його осі. Визначити густину струму поблизу нитки за таких умов: струм 3 А, довжина нитки і циліндра 2,5 см, діаметр нитки 0,002 см, діаметр циліндра 1 см.
406. Два дроти – мідний й алюмінієвий – мають однакову масу. Довжина мідного дроту в 10 разів більше довжини алюмінієвого. В скільки разів відрізняються їхні опори? Густина міді в 3,3 рази більше алюмінію, питомий опір у 1,65 разів менше.
407. По мідному дроту перетином  $1$  мм<sup>2</sup> протікає струм силою 10 А. Визначити середню швидкість упорядкованого руху електронів уздовж провідника, якщо вважати, що на кожний атом міді доводиться один електрон провідності.
408. Плоский конденсатор із пластинами квадратної форми розмірами  $21 \times 21$  см<sup>2</sup> і відстанню між пластинами 2 мм приєднаний до полюсів джерела струму з е.р.с. 750 В. У простір між пластинами з постійною



- швидкістю  $0,08$  м/с всувають скляну пластинку товщиною  $2$  мм. Який струм піде при цьому по колу? Діелектрична проникність скла дорівнює  $7$ .
409. З вертикально розташованого плоского конденсатора рівномірно витікає гас, яким був залитий конденсатор. При цьому в ланцюзі, що з'єднує конденсатор з батареєю акумуляторів у  $100$  В, тече струм  $2 \cdot 10^{11}$  А. З якою швидкістю знижується рівень гасу? Пластини конденсатора квадратні, площею  $100$  см<sup>2</sup>, відстань між ними  $1$  мм.
410. Із вертикально розташованого плоского конденсатора рівномірно витікає вода ( $\mathcal{E} = 81$ ), якою був залитий конденсатор. Швидкість, з якою знижується рівень рідини в конденсаторі дорівнює  $2$  м/с. Пластини конденсатора квадратні, їх площа дорівнює  $100$  см<sup>2</sup>, а відстань між ними  $1$  мм. Визначити силу струму в колі.
411. До мережі напругою  $120$  В приєднані два опори. При їхньому послідовному з'єднанні струм дорівнює  $3$  А, а при паралельному – сумарний струм дорівнює  $16$  А. Чому рівні ці опори?
412. Визначити відстань від станції до місця, на якому відбулося замикання двухпровідної лінії зв'язку з телефонного кабеля, що має опір  $66$  Ом на  $1$  км довжини, якщо виміри показали, що при напрузі на лінії  $10$  В сила струму дорівнює  $18$  мА.
413. Є два однакових елементи з е.р.с.  $2$  В и внутрішнім опором  $0,3$  Ом. Як треба з'єднати ці елементи (послідовно чи паралельно), щоб одержати максимальну силу струму, якщо: 1) зовнішній опір дорівнює  $0,2$  Ом; 2) зовнішній опір дорівнює  $16$  Ом?
414. Міліамперметр із шкалою від  $0$  до  $15$  мА має опір  $5$  Ом. Як повинний бути ввімкнутий прилад у комбінації з опорами (і якими) для виміру: 1) сили струму від  $0$  до  $0,15$  А; 2) різниці потенціалів від  $0$  до  $150$  В.
415. Вольтметром, призначеним для виміру різниці потенціалів до  $30$  В, потрібно вимірювати різниці потенціалів до  $75$  В. Який опір для цього треба взяти і як його ввімкнути? Внутрішній опір вольтметра  $2$  кОм, шкала його розділена на  $150$  поділок. Як зміниться ціна поділки вольтметра?
416. Амперметр з опором  $0,18$  Ом може вимірювати силу струму до  $10$  А. Шкала приладу розділена на  $100$  поділок. Який опір треба взяти і як його ввімкнути, щоб можна було вимірювати силу струму до  $100$  А? Як зміниться ціна поділки амперметра?
417. Два елементи, е.р.с. яких однакові і рівні  $2$  В, а внутрішні опори  $1$  і  $1,5$  Ом, з'єднані послідовно і замкнені на зовнішній опір  $0,5$  Ом. Знайти різницю потенціалів на затискачах кожного елемента.
418. Два елементи, е.р.с. яких однакові і рівні  $2$  В, а внутрішні опори  $1$  і  $1,5$  Ом, з'єднані між собою паралельно. До елементів приєднується

- зовнішній опір  $1,4 \text{ Ом}$ . Знайти силу струму в кожному з елементів і у всьому колі.
419. Котушка і амперметр з'єднані послідовно і приєднані до джерела струму. До клем котушки приєднаний вольтметр з опором  $2 \text{ кОм}$ . Амперметр показує струм  $0,25 \text{ А}$ , вольтметр – напругу  $100 \text{ В}$ . Визначити опір котушки. Скільки відсотків складе помилка, якщо при визначенні опора котушки не буде врахований опір вольтметра?
420. У мережу з напругою  $120 \text{ В}$  ввімкнули котушку з опором  $5 \text{ кОм}$  і вольтметр, з'єднані послідовно. Показання вольтметра  $80 \text{ В}$ . Коли котушку замінили іншою, вольтметр показав  $50 \text{ В}$ . Визначити опір іншої котушки.
421. Сила струму в провіднику рівномірно збільшується від нуля до деякого максимального значення протягом  $10 \text{ с}$ . За цей час у провіднику виділилася теплота  $1 \text{ кДж}$ . Визначити швидкість наростання струму в провіднику, якщо опір його дорівнює  $3 \text{ Ом}$ . Який заряд за цей час пройде по провіднику?
422. Сила струму в провіднику з опором  $12 \text{ Ом}$  рівномірно зменшується від  $5 \text{ А}$  до нуля протягом  $10 \text{ с}$ . Визначити теплоту, що виділилася в провіднику за цей проміжок часу і заряд, що пройшов по провіднику.
423. Сила струму в провіднику опором  $120 \text{ Ом}$  змінюється з часом за законом  $I=I_0 e^{-\alpha t}$ . Початкова сила струму  $10 \text{ А}$ ,  $\alpha=10^2 \text{ с}^{-1}$ . Визначити кількість електрики, що пройшла через провідник, і теплоту, що виділилася в провіднику за час  $10^2 \text{ с}$ .
424. По провіднику з опором  $3 \text{ Ом}$  тече рівномірно зростаючий струм. За час  $8 \text{ с}$  у провіднику виділилася теплота  $200 \text{ Дж}$ . Визначити заряд, що пройшов за цей час по провіднику. У момент часу, прийнятий за початковий, струм у провіднику дорівнював  $1 \text{ А}$ .
425. У провіднику за час  $10 \text{ с}$  при рівномірному зростанні струму від  $4$  до  $8 \text{ А}$  виділилася кількість теплоти  $20 \text{ кДж}$ . Знайти опір провідника.
426. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом  $I=I_0 \sin \alpha t$ . Знайти заряд, що протік через поперечний перетин провідника за половину періоду, якщо початкова сила струму  $5 \text{ А}$ , циклічна частота  $100 \cdot \pi \text{ с}^{-1}$ .
427. Струм у провіднику опором  $100 \text{ Ом}$  за час  $30 \text{ с}$  рівномірно зростає від нуля до  $10 \text{ А}$ . Визначити теплоту, що виділилася за цей час у провіднику.
428. Сила струму в провіднику змінюється з часом згідно рівнянню  $I=(4+2t) \text{ А}$ . 1) Яка кількість електрики проходить через поперечний перетин провідника за час від  $2 \text{ с}$  до  $6 \text{ с}$ ? 2) При якій силі постійного струму через поперечний перетин провідника за цей же час проходить така ж кількість електрики?

429. Сила струму в провіднику опором  $100 \text{ Ом}$  змінюється з часом за законом  $I=I_0 e^{-\alpha t}$ . Початкова сила струму  $10 \text{ А}$ ,  $\alpha=10^3 \text{ с}^{-1}$ . Визначити теплоту, що виділилася в провіднику за час  $10^3 \text{ с}$ .
430. Струм у провіднику опором  $15 \text{ Ом}$  за час  $5 \text{ с}$  рівномірно зростає від нуля до деякого максимуму. За цей час виділилася теплота  $10 \text{ кДж}$ . Визначити середнє значення сили струму в провіднику за цей проміжок часу.
431. Лампа розжарювання споживає струм силою  $0,5 \text{ А}$ . Температура розжарювання вольфрамової нитки лампи діаметром  $0,1 \text{ мм}$  дорівнює  $2200 \text{ }^\circ\text{C}$ . Струм підводиться мідним проводом перетином  $5 \text{ мм}^2$  ( $t=20 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Визначити напруженість електричного поля в міді і вольфрамі (питомі опори міді і вольфраму при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  відповідно  $\rho_1=1,56 \cdot 10^8 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\rho_2=4,9 \cdot 10^8 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ , температурні коефіцієнти опору міді і вольфраму:  $\alpha_1=4,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_2=4,8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ )
432. Опір вольфрамової нитки електричної лампочки при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  дорівнює  $35,8 \text{ Ом}$ . Яка буде температура нитки лампочки, якщо при включенні в мережу напругою  $120 \text{ В}$  по нитці йде струм  $0,33 \text{ А}$ ? Температурний коефіцієнт опору вольфраму дорівнює  $4,8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .
433. Знайти, у скільки разів зміниться сила струму, що проходить через платинову обмотку печі, при нагріванні печі від  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $1200 \text{ }^\circ\text{C}$ , якщо температурний коефіцієнт опору платини  $3,92 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , а напруга на затискачах кола залишається незмінною.
434. Обмотка електромагніта зроблена з мідного проводу і при температурі  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  має опір  $14,2 \text{ Ом}$ . У процесі роботи опір обмотки підвищився до  $16,5 \text{ Ом}$ . Яка при цьому температура обмотки?
435. Визначити температурний коефіцієнт проводу, складеного з алюмінієвого дроту з опором  $3 \text{ Ом}$  і залізного дроту з опором  $2 \text{ Ом}$ , з'єднаних послідовно. ( $\alpha_1=4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_2=6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ).
436. Різниця потенціалів на кінцях дроту довжиною  $5 \text{ м}$  дорівнює  $4,2 \text{ В}$ . Визначити густину струму в дроті при температурі  $120 \text{ }^\circ\text{C}$ , якщо її питомий опір і температурний коефіцієнт опору рівні відповідно  $2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом}\cdot\text{м}$  і  $6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .
437. Вугільний стрижень послідовно з'єднаний із залізним стрижнем такого ж перетину. При якому співвідношенні довжин опір цієї системи не залежить від температури? Температурні коефіцієнти опору вугілля і заліза рівні відповідно  $8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  і  $6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , а їхні питомі опори при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  становлять  $4 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}\cdot\text{м}$  і  $8,9 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .
438. Чи можна виявити різницю в опорі залізного проводу, якщо температура в приміщенні знизилася від  $30$  до  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Похибку при вимірі опорів вважати не більшою за  $1\%$ . ( $\alpha=6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ).

439. Електрична лампа розжарювання споживає струм силою  $0,2 \text{ А}$ . Діаметр вольфрамової волосинки  $20 \text{ мкм}$ , температура волосинки при горінні лампи  $2000 \text{ }^\circ\text{C}$ . Визначити напруженість електричного поля у волосинці.
440. Реостат із залізного дроту, міліамперметр і генератор струму ввімкнуті послідовно. Опір реостата при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  дорівнює  $120 \text{ Ом}$ , опір міліамперметра  $20 \text{ Ом}$ . Міліамперметр показує  $22 \text{ мА}$ . Що буде показувати міліамперметр, якщо реостат нагріється на  $50^\circ$ ? Температурний коефіцієнт опору заліза  $6,5 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ . Опором генератора знехтувати.
441. Акумулятор з е.р.с.  $10 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $1 \text{ Ом}$  замкнений на зовнішній опір  $R$  і виділяє на ньому потужність  $9 \text{ Вт}$ . Визначити різницю потенціалів на клеммах акумулятора, струм у колі й опір  $R$ .
442. Електричний кип'ятильник має три обмотки. Якщо з'єднати дві обмотки паралельно, підключивши до них третю послідовно, то при різних комбінаціях обмоток вода в баку буде закипати відповідно за  $20$ ,  $40$  і  $16$  хвилин. За скільки часу закипить вода, якщо всі обмотки з'єднати послідовно або паралельно?
443. Різниця потенціалів між двома точками дорівнює  $9 \text{ В}$ . Є два резистори з опорами  $5 \text{ Ом}$  і  $3 \text{ Ом}$ . Знайти кількість тепла, що виділяється в кожному з резисторів за  $1$  хвилину, якщо резистори вмикаються між цими точками: 1) послідовно, 2) паралельно.
444. В схемі (1) опір  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ , потужність, що виділяється на цьому опорі дорівнює  $16 \text{ Вт}$ . К.К.Д. джерела струму  $80\%$ . Визначити е.р.с. джерела струму, якщо відомо, що падіння потенціалу на опорі  $R_3$  дорівнює  $40 \text{ В}$ .
445. В схемі (1) е.р.с. батареї дорівнює  $120 \text{ В}$ , внутрішній опір  $4 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$ . Визначити потужність, що виділяється на опорі  $R_1$  і К.К.Д. джерела струму.
446. Елемент, е.р.с. якого  $\mathcal{E}$  і внутрішній опір  $r$ , замкнена на зовнішній опір  $R$ . Найбільша потужність в зовнішній частині кола дорівнює  $9 \text{ Вт}$ . Сила струму за цих умов дорівнює  $3 \text{ А}$ . Визначити  $\mathcal{E}$  і  $r$ .
447. Елемент, е.р.с. якого дорівнює  $6 \text{ В}$ , дає максимальну силу струму  $3 \text{ А}$ . Знайти найбільшу кількість тепла, яка може виділитись на зовнішньому резисторі за  $1$  хвилину.
448. Е.р.с. батареї  $60 \text{ В}$ , внутрішній опір  $4 \text{ Ом}$ . Зовнішня частина кола споживає потужність  $125 \text{ Вт}$ . Визначити силу струму в колі, напругу під якою знаходиться зовнішня частина кола та її опір
449. Батарея складається з п'яти послідовно з'єднаних елементів з е.р.с.  $1,4 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $0,3 \text{ Ом}$  кожний. При якому струмі корисна потужність батареї  $8 \text{ Вт}$ ? Якою буде максимальна потужність батареї?

450. Чому дорівнює внутрішній опір та е.р.с. генератора, якщо відомо, що потужність, яка виділяється на зовнішній частині кола, однакова при двох значеннях зовнішнього опору:  $5 \text{ Ом}$  і  $0,2 \text{ Ом}$ . Вона дорівнює  $5 \text{ Вт}$ . Знайти К.К.Д. генератора в кожному з цих випадків.
451. Визначити показання міліамперметра в схемі (8), якщо  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ В}$ ,  $r_1 = r_2 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ . Опір міліамперметра дорівнює  $3 \text{ Ом}$ .
452. В схемі (2)  $\mathcal{E}_1 = 2 \mathcal{E}_2$ ,  $R_1 = R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 30 \text{ Ом}$ . Амперметр показує  $1,5 \text{ А}$ . Визначити величини е.р.с., а також сили струмів, що протікають в опорах  $R_2$  і  $R_3$ . Опір батарей і амперметра не враховувати.
453. В схемі (3)  $\mathcal{E}_1$  і  $\mathcal{E}_2$ , два однакових елемента з е.р.с.  $2 \text{ В}$  і внутрішніми опорами  $r_1 = 0,5 \text{ Ом}$  і  $r_2 = 1 \text{ Ом}$ . Опори  $R_1 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1,5 \text{ Ом}$ . Зайти струми, що протікають у всіх гілках кола.
454. Дві батареї з'єднані, як показано на схемі (4). Визначити силу струму в батареях, якщо  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ В}$ ,  $r_1 = 1 \text{ Ом}$  і  $r_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R = 6 \text{ Ом}$ .
455. Визначити силу струму в кожній гільці схеми (5), якщо  $\mathcal{E}_1 = 4 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 3 \text{ В}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 1 \text{ Ом}$ . Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.
456. Визначити силу струму в кожній гільці схеми (6), якщо  $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ В}$ ,  $r_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 1 \text{ Ом}$  і  $r_4 = 2 \text{ Ом}$ . Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.
457. Резистор з опором  $4 \text{ Ом}$  підключено до двох паралельно з'єднаних джерел струму з е.р.с.  $2,2 \text{ В}$  і  $1,4 \text{ В}$  і внутрішніми опорами  $0,6 \text{ Ом}$  і  $0,4 \text{ Ом}$ . Визначити силу струму в резисторі і напругу на затискачах другого джерела струму.
458. Визначити падіння потенціалу на опорі  $R_2$  в схемі (5), якщо  $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$ ,  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ . Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.
459. Три опори  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ , а також джерело струму з е.р.с.  $1,4 \text{ В}$  з'єднані, як показано на схемі (7). Визначити е.р.с. джерела, яке треба підключити в схему між точками А і В, щоб в опорі  $R_3$  протікав струм силою  $1 \text{ А}$  в напрямку, що показаний стрілкою. Опором джерел струму знехтувати.
460. Два джерела струму з е.р.с.  $14 \text{ В}$  і  $6 \text{ В}$  і внутрішніми опорами  $2 \text{ Ом}$  і  $4 \text{ Ом}$  відповідно, з'єднані паралельно. До них підключено опір навантаження, який дорівнює  $1 \text{ Ом}$ . Визначити сили струмів у всіх ділянках схеми.

## Схеми до контрольної роботи №4

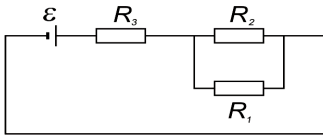


Схема 1

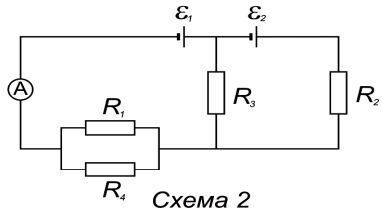


Схема 2

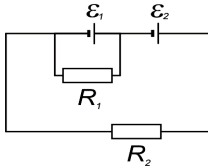


Схема 3

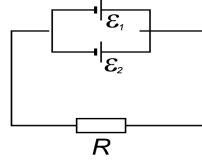


Схема 4

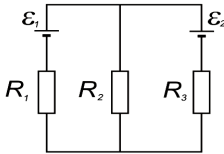


Схема 5

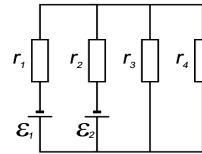


Схема 6

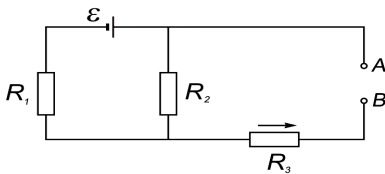


Схема 7

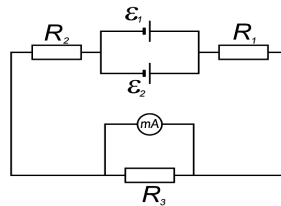


Схема 8

## 7. МАГНЕТИЗМ

### 7. 1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

#### 7.1.1. Природа магнетизму. Магнітна індукція. Магнітна взаємодія струмів

Магнітні явища були відомі ще в стародавньому світі. Компас був винайдений більше 4500 років тому. У Європі він з'явився приблизно в XII столітті нової ери. Проте тільки в XIX столітті був виявлений зв'язок між електрикою і магнетизмом і виникло уявлення про *магнітне поле*.

Першими експериментами (проведені в 1820 р.), які показали, що між електричними і магнітними явищами є глибокий зв'язок, були досліди данського фізика Х. Ерстеда. Ці досліди показали, що на магнітну стрілку, розташовану поблизу провідника зі струмом, діють сили, які намагаються її повернути. У тому ж році французький фізик Л. Ампер спостерігав силову взаємодію двох провідників із струмами і встановив закон взаємодії струмів.

За сучасними уявленнями, провідники зі струмом взаємодіють не безпосередньо, а через магнітні поля, що їх оточують.

Джерелами магнітного поля є **рухомі** електричні заряди (струми). Магнітне поле виникає в просторі, що оточує провідники із струмом, подібно до того, як в просторі, що оточує нерухомі електричні заряди, виникає електричне поле. Магнітне поле постійних магнітів також створюється електричними мікрострумами, циркулюючими всередині молекул речовини (гіпотеза Ампера).

Вчені XIX століття намагалися створити теорію магнітного поля по аналогії з електростатикою, для цього вони ввели таке поняття як **магнітні заряди** двох знаків (наприклад, північний  $N$  і південний  $S$  полюси магнітної стрілки). Проте сучасні дослідження показують, що ізольованих магнітних зарядів не існує.

Магнітне поле струмів принципово відрізняється від електричного поля. Магнітне поле, на відміну від електричного, діє **тільки** на рухомі заряди (струми).

Для опису магнітного поля необхідно ввести силову характеристику поля, аналогічну вектору напруженості  $\vec{E}$  електричного поля. Такою характеристикою є **вектор магнітної індукції**  $\vec{B}$ , який визначає сили, що діють на струми або рухомі заряди в магнітному полі.

За позитивний **напрямок вектора**  $\vec{B}$  приймається напрямок від південного полюса  $S$  до північного полюса  $N$  магнітної стрілки, що вільно орієнтується в магнітному полі. Таким чином, досліджуючи магнітне поле,

що створюється струмом або постійним магнітом, за допомогою маленької магнітної стрілки, можна в кожній точці простору визначити напрямок вектора  $\vec{B}$ . Таке дослідження дозволяє наочно уявити просторову структуру магнітного поля. Аналогічно **силовим лініям** в електростатиці можна побудувати **лінії магнітної індукції**, в кожній точці яких вектор  $\vec{B}$  є спрямованим по дотичній. Приклад ліній магнітної індукції полів постійного магніту і котушки із струмом приведений на рис. 7.1.

Зверніть увагу на аналогію магнітних полів постійного магніта і котушки зі струмом. Лінії магнітної індукції завжди замкнені, вони ніде не обриваються. Це означає, що магнітне поле не має джерел – магнітних зарядів. Фізичні поля, що мають таку властивість, називаються **вихровими**. Картину магнітної індукції можна спостерігати за допомогою дрібної залізної тирси, яка в магнітному полі намагнічується і, подібно до маленьких магнітних стрілок, орієнтуються вздовж ліній індукції.

На рис. 7.1 зображені лінії магнітної індукції полів постійного магніта і котушки зі струмом. Індикаторні магнітні стрілки орієнтуються за напрямом дотичних до ліній індукції.

Для того, щоб кількісно описати магнітне поле, потрібно вказати спосіб визначення не тільки напрямку вектора  $\vec{B}$ , але і його модуля. Найпростіше це зробити, вносячи до досліджуваного магнітного поля провідник із струмом і вимірюючи силу, що діє на окрему прямолінійну ділянку цього провідника. Ця ділянка провідника повинна мати довжину  $\Delta l$ , достатньо малу в порівнянні з розмірами областей неоднорідності магнітного поля. Як показали досліди Ампера, сила, що діє на ділянку провідника, пропорційна силі струму  $I$ , довжині  $\Delta l$  цієї ділянки і синусу кута  $\alpha$  між напрямом струму і вектора магнітної індукції:

$$F \sim I\Delta l \sin \alpha$$

Ця сила називається **силою Ампера**. Вона досягає максимального за модулем значення  $F_{\max}$ , коли провідник із струмом орієнтований перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Для модуля вектора  $\vec{B}$  можна дати таке визначення:

**Модуль вектора магнітної індукції дорівнює відношенню максимального значення сили Ампера, що діє на прямий провідник із струмом, до сили струму  $I$  в провіднику і його довжині  $\Delta l$ :**

$$B = \frac{F_{\max}}{I\Delta l}$$

У загальному випадку сила Ампера визначається співвідношенням:

$$F = IB\Delta l \sin \alpha$$



Це співвідношення прийнято називати *законом Ампера*.

У системі одиниць СІ за одиницю магнітної індукції прийнята індукція такого магнітного поля, в якому на кожен метр довжини провідника при силі струму  $1\text{ А}$  діє максимальна сила Ампера  $1\text{ Н}$ . Ця одиниця називається *тесла* ( $\text{Тл}$ ).

$$1\text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$$

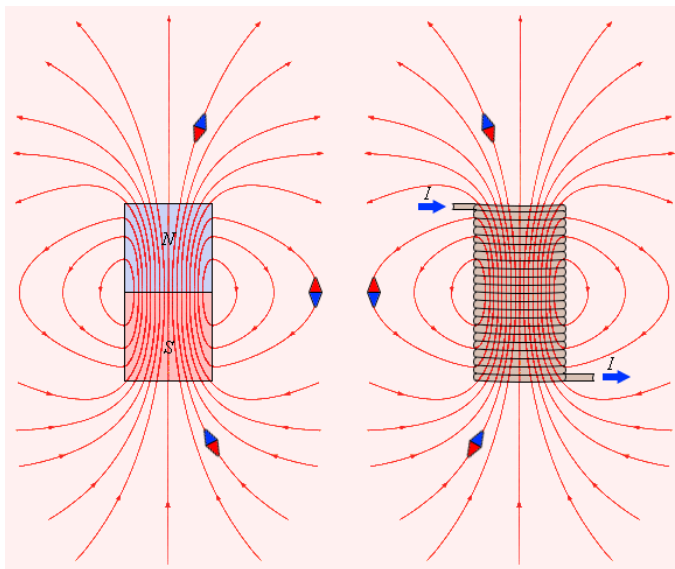


Рис. 7.1

Тесла – дуже велика одиниця. Індукція магнітного поля Землі приблизно дорівнює  $0,5 \cdot 10^{-4}\text{ Тл}$ . Великий лабораторний електромагніт може створити поле не більше  $5\text{ Тл}$ .

Сила Ампера спрямована перпендикулярно до вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  і напрямку струму, що тече по провідникові. Для визначення напрямку сили Ампера зазвичай використовують *правило лівої руки*: якщо розташувати ліву руку так, щоб лінії індукції  $\vec{B}$  входили в долоню, а витягнуті пальці були спрямовані вздовж струму, то відведений великий палець вкаже напрямок сили, що діє на провідник (рис. 7.2).

Якщо кут  $\alpha$  між напрямками вектора  $\vec{B}$  і струму в провіднику відмінний від  $90^\circ$ , то для визначення напрямку сили Ампера  $\vec{F}$  зручніше

користуватися **правилом свердлика**: уявний свердлик розташовується перпендикулярно площині, в якій лежить вектор  $\vec{B}$  і провідник із струмом, потім його рукоятка повертається від напрямку струму до напрямку вектора  $\vec{B}$ . Поступальне переміщення свердлика показуватиме напрям сили Ампера  $\vec{F}$  (рис. 7.2). Правило свердлика часто називають **правилом правого гвинта**.

Одним з важливих прикладів магнітної взаємодії є взаємодія паралельних струмів. Закономірності цього явища були експериментально встановлені **Ампером**. Якщо по двох паралельних провідниках електричні струми течуть в один і той же бік, то спостерігається взаємне тяжіння провідників. У разі, коли струми течуть в протилежних напрямках, провідники відштовхуються.

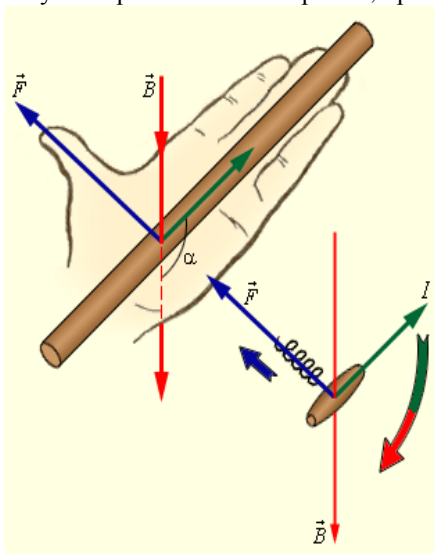


Рис. 7.2

$\mu_0$  – постійна величина, яку називають **магнітною сталюю**. Введення магнітної постійної в СІ спрощує запис ряду формул. Її чисельне значення дорівнює

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Н/А}^2$$

Формула, що визначає закон магнітної взаємодії паралельних струмів, приймає вигляд:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 \Delta l}{R}$$

**Взаємодія струмів викликається їх магнітними полями: магнітне поле одного струму діє силою Ампера на інший струм і навпаки.**

Досліди показали, що модуль сили, що діє на відрізок довжиною  $\Delta l$  кожного з провідників, прямо пропорційний силам струму  $I_1$  і  $I_2$  в провідниках, довжині відрізка  $\Delta l$  і обернено пропорційний відстані  $R$  між ними.

У Міжнародній системі одиниць СІ коефіцієнт пропорційності  $k$  має вигляд:

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

Звідси неважко отримати вираз для індукції магнітного поля кожного з прямолінійних провідників. Магнітне поле прямолінійного провідника із струмом повинне мати осьову симетрію і, отже, замкнені лінії магнітної індукції можуть бути тільки концентричними колами, розташованими в площинах, перпендикулярних провідникові. Це означає, що вектори  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$  магнітної індукції паралельних струмів  $I_1$  і  $I_2$  лежать в площині, перпендикулярній обоим струмам. Тому при обчисленні сил Ампера, що діють на провідники зі струмом, в законі Ампера потрібно покласти  $\sin \alpha = 1$ . З формули для сили магнітної взаємодії паралельних струмів виходить, що модуль індукції  $B$  магнітного поля прямолінійного провідника з струмом  $I$  на відстані  $R$  від нього визначається співвідношенням:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}.$$

Для того, щоб при магнітній взаємодії паралельні струми притягувалися, а антипаралельні відштовхувалися, лінії магнітної індукції поля прямолінійного провідника повинні бути направлені за годинниковою стрілкою, якщо дивитися вздовж провідника за напрямом струму. Для визначення напрямку вектора  $\vec{B}$  магнітного поля прямолінійного провідника також можна користуватися правилом свердлика: напрям обертання рукоятки свердлика співпадає з напрямом вектора  $\vec{B}$ , якщо при обертанні свердлик переміщується у напрямі струму (рис. 7.3).

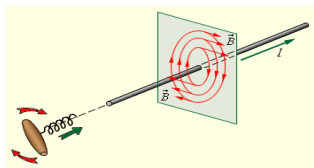


Рис. 7.3

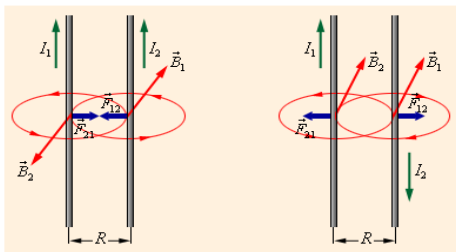


Рис. 7.4

Рис. 7.4 пояснює закон взаємодії паралельних струмів.

Магнітна взаємодія паралельних провідників із струмом використовується в Міжнародній системі одиниць (СІ) для визначення одиниці сили струму – ампера.

**Ампер** – сила постійного струму, який при проходженні по двох паралельних провідниках нескінченної довжини і нескінченно малого

колового перетину, які розташовані на відстані 1 м один від одного у вакуумі, викликав би між цими провідниками силу магнітної взаємодії, що дорівнює  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на кожен метр довжини.

### 7.1.2. Закон Біо – Савара – Лапласа. Теорема про циркуляцію

Магнітне поле постійних струмів різної конфігурації вивчалось експериментально французькими ученими Ж. Біо і Ф. Саваром (1820 р.). Вони прийшли до висновку, що індукція магнітного поля струмів, що течуть по провідникові, визначається сумісною дією всіх окремих ділянок провідника. Для магнітного поля є справедливим **принцип суперпозиції**:

**Якщо магнітне поле створюється декількома провідниками зі струмом, то індукція результуючого поля є векторна сума індукцій полів, що створюються кожним провідником окремо.**

Індукцію  $\vec{B}$  провідника з струмом можна розглядати як векторну суму елементарних індукцій  $\Delta\vec{B}$ , що створюються окремими ділянками провідника. Практично неможливо виділити окрему ділянку провідника з струмом, оскільки постійні струми завжди замкнені. Можна виміряти тільки сумарну індукцію магнітного поля, що створюється всіма елементами струму. **Закон Біо – Савара – Лапласа** визначає внесок  $\Delta\vec{B}$ , створюваний малою ділянкою  $\Delta l$ , у магнітну індукцію  $\vec{B}$  результуючого магнітного поля провідника з струмом  $I$ .

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi R^2}$$

Тут  $r$  – відстань від даної ділянки  $\Delta l$  до точки спостереження,  $\alpha$  – кут між напрямком на точку спостереження і напрямком струму на даній ділянці,  $\mu_0$  – магнітна стала. Напрямок вектора  $\Delta\vec{B}$  визначається правилом свердлика: він співпадає з напрямком обертання рукоятки свердлика при його поступальному переміщенні вздовж струму. Рис. 7.5 ілюструє закон Біо – Савара – Лапласа на прикладі магнітного поля прямолінійного провідника з струмом. Якщо підсумувати (проінтегрувати) внески в магнітне поле всіх окремих ділянок прямолінійного провідника зі струмом, то вийде формула для магнітної індукції поля прямого струму:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Закон Біо – Савара – Лапласа дозволяє розраховувати магнітні поля струмів різних конфігурацій. Легко, наприклад, виконати – магнітного поля в центрі колового витка з струмом. Цей розрахунок призводить до

формули:  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ , де  $R$  – радіус колового провідника.

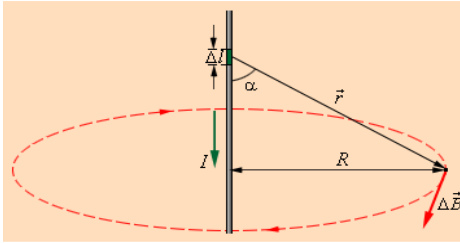


Рис. 7.5

Для визначення напрямку вектора  $\vec{B}$  також можна використовувати правило свердлика, тільки тепер його рукоятку потрібно обернути у напрямі колового струму, а поступальне переміщення свердлика вкаже напрямком вектора магнітної індукції.

Розрахунки магнітного поля часто спрощуються при урахуванні симетрії в конфігурації струмів, що створюють поле. В цьому випадку можна користуватися **теоремою про циркуляцію вектора магнітної індукції**, яка в теорії магнітного поля струмів грає ту ж роль, що і теорема Гаусса в електростатиці.

Пояснимо поняття циркуляції вектора  $\vec{B}$ . Нехай в просторі, де створено магнітне поле, вибрано деякий умовний замкнений контур (не обов'язково плоский) і

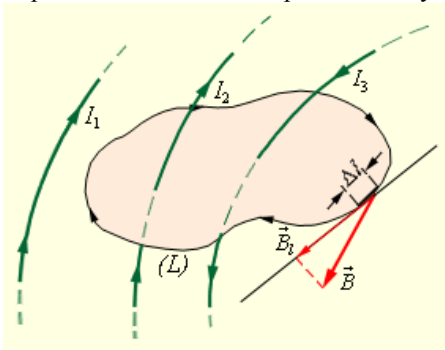


Рис. 7.6

вказаний позитивний напрям його обходу. На кожній окремій малій ділянці  $\Delta l$  цього контура можна визначити дотичну складову  $B_t$  вектора  $\vec{B}$  у даному місці, тобто визначити проекцію вектора  $\vec{B}$  на напрямок дотичної до даної ділянки контура (рис. 7.6).

Циркуляцією вектора  $\vec{B}$  називають наступний інтеграл, що береться по всьому контуру  $L$ :

$$\oint B_t dl$$

Деякі струми, що створюють магнітне поле, можуть пронизувати вибраний контур  $L$  в той час, як інші струми можуть знаходитися в стороні від контура.

Теорема про циркуляцію стверджує, що циркуляція вектора  $\vec{B}$  магнітного поля постійних струмів по будь-якому контуру  $L$  завжди дорівнює добутку магнітної сталої  $\mu_0$  на суму всіх струмів, що пронизують контур:

$$\oint B_t dl = \mu_0 \sum_i I_i$$

Як приклад на рис. 7.6 зображено декілька провідників з струмами, що створюють магнітне поле. Струми  $I_2$  і  $I_3$  пронизують контур  $L$  в протилежних напрямках, їм повинні бути приписані різні знаки – позитивними вважаються струми, які пов'язані з вибраним напрямком обходу контура правилом правого гвинта (свердлика). Отже,  $I_3 > 0$ , а  $I_2 < 0$ . Струм  $I_1$  не пронизує контур  $L$ .

Теорема про циркуляцію в даному прикладі визначається співвідношенням:

$$\oint B_l dl = \mu_0 (I_3 - I_2)$$

Теорема про циркуляцію в загальному вигляді є слідством закону Біо – Савара – Лапласа і принципу суперпозиції.

Простим прикладом застосування теореми про циркуляцію є одержання формули для магнітної індукції поля прямолінійного провідника зі струмом. Враховуючи симетрію в даному випадку, контур  $L$  доцільно вибрати у вигляді кола деякого радіусу  $R$ , що знаходиться в перпендикулярній до провідника площині. Центр кола знаходиться в деякій точці провідника. Через симетрію вектор  $\vec{B}$  спрямований по дотичній ( $B_l = B$ ). А його модуль однаковий в усіх точках кола. Застосування теореми про циркуляцію приводить до співвідношення:

$$\oint B_l dl = 2\pi R B = \mu_0 I,$$

а магнітна індукція прямолінійного провідника з струмом дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

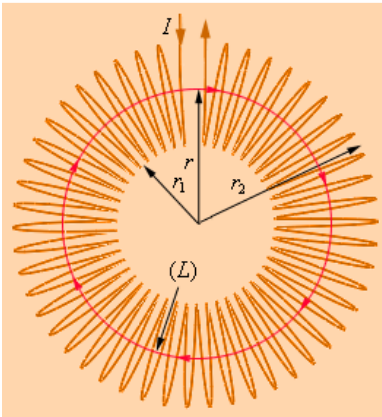


Рис. 7.7

Цей приклад показує, що теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  може бути використана для розрахунку магнітних полів, що створюються струмами, розташування яких в просторі є симетричним. Є достатньо практично важливих прикладів розрахунку магнітних полів за допомогою теореми про циркуляцію. Одним з таких прикладів є обчислення поля тороїдальної котушки (рис. 7.7).

Передбачається, що котушка щільно, тобто виток до витка,

намотана на немагнітне тороїдальне осердя. У такій котушці лінії магнітної індукції замикаються всередині котушки і мають вигляд концентричних кіл. Вони спрямовані так, що дивлячись вздовж них, ми побачили б струм у витках, циркулюючим за годинниковою стрілкою. Одна з ліній індукції деякого радіусу  $r_1 < r < r_2$  зображена на рис. 7.7. Застосуємо теорему про циркуляцію до контура  $L$ , що має форму кола, співпадаючого із зображеною на рис. 7.7 лінією індукції магнітного поля. З міркувань симетрії ясно, що модуль вектора  $\vec{B}$  однаковий вздовж всієї цієї лінії. За теоремою про циркуляцію можна записати:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN$$

де  $N$  – повне число витків, а  $I$  – струм, що тече по витках котушки. Отже:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi \cdot r}$$

Таким чином, модуль вектора магнітної індукції в тороїдальній котушці залежить від радіусу  $r$ . Якщо сердечник котушки тонкий, тобто  $r_2 - r_1 \ll r$ , то магнітне поле всередині котушки практично однорідне. Величина  $n = NI/2\pi \cdot r$  є числом витків на одиницю довжини котушки. В цьому випадку:

$$B = \mu_0 In$$

В цей вираз не входить радіус тора, тому воно справедливе і в граничному випадку  $r \rightarrow \infty$ . Тобто кожен частину тороїдальної котушки можна розглядати як довгу прямолінійну котушку. Такі котушки називають *соленоїдами*. Далеко від торців соленоїда модуль магнітної індукції визначається за тим же співвідношенням, що і у разі тороїдальної котушки.

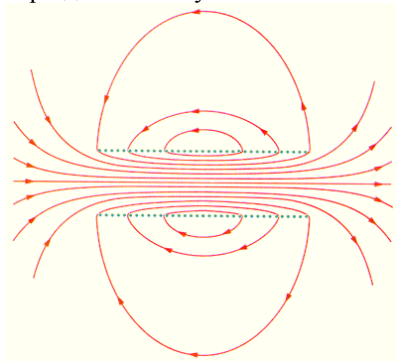


Рис. 7.8

На рис. 7.8 зображено магнітне поле котушки кінцевої довжини. Слід звернути увагу на те, що в центральній частині котушки магнітне поле практично однорідне і значно сильніше, ніж поза котушкою. На це вказує густина ліній магнітної індукції. У граничному випадку нескінченно довгого соленоїда однорідне магнітне поле цілком зосереджене всередині нього.

У разі нескінченного довгого соленоїда формулу для знаходження модуля магнітної індукції можна отримати безпосередньо за допомогою теореми про циркуляцію, застосувавши її до прямокутного контура, показаного на рис. 7.9.

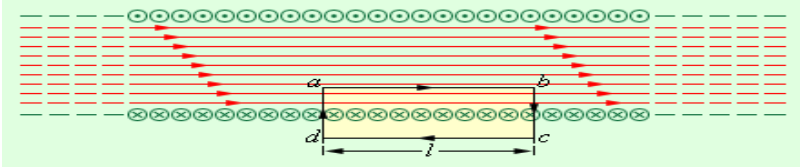


Рис. 7.9

Вектор магнітної індукції має відмінну від нуля проекцію на напрямок обходу контура  $abcd$  тільки на стороні  $ab$  (рис. 7.9) Отже, циркуляція вектора  $\vec{B}$  по контуру дорівнює  $Bl$ , де  $l$  – довжина сторони  $ab$ . Число витків соленоїда, що пронизують контур  $abcd$ , дорівнює  $n \cdot l$ , де  $n$  – число витків на одиницю довжини соленоїда, а повний струм, що пронизує контур, дорівнює  $Inl$ . Згідно з теоремою про циркуляцію:  $Bl = \mu_0 Inl$ ,

Звідки

$$B = \mu_0 In$$

Цей вираз співпадає з отриманою раніше формулою для магнітного поля тонкої тороїдальної котушки.

### 7.1.3. Сила Лоренца. Рух заряджених частинок у магнітному полі

Сила Ампера, що діє на відрізок провідника довжиною  $\Delta l$  з силою струму  $I$ , який знаходиться в магнітному полі  $\vec{B}$ :

$$F = IB\Delta l \sin \alpha$$

може бути знайдена за допомогою сил, що діють на окремі носії заряду.

Нехай концентрація носіїв вільного заряду в провіднику є  $n$ , а  $q$  – заряд носія. Тоді добуток  $nqvS$ , де  $v$  – модуль швидкості впорядкованого руху носіїв по провідникові, а  $S$  – площа поперечного перетину провідника, дорівнює струму, що тече по провідникові:  $I = qnvS$

Силу Ампера можна записати у вигляді:  $F = qnS\Delta l v \sin \alpha$

Оскільки повне число  $N$  носіїв вільного заряду в провіднику довжиною  $\Delta l$  і перетином  $S$  дорівнює  $nS\Delta l$ , то сила, що діє на одну заряджену частинку, дорівнює:  $F_{\Delta l} = qvB \sin \alpha$

Силу  $F_{\Delta l}$  називають силою Лоренца. В цьому співвідношенні  $\alpha$  – це кут між швидкістю  $v$  і вектором магнітної індукції  $\vec{B}$ . Напрямок сили Лоренца, що діє позитивно на заряджену частинку, так само, як і



напрям сили Ампера, може бути знайдений за **правилом** лівої руки або за **правилом свердлика**.

Сила Лоренца спрямована перпендикулярно векторам  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$  (рис. 7.10).

**При русі зарядженої частинки в магнітному полі сила Лоренца роботи не здійснює.** Тому модуль вектора швидкості при русі частинки не змінюється.

Якщо заряджена частинка рухається в однорідному магнітному полі під дією сили Лоренца, а її швидкість  $\vec{v}$  лежить в площині, перпендикулярній вектору  $\vec{B}$ , то частинка рухатиметься по колу радіусу

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Сила Лоренца в цьому випадку грає роль доцентрової сили (рис. 7.11). Період обертання частинки в однорідному магнітному полі дорівнює:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

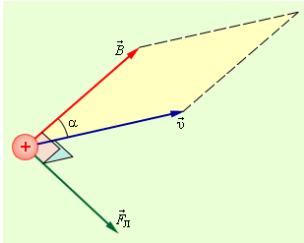


Рис. 7.10

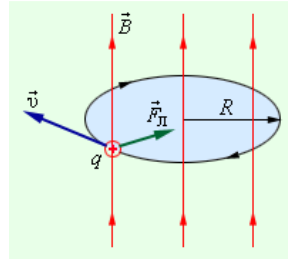


Рис. 7.11

Цей вираз показує, що для заряджених частинок заданої маси  $m$  період обертання не залежить від швидкості  $v$  і радіусу траєкторії  $R$ .

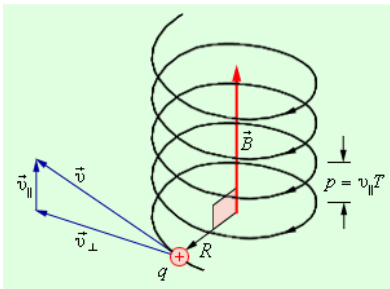


Рис.7.12

Якщо швидкість частинки  $\vec{v}$  має складову  $v_{\parallel}$  вздовж напрямку магнітного поля, то така частинка рухатиметься в однорідному магнітному полі по гвинтовій лінії. При цьому радіус гвинтової лінії залежить від модуля перпендикулярної магнітному полю складової  $v_{\perp}$  вектора  $\vec{v}$ , а крок гвинтової лінії  $p$  – від модуля подовжньої складової  $v_{\parallel}$  (рис. 7.12).

$$v_{\perp} = v \sin \alpha \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha$$

де  $\alpha$  - кут між напрямками швидкості і магнітного поля. Період обертання частинки залишиться таким, як і при прямому куті  $\alpha$ , а радіус і крок гвинтової лінії  $p$  визначаються так:

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, \quad p = T v \cos \alpha = \frac{2\pi \cdot m v \cos \alpha}{qB}$$

Таким чином, траєкторія зарядженої частинки як би навивається на лінії магнітної індукції. Це явище використовується в техніці для **магнітної термоізоляції високотемпературної плазми**.

## 7.2. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

Експериментальні дослідження показали, що всі речовини більшою чи меншою мірою мають магнітні властивості. Якщо два витки з струмами вмістити в яке-небудь середовище, то сила магнітної взаємодії між струмами змінюється. Цей дослід показує, що індукція магнітного поля, що створюється електричними струмами в речовині, відрізняється від індукції магнітного поля, що створюється тими ж струмами у вакуумі.

Фізична величина, що показує, у скільки разів індукція  $\vec{B}$  магнітного поля у однорідному середовищі відрізняється за модулем від індукції  $\vec{B}_0$  магнітного поля у вакуумі, називається **магнітною проникністю**:

$$\mu = \frac{B}{B_0}$$

**Магнітні властивості речовин визначаються магнітними властивостями атомів або елементарних частинок** (електронів, протонів і нейтронів), що входять до складу атомів. В даний час встановлено, що магнітні властивості протонів і нейтронів майже в 1000 разів слабкіше за магнітні властивості електронів. Тому магнітні властивості речовин в основному визначаються електронами, що входять до складу атомів.

Однією з найважливіших властивостей електрона є наявність у нього не тільки електричного, але і власного магнітного поля. Власне магнітне поле електрона існує завдяки **спіну** (spin – обертання). Електрон створює магнітне поле також і за рахунок орбітального руху навколо ядра, яке можна вважати коловим мікрострумами. Поля спінів електронів і магнітні поля, обумовлені їх орбітальним рухом, і визначають широкий спектр магнітних властивостей речовин.

Речовини вкрай різноманітні за своїми магнітними властивостями. У більшості речовин ці властивості проявляються слабо.

**Слабмагнітні речовини** поділяються на дві великі групи – **парамагнетики** і **діамагнетики**. Вони відрізняються тим, що при внесенні до зовнішнього магнітного поля парамагнітні зразки намагнічуються так, що їх власне магнітне поле виявляється спрямованим за зовнішнім полем, а діамагнітні зразки намагнічуються проти зовнішнього поля. Тому у парамагнетиків  $\mu > 1$ , а у діамагнетиків  $\mu < 1$ . Відмінність  $\mu$  від одиниці у пара- і діамагнетиків надзвичайно мала. Наприклад, у алюмінію, який відноситься до парамагнетиків,  $\mu - 1 \approx 2.1 \cdot 10^{-5}$ , у хлористого заліза ( $FeCl_3$ )  $\mu - 1 \approx 2.5 \cdot 10^{-3}$ . До парамагнетиків належить також платина, повітря і багато інших речовин. До діамагнетиків належать мідь ( $\mu - 1 \approx 3 \cdot 10^{-6}$ ), вода ( $\mu - 1 \approx 9 \cdot 10^{-6}$ ), вісмут ( $\mu - 1 \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$ ) та інші речовини.

Зразки з пара- і діамагнетика, вміщені в неоднорідне магнітне поле між полюсами електромагніту (рис. 7.13), поведуться по-різному – парамагнетики (1) втягуються в область сильного поля, діамагнетики (2) – виштовхуються.

Пара- і діамагнетизм пояснюється поведінкою електронних орбіт в зовнішньому магнітному полі. У атомів діамагнітних речовин у відсутності зовнішнього поля власні магнітні поля електронів і поля, що створюються їх орбітальним рухом, повністю компенсуються. Виникнення діамагнетизму пов'язане з дією сили Лоренца на електронні орбіти. Під дією цієї сили змінюється характер орбітального руху електронів і порушується компенсація магнітних полів. Власне магнітне поле атома, що виникає при цьому, виявляється спрямованим проти напрямку індукції зовнішнього поля.

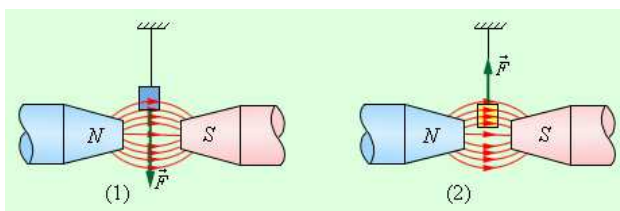


Рис. 7.13

В атомах парамагнітних речовин магнітні поля електронів компенсуються не повністю, і атом виявляється подібним до маленького колового струму. У відсутності зовнішнього поля ці колові мікроструми орієнтовані довільно, так що сумарна магнітна індукція дорівнює нулю. Зовнішнє магнітне поле здійснює орієнтуючу функцію – мікроструми намагаються зорієнтуватися так, щоб їх власні магнітні поля виявилися

спрямованими паралельно індукції зовнішнього поля. Завдяки тепловому руху атомів орієнтація мікрострумів ніколи не буває повною. При посиленні зовнішнього поля орієнтуючий ефект зростає, так що індукція власного магнітного поля парамагнітного зразка збільшується прямо пропорційно індукції зовнішнього магнітного поля. Повна індукція магнітного поля в зразку складається з індукції зовнішнього магнітного поля і індукції власного магнітного поля, що виникло в процесі намагнічення. Механізм намагнічення парамагнетиків дуже схожий на механізм поляризації полярних діелектриків. Діамагнетизм не має аналога серед електричних властивостей речовини.

Слід зазначити, що діамагнітні властивості мають атоми будь-яких речовин. Проте у багатьох випадках діамагнетизм атомів маскується сильнішим пара-магнітним ефектом. Явище діамагнетизму було відкрите М. Фарадеєм у 1845 р.

Речовини, здатні сильно намагнічуватися в магнітному полі, називаються **феромагнетиками**. Магнітна проникність феромагнетиків за порядком величини лежить в межах  $10^2$ – $10^5$ . Наприклад, у сталі  $\mu \approx 8000$ , у сплаву заліза з нікелем магнітна проникність досягає значень 25000.

До даної групи відносяться чотири хімічні елементи: залізо, нікель, кобальт, гадоліній. З них найбільшу магнітну проникність має залізо. Тому вся ця група отримала назву феромагнетиків.

Феромагнетиками можуть бути різні сплави, що містять феромагнітні елементи. Широке застосування в техніці отримали керамічні феромагнітні матеріали – ферити.

Для кожного феромагнетика існує певна температура (так звана **температура або точка Кюрі**), вище за яку феромагнітні властивості зникають, і речовина стає парамагнетиком. У заліза, наприклад, температура Кюрі дорівнює  $770^\circ\text{C}$ , у кобальту –  $1130^\circ\text{C}$ , у нікелю –  $360^\circ\text{C}$ .

Феромагнітні матеріали діляться на дві великі групи – на **магніто-м'які** і **магніто-жорсткі** матеріали. Магніто-м'які феромагнітні матеріали майже повністю розмагнічуються, коли зовнішнє магнітне поле стає рівним нулю. До магніто-м'яких матеріалів відноситься, наприклад, чисте залізо, електротехнічна сталь і деякі сплави. Ці матеріали застосовуються в приладах змінного струму, в яких відбувається безперервне перемагнічування, тобто зміна напрямку магнітного поля (трансформатори, електродвигуни і т. п.).

Магніто-жорсткі матеріали значною мірою зберігають свою намагніченість і після видалення їх з магнітного поля. Прикладами магніто-жорстких матеріалів можуть бути вуглецева сталь і ряд спеціальних сплавів. Магніто-жорсткі матеріали використовуються в основному для виготовлення **постійних магнітів**.

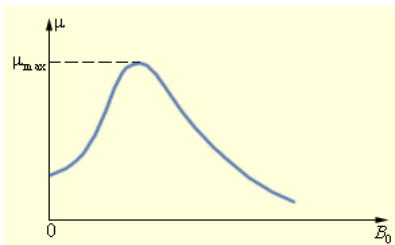


Рис. 7.14

Магнітна проникність  $\mu$  феромагнетиків **не є постійною величиною**; вона суттєво залежить від індукції  $B_0$  зовнішнього поля. Типова залежність  $\mu(B_0)$  наведена на рис. 7.14. У таблицях зазвичай приводяться значення максимальної магнітної проникності.

Непостійність магнітної проникності приводить до складної нелінійної залежності індукції  $\vec{B}$  магнітного поля у феромагнетику від індукції  $\vec{B}_0$  зовнішнього магнітного поля. Характерною особливістю процесу намагнічення феромагнетиків є так званий **гістерезис**, тобто залежність намагнічення від передісторії зразка. Крива намагнічення  $B(B_0)$  феромагнітного зразка є петлею складної форми, яка називається **петлею гістерезиса** (рис. 7.15). Стрілками вказано спрямування процесів намагнічення і розмагнічування феромагнітного зразка при зміні індукції  $\vec{B}_0$  зовнішнього магнітного поля.

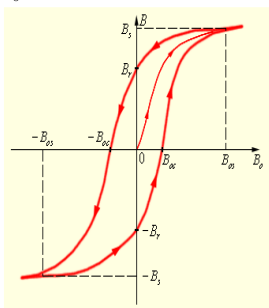


Рис. 7.15

З рис. 7.15 видно, що при  $|B_0| > B_{0s}$  відбувається магнітне насичення – намагніченість зразка досягає максимального значення. Якщо тепер зменшувати магнітну індукцію  $B_0$  зовнішнього поля і довести її знов до нульового значення, то феромагнетик збереже **залишкову намагніченість** – поле всередині зразка буде дорівнювати  $B_r$ . Залишкова намагніченість зразків дозволяє створювати постійні магніти. Для того, щоб повністю розмагнітити зразок, необхідно,

змінивши знак зовнішнього поля, довести магнітну індукцію  $B_0$  до значення  $-B_{0c}$ , яке прийнято називати **коерцитивною силою**. Далі процес перемагнічування може бути продовжений, як це вказано стрілками на рис. 7.16.

У магніто-м'яких матеріалів значення коерцитивної сили  $B_{0c}$  невелике – петля гістерезису таких матеріалів досить вузька. Матеріали з великим значенням коерцитивної сили, тобто ті, що мають широкую петлю гістерезису, належать до магніто-жорстких. У магніто-м'яких матеріалів значення коерцитивної сили  $B_{0c}$  невелике – петля гістерезису таких

матеріалів досить вузька. Матеріали з великим значенням коерцитивної сили, тобто ті, що мають широкі петлі гістерезису, належать до магнітожорстких.

Природу феромагнетизму можна до кінця зрозуміти тільки на основі квантових уявлень. Якісно феромагнетизм пояснюється наявністю власних (спінових) магнітних полів у електронів. У кристалах феромагнітних матеріалів виникають умови, при яких, внаслідок сильної взаємодії магнітних полів спінів сусідніх електронів, енергетично вигідною стає їх паралельна орієнтація. В результаті такої взаємодії всередині кристала феромагнетика виникають спонтанно намагнічені області розміром порядку  $10^{-2}$ – $10^{-4}$  см. Ці області називаються **доменами**. Кожен домен вдає із себе невеликий постійний магніт.

У відсутності зовнішнього магнітного поля напрями векторів індукції магнітних полів в різних доменах орієнтовані у великому кристалі хаотично. Такий кристал в середньому виявляється не намагніченим. При накладенні зовнішнього магнітного поля  $\vec{B}_0$  відбувається зсув границь доменів так, що об'єм доменів, орієнтованих по зовнішньому полю, збільшується. Зі збільшенням індукції зовнішнього поля зростає магнітна індукція намагніченої речовини. У дуже сильному зовнішньому полі домени, в яких власне магнітне поле співпадає за напрямком з зовнішнім полем, поглинають решту всіх доменів, і настає магнітне насичення. Рис. 7.16 може служити якісною ілюстрацією процесу намагнічення феромагнітного зразка.

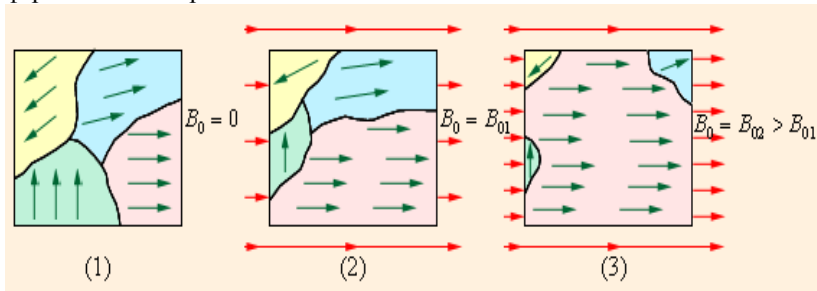


Рис. 7.16

### 7.3. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. ПРАВИЛО ЛЕНЦА

Явище **електромагнітної індукції** було відкрито видатним англійським фізиком М. Фарадеєм у 1831 р. Воно полягає у виникненні електричного струму в замкненому провідному контурі при зміні за часом магнітного потоку, що пронизує контур.

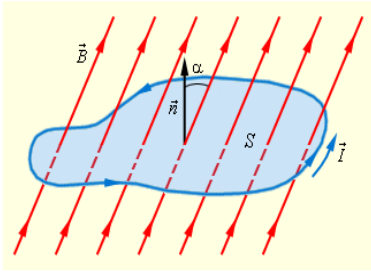


Рис. 7.17

Визначення магнітного потоку легко узагальнити на випадок неоднорідного магнітного поля і неплоского контура. Одиниця магнітного потоку в системі СІ називається **вебером** (Вб). Магнітний потік, рівний 1 Вб, створюється магнітним полем з індукцією 1 Тл, що пронизує за напрямком нормалі плоский контур площею 1 м<sup>2</sup>:

$$1\text{Вб} = 1\text{Тл} \cdot 1\text{м}^2$$

Фарадей експериментально встановив, що при зміні магнітного потоку в провідному контурі виникає е.р.с. індукції  $\mathcal{E}_{\text{інд}}$ , що дорівнює швидкості зміни магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром, взятою із знаком мінус:

$$\mathcal{E}_{\text{інд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Ця формула носить назву **закону електромагнітної індукції Фарадея**.

Досліди показують, що індукційний струм, що виникає в замкненому контурі при зміні магнітного потоку, завжди має такий напрямок, що створюване їм магнітне поле перешкоджає зміні магнітного потоку, який викликає появу індукційного струму. Це твердження, сформульоване в 1833 р., називається **правилом Ленца**.

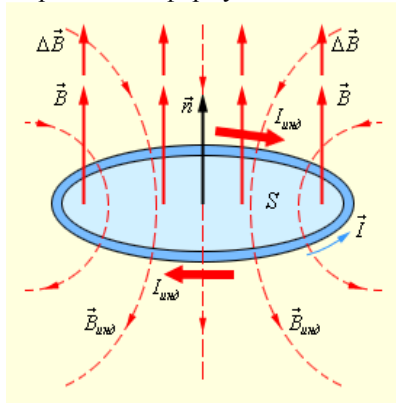


Рис. 7.18

**Магнітним потоком  $\Phi$**  через площу  $S$  контура називають величину  $\Phi = BS \cos\alpha$  де  $B$  – модуль вектора магнітної індукції,  $\alpha$  – кут між вектором  $\vec{B}$  і нормаллю  $\vec{n}$  до площини контура (рис. 7.17). Напрямок нормалі  $\vec{n}$  і вибраний позитивний напрям  $\vec{i}$  обходу контура зв'язані правилом правого свердлика.

Рис. 7.18 ілюструє правило Ленца на прикладі нерухомого провідного контура, який знаходиться в однорідному магнітному полі, модуль індукції якого збільшується в часі. В даному прикладі  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$ , а  $\mathcal{E}_{\text{інд}} < 0$  Індукційний струм  $I_{\text{інд}}$ , що тече назустріч вибраному позитивному напрямку обходу контура, визначається за законом Ома:

$$I_{\text{інд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{інд}}}{R}$$

Правило Ленца відображає той експериментальний факт, що  $\mathcal{E}_{\text{ind}}$  і  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  завжди мають протилежні знаки (знак “мінус” у формулі Фарадея). Правило Ленца має глибокий фізичний зміст – воно виражає закон збереження енергії.

Зміна магнітного потоку, що пронизує замкнений контур, може відбуватися з двох причин.

1. Магнітний потік змінюється внаслідок переміщення контура або його частин в постійному в часі магнітному полі. Це випадок, коли провідники, а разом з ними і вільні носії заряду, рухаються в магнітному полі. Виникнення е.р.с. індукції пояснюється дією сили Лоренца на вільні заряди в рухомих провідниках. Сила Лоренца грає в цьому випадку роль сторонньої сили.

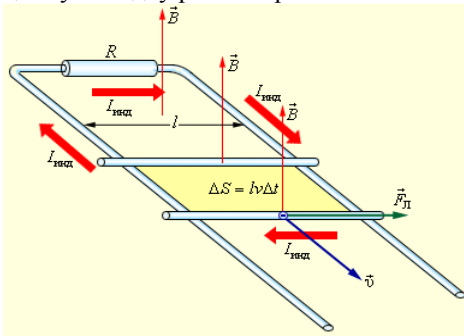


Рис. 7.19

На вільні заряди на цій ділянці контура діє сила Лоренца. Одна з складових цієї сили, пов'язана з **переносною** швидкістю зарядів  $\vec{v}$ , спрямована вздовж провідника. Ця складова вказана на рис. 7.19. Вона грає роль сторонньої сили. Її модуль дорівнює:

$$F_{\text{Л}} = evB.$$

Робота сили  $F_{\text{Л}}$  на шляху  $l$  дорівнює:

$$A = F_{\text{Л}}l = evBl.$$

За визначенням е.р.с. :

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{A}{e} = vBl$$

2. Друга причина зміни магнітного потоку, що пронизує контур, – зміна за часом магнітного поля при нерухомому контурі. В цьому випадку виникнення е.р.с. індукції вже не можна пояснити дією

Розглянемо, як приклад, виникнення е.р.с. індукції в прямокутному контурі, вміщеному в однорідне магнітне поле  $\vec{B}$ , перпендикулярне площині контура. Хай одна із сторін контура довжиною  $l$  ковзає з швидкістю  $\vec{v}$  по двох інших сторонах (рис. 7.19).



сили Лоренца. Електрони в нерухомому провіднику можуть приводитися в рух тільки електричним полем. Це електричне поле породжується магнітним полем, що змінюється в часі. Робота цього поля при переміщенні одиничного позитивного заряду по замкненому контуру дорівнює е.р.с. індукції в нерухомому провіднику. Отже, електричне поле, породжене магнітним полем, що змінюється, **не є потенціальним**. Його називають **вихровим електричним полем**. Уявлення про вихрове електричне поле було введено у фізику великим англійським фізиком Дж. Максвеллом у 1861 р.

Явище електромагнітної індукції в нерухомих провідниках, що виникає при зміні навколишнього магнітного поля, також описується формулою Фарадея. Таким чином, явища індукції в рухомих і нерухомих провідниках **протікають однаково**, але фізична причина виникнення індукційного струму в цих двох випадках є різною: у разі рухомих провідників е.р.с. індукції обумовлена силою Лоренца; у разі нерухомих провідників е.р.с. індукції є наслідком дії на вільні заряди вихрового електричного поля, що виникає при зміні магнітного поля.

### 7.3.1. Самоіндукція. Енергія магнітного поля

**Самоіндукція** є важливим окремим випадком електромагнітної індукції, коли магнітний потік, що змінюється, викликає е.р.с. індукції, що створюється струмом в самому контурі. Якщо струм в даному контурі за якихось причин змінюється, то змінюється і магнітне поле цього струму, а, отже, і власний магнітний потік, що пронизує контур. У контурі виникає е.р.с. самоіндукції, яка згідно правилу Ленца перешкоджає зміні струму в контурі.

Власний магнітний потік  $\Phi$ , що пронизує контур або котушку із струмом, пропорційний силі струму  $I$ :  $\Phi = LI$ .

Коефіцієнт пропорційності  $L$  в цій формулі називається **коефіцієнтом самоіндукції** або **індуктивністю** котушки. Одиниця індуктивності в СІ називається **Лорен** ( $Gн$ ). Індуктивність контура або котушки дорівнює  $1 Gн$ , якщо при силі постійного струму  $1 A$  власний потік дорівнює  $1 Вб$ :

$$1Gн = \frac{1Вб}{1A}$$

Як приклад розрахуємо індуктивність довгого соленоїда, що має  $N$  витків, площу перетину  $S$  і довжину  $l$ . Магнітне поле соленоїда визначається за формулою:  $B = \mu_0 In$

де  $I$  – струм в соленоїді,  $n = \frac{N}{l}$  число витків на одиницю довжини соленоїда.

Магнітний потік, що пронизує всі  $N$  витків соленоїда, дорівнює:

$$\Phi = BSN = \mu_0 n^2 SI$$

Отже, індуктивність соленоїда дорівнює:  $L = \mu_0 n^2 SI = \mu_0 n^2 V$ , де  $V = SI$  – об'єм соленоїда, в якому зосереджено магнітне поле. Отриманий результат не враховує крайових ефектів, тому він приблизно справедливий тільки для достатньо довгих котушок. Якщо соленоїд заповнений речовиною з магнітною проникністю  $\mu$ , то при заданому струмі  $I$  індукція магнітного поля зростає за модулем в  $\mu$  разів, тому індуктивність котушки з осердям також збільшується в  $\mu$  разів:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V.$$

**Е.р.с. самоіндукції**, що виникає в котушці з постійним значенням індуктивності, згідно з законом Фарадея дорівнює:

$$\varepsilon_{\text{мо}} = \varepsilon_L = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Е.р.с. самоіндукції прямо пропорційна індуктивності котушки і швидкості зміни сили струму в ній.

Енергія  $W_M$  магнітного поля котушки з індуктивністю  $L$ , що створюється струмом  $I$ , дорівнює:

$$W_M = \frac{\Phi I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

За правилом Ленца індукційні і струми, що виникають внаслідок самоіндукції, мають такий напрямок, щоб перешкоджати змінам струмів в ланцюзі. Це призводить до того, що при розмиканні і замиканні ланцюга встановлення струму відбувається не миттєво, а повільно (поступово). При розмиканні ланцюга струм змінюється з часом за таким законом:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При замиканні ланцюга струм зростає з часом за законом:

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

У попередніх виразах  $L$  - індуктивність ланцюга,  $R$  - його активний опір,  $I_0 = \frac{E}{R}$ ,  $E$  - е.р.с. джерела струму.

#### 7.4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З МАГНЕТИЗМУ

**Приклад 1.** По дроту, зігнутому у вигляді квадрата із стороною 10 см тече струм силою 100 А. Визначити магнітну індукцію в точці перетину діагоналей квадрату.

**Розв'язання:**

Згідно принципу суперпозиції магнітних полів, магнітна індукція в точці  $O$  перетину діагоналей дорівнює векторній сумі індукцій магнітних полів, що створюються кожною стороною квадрата окремо. Всі вектори індукції будуть спрямовані перпендикулярно площині витка. Крім того, з міркувань симетрії виходить, що модулі цих векторів однакові. Тобто чисельне значення індукції магнітного поля в точці  $O$  буде  $B = 4B_1$ . За законом Біо – Савара – Лапласа магнітна індукція  $B_1$  поля, що створюється відрізком прямолінійного дроту із струмом, визначається за формулою:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Враховуючи, що  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$  і  $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$ , цю формулу (1) можна переписати у вигляді:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \cos \alpha_1$$

Тоді сумарна індукція буде:

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi \cdot r_0} \cos \alpha_1$$

Враховуючи, що  $r_0 = \frac{a}{2}$  і  $\cos \alpha_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , одержимо :

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi \cdot a} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2}{\pi \cdot 10^{-2}} = 1.13 \cdot 10^{-3} (\text{Тл}) = 1.13 \text{ мТл}$$

**Приклад 2.** Плоский квадратний контур із стороною  $10 \text{ см}$ , по якому тече струм  $100 \text{ А}$ , вільно встановився в однорідному магнітному полі, індукція якого  $1,0 \text{ Тл}$ . Визначити роботу, що здійснюється зовнішніми силами при повороті контура відносно осі, що проходить через середину його протилежних сторін, на кут: 1)  $\varphi_1 = 90^\circ$ ; 2)  $\varphi_2 = 3^\circ$ . При повороті контура сила струму в ньому підтримується незмінною.

**Розв'язання:** (Відзначимо, що можна запропонувати декілька способів розв'язання цієї задачі.)

*Перший спосіб.*

Відомо, що на контур із струмом в магнітному полі діє момент сил:

$$M = p_m B \sin \varphi,$$

де  $p_m$  - магнітний момент контуру,  $B$  - магнітна індукція,  $\varphi$  - кут між цими векторами.

За умовою завдання в початковому положенні контур вільно встановився в магнітному полі. При цьому момент сил дорівнює нулю,

тобто  $\varphi = 0$ , а це означає, що вектори магнітної індукції і магнітного моменту контура збігаються за напрямком.

Якщо зовнішні сили виведуть контур з положення рівноваги, то виникає момент сил, який визначається за попередньою формулою і який буде намагатися повернути контур в початкове положення. Проти цього моменту і здійснюватиметься робота зовнішніми силами. Оскільки момент сил змінний (залежить від кута повороту), то для підрахунку роботи застосуємо формулу роботи в диференціальній формі:

$$dA = Md\varphi.$$

Підставимо сюди вираз для моменту сил і врахуємо, що в нашому випадку  $p_m = IS = Ia^2$ , де  $I$  - сила струму в контурі, а  $S = a^2$  площа контура, в результаті одержимо:

$$dA = IBa^2 \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Взявши інтеграл від цього виразу, знайдемо роботу при повороті на кінцевий кут:

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Робота при повороті на кут  $\varphi_1 = 90^\circ$ :

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot d\varphi = IBa^2 (1 - \cos \varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = IBa^2 = 100 \cdot 1 \cdot 0.1^2 = 1 (\text{Дж}).$$

2) Робота при повороті на кут  $\varphi_2 = 3^\circ$ . В цьому випадку необхідно врахувати, що кут  $\varphi_2$  малий і можлива заміна  $\sin \varphi_2 = \varphi_2$  за умови, що кут визначається в радіанах:

$$A_2 = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 \cdot 0.1^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{180}\right)^2 = 1.37 \cdot 10^{-3} (\text{Дж}).$$

*Другий спосіб.*

Відомо, що робота зовнішніх сил  $A$  з переміщення контура зі струмом в магнітному полі дорівнює добутку сили струму в контурі на зміну магнітного потоку крізь контур:

$$A = -\Delta\Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2)$$

де  $\Phi_1$  - магнітний потік, що перетинає контур до переміщення, а  $\Phi_2$  - після переміщення. У першому випадку, наприклад,  $A = IBS = IBa^2$ , що збігається з отриманим вище результатом.

**Приклад 3.** Електрон, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів  $400 \text{ В}$ , потрапив в однорідне магнітне поле напруженістю  $1 \text{ кА/м}$ . Визначити радіус кривини траєкторії електрона і частоту обертання його в магнітному полі. Вектор швидкості перпендикулярний до ліній індукції поля.

### **Розв'язання:**

На електрон, що рухається в магнітному полі, діє сила Лоренцо (дією сили тяжіння можна знехтувати). Сила Лоренцо перпендикулярна до вектора швидкості  $\vec{v}$ , отже, надає електрону тільки нормальне прискорення. Рівняння руху електрона в цьому випадку має вигляд:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \sin \alpha,$$

де  $q$  - заряд електрона,  $v$  - швидкість електрона,  $B$  - магнітна індукція,  $m$  - маса електрона,  $R$  - радіус кривини траєкторії електрона,  $\alpha$  - кут між напрямками вектора швидкості і вектора магнітної індукції. За умовою задачі вони перпендикулярні, тобто  $\alpha = 90^\circ$ , а  $\sin \alpha = 1$ . З урахуванням цих зауважень знаходимо радіус кривини траєкторії з рівняння руху:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

У цьому співвідношенні швидкість руху електрона нам невідома. Знайти її можна із закону збереження енергії. Електрон набуває швидкість при проходженні певної різниці потенціалів, а оскільки модуль швидкості в магнітному полі не змінюється, то:  $\frac{mv^2}{2} = qU$

$$\text{Звідки швидкість } v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Зв'язок між напруженістю магнітного поля і індукцією наступна:  $B = \mu_0 H$ , де  $\mu_0$  - магнітна постійна.

Остаточний вираз для радіуса кривини траєкторії електрона матиме вигляд:

$$R = \frac{\sqrt{2mqU}}{\mu_0 qH} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 400}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3} = 5.37 \cdot 10^{-2} (\text{м}) = 5.37 \text{ см}$$

Для визначення частоти обертання скористаємося формулою зв'язку частоти з швидкістю і радіусом:

$$n = \frac{v}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} H = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}{2\pi \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} = 3.52 \cdot 10^7 (\text{с}^{-1})$$

**Приклад 4.** В однорідному магнітному полі з індукцією  $0,1 \text{ Тл}$  рівномірно з частотою  $10$  об/с обертається рамка, що містить  $1000$  витків, щільно прилеглих один до одного. Площа рамки  $150 \text{ см}^2$ . Визначити миттєве значення е.р.с. індукції відповідне куту повороту рамки на  $30^\circ$ .

### **Розв'язання:**

Миттєве значення е.р.с. індукції визначається основним рівнянням електромагнітної індукції Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (1)$$

де  $\Psi$  - потітокзчеплення.

Потітокзчеплення  $\Psi$  пов'язане з магнітним потоком  $\Phi$  і числом витків  $N$ , щільно прилеглих один до одного, співвідношенням:  $\Psi = N\Phi$ .

Якщо підставити цей вираз у попередню формулу, отримаємо:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

При обертанні рамки магнітний потік, що пронизує рамку у момент часу  $t$  змінюється згідно з законом:

$$\Phi = BS \cos(\omega t), \quad (3)$$

де  $B$  - магнітна індукція,  $S$  - площа рамки,  $\omega$  - колова (або циклічна) частота.

Підставимо у формулу (2) вираз (3), продиференціюємо за часом, і знайдемо миттєве значення е.р.с. індукції:

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin(\omega t) \quad (4)$$

Колова частота пов'язана з частотою обертання співвідношенням:  $\omega = 2\pi n$ .

Підставимо цей вираз у формулу (1) і отримаємо:

$$\varepsilon_i = 2\pi n NBS \sin(\omega t) = 2 \cdot 3.14 \cdot 10 \cdot 0.1 \cdot 150 \cdot 10^{-4} \cdot 0.5 = 47.1(B).$$

### Контрольна робота № 5 (магнетизм)

501. По контуру у вигляді рівностороннього трикутника йде струм силою  $40 \text{ А}$ . Сторона трикутника  $0,3 \text{ м}$ . Визначити напруженість і індукцію магнітного поля в точці перетину висот.
502. По двох довгих паралельних провідниках течуть струми  $10 \text{ А}$  і  $15 \text{ А}$ . Відстань між провідниками  $0,1 \text{ м}$ . Визначити напруженість і індукцію магнітного поля в точці, віддаленій від першого провідника на  $0,08 \text{ м}$  і від другого на  $0,06 \text{ м}$ . (Розглянути два випадки: струми течуть в одному напрямку, струми течуть в протилежних напрямках).
503. Є система довгих провідників, зображена на рисунку. Струм в провіднику  $AB$  дорівнює  $8 \text{ А}$ . В точці  $B$  він розгалужується на дві рівні частини. Визначити індукцію магнітного поля в точці  $M$ , віддаленій від точки  $B$  на  $0,25 \text{ м}$ , що створюється цими провідниками.
504. По нескінченно довгому провідникові  $ABC$ , зігнутому під прямим кутом, тече струм  $7 \text{ А}$  (див.рис.). Знайти індукцію магнітного поля в точці  $M$ , віддаленій від точки  $B$  на відстані  $0,2 \text{ м}$ .
505. По тонкому провідникові, зігнутому у вигляді правильного шестикутника із стороною  $0,1 \text{ м}$  тече струм  $20 \text{ А}$ . Визначити напруженість і індукцію магнітного поля в центрі шестикутника.

506. По двох довгих паралельних провідниках, відстань між якими  $0,06$  м, течуть однакові струми  $12$  А. Визначити напруженість і індукцію магнітного поля в точці, віддаленій від кожного провідника на відстань  $0,06$  м, якщо струми течуть: а) в одному напрямі, б) в протилежних напрямках.
507. Два нескінченно довгих прямих провідника схрещені під прямим кутом. По провідниках течуть струми  $80$  А і  $60$  А. Відстань між провідниками  $0,1$  м. Визначити індукцію магнітного поля в точці, що лежить на середині загального перпендикуляра до провідників.
508. По провіднику, зігнутому у вигляді прямокутника із сторонами  $6$  і  $8$  см, тече струм силою  $20$  А. Визначити напруженість і індукцію магнітного поля в точці перетину діагоналей прямокутника.
509. По нескінченно довгому провідникові  $ABC$  (див. рис.), зігнутому під прямим кутом, тече струм  $10$  А. Визначити індукцію магнітного поля, що створюється цим провідником в точках  $D$  і  $F$ . Відстані  $DB = FB = 0,1$  м.
510. На рисунку показана схема розгалуження струмів. Всі провідники прямолінійні, достатньо довгі і лежать в одній площині. Сила струму в кожному з розгалужень  $I = 5$  А, а кут між ними  $60^\circ$ . Визначити напруженість магнітного поля на лінії, що є перпендикуляром до площини струмів і проходить через точку  $A$  на відстані  $0,2$  м від неї.
511. По нескінченно довгому провідникові  $ABC$ , зігнутому під прямим кутом струм  $10$  А (див. рис.). В скільки разів зміниться індукція магнітного поля в точці  $M$ , якщо в точці  $B$  приєднати нескінченно довгий провідник  $BD$  так, щоб струм в точці  $B$  розгалужувався на дві рівні частини, а струм в провіднику  $AB$  залишався тим самим.
512. Знайти індукцію магнітного поля на осі колового контура на відстані  $3$  см від його площини. Радіус контура  $4$  см, сила струму в ньому  $2$  А.
513. Два колові витки радіусом  $4$  см кожен розташовані коаксіально на відстані  $6$  см один від одного. По одному витку тече струм  $2$  А, по іншому –  $4$  А. Визначити напруженість магнітного поля в точці, що лежить на осі витків на рівних відстанях від них.
514. Два кругові витки розташовано взаємно перпендикулярно так, що їх центри співпадають. Радіус першого витка рівний  $2$  см і по ньому тече струм силою  $5$  А, радіус другого витка дорівнює  $4$  см і по ньому тече струм силою  $2$  А. Визначити напруженість і індукцію магнітного поля в центрі витків.
515. По провідникові, зігнутому у вигляді кола, тече струм. Напруженість магнітного поля в центрі кола  $20$  А/м. Не змінюючи сили струму в провіднику, йому надали форму квадрата.

Визначити напруженість магнітного поля в точці перетину діагоналей цього квадрата.

516. По тонкому дроту, зігнутому так, як показано на рисунку, тече струм силою  $5\text{ А}$ . Радіус півкола  $2,5\text{ см}$ . Визначити індукцію магнітного поля в центрі півкола.
517. По наближених уявленнях теорії Бора електрон в атомі водню рухається навколо ядра по коловій орбіті, радіус якої становить  $0,53\text{ нм}$ . Визначити, яке магнітне поле створює він в центрі колової орбіти?
518. З дроту діаметром  $1\text{ мм}$  треба намотати соленоїд, всередині якого напруженість магнітного поля повинна мати значення  $24\text{ кА/м}$ . Гранична сила струму, яку можна пропускати по дроту, становить  $6\text{ А}$ . Із якого числа шарів дроту складатиметься обмотка соленоїда, якщо витки намотувати щільно один до одного? Діаметр котушки вважати малим в порівнянні з її довжиною.
519. Нескінченно довгий дріт утворює петлю, дотичну до дроту. По дроту тече струм силою  $5\text{ А}$ . Визначити радіус петлі, якщо відомо, що напруженість магнітного поля в центрі петлі дорівнює  $41\text{ А/м}$ .
520. Два коаксіальні колові витки радіусом  $4\text{ см}$  кожен розташовані в паралельних площинах на відстані  $5\text{ см}$  один від одного. По витках течуть рівні струми  $4\text{ А}$ . Визначити індукцію магнітного поля в центрі одного з витків. Задачу розв'язати для випадків: 1) струми у витках течуть в одному напрямі, 2) струми течуть в протилежних напрямках.
521. В центрі колового дротяного витка створюється магнітна індукція  $B$  при різниці потенціалів  $U$  на кінцях витка. Як потрібно змінити прикладену різницю потенціалів, щоб отримати таку ж індукцію магнітного поля в центрі витка удвічі більшого радіусу, зробленого з того ж дроту?
522. По прямому нескінченно довгому провідникові тече струм силою  $3,14\text{ А}$ . Коловий виток розташований так, що площина витка паралельна прямому провідникові, а перпендикуляр, опущений на нього з центру витка, є нормаллю і до площини витка. По витку проходить струм  $3\text{ А}$ . Відстань від центру витка до прямого провідника  $0,2\text{ м}$ . Радіус витка  $0,3\text{ м}$ . Знайти величину і напрямок магнітної індукції в центрі витка.
523. Два прямолінійних довгих паралельних провідника знаходяться на відстані  $0,1\text{ м}$  один від одного. По провідниках течуть струми в одному напрямку силою  $20\text{ А}$  і  $30\text{ А}$ . Яку роботу і (на одиницю довжини провідників) треба виконати, щоб розсунути ці провідники до відстані  $0,2\text{ м}$ ?



524. Прямий дріт завдовжки  $0,2$  м, по якому тече струм силою  $50$  А, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $2$  Тл. Яку роботу здійснюють сили, що діють на дріт з боку поля, перемістивши його на  $0,1$  м, якщо напрям переміщення перпендикулярний лініям індукції і напрямку струму?
525. Виток радіусом  $0,1$  м, по якому тече струм силою  $20$  А, вільно встановлюється в однорідному магнітному полі напруженістю  $1$  кА/м. Виток повернули відносно діаметру на кут  $60^0$ . Визначити виконану при цьому роботу.
526. Квадратна дротяна рамка розташована в одній площині з довгим прямим дротом так, що дві її сторони паралельні дроту. По рамці і дроту течуть однакові струми силою  $100$  А. Визначити силу, що діє на рамку, якщо найближча до дроту сторона рамки знаходиться від нього на відстані, рівній її довжині.
527. Кільце з внутрішнім радіусом  $0,1$  м і зовнішнім –  $0,15$  м несе рівномірно розподілений по поверхні заряд  $0,6$  мкКл. Кільце рівномірно обертається відносно осі, що проходить крізь його центр і перпендикулярній площині кільця. Частота обертання  $15$  с<sup>-1</sup>. Визначити: 1)магнітний момент колового струму, що створюється кільцем, 2)відношення магнітного моменту до моменту імпульсу, якщо маса диска дорівнює  $0,3$  кг.
528. Диск радіусом  $0,1$  м несе рівномірно розподілений по поверхні заряд  $0,2$  мкКл. Диск рівномірно обертається відносно осі, що проходить крізь його центр і перпендикуляра площині диска. Частота обертання  $20$  с<sup>-1</sup>. Визначити: 1)магнітний момент колового струму, що створюється диском, 2)відношення магнітного моменту до моменту імпульсу, якщо маса диска дорівнює  $0,1$  кг
529. Котушка гальванометра, що складається з  $400$  витків тонкого дроту, намотаного на прямокутний каркас завдовжки  $3$  см і шириною  $2$  см, підвішена на нитці в магнітному полі, індукція якого дорівнює  $0,1$  Тл. По котушці тече струм  $0,1$  мкА. Знайти обертальний момент, що діє на котушку гальванометра, якщо: 1)площина котушки паралельна напрямку магнітного поля, 2)площина котушки складає кут  $60^0$  з напрямком магнітного поля.
530. Коловий контур вміщено в однорідне магнітне поле так, що площина контура перпендикулярна силовим лініям поля. Напруженість магнітного поля дорівнює  $160$  кА/м. По контуру тече струм  $2$  А. Радіус контура  $2$  см. Яку роботу треба виконати, щоб повернути контур на  $90^0$  навколо осі, яка співпадає з діаметром контура.

531. З дроту завдовжки  $0,2$  м зроблені контури: квадратний і коловий. Знайти обертальний момент сил, що діє на кожен контур, вміщений в однорідне магнітне поле, індукція якого дорівнює  $1$  Тл. По контурах тече струм силою  $2$  А. Площина кожного з контурів складає кут  $60^0$  з напрямком магнітного поля.
532. По тонкому стрижню завдовжки  $0,2$  м рівномірно розподілений заряд  $30$  мкКл. Стрижень обертається з постійною кутовою швидкістю  $3,14$  рад/с від-носно осі, перпендикулярній стрижню, яка проходить крізь один з його кінців. Визначити: 1)магнітний момент, обумовлений обертанням заряд-женого стрижня, 2)відношення магнітного моменту до моменту імпульсу, якщо стрижень має масу  $0,2$  кг
533. По тонкому стрижню завдовжки  $0,2$  м рівномірно розподілений заряд  $240$  нКл. Стрижень обертається з постійною кутовою швидкістю  $10$  рад/с відносно осі перпендикулярної стрижню, яка проходить крізь його середину. Визначити; 1)магнітний момент, обумовлений обертанням зарядженого стрижня, 2)відношення магнітного моменту до моменту імпульсу, якщо стрижень має масу  $0,012$  кг
534. Електрон в атомі водню рухається навколо ядра по круговій орбіті деякого радіусу. Знайти відношення магнітного моменту еквівалентного кругового струму до моменту імпульсу орбітального руху електрона. Вказати на кресленні напрям цих векторів.
535. Електрон в не збудженому атомі водню рухається навколо ядра по колу радіусу  $53$  нм Обчислити магнітний момент еквівалентного кругового струму і механічний момент, що діє на коловий струм, якщо атом вміщений в магнітне поле з індукцією  $0,1$  Тл, спрямованою паралельно площині орбіти електрона.
536. Тонке кільце радіусом  $0,1$  м несе заряд  $10$  нКл. Кільце рівномірно обертається відносно осі, яка співпадає з одним з діаметрів кільця з частотою  $10$  с<sup>-1</sup>. Визначити: 1)магнітний момент, обумовлений обертанням зарядженого кільця, 2)відношення магнітного моменту до моменту імпульсу, якщо кільце має масу  $0,02$  кг
537. Круговий контур вміщений в однорідне магнітне поле так, що площина кон-тура перпендикулярна силовим лініям поля. Напруженість магнітного поля  $160$  кА/м. По контуру тече струм  $2$  А. Радіус контура  $2$  см. Яку роботу треба виконати, щоб повернути контур на  $90^0$  навколо осі, що співпадає з діаметром контура.
538. Плоский контур із струмом силою  $10$  А вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією  $0,1$  Тл. Площа контура  $100$  см<sup>2</sup>. Підтримуючи струм в контурі незмінним, його

- повернули відносно осі, яка лежить в площині контура, на кут  $60^\circ$ . Визначити виконану при цьому роботу.
539. Квадратний контур із стороною  $0,2$  м, в якому тече струм силою  $5$  А, знаходиться в магнітному полі з індукцією  $0,5$  Тл під кутом  $30^\circ$  до ліній індукції. Яку роботу потрібно виконати, щоб при незмінній силі струму в контурі змінити його форму з квадрата на коло?
540. Прямокутний контур переміщується поступально в магнітному полі лінійного струму силою  $5$  А (рис). Сторони прямокутника рівні  $a = 5$  см і  $b = 3$  см,  $x = 6$  см. Опір контура дорівнює  $10$  Ом. Визначити силу струму, що індукується в контурі, і напрямок цього струму, якщо контур переміщується з постійною швидкістю  $10$  м/с. Знайти роботу по переміщенню контура, яка виконується за  $30$  с.
541. По витку радіусом  $10$  см тече струм силою  $50$  А. Виток вміщено в однорідне магнітне поле з індукцією  $0,2$  Тл. Визначити момент сил, що діє на виток, якщо площина витка складає кут  $60^\circ$  з лініями індукції.
542. Рамка із струмом силою  $5$  А містить  $20$  витків тонкого дроту. Визначити магнітний момент рамки із струмом, якщо її площа дорівнює  $10$  см<sup>2</sup>.
543. Рамка, площа якої рівна  $16$  см<sup>2</sup>, обертається в однорідному магнітному полі, роблячи  $2$  об/с. Вісь обертання знаходиться в площині рамки і перпендикулярна силовим лініям магнітного поля. Напруженість магнітного поля дорівнює  $79,6$  кА/м. Знайти:  
1) залежність магнітного потоку, що пронизує рамку, від часу,  
2) максимальне значення магнітного потоку.
544. В магнітному полі, індукція якого дорівнює  $0,05$  Тл, обертається стрижень довжиною  $1$  м з частотою  $3$  об/с. Вісь обертання, що проходить крізь один з кінців стрижня, паралельна силовим лініям магнітного поля. Знайти потік магнітної індукції, що перетинається стрижнем за одну хвилину.
545. В однорідне магнітне полі, напруженість якого  $80$  кА/м, вміщено квадратну рамку. Її площа складає з напрямком магнітного поля кут  $30^\circ$ . Сторона рамки складає  $4$  см. Визначити магнітний потік, що пронизує рамку.
546. Коротка котушка площею поперечного перерізу  $150$  см<sup>2</sup>, що складається  $200$  витків дроту, по якому тече струм силою  $4$  А, вміщена в однорідне магнітне поле напруженістю  $8$  кА/м. Знайти:  
1) магнітний момент котушки, 2) обертальний момент, що діє на котушку з боку магнітного поля, якщо вісь котушки складає кут  $60^\circ$  з лініями поля.

547. Напруженість магнітного поля в центрі кругового витка  $200 \text{ A/m}$ . Магнітний момент витка дорівнює  $1 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ . Обчислити силу струму у витку і радіус витка.
548. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $9 \text{ мТл}$  по гвинтовій лінії, радіус якої  $1 \text{ см}$  і відстань гвинта  $7,8 \text{ см}$ . Визначити період обертання електрона, його швидкість і кінетичну енергію.
549. Однорідне електричне поле напруженістю  $1 \text{ кВ/м}$  і магнітне поле напруженістю  $1 \text{ кА/м}$  співпадають за напрямком. Визначити нормальне і тангенціальне прискорення протона, що рухається в цих полях по напрямку силових ліній із швидкістю  $8\cdot 10^5 \text{ м/с}$ . Визначити також ці прискорення в момент входження протона в поля з тією ж швидкістю, якби він рухався перпендикулярно силовим лініям.
550. Протон влетів в однорідне магнітне поле під кутом  $45^\circ$  до напрямку поля і рухається по гвинтовій лінії, радіус якої  $1,5 \text{ см}$ . Індукція магнітного поля  $0,1 \text{ Тл}$ . Знайти відстань гвинта гвинтової лінії і кінетичну енергію протона.
551. Знайти відношення  $q/m$  для зарядженої частинки, якщо вона, влітаючи із швидкістю  $10^6 \text{ м/с}$  в однорідне поле напруженістю  $2\cdot 10^5 \text{ A/m}$ , рухається по дузі кола радіусом  $8,3 \text{ см}$ . Напрямок швидкості руху частинки перпендикулярний напрямку магнітного поля. Порівняти знайдене значення із значенням  $q/m$  для електрона, протона і  $\alpha$ -частинки.
552. Магнітне поле, індукція якого  $5\cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ , спрямоване перпендикулярно електричному полю, напруженість якого  $1 \text{ кВ/м}$ . Пучок електронів, що летять з деякою швидкістю, влітає в простір, де розташовані ці поля, причому швидкість електронів перпендикулярна площині, в якій лежать вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$ . Знайти: 1) швидкість пучка електронів, якщо при одночасній дії обох полів пучок не відхиляється, 2) радіус кривини траєкторії електронів за умови ввімкнення тільки магнітного поля.
553. Електрон, прискорений різницею потенціалів  $3 \text{ кВ}$ , влітає в магнітне поле соленоїда під кутом  $30^\circ$  до його осі. Число ампер-витків соленоїда дорівнює  $5000$ . Довжина соленоїда складає  $0,25 \text{ м}$ . Знайти відстань і радіус гвинтової траєкторії електрона в магнітному полі соленоїда.
554. Протон влітає в однорідне магнітне поле під кутом  $30^\circ$  до напрямку поля і рухається по гвинтовій лінії, радіус якої складає  $1,5 \text{ см}$ . Індукція магнітного поля дорівнює  $0,1 \text{ Тл}$ . Знайти кінетичну енергію протона і швидкість його руху, крок гвинтової лінії.

555. Перпендикулярно магнітному полю напруженістю  $10 \text{ кА/м}$  збуджено електричне поле напруженістю  $100 \text{ кВ/м}$ . Перпендикулярно обом полям рухається, не відхиляючись від прямолінійної траєкторії, заряджена частинка. Визначити швидкість частинки. Розв'язання проілюструвати малюнком.
556. Плоский конденсатор, між пластинами якого створено електричне поле напруженістю  $200 \text{ В/м}$ , вміщено в магнітне поле так, що силові лінії полів взаємно перпендикулярні. Яка повинна бути індукція магнітного поля, щоб електрон з початковою енергією  $1 \text{ кеВ}$ , що влетів в простір між пластинами конденсатора перпендикулярно силовим лініям магнітного поля не змінив напрямку швидкості?
557. В однорідному магнітному полі з індукцією  $2 \text{ Тл}$  рухається протон. Траєкторія його руху є гвинтова лінія з радіусом  $0,1 \text{ м}$  і відстанню гвинта  $0,6 \text{ м}$ . Визначити кінетичну енергію протона, модуль його швидкості і кут, який складає вектор швидкості протона з вектором індукції магнітного поля у момент вльоту протона в магнітне поле.
558. В магнітному полі з індукцією  $0,01 \text{ Тл}$  обертається стрижень завдовжки  $0,2 \text{ м}$  з постійною кутовою швидкістю  $100 \text{ с}^{-1}$ . Знайти е.р.с. індукції, що виникає в стрижні, якщо вісь обертання проходить крізь кінець стрижня паралельно лініям індукції магнітного поля.
559. В однорідному магнітному полі з індукцією  $0,06 \text{ Тл}$  знаходиться соленоїд діаметром  $8 \text{ см}$ , що має  $80$  витків мідного дроту перетином  $1 \text{ мм}^2$ . Соленоїд повертають на кут  $180^\circ$  за час  $0,2 \text{ с}$  так, що його вісь залишається направленою вздовж ліній індукції магнітного поля. Визначити середнє значення електрорушійної сили, що виникає в соленоїді, і індукційний заряд, що пройшов по соленоїду.
560. Рамка, що має  $1500$  витків площею  $50 \text{ см}^2$ , рівномірно обертається з частотою  $960 \text{ об/хв.}$  в магнітному полі напруженістю  $100 \text{ кА/м}$ . Вісь обертання лежить в площині рамки і перпендикулярна лініям напруженості магнітного поля. Визначити максимальну е.р.с. індукції, що виникає в рамці.
561. Дротяний виток радіусом  $4 \text{ см}$  і опором  $0,01 \text{ Ом}$  знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $0,2 \text{ Тл}$ . Площина витка складає кут  $30^\circ$  з лініями індукції. Який заряд протече по витку при вимиканні магнітного поля?
562. Рамка з дроту опором  $0,01 \text{ Ом}$  рівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $0,05 \text{ Тл}$ . Вісь обертання лежить в площині рамки і перпендикулярна лініям індукції. Площа рамки  $100 \text{ см}^2$ . Визначити заряд, який протече через рамку

при зміні кута між нормаллю до рамки і лініями індукції: 1) від  $0^\circ$  до  $30^\circ$ , 2) від  $30^\circ$  до  $60^\circ$ , 3) від  $60^\circ$  до  $90^\circ$ .

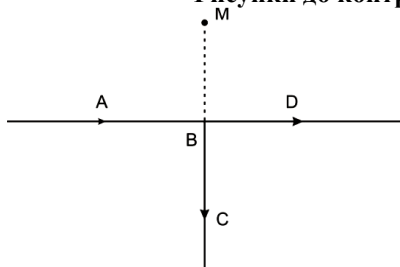
563. Рамка площею  $200 \text{ см}^2$  рівномірно обертається з частотою  $10 \text{ с}^{-1}$  відносно осі, яка лежить в площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції однорідного магнітного поля з індукцією  $0,2 \text{ Тл}$ . Визначити середнє значення е.р.с. індукції за час, протягом якого магнітний потік, що пронизує рамку, зміниться від нуля до максимального значення.
564. Тонкий мідний провідник масою  $1 \text{ г}$  зігнутий у вигляді квадрата, причому кінці його замкнені. Квадрат вміщено в однорідне магнітне поле з індукцією  $0,1 \text{ Тл}$  так, що його площина перпендикулярна лініям поля. Визначити заряд, який протече по провідникові, якщо квадрат, потягнувши за протилежні вершини, витягнути в лінію.
565. На соленоїд завдовжки  $0,2 \text{ м}$  і площею поперечного перетину  $30 \text{ см}^2$  надітий дротяний виток. Соленоїд має  $320$  витків, і по ньому тече струм  $3 \text{ А}$ . Яка середня е.р.с. індукується в надітому на соленоїд витку, коли струм в ньому вимикається протягом  $1 \text{ мс}$ ?
566. В однорідному магнітному полі, індукція якого дорівнює  $0,1 \text{ Тл}$ , обертається котушка, що складається з  $200$  витків. Вісь обертання котушки перпендикулярна до її осі і напрямку магнітного поля. Період обертання котушки дорівнює  $0,2 \text{ с}$ , площа поперечного перетину котушки дорівнює  $4 \text{ см}^2$ . Знайти максимальну е.р.с. індукції в котушці, що обертається.
567. В однорідному магнітному полі, індукція якого становить  $0,8 \text{ Тл}$ , рівномірно обертається рамка з кутовою швидкістю рівною  $15 \text{ рад/с}$ . Площа рамки дорівнює  $150 \text{ см}^2$ . Вісь обертання знаходиться в площині рамки і складає кут  $30^\circ$  з напрямком силових ліній магнітного поля. Знайти максимальну е.р.с. індукції в рамці, що обертається.
568. Металевий стрижень обертається навколо осі, що проходить на відстані  $1/3$  його довжини з частотою оборотів  $2 \text{ с}^{-1}$ . Довжина стрижня рівна  $0,6 \text{ м}$ . Визначити різницю потенціалів між кінцями стрижня, якщо магнітне поле перпендикулярне площині обертання стрижня, а його напруженість становить  $40 \text{ А/м}$ .
569. В котушці без залізного осердя, що має  $1000$  витків, діаметр перетину  $0,1 \text{ м}$  і довжину  $0,5 \text{ м}$ , величина струму рівномірно збільшується на  $0,1 \text{ А}$  за  $1 \text{ с}$  (за допомогою реостата). На котушку надіто кільце з мідного дроту площею перетину  $2 \text{ мм}^2$ . Вважаючи, що магнітні потоки, що пронизують котушку і кільце, у будь-який момент рівні між собою, знайти струм в кільці.

570. Силу струму в котушці рівномірно збільшують за допомогою реостата на  $0,5 \text{ A}$  за  $1 \text{ с}$ . Знайти середнє значення е.р.с. самоіндукції, якщо індуктивність котушки  $2 \text{ мГн}$ .
571. По котушці індуктивністю  $5 \text{ мкГн}$  тече струм силою  $3 \text{ A}$ . При вмиканні струму він змінюється практично до нуля за час  $8 \text{ мс}$ . Визначити середнє значення Е.Р.С. самоіндукції, що виникає в контурі.
572. Е.р.с. самоіндукції, яка виникає в ланцюзі з індуктивністю  $2 \text{ Гн}$ , змінюється з часом згідно із законом  $\varepsilon_i = (10 + 4t)V$ . За яким законом змінюється сила струму в ланцюзі?
573. У одношаровій котушці з індуктивністю  $50 \text{ мГн}$  сила струму дорівнює  $5 \text{ A}$ . Яка кількість електрики індукується в котушці, якщо її довжина  $1 \text{ м}$ , а діаметр мідного дроту обмотки  $0,6 \text{ мм}$ ?
574. Котушка має  $1000$  витків, довжину котушки  $0,4 \text{ м}$ , перетин  $10 \text{ см}^2$ . З якою швидкістю потрібно міняти силу струму в котушці, щоб в ній виникла е.р.с. самоіндукції  $1 \text{ В}$ ?
575. Котушка, що намотана на немагнітний циліндричний каркас, має  $750$  витків і індуктивність  $25 \text{ мГн}$ . Щоб збільшити індуктивність котушки  $36 \text{ мГн}$ , обмотку котушки зняли і замінили обмоткою з тоншого дроту з таким розрахунком, щоб довжина котушки залишилася незмінною. Скільки витків стало в котушці після перемотування?
576. Соленоїд містить  $800$  витків. При силі струму  $6 \text{ A}$  магнітний потік дорівнює  $30 \text{ мкВб}$ . Визначити індуктивність соленоїда.
577. Скільки витків дроту діаметром  $2,5 \text{ мм}$  треба навити на картонний циліндр завдовжки  $0,6 \text{ м}$ , діаметром  $5 \text{ см}$ , щоб отримати котушку, індуктивність якої дорівнює  $6 \text{ мГн}$ ? Скільки шарів матиме обмотка цієї котушки?
578. На круглому дерев'яному циліндрі є обмотка з мідного дроту, маса якого рівна  $50 \text{ г}$ . Відстань між крайніми витками, становить  $0,6 \text{ м}$ , багато більше діаметру циліндра. Опір обмотки дорівнює  $30 \text{ Ом}$ . Яка її індуктивність?
579. Обмотка електромагніта з немагнітним осердям має опір  $10 \text{ Ом}$  і індуктивність  $1,2 \text{ Гн}$  і знаходиться під постійною напругою. У впродовж якого проміжку часу в обмотці виділиться така кількість теплоти, що буде дорівнювати енергії магнітного поля в осердді?
580. Соленоїд має  $800$  витків. При силі струму  $1 \text{ A}$  магнітний потік становить  $1 \text{ мВб}$ . Визначити енергію магнітного поля соленоїда. Осердя виконано з немагнітного матеріалу і магнітне поле у всьому об'ємі однорідне.
581. Яка енергія магнітного поля в котушці завдовжки  $0,5 \text{ м}$ , що має  $10000$  витків і діаметр  $0,25 \text{ м}$ , без магнітного осердя, якщо по ній тече струм  $2 \text{ mA}$ ?

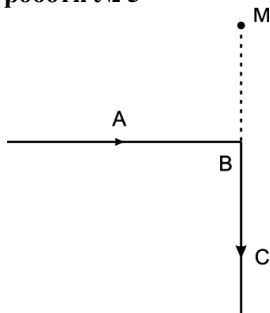
582. Соленоїд має довжину  $1\text{ м}$  і площу перетину  $20\text{ см}^2$ . При деякій силі струму, що протікає по обмотці, в соленоїді створюється магнітний потік  $80\text{ мкВб}$ . Чому дорівнює енергія магнітного поля соленоїда? Осердя виконано з немагнітного матеріалу, і магнітне поле у всьому об'ємі однорідно.
583. Обмотка соленоїда містить  $10$  витків на кожен сантиметр довжини. При якій силі струму об'ємна щільність енергії магнітного поля буде рівна  $1\text{ Дж/м}^3$ ? Осердя виконано з немагнітного матеріалу, і магнітне поле у всьому об'ємі однорідне.
584. Соленоїд завдовжки  $0,5\text{ м}$  і площею поперечного перетину  $2\text{ см}^2$  має індуктивність  $0,2\text{ мкГн}$ . При якій силі струму об'ємна щільність енергії магнітного поля всередині соленоїда буде дорівнювати  $1\text{ мДж/м}^3$ ?
585. Ланцюг складається з котушки індуктивністю  $1\text{ Гн}$ , і джерела струму. Джерело струму можна відключити, не розриваючи ланцюг. Час, після закінчення якого сила струму зменшиться до  $0,001$  первинного значення, становить  $0,69\text{ с}$ . Визначити опір котушки.
586. В електричному ланцюзі, що має опір  $10\text{ Ом}$  і індуктивність  $0,05\text{ Гн}$ , тече струм силою  $60\text{ А}$ . Визначити силу струму в ланцюзі через  $0,06\text{ мс}$  після її розмикання.
587. По замкнутому ланцюгу з опором  $23\text{ Ом}$  тече струм. Через  $10\text{ мс}$  після розмикання ланцюга сила струму в ній зменшилася в  $10$  разів. Визначити індуктивність ланцюга.
588. Джерело струму замкнули на котушку з опором  $20\text{ Ом}$  і індуктивністю  $0,4\text{ Гн}$ . Через який проміжок часу сила струму в ланцюзі досягне  $95\%$  максимального значення?
589. Котушка з індуктивністю  $250\text{ мГн}$  і опором  $0,3\text{ Ом}$  приєднується до джерела постійної напруги. Через який проміжок часу сила струму в котушці досягне: 1)  $50\%$  сталого значення, 2)  $75\%$  сталого значення?
590. На котушку, опір і індуктивність якої дорівнюють  $10\text{ Ом}$  і  $58\text{ мГн}$ , подається постійна напруга. Через скільки часу струм в котушці досягає величини, що становить половину сталого значення сили струму?



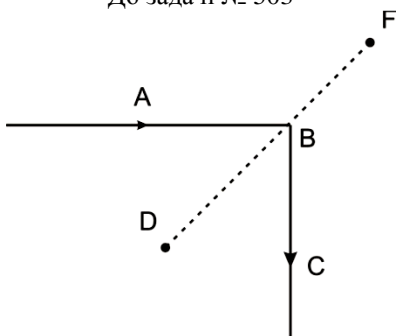
Рисунки до контрольної роботи № 5



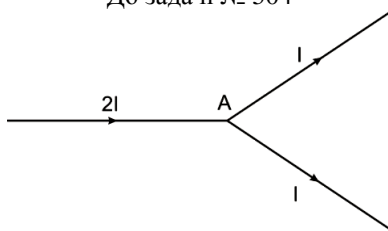
До задачі № 503



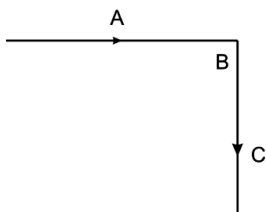
До задачі № 504



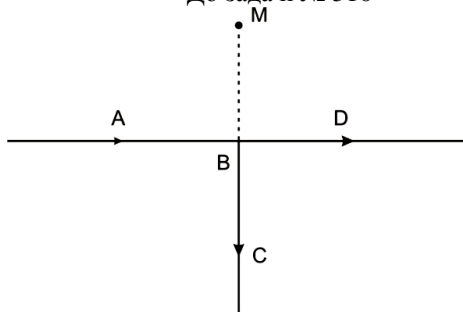
До задачі № 509



До задачі № 510



До задачі №511



## 8. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

В техніці і в оточуючому нас світі часто доводиться стикатися з **періодичними** (або **майже періодичними**) процесами, які повторюються через однакові проміжки часу. Такі процеси називаються **коливальними**. Коливальні явища різної фізичної природи підкоряються загальним закономірностям. Наприклад, коливання струму в електричному ланцюзі і коливання математичного маятника можуть описуватися однаковими рівняннями. Спільність коливальних закономірностей дозволяє розглядати коливальні процеси різної природи з єдиної точки зору.

**Механічними коливаннями** називаються періодичні (або майже періодичні) зміни фізичної величини, що описує механічний рух (швидкість, переміщення, кінетична і потенційна енергія і т. ін.).

Якщо в якій-небудь точці середовища, в якому близько розташовані атоми або молекули відчувають силову дію, збуджується процес механічних коливань, то цей процес буде з кінцевою швидкістю, залежною від властивостей середовища, розповсюджуватися від точки до точки. Так виникають **механічні хвилі**. Прикладами такого процесу є звукові хвилі в повітрі.

Як і коливання, хвильові процеси різної фізичної природи (звук, електро-магнітні хвилі, хвилі на поверхні рідини і т.ін.) мають багато спільного. Розповсюдження хвиль різної фізичної природи можна описувати за допомогою однакових математичних рівнянь. У цьому виявляється єдність матеріального світу.

### 8.1. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

#### 8.1.1. Гармонічні коливання

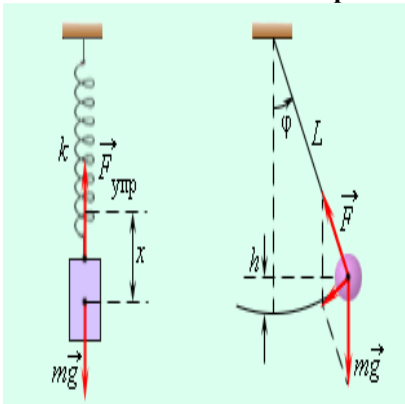


Рис. 8.1

**Механічними коливаннями** називають рухи тіл, що повторюються точно (або приблизно) через однакові проміжки часу. Закон руху тіла, що здійснює коливання, задається за допомогою деякої періодичної функції часу  $x = f(t)$ . Графічне зображення цієї функції дає наочне уявлення про протікання коливального процесу в часі. Прикладами простих коливальних систем можуть служити вантаж на пружині або математичний маятник (рис. 8.1).

Механічні коливання, як і коливальні процеси будь-якої іншої фізичної природи, можуть бути **вільними** і **вимушеними**. **Вільні коливання** здійснюються під дією **внутрішніх сил** системи, після того, як система була виведена із стану рівноваги. Коливання вантажу на пружині або коливання маятника є вільними коливаннями. Коливання, що відбуваються під дією **зовнішніх сил**, що періодично змінюються, називаються **вимушеними**. Найбільш простим видом коливального процесу є **гармонічні коливання**, які описуються рівнянням:

$$x = x_m \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Тут  $x$  – відхилення тіла від положення рівноваги,  $x_m$  – амплітуда коливань, тобто максимальне відхилення від положення рівноваги,  $\omega$  – **циклічна або кругова частота** коливань,  $t$  – час. Величина, що стоїть під знаком косинуса,  $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$  називається **фазою** гармонійного процесу. При  $t = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0$ , тому  $\varphi_0$  називають **початковою фазою**. Мінімальний інтервал часу, через який відбувається повторення руху тіла, називається **періодом коливань**  $T$ . Фізична величина, обернена періоду коливань, називається **частотою коливань**:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота коливань  $f$  показує, скільки коливань здійснюється за 1 с. Одиниця частоти – **Герц** (Гц). Частота коливань  $f$  пов'язана з циклічною частотою  $\omega$  і періодом коливань  $T$  співвідношеннями:  $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ .

### 8.1.2. Вільні коливання. Пружинний маятник .Математичний маятник. Фізичний маятник

**Вільні коливання** здійснюються під дією внутрішніх сил системи після того, як система була виведена з положення рівноваги.

Для того, щоб вільні коливання здійснювалися за гармонічним законом, необхідно, щоб сила, що намагається повернути тіло в положення рівноваги, була пропорційна відхиленню тіла від положення рівноваги і спрямована у бік, протилежний відхиленню:

$$F(t) = ma(t) = m\ddot{x}(t) = m\omega^2 x(t).$$

В цьому співвідношенні  $\omega$  – циклічна частота гармонічних коливань. Така властивість характерна для пружної сили в межах, коли можна застосовувати **закон Гука**:

$$F_{пр.} = -kx.$$

Сили будь-якої іншої фізичної природи, що задовольняють цій умові, називаються **квазіпружними**.

Таким чином, вантаж деякої маси  $m$ , прикріплений до пружини з жорсткістю  $k$ , другий кінець якої закріплений нерухомо (рис. 8.2), складають систему, здатну у відсутності тертя здійснювати вільні гармонічні коливання. Вантаж на пружині називають **лінійним гармонічним осцилятором**.

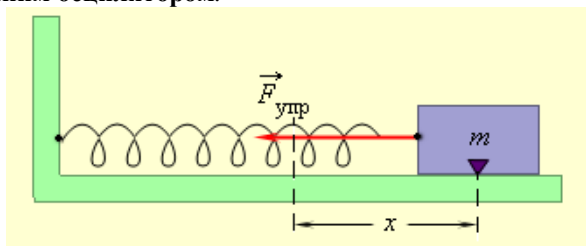


Рис. 8.2

Циклічна частота  $\omega_0$  вільних коливань вантажу на пружині визначається за другим законом Ньютона:  $ma = -kx = m\omega_0^2 x$ , звідки:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Частота  $\omega_0$  називається **власною частотою** коливальної системи.

Період  $T$  гармонічних коливань вантажу на пружині дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

При горизонтальному розташуванні системи пружина–вантаж сила тяжіння, прикладена до вантажу, компенсується силою реакції опори. Якщо ж вантаж підвищено на пружині, то сила тяжіння спрямована по лінії руху вантажу. У положенні рівноваги пружина розтягнута на величину  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{mg}{k},$$

і коливання здійснюються біля цього нового положення рівноваги.

**Математичним маятником** називають матеріальну точку, яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці, і знаходиться в полі сили тяжіння. У положенні рівноваги, коли маятник висить вертикально, сила тяжіння  $m\vec{g}$  врівноважується силою натягу нитки  $F_{np}$ . При відхиленні маятника від положення рівноваги на деякий кут  $\varphi$  з'являється дотична

складова сили тяжіння  $F_t = -mg \sin \varphi$  (рис. 8.3). Знак “мінус” в цій формулі означає, що дотична складова спрямована у бік, протилежний відхиленню маятника;  $x = L \varphi$  – відхилення маятника по дузі

Період коливань математичного маятника: 
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Будь-яке тіло, насажене на горизонтальну вісь обертання і здатне здійснювати в полі тяжіння вільні коливання, називається **фізичним** маятником (рис.8.4). Він відрізняється від математичного розподілом мас. У положенні стійкої рівноваги центр мас  $C$  фізичного маятника знаходиться нижче за вісь обертання  $O$  на вертикалі, що проходить через вісь. При відхиленні маятника на кут  $\varphi$  виникає момент сили тяжіння, який намагається повернути маятник в положення рівноваги:  $M = -(mg \sin \varphi) d$ .

Тут  $d$  – відстань між віссю обертання і центром мас  $C$ .

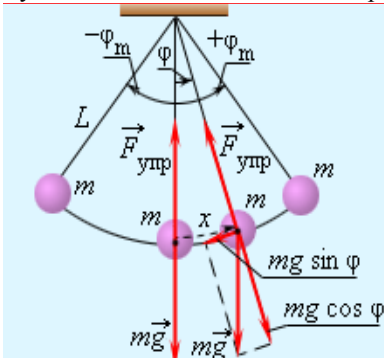


Рис. 8.3

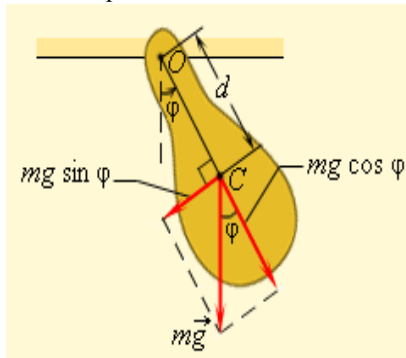


Рис. 8.4

Знак “мінус” в цій формулі, як завжди, означає, що момент сил намагається повернути маятник в напрямку, протилежному його відхиленню з положення рівноваги. Як і у разі математичного маятника момент  $M$ , що повертає маятник до положення рівноваги, пропорційний  $\sin \varphi$ . Це означає, що тільки при малих кутах  $\varphi$ , коли  $\sin \varphi \approx \varphi$ , фізичний маятник здатний здійснювати вільні гармонічні коливання. В разі малих коливань:

$$M = -mgd\varphi$$

і другий закон Ньютона для фізичного маятника приймає вигляд:

$$I\beta = M = -mgd\varphi,$$

де  $\beta$  – кутове прискорення маятника,  $I$  – момент інерції маятника відносно осі обертання  $O$ . Коефіцієнт пропорційності між прискорен-

ням і відхиленням (кутом відхилення  $\varphi$ ) дорівнює квадрату циклічної частоти:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I}.$$

Звідки:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Тут  $\omega_0$  – власна частота малих коливань фізичного маятника.

Отже:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

### 8.1.3. Перетворення енергії при вільних коливаннях

При вільних механічних коливаннях кінетична і потенціальна енергії змінюються періодично. При максимальному відхиленні тіла від положення рівноваги його швидкість, а отже, і кінетична енергія перетворюються в нуль. У цьому положенні потенціальна енергія тіла, що коливається, досягає максимального значення. Для вантажу на горизонтально розташованій пружині потенціальна енергія – це енергія пружних деформацій пружини. Для математичного маятника – це енергія в полі тяжіння Землі.

Коли тіло при своєму русі проходить через положення рівноваги, його швидкість максимальна. У цей момент воно має максимальну кінетичну і мінімальну потенціальну енергію. Збільшення кінетичної енергії відбувається за рахунок зменшення потенціальної енергії. При подальшому русі починає збільшуватися потенціальна енергія за рахунок спаду кінетичної енергії і т.д.

Таким чином, при гармонічних коливаннях відбувається періодичне перетворення кінетичної енергії на потенціальну і навпаки (рис. 8.5).

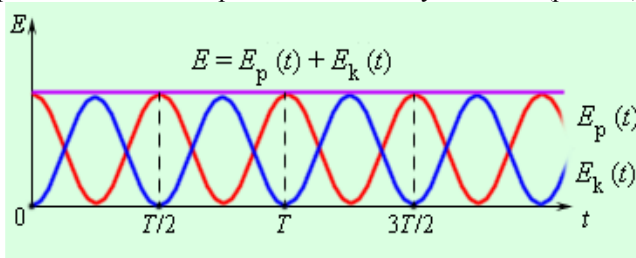


Рис. 8.5

Якщо в коливальній системі відсутнє тертя, то повна механічна енергія при вільних коливаннях залишається незмінною. Для вантажу на пружині:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \text{ де } k = \omega_0^2 m$$

### 8.1.4. Згасаючі коливання

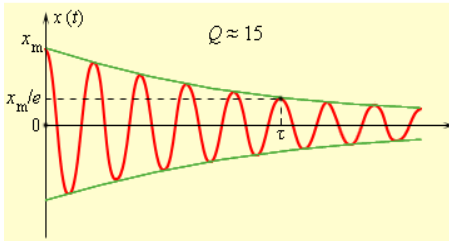


Рис. 8.6

В реальних умовах будь-яка коливальна система знаходиться під впливом сил тертя (опору). При цьому частина механічної енергії перетворюється на внутрішню енергію теплового руху атомів і молекул, і коливання стають затухаючими (згасаючими) (рис. 8.6).

Диференціальне рівняння згасаючих коливань можна вивести з другого закону Ньютона, якщо до квазіпружної сили додати силу опору, яка найчастіше пропорційна величині швидкості руху:

$$F_{on.} = -rv = r\dot{x}, \quad (r - \text{коефіцієнт опору}).$$

$$-kx - r\dot{x} = m\ddot{x}.$$

Це рівняння можна привести до канонічного вигляду:

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де  $\beta = \frac{r}{2m}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .  $\beta$  називають коефіцієнтом згасання.

Розв'язанням диференціального рівняння є наступна залежність координати від часу:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi_0),$$

де  $x_m = Ae^{-\beta t}$  - амплітуда згасаючих коливань, що зменшується за часом,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  - циклічна частота згасаючих коливань,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  -

період коливань. Відношення величин амплітуд в моменти часу, що відрізняються на період, називається декрементом згасання:

$$D = \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = e^{\beta T},$$

а його натуральний логарифм – логарифмічним декрементом згасання:  $\lambda = \beta T$ .

Швидкість згасання коливань залежить від величини сил тертя.

Інтервал часу  $\tau$ , на протязі якого амплітуда коливань зменшується в  $e = 2,718$  разів, називається **часом згасання**.

Частота вільних коливань залежить від швидкості їх загасання. При зростанні сил тертя власна частота зменшується. Проте, зміна власної частоти стає помітною лише при достатньо великих силах тертя, коли власні коливання згасають швидко.

### 8.1.5. Вимушені коливання. Резонанс

Коливання, що здійснюються під впливом зовнішньої періодичної сили, називаються вимушеними.

Періодична зовнішня сила може змінюватися в часі за різними законами. Особливий інтерес викликає випадок, коли зовнішня сила, що змінюється за гармонійним законом з частотою  $\omega$ , впливає на коливальну систему, здатну здійснювати власні коливання на деякій частоті  $\omega_0$ .

Розглянемо, для прикладу, вимушені коливання тіла на пружині (рис. 8.7).

$l$  – довжина недеформованої пружини,  $k$  – жорсткість пружини. Зовнішня сила  $F_{зов.}$  прикладена до вільного кінця пружини. Вона примушує вільний (лівий на рис. 8.7) кінець пружини переміщуватися згідно з законом:

$$y = y_m \cos \omega t,$$

де  $y_m$  – амплітуда коливань,  $\omega$  – циклічна частота.

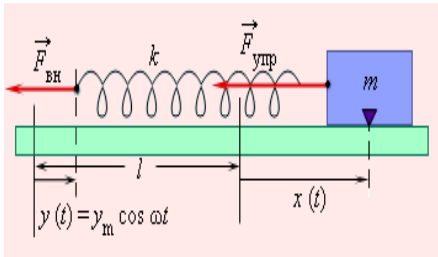


Рис. 8.7

Другий закон Ньютона для тіла масою  $m$  приймає вигляд :

$$ma = -k(x - y) = -kx - ky_m \cos \omega t.$$

В цьому рівнянні сила, що діє на тіло, представлена у вигляді двох доданків. Перший доданок в правій частині – це пружна сила, що намагається повернути тіло в положення рівноваги ( $x=0$ ). Другий доданок – зовнішня періодична сила, що діє на тіло. Цей доданок називають **змушуючою силою**.

Тоді **рівняння вимушених коливань** запишеться у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t.$$

Якщо частота  $\omega$  зовнішньої сили наближається до власної частоти  $\omega_0$ , то виникає різке зростання амплітуди вимушених коливань. Це явище називається **резонансом**. Залежність амплітуди  $x_m$  вимушених коливань від частоти  $\omega$  змушуючої сили називається **резонансною характеристикою** або **резонансною кривою** (рис. 8.8). На цьому рисунку резонансні криві при різних рівнях загасання: 1 – коливальна система без тертя (при



резонансі амплітуда  $x_m$  вимушених коливань необмежено зростає); 2,3,4 - коливальні системи з тертям (при резонансі амплітуди  $x_m$  вимушених коливань зменшуються зі зростанням сили тертя).

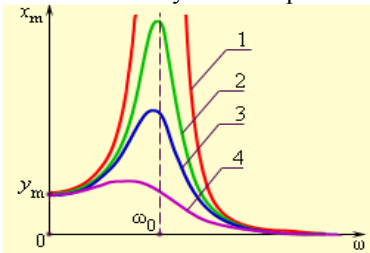


Рис. 8.8

Явище резонансу може з'явитися причиною руйнування мостів, будівель і інших споруд, якщо власні частоти їх коливань співпадуть з частотою сили, що періодично діє, виникла, наприклад, із-за обертання незбалансованого мотора.

## 8.2. Електромагнітні коливання

Серед різних електричних явищ особливе місце займають електромагнітні коливання, при яких електричні величини (заряди, струми, електричні і магнітні поля) змінюються періодично. Для збудження і підтримання електромагнітних коливань потрібні певні системи, найпростішою з яких є коливальний контур – коло, що складається з ввімкнених послідовно котушки індуктивності  $L$ , конденсатора ємності  $C$  і резистора з опором  $R$ .

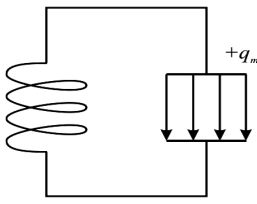
Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, опір якого малий ( $R = 0$ ). Для збудження коливань в контурі конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладинкам заряди  $\pm q_m$  (рис. 8.9).

Тоді в початковий момент  $t = 0$  між обкладинками конденсатора виникає електричне поле, енергія якого дорівнює  $W_{ем} = \frac{1}{2C} q_m^2$ .

При замиканні конденсатора на котушку він починає розряджатися і в контурі потече струм  $I$ , який з часом зростає. Цей струм створить в котушці магнітне поле, що також зростає і в свою чергу викличе появу в котушці е.р.с. самоіндукції, яка буде спрямована в напрямку протилежного струму розрядки. Оскільки швидкість зміни струму розрядки конденсатора зменшується, то зменшується е.р.с. самоіндукції і струм розрядки наростає. В результаті енергія електричного поля буде зменшуватись, а магнітного поля котушки – зростати. При виконанні умови  $R = 0$  згідно із законом збереження енергії повна енергія:

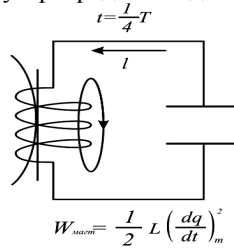
$$W = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = const.$$

Тому в момент часу  $t = \frac{1}{4}T$ , коли конденсатор розрядиться (рис.8.10), енергія електричного поля буде дорівнювати нулю, а енергія магнітного поля і сила струму досягнуть максимального значення. З цього моменту струм в контурі починає зменшуватись і почне зменшуватись магнітне поле котушки, і в ній індукується струм, який тече в тому самому напрямку, що і струм розрядки конденсатора.



$$W_{\text{ем}} = \frac{1}{2C} q_m^2$$

Рис. 8.9

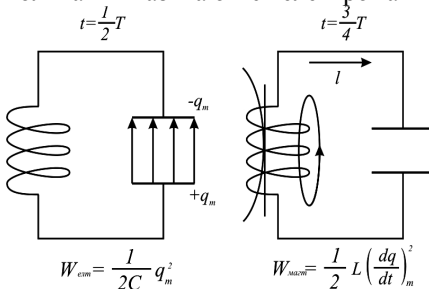


$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)_m^2$$

Рис. 8.10

Конденсатор почне перезаряджатися, виникає електричне поле, яке намагається зменшити струм, який в кінці кінців буде дорівнювати нулю, а заряд на обкладках конденсатора при цьому досягне максимуму. Далі ті самі процеси почнуть протікати в зворотному напрямку і система прийде до початкового стану. Після цього почнеться повторення розглянутого циклу розрядження і зарядження конденсатора (рис.8.11). Якщо би втрати енергії не було, то в контурі відбувались би періодичні незгасаючі коливання.

Таким чином, в контурі виникають коливання, які супроводжуються перетворенням енергії електричного і магнітного полів. Такі коливання називаються електромагнітними.



$$W_{\text{ем}} = \frac{1}{2C} q_m^2$$

Рис. 8.11

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)_m^2$$

Згідно з другим правилом Кірхгофа для довільного контура, що містить елементи  $L, C, R$ , можна записати:  $IR + U_c = E_s$ , де  $IR$  - падіння напруги на резисторі,  $U_c = \frac{q}{C}$  - напруга на конденсаторі,

$$E_s = -L \frac{dI}{dt}$$

- е.р.с.

самоіндукції.

Отже:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0$$

Оскільки  $I = \frac{dq}{dt}$  і  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , то  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$ .

Якщо зовнішні е.р.с. відсутні, то коливання будуть вільними. Якщо  $R = 0$ , в контурі будуть відбуватися гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань заряду  $q$  в контурі є:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2q = 0.$$

Розв'язанням цього рівняння є наступний вираз:  $q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ,

де  $q_m$  - амплітуда коливань заряду конденсатора з циклічною частотою, яка називається власною частотою контуру:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Період власних коливань, які виникають в контурі:  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ .

Це співвідношення називають формулою Томсона.

Сила струму в коливальному контурі змінюється за законом:

$$I = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{де} \quad I_m = \omega_0 q_m - \text{амплітуда сили струму.}$$

Впродовж першої половини періоду струм іде в одному напрямку, протягом другої половини – в протилежному. Напруга на конденсаторі дорівнює:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{де} \quad U_m = \frac{q_m}{C} -$$

амплітуда напруги.

Колівання струму  $i$  випереджують по фазі коливання заряду  $q$  на  $\frac{\pi}{2}$ , тобто коли струм досягає максимального значення, заряд і напруга дорівнюють нулю і навпаки. Оскільки  $U_m = \frac{q_m}{C}$  і

$$I_m = \omega_0 q_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}}, \quad \text{то} \quad U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величину  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  називають хвильовим опором контура.

### 8.3. ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

#### Основні властивості електромагнітних хвиль

Згідно з теорією Максвелла змінні електричне і магнітне поля тісно взаємозв'язані, вони утворюють єдине електромагнітне поле.

Джерелами- електромагнітного поля є різні змінні струми: змінний струм у провідниках, коливальний рух іонів, електронів і інших заряджених частинок.

Змінне електричне поле, яке виникає під час руху зарядів, породжує змінне магнітне поле, а змінне магнітне поле створює в свою чергу змінне електричне поле. Ці вторинні змінні поля мають вихровий характер. Отже, у просторі, який оточує заряди, виникає послідовність взаємних перетворень електричних і магнітних полів, що поширюються від точки до точки. Цей процес буде періодичним у часі і просторі і, отже, являє собою хвилю.

Електромагнітними хвилями називаються збурення електромагнітного поля, що поширюються у просторі.

Джерелом електромагнітних хвиль може бути і коливальний контур. Щоб випромінювання відіграло помітну роль, необхідно здійснити перехід від закритого коливального контуру, в якому електричне поле зосереджене між обкладками конденсатора, а магнітне – всередині котушки індуктивності, до відкритого коливального контуру (вібратор Герца), що має вигляд двох стрижнів, розділених іскровими проміжками. У відкритому контурі змінне електричне поле заповнює простір, який оточує контур, що істотно підвищує інтенсивність електромагнітного випромінювання.

З рівнянь Максвелла можна отримати рівняння плоскої електромагнітної хвилі:

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad H_y = H_0 \cos(\omega t - kx)$$

де  $\omega$  - циклічна частота хвилі,  $k = \frac{\omega}{v}$  - хвильове число.

Фазова швидкість електромагнітних хвиль визначається виразом:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \text{де } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} - \text{електродинамічна стала, яка є}$$

швидкість електро-магнітних хвиль у вакуумі. (Для вакууму  $\mu = \epsilon = 1$  і  $c = V$ ).

Оскільки  $\epsilon\mu > 1$ , швидкість поширення електромагнітних хвиль у речовині завжди менша, ніж у вакуумі.

Величина  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  збігається з швидкістю поширення світла у вакуумі. Це привело Максвелла до думки про електромагнітну природу світла.

З рівнянь Максвелла випливає висновок про те, що вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в електромагнітній хвилі завжди взаємно перпендикулярні. Крім того, вони лежать у площині, перпендикулярній до напрямку

поширення хвилі, тобто до вектора швидкості хвилі. Отже, електромагнітні хвилі є поперечними. Косинусоїдальна електромагнітна хвиля називається монохроматичною хвилею. В кожній точці електромагнітного поля монохроматичної хвилі проєкції векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  на осі координат інерціальної системи відліку здійснюють гармонічні коливання однакової частоти  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ , яка називається частотою хвилі. Довжина хвилі  $\lambda$ , період  $T$ , частота  $\nu$  і швидкість поширення електромагнітної хвилі  $v$  зв'язані між собою співвідношенням:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}.$$

Електромагнітне поле має енергію, тому поширення електромагнітних хвиль пов'язане з перенесенням енергії в полі. Подібно до того, як поширення пружних хвиль у речовині пов'язане з перенесенням механічної енергії. Об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі складається з об'ємних густин і електричного і магнітного полів:

$$w = w_{el.} + w_m = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

## 9. ХВИЛЬОВА ОПТИКА

### 9.1. РОЗВИТОК УЯВЛЕНЬ ПРО ПРИРОДУ СВІТЛА

В кінці XVII століття виникли дві теорії світла: **корпускулярна** (*І. Ньютон*) і **хвильова** (*Р. Гук і Х. Гюйгенс*).

Згідно корпускулярної теорії, світлом є потік частинок (корпускул), що випромінюються тілами, що світяться. Ньютон вважав, що рух світлових корпускул підкоряється законам механіки. Так, відбиття світла розумілося аналогічно відбиттю пружної кульки від площини. Заломлення світла пояснювалося зміною швидкості корпускул при переході з одного середовища в інше. Для випадку заломлення світла на межі двох прозорих середовищ корпускулярна теорія приводила до наступного вигляду закону заломлення:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}.$$

$\varphi$ - кут падіння,  $\psi$ - кут заломлення,  $v_1$  і  $v_2$ - швидкості світла у середовищах 1 і 2,  $n_{12}$  називається відносним показником заломлення двох середовищ.

Для випадку заломлення світла на межі вакуум–середовище корпускулярна теорія приводила до наступного вигляду закону заломлення:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v}{c} = n.$$

$v$  і  $c$ - швидкості світла у середовищі і вакуумі,  $n$  називається абсолютним показником заломлення.

Хвильова теорія, на відміну від корпускулярної, розглядала світло як хвильовий процес, подібний до механічних хвиль. У основу хвильової теорії був покладений **принцип Гюйгенса**, згідно якому кожна точка, до якої доходить хвиля, стає центром вторинних хвиль, а поверхня, що огинає ці вторинні хвилі дає положення **хвильового фронту** в наступний момент часу (рис. 3.1). Під хвильовим фронтом Гюйгенс розумів геометричне місце точок, до яких одночасно доходить хвильове збурення. За допомогою принципу Гюйгенса були пояснені закони відбиття і заломлення світла. Рис. 9.1 дає уявлення про побудову Гюйгенса для визначення напряму розповсюдження хвилі, що заломлюється на межі двох прозорих середовищ.

Хвильова теорія приводить до того ж закону заломлення, що і корпускулярна теорія.

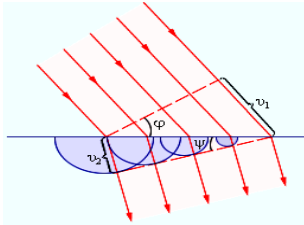


Рис. 9.1

У 60-і роки XIX століття Максвеллом були встановлені загальні закони електро-магнітного поля, які привели його до висновку, що світло – це електромагнітні хвилі. Електромагнітна природа світла отримала визнання після дослідів Г. Герца по дослідженню електромагнітних хвиль (1887–1888 рр.).

На початку XX століття після дослідів

П.М.Лебедева по вимірюванню світлового тиску (1901 р.) електромагнітна теорія світла перетворилася на твердо встановлений факт.

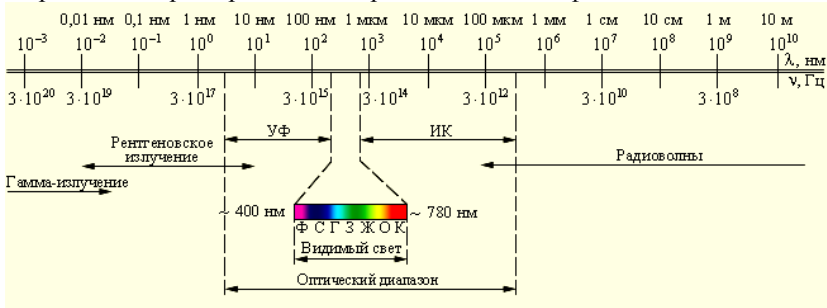


Рис. 9.2

Світло відіграє надзвичайно важливу роль в нашому житті. Переважну кількість інформації про навколишній світ чоловік отримує за допомогою світла. Проте, в оптиці як розділі фізики, під світлом розуміють не тільки видиме світло, але і широкі діапазони спектру електромагнітного випромінювання, що примикають до нього, – інфрачервоний (ІЧ) і ультрафіолетовий (УФ). За своєю фізичною властивістю світло принципово не відрізняється від електромагнітного випромінювання інших діапазонів – різні ділянки спектру відрізняються одна від одної тільки довжиною хвилі  $\lambda$  і частотою  $\nu$ . Рис. 9.2 дає уявлення про шкалу електромагнітних хвиль. Межі між різними діапазонами умовні.

Для вимірювання довжин хвиль в оптичному діапазоні використовуються одиниці довжини: 1 **нанометр** (нм), 1 **мікрометр** (мкм) і 1 **ангстрем** (Å):  $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м} = 10^{-7} \text{ см} = 10^{-3} \text{ мкм} = 10 \text{ Å}$

Видиме світло займає діапазон приблизно від 400 нм до 780 нм або від 0,40 мкм до 0,78 мкм або від 4000 Å до 7800 Å.

Електромагнітна теорія світла дозволила пояснити багато оптичних явищ, таких як інтерференція, дифракція, поляризація і т. ін.

Для пояснення таких явищ, як випромінювання чорного тіла, фотоефект, ефект Комптона і ін. було потрібно введення **квантових**

**уявленн.** Наука знов повернулася до ідеї корпускул – світлових квантів. Той факт, що світло в одних дослідах виявляє хвильові властивості, а в інших – корпускулярні, означає, що воно має складну подвійну природу, яку прийнято характеризувати терміном **корпускулярно-хвильовий дуалізм**.

## 9.2. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛОВИХ ХВИЛЬ

**Інтерференція** – один з яскравих проявів хвильової природи світла. Це цікаве і красиве явище спостерігається при накладанні двох або декількох світлових пучків. Інтенсивність світла в області перекривання пучків має характер світлих і темних смуг, що чергуються, причому в максимумах інтенсивність більша, а в мінімумах менше суми інтенсивностей пучків. При використанні білого світла **інтерференційні смуги** виявляються забарвленими в різні кольори спектру. Перший експеримент по спостереженню інтерференції світла в лабораторних умовах належить І. Ньютону. Він спостерігав інтерференційну картину, що виникає при відзеркаленні світла в тонкому повітряному прошарку між плоскою скляною пластинкою і плоскоопуклою лінзою великого радіуса кривини (рис. 9.3). Інтерференція виникає при накладанні хвиль, що відбилися від двох сторін повітряного прошарку. Промені 1 і 2 – напрями розповсюдження відбитих хвиль;  $h$  – товщина повітряного прошарку. Інтерференційна картина мала вигляд концентричних кілець, що отримали назву **кілець Ньютона** (рис. 9.4, кільця Ньютона в зеленому і червоному світлі).

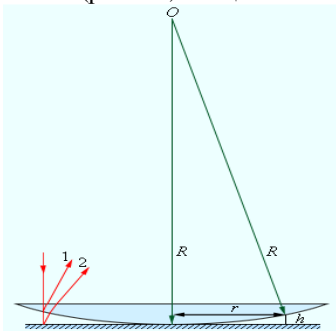


Рис. 9.3

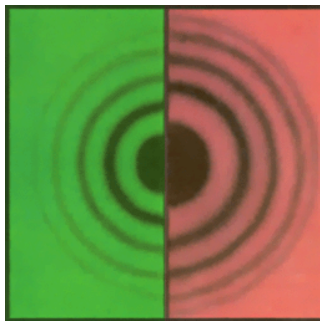


Рис. 9.4

Першим інтерференційним дослідом, що отримав пояснення на основі хвильової теорії світла, є **дослід Юнга** (1802 р.).

У досліді Юнга світло від джерела, яким була вузька щілина  $S$ , падало на екран з двома близько розташованими щілинами  $S_1$  і  $S_2$  (рис. 9.5). Проходячи крізь кожну з щілин, світловий пучок розширювався внаслідок дифракції, і тому на білому екрані  $E$  світлові пучки, що пройшли через щілини  $S_1$  і  $S_2$ , перекривалися. В області перекриття



світлових пучків спостерігалася інтерференційна картина у вигляді світлих і темних смуг, що чергуються.

Юнг був першим, хто зрозумів, що не можна спостерігати інтерференцію при накладанні хвиль від двох незалежних джерел. Тому в його досліді щілини  $S_1$  і  $S_2$ , які відповідно до принципу Гюйгенса можна розглядати як джерела вторинних хвиль, освітлювалися світлом від одного джерела  $S$ . При симетричному розташуванні щілин вторинні хвилі, що випускаються джерелами  $S_1$  і  $S_2$ , знаходяться у фазі, але ці хвилі проходять до точки спостереження  $P$  різні відстані  $r_1$  і  $r_2$ . Отже, фази коливань, що створюються хвилями від джерел  $S_1$  і  $S_2$  в точці  $P$ , взагалі кажучи, різні. Таким чином, завдання про інтерференцію хвиль зводиться до завдання про накладання коливань однієї і тієї ж частоти, але з різними фазами. Важливим є те, що різниця фаз хвиль повинна бути постійна в часі величина. Такі хвилі називаються когерентними. На рис.9.6 показано розподіл інтенсивності в інтерференційній картині. Ціле число  $m$  – порядок інтерференційного максимуму.

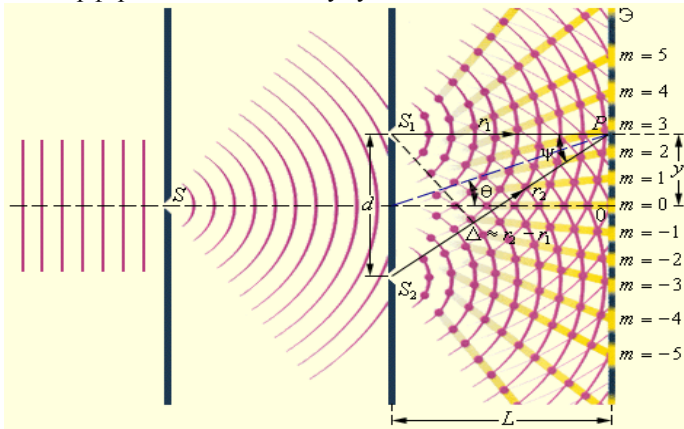


Рис. 9.5

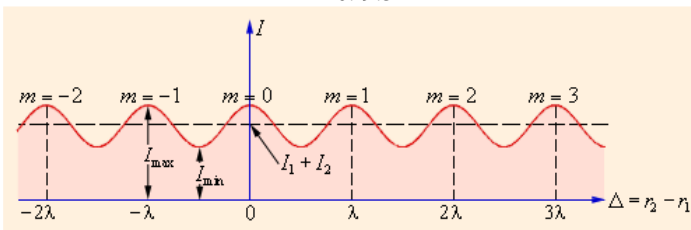


Рис. 9.6

Таким чином, інтерференція може виникнути тільки при накладанні когерентних коливань. Хвилі, що створюють в точці спостереження

когерентні коливання, також називаються когерентними. Хвилі від двох незалежних джерел некогерентні і не можуть дати сталої інтерференційної картини. Т. Юнг інтуїтивно вгадав, що для отримання інтерференції світла потрібно хвилю від одного джерела розділити на дві когерентні хвилі і потім спостерігати на екрані результат їх накладання.

### 9.3. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

**Дифракцією світла** називається явище відхилення світла від прямолінійного напрямку розповсюдження при проходженні поблизу перешкод. Як показує дослід, світло за певних умов може заходити в область геометричної тіні. Якщо на шляху паралельного світлового пучка розташована кругла перешкода (круглий диск, кулька або круглий отвір в непрозорому екрані), то на екрані, розташованому на достатньо великій відстані від перешкоди, з'являється **дифракційна картина** – система світлих і темних кілець, що чергуються. Якщо перешкода має лінійний характер (щілина, нитка, край екрану), то на екрані виникає система паралельних дифракційних смуг.

Дифракційні явища були добре відомі ще в часи Ньютона, але пояснити їх на основі корпускулярної теорії світла виявилось неможливим. Перше якісне пояснення явища дифракції на основі хвильових уявлень було надано англійським вченим *Т. Юнгом*. Незалежно від нього в 1818 р. французький вчений *О. Френель* розвинув кількісну теорію дифракційних явищ. В основу теорії Френель поклав **принцип Гюйгенса**, для чого доповнив його ідеєю про інтерференцію вторинних хвиль. Принцип Гюйгенса в його первинному вигляді дозволяв знаходити тільки положення хвильових фронтів в подальші моменти часу, тобто визначати напрямок розповсюдження хвилі. По суті, це був принцип геометричної оптики. Гіпотезу Гюйгенса про огинаючу вторинних хвиль Френель замінив фізично ясним положенням, згідно якому вторинні хвилі, які приходять в точку спостереження, інтерферують одна з одною. Принцип **Гюйгенса – Френеля** також був певною гіпотезою, але подальший розвиток уявлень в цьому напрямку підтвердив її справедливість. В ряді практично важливих випадків вирішення дифракційних задач на основі цього принципу дає достатньо хороший результат. Рис. 9.7 ілюструє принцип Гюйгенса – Френеля.

Розглянемо як приклад просту дифракційну задачу про проходження плоскої монохроматичної хвилі від віддаленого джерела через невеликий круглий отвір радіусу  $R$  в непрозорому екрані (рис. 9.8).

Точка спостереження  $P$  знаходиться на осі симетрії на відстані  $L$  від екрану. Відповідно до принципу Гюйгенса – Френеля хвильову поверхню, що співпадає з площиною отвору, слід уявити зіставленою з

вторинних джерел, хвилі від яких досягають точки  $P$ . В результаті інтерференції вторинних хвиль в точці  $P$  виникає деяке результуюче коливання, квадрат амплітуди якого (інтенсивність) потрібно визначити при заданих значеннях довжини хвилі  $\lambda$ , амплітуди  $A_0$  падаючої хвилі і геометрії задачі. Для полегшення розрахунку Френель запропонував розбити хвильову поверхню падаючої хвилі в місці розташування перешкоди на кільцеві зони (зони Френеля) за наступним правилом: відстань від меж сусідніх зон до точки  $P$  повинні відрізнятися на половину довжини хвилі, тобто:

$$r_1 = L + \frac{\lambda}{2}; r_2 = L + 2 \frac{\lambda}{2}; r_3 = L + 3 \frac{\lambda}{2} \dots$$

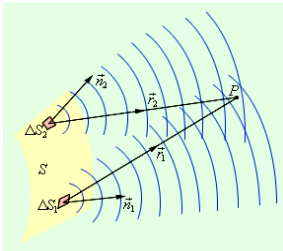


Рис. 9.7

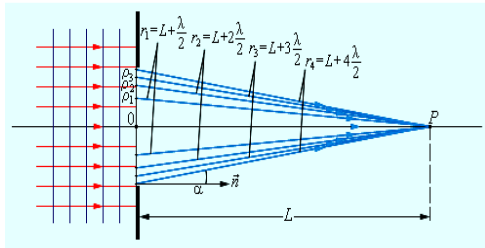


Рис. 9.8

Якщо дивитися на хвильову поверхню з точки  $P$ , то межі зон Френеля будуть концентричними колами (рис.9.9).

З рис.3.8 легко знайти радіуси  $\rho_m$  зони Френеля:

$$\rho_m = \sqrt{r_m^2 - L^2} = \sqrt{m\lambda L + m^2 \frac{\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{m\lambda L}.$$

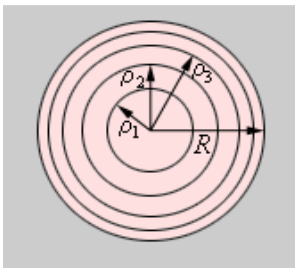


Рис. 9.9

При виконанні умови  $\lambda \ll L$ , другим членом під коренем можна знехтувати. Кількість зон Френеля, що укладаються на отворі, визначається його радіусом  $R$ :

$$m = \frac{R^2}{L\lambda}.$$

Френель висловив припущення (підтвержене експериментом), що зі збільшенням кута  $\alpha$  амплітуда коливань зменшується, але зменшення це не є дуже значним:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_m$$

де  $A_m$  – амплітуда коливань, які викликаються зоною за номером  $m$ .

Оскільки відстані від двох сусідніх зон до точки спостереження відрізняються на  $\frac{\lambda}{2}$ , то, коливання, що приходять в точку спостереження від сусідніх зон, приходять в протифазі. Тому хвилі від будь-яких двох сусідніх зон майже гасять одна одну. Сумарна амплітуда в точці спостереження є:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = A_1 - (A_2 - A_3) - (A_4 - A_5) - \dots < A_1$$

Таким чином, сумарна амплітуда коливань в точці  $P$  завжди менше амплітуди коливань, яку б викликала одна перша зона Френеля. Зокрема, якби були відкриті всі зони Френеля, то до точки спостереження дійшла б незбурена перешкодою хвиля з амплітудою  $A_0$ . В цьому випадку можна записати:

$$A = A_0 = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2},$$

оскільки вирази, що стоять в дужках, дорівнюють нулю. Отже, дія (амплітуда), викликана всім хвильовим фронтом, дорівнює половині дії однієї першої зони.

Отже, якщо отвір в непрозорому екрані залишає відкритою тільки одну зону Френеля, то амплітуда коливань в точці спостереження зростає у 2 рази (а інтенсивність – у 4 рази) в порівнянні з дією незбуреної хвилі. Якщо відкрити дві зони, то амплітуда коливань звертається в нуль.

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \gg 1 \Rightarrow R^2 \gg L\lambda$$

Ця сильна нерівність визначає **межу застосовності геометричної оптики**. Вузкий пучок світла, який в геометричній оптиці називається променем, може бути сформований тільки при виконанні цієї умови. Таким чином, **геометрична оптика є граничним випадком хвильової оптики**.

Вище був розглянутий випадок дифракції світла від віддаленого джерела на перешкодах круглої форми. Якщо точкове джерело світла знаходиться на кінцевій відстані, то на перешкоду падає сферична хвиля. В цьому випадку геометрія задачі декілька ускладнюється, оскільки тепер зони Френеля потрібно будувати не на плоскій, а на сферичній поверхні (рис.9.10).

Розрахунок приводить до наступного виразу для радіуса  $\rho_m$  зони Френеля на сферичному фронті хвилі:

$$\rho_m = \sqrt{m \frac{ab}{a+b}} \lambda.$$

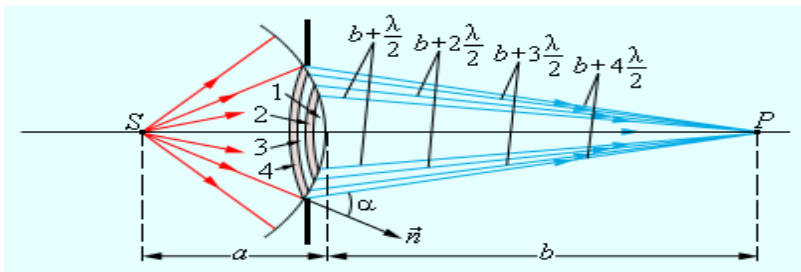


Рис. 9.10

### Спектральні прилади. Дифракційні ґратки

До складу видимого світла входять монохроматичні хвилі з різними значеннями довжин хвиль. У випромінюванні нагрітих тіл (нитка лампи розжарювання) довжини хвиль безперервно заповнюють весь діапазон видимого світла. Таке випромінювання називається **білим світлом**. Світло, що випускається, наприклад, газорозрядними лампами і багатьма іншими джерелами, містить в своєму складі окремі монохроматичні складові з деякими виділеними значеннями довжин хвиль. Сукупність монохроматичних компонент у випромінюванні називається **спектром**. Біле світло має **безперервний спектр**, а випромінювання джерел, в яких світло випускається атомами речовини, має **дискретний спектр**. Прилади, за допомогою яких досліджуються спектри випромінювання джерел, називаються **спектральними приладами**.

Для розкладання випромінювання в спектр в простому спектральному приладі використовується призма (рис. 9.11). Дія призми заснована на явищі **дисперсії**, тобто залежності показника заломлення  $n$  речовини від довжини хвилі світла  $\lambda$ .

Перший дослід по розкладанню білого світла в спектр був здійснений **І. Ньютоном** (1672р.).

В спектральних приладах високого класу замість призм застосовуються **дифракційні ґратки**.

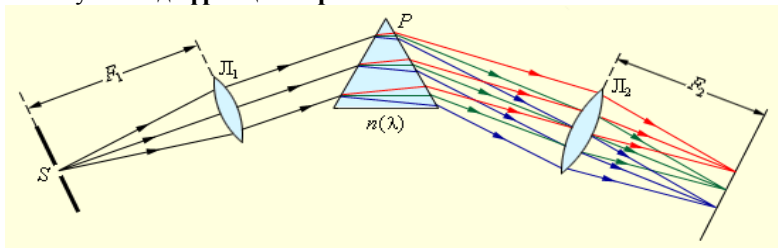


Рис. 9.11

Гратками є періодичні структури, вигравійовані спеціальною ділильною машиною на поверхні скляної або металеві пластинки (рис. 9.12). У хороших ґраток паралельні один одному штрихи мають довжину порядку 10 см, а на кожному міліметрі міститься до 2000 штрихів. При цьому загальна довжина ґратки досягає 10–15 см. Виготовлення таких ґраток вимагає застосування найвищих технологій. На практиці застосовуються також і грубіші ґратки з 50–100 штрихами на міліметр, нанесеними на поверхню прозорої плівки. Як і дифракційні ґратки може бути використаний шматочок компакт-диска або навіть уламок грамофонної платівки.

Прості дифракційні ґратки складаються з прозорих ділянок (щілин), розділених непрозорими проміжками. На ґратку за допомогою коліматора прямує паралельний пучок досліджуваного світла. Спостереження ведеться у фокальній площині лінзи, встановленої за ґраткою (рис. 9.13).

У кожній точці  $P$  на екрані у фокальній площині лінзи зберуться промені, які до лінзи були паралельні між собою і розповсюджувалися під певним кутом  $\theta$  до напрямку падаючої хвилі. Коливання в точці  $P$  є результатом інтерференції вторинних хвиль, що приходять в цю точку від різних щілин. Для того, щоб в точці  $P$  спостерігався інтерференційний максимум, різниця ходу  $\Delta$  між хвилями, що йдуть від сусідніх щілин, повинна дорівнювати цілому числу довжин хвиль:

$$d \sin \theta_m = m\lambda; (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тут  $d$  – період ґратки,  $m$  – ціле число, яке називається **порядком дифракційного максимуму**. У тих точках екрану, для яких ця умова виконана, розташовуються так звані **головні максимуми** дифракційної картини.

Рис.9.14 дає уявлення про те, як міняється гострота головних максимумів при збільшенні числа щілин ґратки.  $I_0$  – інтенсивність коливань при дифракції світла на одній щіліні.

Внаслідок формули для дифракційних ґраток, положення головних максимумів (окрім нульового) залежить від довжини хвилі  $\lambda$ . Тому ґратки здатні розкладати випромінювання в спектр, тобто вони є **спектральними приладами**. Внаслідок формули для дифракційних ґраток, положення головних максимумів (окрім нульового) залежить від довжини хвилі  $\lambda$ . Тому ґратки здатні розкладати випромінювання в спектр, тобто вони є **спектральними приладами**.

Якщо на ґратку падає немоно-хроматичне випромінювання, то в кожному поряд-ку дифракції (тобто при кожному значенні  $m$ ) виникає спектр досліджуваного випро-мінювання, причому фіолетова частина спектру розташовується ближче до максимуму нульового порядку.

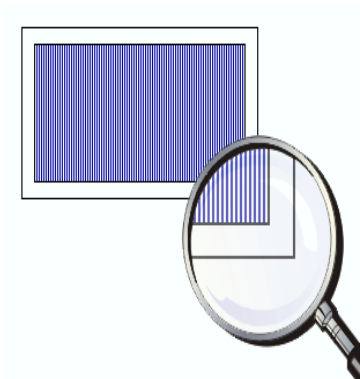


Рис. 9.12

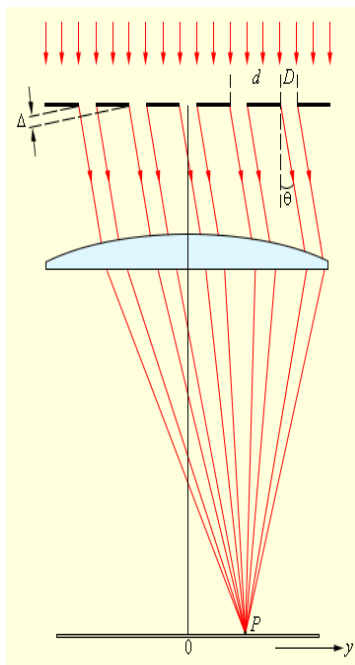


Рис. 9.13

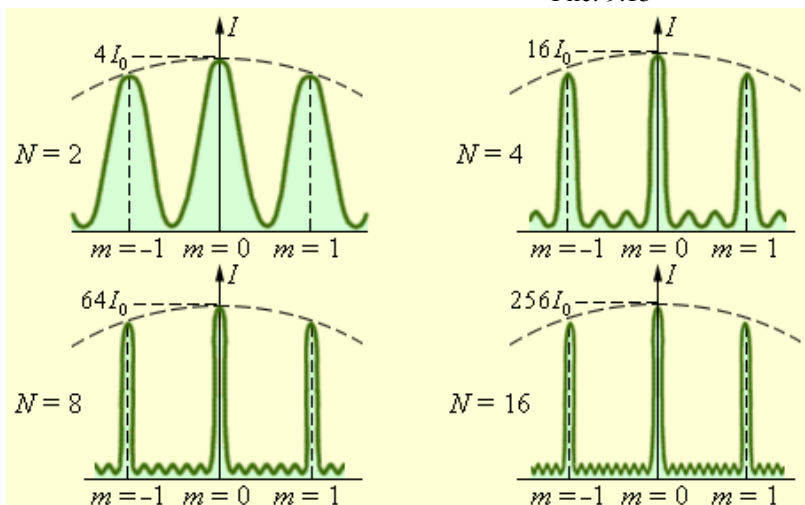


Рис. 9.14

На початку XIX століття, коли Т.Юнг і О.Френель розвивали хвильову теорію світла, природа світлових хвиль була невідома. На першому етапі передбачалося, що світло є подовжніми хвилями, які розповсюджуються в деякому гіпотетичному середовищі – **ефірі**. При вивченні явищ інтерференції і дифракції питання про те, чи є світлові хвилі подовжніми або поперечними, мало другорядне значення. У той час здавалося неможливим, що світло – це поперечні хвилі, оскільки по аналогії з механічними хвилями довелося б припускати, що ефір – це тверде тіло (поперечні механічні хвилі не можуть розповсюджуватися в газоподібному або рідкому середовищі).

#### 9.4. ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

Проте, поступово накопичувалися експериментальні факти, що свідчили на користь поперечності світлових хвиль. В електромагнітній хвилі вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  перпендикулярні один до одного і лежать в площині, перпендикулярній напрямку розповсюдження хвилі. У всіх процесах взаємодії світла з речовиною основну роль грає електричний вектор  $\vec{E}$ , тому його називають світловим **вектором**. Якщо при розповсюдженні електромагнітної хвилі світловий вектор зберігає свою орієнтацію, таку хвилю називають лінійно **поляризованою** або **плоско поляризованою**.

Площина, в якій коливається світловий вектор  $\vec{E}$ , називається **площиною коливань**, а площина, в якій здійснює коливання магнітний вектор  $\vec{B}$ , – **площиною поляризації**.

Світло, у якому напрямки коливань векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  швидко і безладно змінюють один одного називається **неполяризованим** або **природним**. Світло, у якому напрямки коливань векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  будь-яким чином упорядковані, називається **поляризованим** або **частково поляризованим**. При цьому інтенсивність світла, яке пройшло крізь прилад, що зветься **поляризатором**, змінюється від  $I_{\min}$  до  $I_{\max}$  при обертанні поляризатора на прямий кут навколо осі, що збігається з напрямком розповсюдження світла.

Ступінь поляризації визначається наступним виразом:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Для природного світла  $I_{\min} = I_{\max}$ , і  $P = 0$ , для плоско поляризованого світла  $I_{\min} = 0$ , і  $P = 1$ .



У 1809 році французький інженер Е.Малюс відкрив закон, названий його ім'ям. У дослідах Малюса плоско поляризоване світло послідовно пропускалося крізь дві однакові пластинки з турмаліну (прозора кристалічна речовина зеленуватого забарвлення), які виявилися поляризаторами. Пластинки можна було повертати одну відносно одної на будь-який кут  $\varphi$  (рис.9.15).

Інтенсивність світла, яке пройшло крізь обидва поляризатори, виявилася прямо пропорційною  $\cos^2 \varphi$ :

$$I = I_0 \cos^2 \varphi,$$

де  $I_0$  - інтенсивність світла, що пройшло крізь перший поляризатор. Воно виявилось плоско поляризованим, а кут виявився кутом між так званими **площинами поляризації**, які існують для кожного поляризатора. Поляризатор пропускає тільки світло, в якому коливання вектора  $\vec{E}$  відбуваються в площині поляризатора, і не пропускає, якщо коливання вектора  $\vec{E}$  відбуваються в перпендикулярному напрямку.

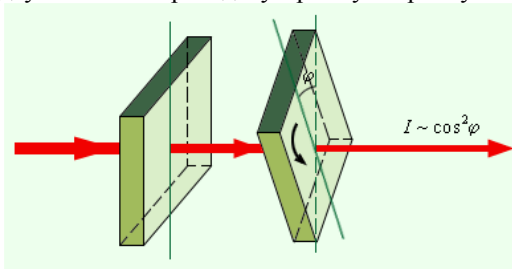


Рис. 9.15

Світло, що випускається звичайними джерелами (наприклад, сонячне світло, випромінювання ламп розжарювання і т. ін.), є **неполяризованим**.

Розглянемо проходження природнього світла послідовно крізь два ідеальні поляроїди  $P_1$  і  $P_2$  (рис. 9.16), дозволени напрямки яких повернені один відносно одного на деякий кут  $\varphi$ . Перший поляроїд грає роль поляризатора. Він пере-творює природне світло на лінійно **поляризоване** світло. Другий поляроїд засто-совується для аналізу падаючого на нього світла.  $yy'$  – дозволени напрямки поляроїдів.

Амплітуда природнього світлового вектора, що пройшов через перший поляроїд, дорівнює  $E_0 = \sqrt{\frac{I_0}{2}}$ .

Хвиля, пропущена другим поляроїдом, матиме амплітуду  $E = E_0 \cos \varphi$ . Отже, інтенсивність  $I$  лінійно поляризованої хвилі на виході з другого поляроїда дорівнює:  $I = E^2 = E_0^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi$ .

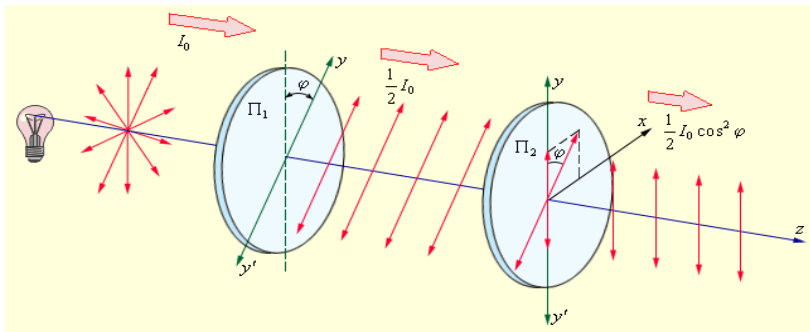


Рис. 9.16

Ще в кінці XVII століття було виявлено, що кристал ісландського шпату ( $CaCO_3$ ) роздвоює промені, що проходять через нього. Це явище отримало назву **подвійного променезаломлення** (рис.9.17). Якщо кристал повертати відносно напрямку первинного променя, то повертаються обидва промені, що пройшли крізь кристал. Один з них називають звичайним, тому що він підкоряється звичайному закону заломлення. Другий – незвичайним, тому що він не підкоряється цьому закону.

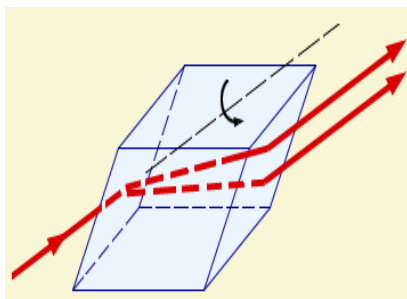


Рис. 9.17

При падінні природного світла на межу двох прозорих діелектриків відбувається ще один випадок поляризації. Відбитий і заломлений промені виявляються поляризованими. Ступінь поляризації залежить від кута падіння. Максимальні ступені часткової поляризації заломленого променя ( $P < 1$ ) і відбитого променя ( $P_{\max} = 1$ ) будуть при куті падіння  $\varphi_B$ , що задовільняє умові:  $tg \varphi_B = n_{12}$ .

Це співвідношення носить назву **закону Брюстера**, а кут  $\varphi_B$  називається **кутом Брюстера**.  $n_{12}$  - відносний показник заломлення двох середовищ, на межі яких відбувається заломлення та відбиття променів.

## 10. КВАНТОВА ФІЗИКА

У грудні 2000 року світова наукова громадськість відзначала сторічний ювілей виникнення нової науки – **квантової фізики** і відкриття нової фундаментальної фізичної константи – **сталой Планка**. Заслуга в цьому належить видатному німецькому фізику **Максу Планку**. Йому вдалося вирішити проблему спектрального розподілу світла, що випромінюється нагрітими тілами, перед якою класична фізика виявилася безсилою. Планк першим висловив гіпотезу про квантування енергії осцилятора (коливальної системи), несумісну з принципами класичної фізики. Саме ця гіпотеза, розвинена згодом працями багатьох видатних фізиків, дала поштовх процесу перегляду і ломки старих понять, який завершився створенням квантової фізики.

### 10.1. ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТІЛ

Світло, що випускається джерелом, відносить з собою енергію. Існує багато різних механізмів підведення енергії до джерела світла. У тих випадках, коли необхідна енергія надається нагріванням, тобто підведенням тепла, випромінювання називається **тепловим** або **температурним**. Цей вид випромінювання для фізиків кінця XIX століття представляв особливий інтерес, оскільки на відміну від всіх інших видів випромінювання (наприклад, люмінесценції), теплове випромінювання може знаходитися в стані термодинамічної рівноваги з нагрітими тілами.

Вивчаючи закономірності теплового випромінювання тіл, фізики сподівалися встановити взаємозв'язок між термодинамікою і оптикою.

Якщо в замкнену порожнину із стінками, які дзеркально відбивають, помістити декілька тіл, нагрітих до різної температури, то, як показує дослід, така система з часом приходить в стан теплової рівноваги, при якій всі тіла набувають однакової температури. Тіла обмінюються енергією тільки шляхом випромінювання і поглинання променистої енергії. В стані рівноваги процеси випромінювання і поглинання енергії кожним тілом в середньому компенсують одне одне, і в просторі між тілами щільність енергії випромінювання досягає певного значення, залежного тільки від сталої температури тіл. Це випромінювання, що знаходиться в термодинамічній рівновазі з тілами, що мають певну температуру, називається **рівноважним** або **чорним випромінюванням**. Щільність енергії рівноважного випромінювання і його спектральний склад залежать тільки від температури.

Якщо через малий отвір зазирнути всередину порожнини, в якій встановилася термодинамічна рівновага між випромінюванням і нагрітими

тілами, то око не розрізнить контурів тіл і зафіксує лише однорідне світлення всієї порожнини в цілому.

Якщо одне з тіл в порожнині має властивість поглинати всю падаючу на його поверхню променисту енергію будь-якого спектрального складу, то таке тіло називають **абсолютно чорним**. При заданій температурі власне теплове випромінювання абсолютно чорного тіла, що знаходиться в стані теплової рівноваги з випромінюванням, повинне мати той же спектральний склад, що і оточуюче це тіло рівноважне випромінювання. Інакше рівновага між абсолютно чорним тілом і що оточуючим його випромінюванням не могло б встановитися. Тому завдання зводиться до вивчення спектрального складу випромінювання абсолютно чорного тіла. Вирішити цю задачу класична фізика виявилася неспроможною.

Для встановлення рівноваги в порожнині необхідно, щоб кожне тіло випускало рівно стільки променистої енергії, скільки воно поглинає. Це одна з найважливіших закономірностей теплового випромінювання. Звідси витікає, що при заданій температурі абсолютно чорне тіло випускає з поверхні одиничної площі в одиницю часу більше променистої енергії, чим будь-яке інше тіло.

Абсолютно чорних тіл в природі не буває. Досить гарною моделлю такого тіла є невеликий отвір в замкненій порожнині. Світло, падаюче через отвір всередину порожнини, після численних відбиттів від внутрішніх стінок порожнини буде практично повністю поглинене стінками, і зовні отвір здаватиметься абсолютно чорним. Але якщо порожнина нагріта до деякої температури  $T$ , і усередині встановилася тепла рівновага, то власне випромінювання порожнини, що виходить крізь отвір, буде випромінюванням абсолютно чорного тіла. Саме таким чином у всіх експериментах по дослідженню теплового випромінювання моделюється абсолютно чорне тіло.

Із збільшенням температури всередині порожнини зростатиме енергія випромінювання, що виходить з отвору, і буде змінюватися його спектральний склад.

Розподіл енергії по довжинах хвиль у випромінюванні абсолютно чорного тіла при заданій температурі  $T$  характеризується **випромінювальною здатністю**  $r(\lambda, T)$ , яка дорівнює потужності випромінювання з одиниці поверхні тіла в одиничному інтервалі довжин хвиль. Добуток  $r(\lambda, T) \cdot \Delta\lambda$  дорівнює потужності випромінювання, яка випускається одиничною ділянкою поверхні по всіх напрямках в інтервалі довжин хвиль  $\Delta\lambda$ . Аналогічно можна ввести розподіл енергії по частотах  $r(\nu, T)$ . Функцію  $r(\lambda, T)$  (або  $r(\lambda, T)$ ) часто називають спектральною світністю, а повний потік  $R(T)$  випромінювання всіх довжин хвиль, що дорівнює

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} r(\nu, T) d\nu$$

називають **інтегральною світністю** тіла.

У 1879 році Йозеф Стефан на основі аналізу експериментальних даних прийшов до висновку, що **інтегральна світність  $R(T)$  абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому ступеню абсолютної температури  $T$** :

$$R(T) = \sigma T^4$$

Дещо пізніше, в 1884 році *Л. Больцман* вивів цю залежність теоретично, виходячи з термодинамічних міркувань. Цей закон отримав назву **закону Стефана–Больцмана**. Числове значення сталої величини  $\sigma$ , за сучасними вимірюваннями, складає:

$$\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$$

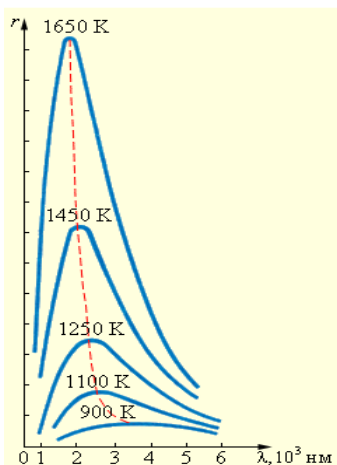


Рис. 10.1

До кінця 90-х років XIX століття були виконані ретельні експериментальні вимірювання спектрального розподілу випромінювання абсолютно чорного тіла, які показали, що при кожному значенні температури  $T$  залежність  $r(\lambda, T)$  має яскраво виражений максимум (рис. 10.1). При збільшенні температури максимум зміщується в область коротких довжин хвиль, причому добуток температури  $T$  на довжину хвилі  $\lambda_m$ , відповідну максимуму, залишається постійним:  $\lambda_m T = b$  або  $\lambda_m = \frac{b}{T}$ .

Це співвідношення раніше було отримане Віном з термодинаміки. Воно виражає так званий **закон зміщення Віна**: **довжина хвилі  $\lambda_m$ , на яку припадає максимум енергії випромінювання абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна абсолютній температурі  $T$** . Значення сталої Віна:  $b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

При практично досяжних в лабораторних умовах температурах максимум випромінювальної здатності  $r(\lambda, T)$  лежить в інфрачервоній області. Тільки при  $T \geq 5 \cdot 10^3 \text{ К}$  максимум потрапляє у видиму область спектру. Максимум енергії випромінювання Сонця доводиться приблизно на  $550 \text{ нм}$  (зелена область спектру), що відповідає температурі зовнішніх шарів Сонця (близько  $6200 \text{ К}$ , якщо розглядати Сонце як абсолютно чорне тіло).

Процеси випромінювання і поглинання електромагнітної енергії нагрітим тілом відбуваються не безперервно, як це вважали в класичній фізиці, а кінцевими порціями – **квантами**. Квант – це мінімальна порція енергії, що випромінюється або поглинається тілом. За теорією Планка, енергія кванта  $\varepsilon$  прямо пропорційна частоті світла  $\nu$ :

$$\varepsilon = h\nu,$$

де  $h$  – так звана **стала Планка**:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

На основі гіпотези про дискретний характер процесів випромінювання і поглинання тілами електромагнітного випромінювання Планк отримав формулу для спектральної світності абсолютно чорного тіла. Формулу Планка зручно записувати у формі, що визначає розподіл енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла за частотами  $\nu$ , а не за довжинами хвиль  $\lambda$ :

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}.$$

Тут  $c$  – швидкість світла,  $h$  – стала Планка,  $k$  – стала Больцмана,  $T$  – абсолютна температура.

## 10.2. ГІПОТЕЗА ДЕ БРОЙЛЯ. КОРПУСКУЛЯРНО-ХВИЛЬОВИЙ ДУАЛІЗМ ВЛАСТИВОСТЕЙ РЕЧОВИНИ

Запропонована Бором квантова теорія атома, в основі якої полягала ідея дискретності, була значним кроком у розвитку атомної фізики, однак мала цілий ряд внутрішніх протиріч. В зв'язку з цим необхідно було переглянути уявлення про природу елементарних частинок (електронів, протонів і т. ін.). У 1924 р. французький вчений Луї де Бройль висунув гіпотезу про те, що частинки речовини поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові, тобто частинкам, як і світлу, притаманний корпускулярно-хвильовий дуалізм.

Як відомо, фотон має квант енергії  $E = h\nu$ , імпульс  $p = \frac{h}{\lambda}$  і масу

$m = \frac{h\nu}{\lambda}$ . За де Бройлем, між корпускулярними і хвильовими

характеристиками електрона існує такий самий зв'язок, як і між відповідними характеристиками фотона. Інакше кажучи, рух електрона з швидкістю  $V$  пов'язаний з деяким хвильовим процесом, довжина хвилі якого визначається рівнянням:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

де імпульс  $p = mV$ . Це є формула де Бройля.

Якщо частинка має кінетичну енергію  $E_k$ , то можна виразити її імпульс через кінетичну енергію за формулою  $p = \sqrt{2mE_k}$  і записати формулу де Бройля у вигляді:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}.$$

### 10.3. ФОТОЕЛЕКТРИЧНИЙ ЕФЕКТ

**Фотоелектричний ефект** був відкритий в 1887 році німецьким фізиком **Г. Герцем** і в 1888 – 1890 роках експериментально досліджений О. Р. Столетовим. Якісніше дослідження явища фотоелектричного ефекту було виконано Ф. Ленардом в 1900 р. До цього часу вже був відкритий електрон (1897 р., **Дж. Томсон**), і стало ясно, що фотоелектричний ефект (або точніше – зовнішній фотоелектричний ефект) полягає у вириванні електронів з речовини під дією падаючого на нього світла.

В експериментах використовувався скляний вакуумний балон з двома металевими електродами, поверхня яких була ретельно очищена. До електродів прикладалася деяка напруга  $U$ , полярність якої можна було змінювати за допомогою подвійного ключа. Один з електродів (катод К) через кварцове віконце освітлювався монохроматичним світлом деякої довжини хвилі  $\lambda$ . При незмінному світловому потоці знімалася залежність сили фотоструму  $I$  від прикладеної напруги. На рис. 10.2 зображені типові криві такої залежності, отримані при двох значеннях інтенсивності світлового потоку, падаючого на катод. Крива 2 відповідає більшій інтенсивності світлового потоку.  $I_{H1}$  і  $I_{H2}$  – струми насичення,  $U_3$  – замикаючий потенціал.

Криві показують, що при достатньо великій позитивній напрузі на аноді А фотострум досягає насичення, оскільки всі електрони, вирвані світлом з катода, досягають анода. Ретельні вимірювання показали, що струм насичення  $I_H$  прямо пропорційний інтенсивності падаючого світла. Коли напруга на аноді негативна, електричне поле між катодом і анодом гальмує електрони. Анода можуть досягти тільки ті електрони, кінетична енергія яких перевищує  $|eU|$ . Якщо напруга на аноді менша, ніж  $-U_3$ , фотострум припиняється. Вимірюючи  $U_3$ , можна визначити максимальну кінетичну енергію фотоелектронів:

$$\left( \frac{mv^2}{2} \right)_{\max} = eU_3$$

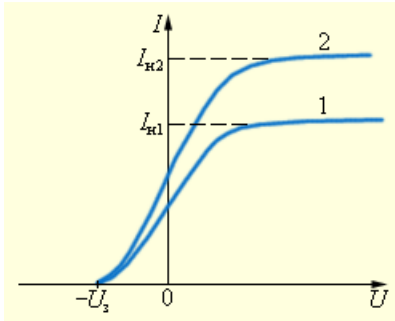


Рис. 10.2

Численними експериментаторами були встановлені наступні основні закономірності фотоелектричного ефекту:

1. Максимальна кінетична енергія фотоелектронів лінійно зростає зі збільшенням частоти світла  $\nu$  і не залежить від його інтенсивності.
2. Для кожної речовини існує так звана **червона межа фотоелектричного ефекту**, тобто найменша частота  $\nu_{min}$ , при якій ще можливий зовнішній фотоелектричний ефект.
3. Число фотоелектронів, що вириваються світлом з катода за  $t$  с, прямо пропорційно інтенсивності світла.
4. Фотоелектричний ефект практично безінерційний, фотострум виникає миттєво після початку освітлення катода за умови, що частота світла  $\nu > \nu_{min}$ .

Всі ці закономірності фотоелектричного ефекту в корені суперечили уявленню класичної фізики про взаємодію світла з речовиною. Згідно хвильовим уявленням при взаємодії з електромагнітною світловою хвилею електрон повинен був би поступово накопичувати енергію, і був би потрібен значний час, залежний від інтенсивності світла, щоб електрон накопичив достатньо енергії для того, щоб вилетіти з катода. Як показують розрахунки, цей час повинен був би обчислюватися хвилинами або годинами. Проте, досліди показують, що фотоелектрони з'являються зразу ж після початку освітлення катода. У цій моделі також було неможливо зрозуміти існування червоної межі фотоелектричного ефекту. Хвильова теорія світла не могла пояснити незалежність енергії фотоелектронів від інтенсивності світлового потоку і пропорційність максимальної кінетичної енергії частоті світла.

Таким чином, електромагнітна теорія світла виявилася нездатною пояснити ці закономірності.

Вихід був знайдений **А. Ейнштейном** у 1905 р. Теоретичне пояснення закономірностей фотоелектричного ефекту, що спостерігалися в дослідах, було дане Ейнштейном на основі гіпотези **М. Планка** про те, що світло випромінюється і поглинається певними порціями, причому енергія кожної такої порції визначається формулою  $E = h\nu$ , де  $h$  – **стала Планка**. Ейнштейн зробив наступний крок в розвитку квантової теорії. Він прийшов до висновку, що **світло має переривисту (дискретну) структуру. Електромагнітна хвиля складається з окремих порцій – квантів, згодом названих фотонами.** При взаємодії з речовиною фотон цілком передає всю свою енергію  $h\nu$  одному електрону. Частина цієї енергії електрон може розсіяти при зіткненнях з атомами речовини. Крім того, частина енергії



електрона витрачається на подолання потенційного бар'єру на межі метал – вакуум. Для цього електрон повинен виконати роботу виходу  $A$ , залежну від властивостей матеріалу катода. Найбільша кінетична енергія, яку може мати фотоелектрон, що вилетів з катода, визначається законом збереження енергії:

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\max} = eU_3 = h\nu - A$$

Цю формулу прийнято називати **рівнянням Ейнштейна для фотоефекту**.

За допомогою рівняння Ейнштейна можна пояснити всі закономірності зовнішнього фотоефекту. З рівняння Ейнштейна витікають лінійна залежність максимальної кінетичної енергії від частоти і незалежність від інтенсивності світла, існування червоної межі, безінерційність фотоефекту. Загальне число фотоелектронів, що покидають за  $1\text{ с}$  поверхню катода, повинне бути пропорційне числу фотонів, падаючих за той же час на поверхню металу. З цього виходить, що струм насичення повинен бути прямо пропорційний інтенсивності світлового потоку.

З рівняння Ейнштейна випливає, що робота виходу  $A$  дорівнює мінімальній енергії фотона, при якій відбувається фотоефект:

$$A = h\nu_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\text{чер.}}}$$

де  $c$  – швидкість світла,  $\lambda_{\text{чер.}}$  – довжина хвилі, що відповідає червоній межі фотоефекту. У більшості металів робота виходу  $A$  складає декілька електрон-вольт ( $1\text{eB} = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{ Дж}$ ). В квантовій фізиці електрон-вольт часто використовується як енергетична одиниця вимірювання.

Отже, закони фотоефекту свідчать, що світло при випромінюванні і поглинанні поводить себе подібно до потоку частинок, що отримали назву **фотонів** або **світлових квантів**. Енергія фотону дорівнює:  $\varepsilon = h\nu$ .

Фотон рухається у вакуумі з швидкістю  $c$ . Фотон не має маси спокою ( $m_0 = 0$ ). Імпульс фотона дорівнює:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Таким чином, вчення про світло, зробивши виток тривалістю в два сторіччя, знов повернулося до уявлень про світлові частинки – корпускули, але зовсім на іншому якісному рівні.

## 11. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

**Спеціальна теорія відносності** є сучасною фізичною теорією простору і часу. Спеціальну теорію відносності називають **релятивістською** теорією, а явища, що описуються цією теорією, - релятивістськими ефектами, які проявляються при швидкостях руху тіл, близьких за величиною до швидкості світла у вакуумі  $c$ . Релятивістською механікою називається механіка рухів з релятивістськими швидкостями, яка ґрунтується на спеціальній теорії відносності.

В основі спеціальної теорії відносності лежать два постулати Ейнштейна.

- 1. Принцип відносності:** всі закони природи інваріантні відносно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Іншими словами: ніякі досліди (механічні, електричні, оптичні), які проведені всередині даної інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, чи знаходиться ця система в стані спокою чи рухається рівномірно і прямолінійно.
- 2. Принцип інваріантності швидкості світла:** швидкість світла у вакуумі у всіх інерціальних системах відліку однакова. Тобто вона не залежить від швидкості джерела світла або спостерігача.

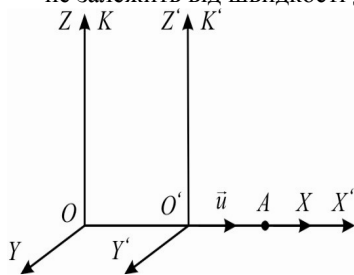


Рис.11.1

Розглянемо дві Інерціальні системи відліку  $K$  і  $K'$ , яка рухається відносно  $K$  вздовж вісі  $OX$  зі швидкістю  $\bar{u}$  (рис.11.1). Нехай в початковий момент часу  $t = t' = 0$ , коли координати точок  $O$  і  $O'$  збігаються, випромінюється світловий імпульс. Швидкість світла в обох системах відліку одна і та сама і дорівнює  $c$ .

Нехай в деякій точці, яка є нерухомою в системі  $K$ , відбувається подія, тривалість якої  $\tau = t_2 - t_1$ . Тривалість цієї події в системі  $K'$  становить:

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

З цього виразу видно, що  $\tau < \tau'$  і тривалість події, що відбувається в деякій точці найменша в тій інерціальній системі відліку, відносно якої ця точка нерухома. Отже, годинники, які рухаються відносно інерціальної системи відліку, йдуть повільніше від нерухомих годинників.

Нехай деяке тіло (наприклад, стрижень) розміщено вздовж осі  $Ox'$ , рухається разом з системою відліку  $K'$  і має в цій системі довжину  $l_0 = x'_2 - x'_1$ , де  $x'_1$  і  $x'_2$  - координати початку і кінця стрижня, які не змінюються з часом  $t'$ . Визначимо довжину стрижня в системі  $K$ , відносно якої він рухається зі швидкістю  $\vec{u}$ . Для цього треба виміряти координати його кінців  $x_1$  і  $x_2$  і системи  $K$  в один і той самий момент часу  $t$ :

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Відкля видно, що розміри тіла  $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Очевидно, що довжина стрижня, яка вимірюється в системі, відносно якої він рухається, є меншою від довжини, що вимірюється в системі, відносно якої стрижень знаходиться у стані спокою. Причому поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху і однакові у всіх інерціальних системах відліку.

В релятивістській механіці, як і в ньютонівській, імпульс  $\vec{p}$  матеріальної точки пропорційний до її маси і збігається за напрямком з її швидкістю  $\vec{V}$ . Але на відміну від ньютонівської механіки, імпульс матеріальної точки є нелінійною функцією її швидкості:

$$\vec{p} = m\vec{V} = \frac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \text{де} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Це співвідношення є релятивістська маса, а  $m_0$  - маса спокою матеріальної точки, тобто маса, яка виміряна в тій інерціальній системі відліку, відносно якої матеріальна точка знаходиться в стані спокою.

Основний закон релятивістської динаміки: **швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює силі  $\vec{F}$ , що діє на цю точку, має вигляд:**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \vec{V} \right) = \vec{F}.$$

Якщо проінтегрувати отримане співвідношення, маємо:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + C.$$

При  $V = 0$   $E_k = 0$ , і з цієї умови визначаємо константу  $C = -m_0 c^2$ . Кінцевий вираз для релятивістської кінетичної енергії матеріальної точки буде:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

Таким чином, Ейнштейн отримав універсальну залежність між повною енергією тіла і його масою:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Якщо тіло нерухоме, то  $E_0 = m_0 c^2$  - енергія спокою тіла.

Встановимо зв'язок між повною енергією тіла та його релятивістським імпульсом:

$$\begin{aligned} E^2 = m^2 c^4 &= \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{m_0^2 c^2 V^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^2 V^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \\ &= m_0^2 c^4 + m^2 c^2 V^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \end{aligned}$$

або: 
$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}$$

## 11.1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З РОЗДІЛІВ 2,3,4,5

**Приклад 1.** В установці для спостереження кілець Ньютона простір між лінзою і скляною пластинкою заповнений рідиною. Визначити показник заломлення рідини, якщо радіус третього світлого кільця становить 3,65 мм. Спостереження ведеться в світлі, що проходить. Радіус кривини лінзи 10 м. Довжина світлової хвилі 589 нм.

**Розв'язання:** При спостереженні кілець Ньютона в світлі, що проходить, умова максимуму світла визначається формулою  $2hn = k\lambda$  ( $h$  - товщина шару між пластинкою і лінзою,  $n$  - абсолютний показник заломлення рідини).

Товщина шару між лінзою і пластинкою пов'язана з відповідним радіусом кільця таким чином:

$$h = \frac{r_k^2}{2R}$$

Підставимо це значення в умову максимуму і отримаємо:  $n \frac{r_k^2}{R} = k\lambda$

звідки показник заломлення 
$$n = \frac{k\lambda R}{r_k^2} = \frac{3 \cdot 5.89 \cdot 10^{-7} \cdot 10}{3.65 \cdot 10^{-3}} = 1.33.$$

**Приклад 2.** Визначити імпульс електрона, що має кінетичною енергією 5 МеВ.

**Розв'язання:** За визначенням імпульс частинки  $p = mv$ , але при швидкостях близьких до швидкостей світла (релятивістський випадок) маса частинки стає функцією її швидкості:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

де  $m$  - маса рухомої частинки,  $m_0$  - маса спокою цієї частинки,  $\beta = \frac{v}{c}$  - відношення швидкості частинки до швидкості світла у вакуумі. Тоді імпульс частинки визначається за формулою:

$$p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В нашому випадку в умові задачі задана не швидкість, а кінетична енергія частинки, тому розв'язання задачі зведеться до знаходження формули, що зв'яже імпульс і кінетичну енергію.

Встановимо зв'язок між імпульсом і повною енергією частинки.

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

де  $E_0$  - енергія спокою частинки.

Отриманий вираз підведемо до квадрату:

$$E^2 = \frac{E_0^2}{1-\beta^2}.$$

Звідки  $E^2 - (\beta E)^2 = E_0^2$ . Перетворимо доданок  $\beta E$ :  $\beta E = \frac{v}{c} mc^2 = mc v = cp$ ,

що дозволяє записати:  $E^2 - (cp)^2 = E_0^2$ .

Звідки імпульс отримуємо у такому вигляді:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(E - E_0)(E + E_0)}.$$

Різниця між повною енергією і енергією спокою є кінетична енергія частинки  $T$ :

$$E - E_0 = T.$$

Перетворимо вираз:

$$E + E_0 = E_0 + E_0 + T = T + 2E_0.$$

Враховуючи отримані співвідношення, остаточно отримуємо вираз, що зв'яже імпульс і кінетичну енергію:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2E_0)} = \frac{\sqrt{5(5 + 2 \cdot 0.51)}}{c} = \frac{5.5(\text{MeV})}{c} = \frac{5.5 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 2.93 \cdot 10^{-21} (\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с})$$

Окремо для простоти обчислимо енергію спокою електрона в електрон-вольтах:  $E_0 = mc^2 = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 0.51 \cdot 10^6 (\text{eV}) = 0.51 \text{ MeV}$

**Приклад 3.** Довжина хвилі, на яку доводиться максимум енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла, дорівнює  $0,58 \text{ мкм}$ . Визначити енергетичну світність поверхні тіла.

**Розв'язання:** Енергетична світність абсолютно чорного тіла за законом Стефана - Больцмана пропорційна четвертому ступеню абсолютної температури і визначається співвідношенням:  $R = \sigma \cdot T^4$ , де  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 K^4}$  - постійна Стефана - Больцмана,  $T$  - абсолютна температура.

Температуру можна обчислити за допомогою закону зміщення Віна:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

де  $b = 2,90 \cdot 10^{-3} м \cdot K$  - постійна закону зміщення Віна.

Таким чином, для енергетичної світності отримаємо наступний вираз:

$$R = \sigma \cdot \left( \frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \left( \frac{2.90 \cdot 10^{-3}}{5.8 \cdot 10^{-7}} \right)^4 = 3.54 \cdot 10^7 \left( \frac{Вт}{м^2} \right)$$

**Приклад 4.** Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, що вириваються з поверхні срібла: 1) ультрафіолетовими променями з довжиною хвилі  $0,155 мкм$ ; 2)  $\gamma$ -променями з довжиною хвилі  $1 нм$ .

**Розв'язання:** Рівняння Ейнштейна для фотоефекту:  $h\nu = A + T_{\max}$ ,

або в нашому випадку  $h \frac{c}{\lambda} = A + T_{\max}$ .

В цьому рівнянні  $h\nu$  - енергія падаючого кванта ( $h = 6.63 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с$  - стала Планка),  $A$  - робота виходу електрона з металу,  $T_{\max}$  - максимальна кінетична енергія фотоелектронів, що вже вийшли з металу.

Кінетична енергія електронів може бути обчислена або в рамках класичної теорії, тоді кінетична енергія має вигляд  $T_{\max} = \frac{mv^2}{2}$ , або слід

розглянути релятивістський випадок:  $T_{\max} = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ . Вибір залежить

від того, яка швидкість надається фотоелектрону, а вона у свою чергу визначається енергією фотона, що викликає фотоефект. Якщо енергія фотона багато менше енергії спокою електрона, то може бути застосована класична формула кінетичної енергії, якщо ж вона порівнянна з енергією спокою електрона, то слід розглядати релятивістський випадок.

Для вибору ходу розв'язання задачі обчислимо енергії спокою електрона, енергії ультрафіолетових променів і  $\gamma$ -променів. Порівняння цих енергій дозволить правильно вибрати хід розв'язання.

1.  $E_0 = m_0 c^2 = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 0.51 \cdot 10^6 (eB) = 0,51 MeB$
2.  $\varepsilon_1 = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.55 \cdot 10^{-7}} \cdot 1.28 \cdot 10^{-18} (Дж) = \frac{1.28 \cdot 10^{-18}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 8eB$
3.  $\varepsilon_2 = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} = 1.99 \cdot 10^{-13} (Дж) = \frac{1.99 \cdot 10^{-13}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.24 \cdot 10^6 eB$

Порівняння отриманих виразів дозволяє припустити, що в першому випадку ультрафіолетового випромінювання кінетичну енергію фотоелектронів можна розраховувати по класичній формулі, а в другому випадку необхідно застосувати релятивістський підхід.

Робота виходу електрона з срібла дорівнює  $4,5 eB$ , або  $7,5 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Розглянемо перший випадок.

Рівняння Ейнштейна запишемо у вигляді:  $h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}$ , звідки

вираз для швидкості

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(1.28 \cdot 10^{-18} - 0.75 \cdot 10^{-18})}{9.1 \cdot 10^{-31}}} = 1.08 \cdot 10^6 (м/с).$$

Другий випадок.

Роботою виходу електрона з срібла можна знехтувати в порівнянні з енергією фотона, тому можна прийняти, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії фотона, тобто є  $\varepsilon_2$ .

Для обчислення кінетичної енергії електрона в цьому випадку необхідно користуватися релятивістською формулою:

$$T_{\max} = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $\beta$ , знайдемо:  $\beta = \frac{\sqrt{T(T + 2E_0)}}{T + E_0}$ .

Оскільки  $\beta = v/c$  і  $T_{\max} = \varepsilon_2$ , знаходимо максимальну швидкість для цього випадку:

$$v_{\max} = c \frac{\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2)\varepsilon_2}}{E_0 + \varepsilon_2} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{(2 \cdot 0.51 + 1.24)1.24}}{0.51 + 1.24} = 2.85 \cdot 10^8 (м/с).$$

(Оскільки всі енергії, які увійшли до кінцевої формули, входять в неї у вигляді відношення, то зручніше взяти їх не в джоулях, а в електронвольтах.)

**Контрольна робота № 6**  
**(коливання і хвилі, хвильова оптика, квантова фізика, теорія відносності)**

**Інтерференція**

601. В досліді Юнга на шляху одного з променів, що інтерферують, вміщувалась тонка скляна пластинка, внаслідок чого центральна світла смуга зміщувалася в положення, спочатку зайняте п'ятою світлою смугою (не враховуючи центральної). Визначити товщину цієї пластинки. Промінь падає на пластинку перпендикулярно. Показник заломлення пластинки  $1,5$ . Довжина хвилі дорівнює  $600 \text{ нм}$ .
602. В досліді Юнга скляна пластинка завтовшки в  $2 \text{ см}$  вміщується на шляху одного з променів, що інтерферують, перпендикулярно променю. На скільки можуть відрізнятись один від одного значення показника заломлення в різних місцях пластинки, щоб зміна різниці ходу від цієї неоднорідності не перевищувала  $1 \text{ мкм}$ ?
603. Мильна плівка, розташована вертикально, утворює клин внаслідок стікання рідини. Спостерігаючи інтерференційні смуги у відбитому світлі ртутної дуги ( $\lambda = 546,1 \text{ нм}$ ), знаходимо, що відстань між п'ятьма смугами дорівнює  $2 \text{ см}$ . Знайти кут клину в секундах. Світло падає перпендикулярно до поверхні плівки. Показник заломлення мильної води  $1,33$ .
604. На скляну пластинку нанесено тонкий шар прозорої речовини з показником заломлення  $1,4$ . Пластинка освітлюється пучком паралельних променів довжиною хвилі  $540 \text{ нм}$ , що падають на пластинку нормально. Яку мінімальну товщину повинен мати шар, щоб відбиті промені мали найменшу яскравість?
605. Установка для спостереження кілець Ньютона у відбитому світлі освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі  $500 \text{ нм}$ , що падає нормально. Простір між лінзою і скляною пластинкою заповнений водою. Знайти товщину шару води між лінзою і скляною пластинкою в тому місці, де спостерігається третє світле кільце.
606. На поверхню скляного об'єктиву нанесена тонка плівка з показником заломлення  $1,2$  ("прояснююча" оптика). При якій найменшій товщині цієї плівки відбудеться максимальне ослаблення відбитого світла в середній частині видимого спектру? ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ).
607. Установка для отримання кілець Ньютона освітлюється світлом від ртутної дуги, що падає нормально, спостереження проводиться в світлі, що проходить. Яке по порядку світле кільце, відповідне лінії  $579,1 \text{ нм}$  співпадає з наступним світлим кільцем, відповідним лінії  $577 \text{ нм}$ ?



608. Установка для отримання кілець Ньютонa освітлюється монохроматичним світлом. Спостереження ведеться у відбитому світлі. Радіуси двох сусідніх темних кілець дорівнюють відповідно  $4,00 \text{ мм}$  і  $4,38 \text{ мм}$ . Радіус кривини лінзи дорівнює  $6,4 \text{ м}$ . Знайти порядкові номери кілець і довжину хвилі падаючого світла.
609. Знайти відстань між третім і шістнадцятим темними кільцями Ньютонa, якщо відстань між другим і двадцятим темними кільцями дорівнює  $4,8 \text{ мм}$ . Спостереження ведеться у відбитому світлі.
610. Пучок білого світла падає нормально на скляну пластинку товщиною  $0,4 \text{ мкм}$ . Показник заломлення скла  $1,5$ . Які довжини хвиль, що лежать в межах видимого спектру (від  $400$  до  $700 \text{ нм}$ ), посилюються у відбитому пучку?

### Дифракція

611. Точкове джерело світла з довжиною хвилі  $0,5 \text{ мкм}$  розташоване на відстані  $1 \text{ м}$  перед діафрагмою з круглим отвором радіусом  $1 \text{ мм}$ . Знайти відстань від діафрагми до точки спостереження, для якої в отворі вкладається три зони Френеля.
612. Між точковим джерелом світла і екраном вмістили діафрагму з круглим отвором, радіус якого можна міняти в процесі досліду. Відстань від діафрагми до джерела і екрану становить  $1 \text{ м}$  і  $1,25 \text{ м}$  відповідно. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості в центрі дифракційної картини на екрані спостерігається при радіусі отвору рівному  $1 \text{ мм}$ , а наступний максимум при  $-1,29 \text{ мм}$ .
613. Плоска монохроматична світлова хвиля падає нормально на круглий отвір. На відстані  $9 \text{ м}$  від нього знаходиться екран, де спостерігають деяку дифракційну картину. Діаметр отвору зменшили в три рази. Знайти нову відстань, на якій треба помістити екран, щоб отримати на ньому дифракційну картину, подібну до тої, що і у попередньому випадку, але зменшену в 3 рази.
614. Світло від монохроматичного джерела з довжиною хвилі  $0,6 \text{ мкм}$  падає нормально на діафрагму з круглим отвором. Діаметр отвору дорівнює  $6 \text{ мм}$ . За діафрагмою на відстані  $3 \text{ м}$  від неї знаходився екран. Знайти: 1) скільки зон Френеля вкладається в отворі діафрагми, 2) яким буде центр дифракційної картини на екрані темним чи світлим, 3) на скільки потрібно наблизити екран до діафрагми, щоб змінити освітленість центру дифракційної картини на протилежну.
615. Дифракційна картина спостерігається на відстані  $l$  від точкового джерела монохроматичного світла з довжиною хвилі  $0,6 \text{ мкм}$ . На відстані  $3l/4$  від дже-рела знаходиться кругла непрозора перешкода

- діаметром  $1\text{ см}$ . Чому дорівнює відстань  $l$ , якщо перешкода закриває тільки центральну зону Френеля?
616. На діафрагму з круглим отвором падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі  $0,6\text{ мкм}$ . При якій найбільшій відстані між діафрагмою і екраном в центрі дифракційної картини ще спостерігатиметься темна пляма? Діаметр отвору становить  $1,96\text{ мм}$ .
617. Дифракційна картина спостерігається на відстані  $4\text{ м}$  від точкового джерела монохроматичного світла з довжиною хвилі  $0,5\text{ мкм}$ . Посередині між екраном і джерелом світла знаходиться діафрагма з круглим отвором. При якому радіусі отвору центр дифракційних кілець, які спостерігаються на екрані, буде найбільш темним?
618. На щілину шириною  $20\text{ мкм}$  падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі  $0,5\text{ мкм}$ . Знайти ширину зображення щілини на екрані, віддаленому від щілини на  $1\text{ м}$ . Ширину зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, розташованими по обидві сторони від головного максимуму освітленості.
619. На щілину падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda$ . Ширина щілини дорівнює  $6\lambda$ . Під якими кутами спостерігатимуться дифракційні мінімуми світла? Скільки дифракційних максимумів світла можна теоретично спостерігати в умовах даного досліду?
620. На щілину шириною  $2\text{ мкм}$  падає нормально паралельний пучок світла з довжиною хвилі  $589\text{ нм}$ . Знайти кути, в напрямках яких спостерігатимуться мінімуми світла.
621. На дифракційну ґратку нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі  $410\text{ нм}$ . Кут між напрямками на максимуми першого і другого порядків рівний  $2^\circ 21'$ . Визначити число штрихів на  $1\text{ мм}$  дифракційної ґратки.
622. Постійна дифракційної ґратки в  $5$  разів більша за довжину світлової хвилі монохроматичного світла, що нормально падає на її поверхню. Визначити кут між двома першими симетричними дифракційними максимумами.
623. На поверхню дифракційної ґратки нормально до її поверхні падає монохроматичне світло. Постійна дифракційної ґратки в  $3,5$  разів більше за довжину світлової хвилі. Знайти загальну кількість дифракційних максимумів, які теоретично можна спостерігати в даному випадку.
624. Постійна дифракційної ґратки дорівнює  $5\text{ мкм}$ . На ґратку нормально падає світло з довжиною хвилі  $0,56\text{ мкм}$ . Максимум

якого найбільшого порядку дає ця ґратка? Скільки максимумів можна теоретично спостерігати в цьому випадку?

625. На дифракційну ґратку нормально падає паралельний пучок білого світла. Спектри другого і третього порядку частково накладаються один на один. На яку довжину хвилі в спектрі другого порядку накладається фіолетова лінія ( $400 \text{ нм}$ ) спектру третього порядку?
626. На дифракційну ґратку, що містить  $500$  штрихів на одному міліметрі, падає нормально біле світло. Спектр проектується розташованою поблизу ґратки лінзою на екран. Визначити довжину спектру першого порядку на екрані, якщо відстань від лінзи до екрану становить  $1 \text{ м}$ . Межі видимого спектру від  $780 \text{ нм}$  до  $400 \text{ нм}$ .
627. На дифракційну ґратку нормально падає пучок світла від розрядної трубки, наповненої гелієм. На яку лінію в спектрі третього порядку накладається червона лінія гелію з довжиною хвилі  $670 \text{ нм}$  спектру другого порядку?
628. На дифракційну ґратку нормально падає пучок світла від розрядної трубки. Чому повинна дорівнювати постійна дифракційної ґратки, щоб у напрямку  $41^\circ$  співпадали максимумами двох ліній з довжинами хвиль  $656,3 \text{ нм}$  і  $410,2 \text{ нм}$ ?
629. На дифракційну ґратку нормально падає пучок світла. Червону лінію з довжиною хвилі  $630 \text{ нм}$  видно в спектрі третього порядку під кутом  $60^\circ$ . Яку спектральну лінію видно під цим кутом в спектрі четвертого порядку? Яке число штрихів на  $1 \text{ мм}$  довжини має ця дифракційна ґратка?
630. При нормальному падінні світла на дифракційну ґратку кут дифракції для лінії з довжиною хвилі  $0,65 \text{ мкм}$  в другому порядку дорівнює  $45^\circ$ . Визначити кут дифракції для лінії з довжиною хвилі  $0,50 \text{ мкм}$  в третьому порядку.
631. Визначити довжину хвилі монохроматичного світла, що падає нормально на дифракційну ґратку з періодом  $2,2 \text{ мкм}$ , якщо кут між напрямками на максимумами першого і другого порядків дорівнює  $15^\circ$ .

### Поляризація світлових хвиль

632. Кут падіння променя на поверхню рідини дорівнює  $50^\circ$ . Відбитий промінь максимально поляризований. Визначити кут заломлення променя.
633. Промінь світла, що йде в скляній посудині з водою, відбивається від дна посудини. При якому куті падіння відбитий промінь буде максимально поляризований? (Абсолютний показник заломлення для скла дорівнює  $1,5$ , для води –  $1,33$ ).

634. Промінь світла переходить з води в скло так, що промінь, відбитий від межі розділу цих середовищ, виявляється максимально поляризованим. Визначити кут між падаючим і заломленим променями. (Абсолютний показник заломлення для скла дорівнює 1,5, для води – 1,33).
635. Граничний кут повного внутрішнього відбивання для деякої речовини становить  $45^\circ$ . Чому дорівнює для цієї речовини кут повної поляризації?
636. Промінь світла проходить крізь рідину, що налита в скляну посудину, і відбивається від дна. Відбитий промінь повністю поляризований при падінні його на дно посудини під кутом  $42^\circ 37'$ . Знайти: 1) показник заломлення рідини, 2) під яким кутом повинен падати на дно посудини промінь світла, що йде в цій рідині, щоб відбулося повне внутрішнє відбивання? (Абсолютний показник заломлення для скла дорівнює 1,5).
637. Промінь природного світла послідовно проходить через два ні-колі, головні площини яких утворюють між собою кут  $50^\circ$ . Приймаючи, що коефіцієнт поглинання кожного ніколя становить 0,1, знайти в скільки разів промінь, що виходить з другого ніколя, послаблений в порівнянні з променем, що падає на перший ніколь.
638. Кут між площинами поляризатора і аналізатора становить  $60^\circ$ . Природне світло, проходячи через таку систему, послаблюється в 10 разів. Нехтуючи втратою інтенсивності світла при відбиванні, визначити коефіцієнт поглинання світла в поляризаторі і аналізаторі, вважаючи його однаковим для обох приладів.
639. Природне світло проходить через поляризатор і аналізатор поставлені так, що кут між їх головними площинами дорівнює  $\alpha$ . Як поляризатор, так і аналізатор поглинають і відбивають 8% падаючого на них світла. Виявилось, що інтенсивність променя, що вийшов з аналізатора, становить 9% інтенсивності природного світла, що падає на поляризатор. Знайти кут  $\alpha$ .
640. Якщо між двома схрещеними поляроїдами помістити третій, оптична вісь якого складає кут  $\alpha$  з оптичною віссю аналізатора, то поле проясниться. Знайти інтенсивність світла, що пройшло крізь систему. Втратами світла на відбивання і поглинання знехтувати.
641. Пучок природного світла падає на систему з 6 ніколів, площина пропускання кожного з яких складає кут  $30^\circ$  відносно площини пропускання попереднього ніколя. Яка частина світлового потоку проходить через цю систему?
642. Природне світло падає на систему з трьох послідовно розташованих однакових поляроїдів, причому головний напрямок середнього поляроїда складає кут  $60^\circ$  з головними напрямками двох інших

поляроїдів. Кожен поляроїд має поглинання таке, що при падінні на нього лінійно поляризованого світла максимальний коефіцієнт пропускання складає  $0,8I$ . У скільки разів зменшиться інтенсивність світла після проходження цієї системи?

### Механічні коливання

701. Матеріальна точка здійснює коливання за законом синуса. Найбільше відхилення точки  $0,2$  м, найбільша швидкість  $0,4$  м/с. Записати рівняння коливань, знайти максимальне прискорення точки, повну енергію точки, що коливається, якщо прийняти її масу рівною  $0,1$  г.
702. Точка здійснює гармонічні коливання, рівняння яких має вигляд  $x = (5 \sin 2t)$  см. В момент, коли на точку діяла сила, яка повертає її в положення рівноваги, за величиною  $F = +5$  мН, точка мала потенціальну енергію  $0,1$  мДж. Знайти цей момент і відповідну йому фазу коливань.
703. Матеріальна точка масою  $0,01$  кг здійснює гармонічні коливання, рівняння яких має вигляд  $x = (5 \sin 10t)$  см. Знайти силу, що діє на точку, в момент часу  $0,1$  с, а також повну енергію точки.
704. Матеріальна точка масою  $0,1$  г коливається згідно рівнянню  $x = (5 \sin 20t)$  см. Визначити максимальні значення сили, що діє на точку, і кінетичної енергії точки.
705. Амплітуда гармонічних коливань матеріальної точки дорівнює  $2$  см, повна енергія коливань  $0,3$  мкДж. При якому відхиленні від положення рівноваги на точку, що коливається, діє сила  $22,5$  мкН?
706. Математичний маятник здійснює згасаючі коливання з логарифмічним декрементом згасання рівним  $0,2$ . У скільки разів зменшиться повне прискорення маятника в його крайньому положенні за одне коливання?
707. Тіло масою  $10$  г здійснює згасаючі коливання з максимальним значенням амплітуди  $7$  см, початковою фазою рівної нулю, і коефіцієнтом згасання рівним  $0,6$  с<sup>-1</sup>. На це тіло почала діяти зовнішня періодична сила, під дією якої встановилися вимушені коливання. Рівняння вимушених коливань має вигляд  $x = (5 \sin(10\pi \cdot t - 0.75\pi))$  см. Знайти: 1) рівняння (з числовими коефіцієнтами) власних коливань, 2) рівняння (з числовими коефіцієнтами) зовнішньої періодичної сили.
708. До пружини, що висить вертикально, підвішують вантаж. При цьому пружина подовжується на  $9,8$  см. Відтягуючи цей вантаж вниз і відпускаючи його, примушують вантаж здійснювати коливання. Чому повинен дорівнювати коефіцієнт згасання, щоб: 1) коливання

припинилися через 10 с (вважати умовно, що коливання припинилися, якщо їх амплітуда зменшується до 1% від початкової величини), 2) вантаж повертався в положення рівноваги аперіодично, 3) логарифмічний декремент згасання дорівнює  $b$ ?

709. Амплітуди відхилень вимушених гармонічних коливань при циклічних частотах  $400 \text{ рад/с}$  і  $600 \text{ рад/с}$  рівні між собою. Знайти частоту, при якій амплітуда відхилення максимальна.
710. Рівняння згасаючих коливань дане у вигляді  $x = \left( 5 \exp(-0.25t) \sin \frac{\pi}{2} t \right) \text{ м}$ . Знайти: 1) логарифмічний декремент згасання, 2) швидкість точки, що коливається, в моменти часу:  $0$ ;  $T$ ;  $2T$ ;  $3T$  і  $4T$ , 3) прискорення точки, що коливається, в ці ж моменти часу.
711. Матеріальна точка масою  $0,01 \text{ кг}$  здійснює гармонічні коливання, рівняння яких має вигляд  $x = (0.2 \sin 2\pi \cdot t) \text{ м}$ . Знайти силу, що діє на цю точку, в момент часу  $0,1 \text{ с}$ , а також повну енергію точки.

### Електромагнітні коливання і хвилі

712. Котушка, індуктивність якої  $3 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$ , приєднана до плоского конденсатора з площею пластин  $100 \text{ см}^2$  і відстанню між ними  $0,1 \text{ мм}$ . Чому дорівнює діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинами, якщо контур резонує на хвилю, довжина якої  $750 \text{ м}$ ?
713. Рівняння зміни з часом різниці потенціалів в коливальному контурі дане у вигляді  $U = (50 \cos(10^4 \pi \cdot t)) \text{ В}$ . Ємність конденсатора становить  $10^{-7} \text{ Ф}$ . Знайти: 1) період коливань, 2) індуктивність контуру, 3) закон зміни з часом сили струму в ланцюзі, 4) довжину хвилі, відповідну цьому контуру.
714. Рівняння зміни сили струму в коливальному контурі з часом дається у вигляді  $I = (-0.02 \sin 400\pi \cdot t) \text{ А}$ . Індуктивність контура  $1,0 \text{ Гн}$ . Знайти: 1) період коливань, 2) ємність контура, 3) максимальну різницю потенціалів на обкладинках конденсатора, 4) максимальну енергію магнітного поля, 5) максимальну енергію електричного поля.
715. Чому дорівнює відношення енергії магнітного поля коливального контура до енергії його електричного поля для моменту часу  $T/8 \text{ с}$ ?
716. Коливальний контур радіоприймача складається з котушки з індуктивністю  $1 \text{ мГн}$  і змінного конденсатора, ємність якого може мінятися в межах від 9,7 до 92 пФ. У якому діапазоні може приймати радіостанції цей приймач?
717. Обмотка котушки складається з 500 витків мідного дроту площею поперечного перетину  $1,0 \text{ мм}^2$ . Довжина котушки  $0,5 \text{ м}$  і її діаметр  $8$

см. При якій частоті змінного струму повний опір цієї котушки удвічі більше за її активний опір?

718. Максимальна напруга в коливальному контурі, що складається з котушки індуктивністю  $5 \text{ мкГн}$  і конденсатора ємністю  $13 \text{ нФ}$ , дорівнює  $1,2 \text{ В}$ . Активним опором можна знехтувати. Визначити: 1) ефективну величину сили струму в ланцюзі, 2) максимальне значення магнітного потоку, якщо число витків котушки дорівнює 28.
719. Плоский контур, що складається з індуктивності  $10 \text{ мГн}$  і активного опору  $70 \text{ Ом}$ , обертається з кутовою швидкістю  $100 \text{ рад/с}$  в однорідному магнітному полі з індукцією  $0,01 \text{ Тл}$ . Площа контура  $10 \text{ см}^2$ . Визначити силу струму в контурі. Яку потужність необхідно витратити, щоб обертати контур?
720. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю  $2,22 \text{ нФ}$  і одношарової котушки, намотаної з мідного дроту діаметром  $0,5 \text{ мм}$ . Довжина котушки  $0,2 \text{ м}$ . Знайти логарифмічний декремент згасання коливань.
721. При обертанні металевих тіл електрони віддаляються від осі обертання, і в тілі створюється електричне поле. З якою частотою повинен обертатися біля вертикальної осі металевий диск, щоб електричне поле в ньому було відсутнє? Вертикальну складову магнітного поля Землі прийняти рівною  $40 \text{ А/м}$ .
722. Котушка довжиною  $25 \text{ см}$  і радіусом  $2 \text{ см}$  має обмотку з  $1000$  витків мідного дроту площею поперечного перетину  $1 \text{ мм}^2$ . Котушка ввімкнена в ланцюг змінного струму з частотою  $50 \text{ Гц}$ . Яку частину повного опору котушки складає: 1) активний опір, 2) індуктивний опір?

### Елементи теорії відносності

801. Кінетична енергія електрона дорівнює  $1,53 \text{ МеВ}$ . Визначити імпульс електрона, швидкість електрона і його масу в цих умовах.
802. При якій швидкості маса будь-якої частинки речовини в п'ять разів більше її маси спокою?
803. Яку швидкість потрібно надати частинці, щоб її кінетична енергія дорівнювала б енергії спокою?
804. Яку прискорюючу різницю потенціалів повинен пройти електрон, щоб його швидкість склала  $95\%$  швидкості світла?
805. Повна енергія протона в  $10$  разів більше його енергії спокою. Чому за цих умов дорівнює швидкість, маса, імпульс і кінетична енергія протона?
806. На скільки збільшиться швидкість  $\alpha$  - частинки при прискоренні її від початкової швидкості рівної нулю до швидкості рівної  $0,9$  швидкості світла?

807. Поздовжні розміри тіла масою  $2 \cdot 10^{-25}$  кг зменшилися в два рази. Яку швидкість повинно для цього мати тіло, яка його маса і кінетична енергія за цих умов?
808. Синхрофазотрон дає пучок протонів з кінетичною енергією  $104 \text{ MeV}$ . Яку частку швидкості світла складає швидкість протонів в цьому пучку. Чому до-рівнює відносне релятивістське скорочення розмірів протона в цих умовах?
809. Кубик масою  $2,7 \cdot 10^{-6}$  кг і стороною  $1 \text{ мм}$  рухається вздовж осі, що співпадає з однією з його сторін, із швидкістю  $0,8$  швидкості світла. Знайти його густину і відносну зміну об'єму.
810. Протон має імпульс  $938 \text{ MeV} \cdot \text{с/м}$ . Яку кінетичну енергію необхідно надати протону, щоб його імпульс зріс удвічі?
811. Електрон прискорюється в електричному полі з напруженістю  $3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ . Знайти швидкість електрона через  $1 \text{ нс}$ . Яка була б швидкість електрона, якби його маса не залежала від швидкості (нерелятивістський випадок)?

### Теплове випромінювання

901. Температура вольфрамової спіралі в  $100\text{-ватній}$  електричній лампочці дорівнює  $2450 \text{ К}$ . Відношення її енергетичної світимості до енергетичної світимості абсолютно чорного тіла при даній температурі дорівнює  $0,3$ . Знайти величину випромінюючої поверхні.
902. Обчислити дійсну температуру вольфрамової розжареної спіралі, якщо радіаційний пірометр показує температуру  $2250 \text{ К}$ . Прийняти, що поглинальна здатність для вольфраму не залежить від частоти випромінювання і дорівнює  $0,32$ .
903. Потік випромінювання абсолютно чорного тіла становить  $1 \text{ кВт}$ , максимум енергії випромінювання доводиться на довжину хвилі  $1,45 \text{ мкм}$ . Визначити площу випромінюючої поверхні.
904. Визначити температуру і енергетичну світимість абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі  $400 \text{ нм}$ .
905. Як і в скільки разів зміниться потік випромінювання абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання переміститься з червоної межі видимого спектру ( $780 \text{ нм}$ ) на фіолетову ( $390 \text{ нм}$ )?
906. З оглядового вікця печі випромінюється потік енергії  $3 \cdot 10^3 \text{ Дж/хв}$ . Визначити температуру печі, якщо площа отвору дорівнює  $8 \text{ см}^2$ .



907. Абсолютно чорне тіло має температуру  $400\text{ K}$ . Якою буде температура тіла, якщо в результаті нагрівання потік випромінювання збільшиться в  $10$  разів?
908. Випромінювання Сонця по своєму спектральному складу близько до випромінювання абсолютно чорного тіла, для якого максимум здатності випромінювання, припадає на довжину хвилі  $0,48\text{ мкм}$ . Знайти масу, що втрачається Сонцем в одну секунду за рахунок випромінювання.
909. Енергетична світимість абсолютно чорного тіла дорівнює  $300\text{ Вт/м}^2$ . Визначити довжину хвилі, що відповідає максимуму випромінювальної здатності цього тіла.
910. Є два абсолютно чорних джерела теплового випромінювання. Температура одного з них  $2500\text{ K}$ . Визначити температуру іншого джерела, якщо довжина хвилі, що відповідає максимуму його випромінювальної здатності на  $0,50\text{ мкм}$  більше довжини хвилі, що відповідає максимуму випромінювальної здатності першого джерела.

### Елементи квантової фізики

911. З якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб імпульс його був рівний імпульсу фотона з довжиною хвилі  $520\text{ нм}$ ?
912. Яку енергію повинен мати фотон, щоб його маса дорівнювала масі спокою електрона? Визначити довжину хвилі випромінювання.
913. При якій температурі кінетична енергія молекули двоатомного газу буде еквівалентна енергії фотона з довжиною хвилі  $589\text{ нм}$ ?
914. Знайти масу фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу молекули водню при температурі  $20^\circ\text{ C}$ . Вважати, що швидкість молекули дорівнює середній квадратичній швидкості.
915. Обчислити довжини хвиль де-Бройля електрона, протона і атома урану, що мають однакову кінетичну енергію, яка складає  $100\text{ eV}$ .
916. Яку енергію необхідно додатково надати електрону, щоб його довжина хвилі де Бройля зменшилася від  $100$  до  $50\text{ нм}$ ?
917. Заряджена частинка, прискорена різницею потенціалів  $200\text{ В}$ , має довжину хвилі де-Бройля, яка становить  $2,02\text{ нм}$ . Знайти масу цієї частинки, якщо відомо, що заряд її чисельно дорівнює заряду електрона.
918.  $\alpha$  - частинка рухається по колу радіусом  $0,83\text{ см}$  в однорідному магнітному полі, напруженість якого складає  $20\text{ кА/м}$ . Знайти довжину хвилі де Бройля для цієї  $\alpha$  -частинки.
919. Знайти довжину хвилі де-Бройля для атома водню, що рухається при температурі  $20^\circ\text{ C}$  з найбільш вірогідною швидкістю.

920. Визначити енергію, масу і імпульс фотона, якщо відповідна йому довжина хвилі дорівнює  $1,6 \text{ нм}$ .
921. Червона межа фотоефекту для цезію складає  $640 \text{ нм}$ . Визначити максимальну кінетичну енергію фотоелектронів в електрон-вольтах, якщо на цезій падають промені з довжиною хвилі  $200 \text{ нм}$ .
922. Яка повинна бути довжина хвилі  $\gamma$ -променів, що падають на цинкову пластинку, щоб максимальна швидкість фотоелектронів дорівнювала  $1 \text{ Мм/с}$ ?
923. На фотоелемент з катодом з рубідію падають промені з довжиною хвилі  $100 \text{ нм}$ . Знайти найменше значення затримуючої різниці потенціалів, яку потрібно прикласти до фотоелемента, щоб припинити фотострум.
924. На металеву пластинку спрямований пучок ультрафіолетових променів з довжиною хвилі  $0,2 \text{ мкм}$ . Фотострум припиняється при мінімальній затримуючій різниці потенціалів  $2,2 \text{ В}$ . Визначити роботу виходу електронів з металу. По таблиці визначити, який це метал.
925. До якого максимального потенціалу буде заряджатися віддалена від інших тіл мідна кулька при опромінюванні її електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі  $140 \text{ нм}$ ?
926. При почерговому освітленні поверхні деякого металу світлом з довжинами хвиль  $0,35 \text{ мкм}$  і  $0,54 \text{ мкм}$  виявили, що відповідні максимальні швидкості фотоелектронів відрізняються один від одного в 2 рази. Знайти роботу виходу з поверхні цього металу в електрон-вольтах. По таблиці визначити, який це метал.
927. Знайти частоту світла, що вириває з поверхні металу електрони, які повністю затримуються зворотним потенціалом  $3 \text{ В}$ . Фотоефект у цього металу починається при частоті падаючого світла, яка дорівнює  $6 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Знайти роботу виходу електрона з цього металу. По таблиці визначити, який це метал.
928. При фотоефекті з платинової поверхні величина затримуючого потенціалу виявилася рівною  $0,8 \text{ В}$ . Знайти: 1) довжину хвилі застосованого випромінювання, 2) максимальну довжину хвилі, при якій ще можливий фотоефект.
929. Кванти світла з енергією  $4,9 \text{ eV}$  виривають фотоелектрони з металу з роботою виходу  $4,5 \text{ eV}$ . Знайти максимальний імпульс, що надається поверхні металу при вильоті кожного електрона.
930. Визначити сталу Планка, якщо відомо, що фотоелектрони, що вириваються з поверхні деякого металу світлом з частотою  $2,2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , повністю затримуються зворотним потенціалом  $6,6 \text{ В}$ , а ті, що вириваються світлом з частотою  $4,6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  потенціалом  $16,5 \text{ В}$ .

931. Фотон з енергією  $10 \text{ eV}$  падає на цинкову пластинку і викликає фотоелектр. Визначити імпульс, отриманий пластинкою, якщо прийняти, що напрям руху фотона і фотоелектрона лежать на одній прямій, перпендикулярній поверхні пластин.

### ДОВІДКОВІ ТАБЛИЦІ

Таблиця 1. - Деякі сталі та астрономічні величини

1	Гравітаційна стала $G$	$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$
2	Стала Больцмана $k$	$1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$
3	Електрична стала $\epsilon_0$	$8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
4	Магнітна стала $\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
5	Стала Стефана – Больцмана $\sigma$	$5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$
6	Стала Планка $h$	$6.625 \cdot 10^{-34} \text{Дж} \cdot \text{с}$
7	Заряд електрона $e$	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{Кл}$
8	Маса спокою електрона $m_e$	$9.11 \cdot 10^{-31} \text{кг}$
9	Маса спокою протона $m_p$	$1.672 \cdot 10^{-27} \text{кг}$
10	Швидкість поширення світла в вакуумі $c$	$2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
11	Середній радіус Землі $R_z$	$6.37 \cdot 10^6 \text{м}$
12	Маса Землі $M_z$	$5.96 \cdot 10^{24} \text{кг}$
13	Радіус Сонця $R_c$	$6.95 \cdot 10^8 \text{м}$
14	Маса Сонця $M_c$	$1.97 \cdot 10^{30} \text{кг}$
15	Середня відстань між центрами Сонця і Землі	$1.5 \cdot 10^{11} \text{м}$
16	Стала Віна $b$	$2.9 \cdot 10^{-3} \text{м} \cdot \text{К}$

Таблиця 2. - Робота виходу електронів з металів (в  $\text{eV}$ )

Метал	$A, \text{eV}$
W	4.5
W+Cs	1.6
W+Th	2.63
Pt+Cs	1.40
Pt	5.3
Ag	4.74
Li	2.4
Na	2.3
K	2.0
Cs	1.9

## Список джерел

1. Савельев И. В. Курс общей физики.[Текст] / Т.1.: учебник для высших учебных заведений / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1989. ?– 510 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики.[Текст] / Т.2.: учебник для высших учебных заведений / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1989. ?– 430 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики.[Текст] / Т.3.: учебник для высших учебных заведений / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1989. ?– 528 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. [Текст] / В.С. Волькенштейн – М.: Наука, 1990 – 365 с.
5. Зисман Г.А. Курс общей физики.[Текст] : учебник для высших учебных заведений / Г.А.Зисман, О.М. Тодес. – М.: Наука, 1989 М. Наука. т. 1-3, Київ, “Едельвейс”, Дніпро, 1994 – 275 с.
6. Загальний курс фізики. [Текст]: Збірник задач / І.П. Гаркуша, І.Т. Горбачук, В.П. Курінний, І.М. Кучерук. - К.: Техніка, 2004 – 240 с.
7. В.П. Дущенко Загальна фізика. Фізичні основи механіки, молекулярної фізики і термодинаміки .[Текст]: підручн. / В.П Дущенко, І. М. Кучерук Київ, “Вища школа”, 1993 – 320 с.
8. Кучерук І.М. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. [Текст]: підручн. / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук. Київ, “Вища школа”, 1995 – 280 с.
9. Загальні основи фізики. Т. 1 Механіка і молекулярна фізика. [Текст]: підручн. / І.Г. Богацька, Д.Б. Головка, Д.А. Маляренко, Ю.Л. Ментковський - Київ, “Либідь”, 1995 – 310 с.
10. Загальні основи фізики. Т. 2 Електродинаміка і атомна фізика. [Текст]: підручн. / І.Г. Богацька, Д.Б. Головка, Д.А. Маляренко, Ю.Л. Ментковський - Київ, “Либідь”, 1995 – 285 с.
11. Сена Л.А. Одиничі фізичних величин та їх розмірність. [Текст]: підручн. / Л.А. Сена. - М. Наука. 1977 – 83 с.
12. Чолпан П.П. Основи фізики. [Текст]: підручн. / П.П. Чолпан. - Київ, “Вища школа”, 1995 - 250 с.
13. Бушок Г.Ф. Курс фізики. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. Т.1. [Текст]: підручн. / Г.Ф. Бушок, В.В. Левандовський, Г.Ф. Півень - Київ, “Либідь”, 1997 - 230 с.
14. Петченко О.М. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з курсу “Фізика”. Розділ “Механіка” [Текст]: підручн. / О.М. Петченко, Є.І Назаренко, Є.С. Орел - Харків: ХНАМГ, 2006 – 56 с.
15. Петченко О.М. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з курсу “Фізика”. Розділ “Молекулярна фізика і термодинаміка”. [Текст]: підручн. / О.М. Петченко, Н.М. Яценко, Г.О. Петченко - Харків: ХНАМГ, 2006 - 60 с.
16. Аксьонова К.Ю. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з курсу Фізика. Розділ “Електрика і магнетизм” [Текст]: підручн. / К.Ю. Аксьонова, Ю.Д. Оксюк, Є.Б. Сидоренко - Харків: ХНАМГ, 2006 – 56 с.
17. Безуглий А.В. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з розділу “Оптика” курсу фізики. [Текст]: підручн. / А.В. Безуглий, А.С. Сисоев, О.М. Петченко - Харків: ХНАМГ, 2006 – 60 с.
18. Аксьонова К.Ю. Методичні вказівки до самостійної роботи з вивчення курсу фізики. [Текст]: підручн. / К.Ю. Аксьонова, Ю.Д. Оксюк, Є.Б. Сидоренко - Харків: ХНАМГ, 2006 – 23 с.
19. Фізика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. [Текст]: учебн. / Под ред. А.Г.Чертова. Москва, 1987 – 150 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Аксьонова Катерина Юрївна

Оксюк Юрій Данилович

Сидоренко Євген Борисович

**Конспект лекцій і методичні вказівки з проведення практичних і контрольних робіт з курсу загальної фізики**

(для студентів І курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів за напрямками 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701, «Електротехніка та електротехнології», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.060101 «Будівництво», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій», 6.170202 «Охорона праці»)

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Н. В. Зражевська*

План 2012, поз. 101 Л

---

Підп. до друку 21.06.2012  
Друк на ризографі.  
Зам. №

Формат 60x84 /16  
Ум. друк. арк. 10,0  
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК №4064 від 12.05.2011