МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

для практичних занять та самостійної роботи з вищої математики за темами: "Кратні інтеграли", "Криволінійні інтеграли" та "Поверхневі інтеграли"

(для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.050701 "Електротехніка та електротехнології", 6.060101 "Будівництво")

Харків – ХНАМГ – 2012

Методичні вказівки та індивідуальні завдання для практичних занять та самостійної роботи з вищої математики за темами: "Кратні інтеграли", "Криволінійні інтеграли" та "Поверхневі інтеграли" (для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.050701 "Електротехніка та електротехнології", 6.060101 "Будівництво") / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 117 с.

Укладачі **С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський**

Рецензент: д-р ф.-м. наук, професор **А. І. Колосов**

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 2 від 26.09.2012 р.

ВСТУП

Дані методичні вказівки містять завдання для самостійної роботи з курсу вищої математики, що відповідають третьому заліковому модулю робочої програми. З метою полегшення засвоєння курсу вищої математики в методичних вказівках подано рішення типових варіантів завдань за кожною темою. Ступінь труднощів їхнього розв'язання відповідає пропонованим для самостійної роботи завданням. Кожна задача подана у тридцяти варіантах. У кожному модулі нумерація тем прохідна.

Методичні вказівки дозволяють здійснювати перехід від пасивних форм навчання до активних, що виражається у самостійній роботі студента з рекомендованими нижче джерелами і розв'язанні запропонованих задач.

Велика кількість задач може бути використана викладачами для проведення практичних і контрольних робіт в аудиторії з метою поточного контролю засвоєння студентами матеріалу з вищої математики.

Зауваження і пропозиції щодо даних вказівок надсилайте за адресою, яку вказано на останній сторінці.

1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Подвійний інтеграл

1.1.1. Поняття подвійного інтегралу. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$. Вважатимемо, що межа області D складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких визначається функцією виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$.

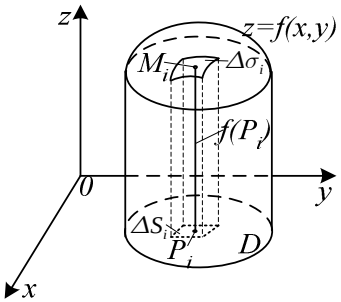


Рис. 1.1

Розіб'ємо область D на частини D_i (рис. 1.1), які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,2$ ..., n. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i;\eta_i)$ їй на поверхні відповідає точка $M(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i, \qquad (1.1)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ по області D. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ - найбільший з діаметрів областей D_i.

Якщо інтегральна сума (1.1) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається подвійним інтегралом і позначається одним з таких символів: $\iint\limits_D f(x,y)dS$ або $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Таким чином: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$. (1.2)

У цьому випадку функція $f(x,y)$ називається інтегровною; D - областю інтегрування; x, y - змінними інтегрування; dS (або $dxdy$) - елементом площі.

1.1.2. Достатня умова існування подвійного інтегралу.

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.

Доведення теореми виходить за межі програми, але скористаємося наступним. Порівнюючи визначення подвійного інтегралу (1.2) і визначеного інтегралу $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, бачимо, що конструктивно ці означення цілком аналогічні: в обох випадках розглядається деяка функція *f*, але в першому випадку це функція однієї змінної, визначена на одновимірній області - відрізку $[a;\ b]\subset R_1$ а в другому - це функція двох змінних, визначена у двовимірній області $D\subset R_2$.

В обох випадках область визначення розбивають на частини, в кожній з яких беруть довільну точку і в ній знаходять значення функції. Після цього знайдене значення функції множимо на міру відповідної частини області визначення. У випадку однієї змінної такою мірою була довжина Δx_i відрізка $[x_i;x_{i+1}]$, а у випадку двох змінних - площа ΔS_i області $D_i\subset D$.

Наступні кроки знову однакові: утворюють інтегральні суми і знаходять їхні границі, коли міра частин області визначення прямує до нуля.

1.1.3. Властивості подвійного інтегралу:

– сталий множник можна виносити за знак подвійного інтегралу $\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $C = const$;

– подвійний інтеграл від суми двох (скінченного числа) функцій дорівнює сумі двох (скінченного числа) подвійних інтегралів від цих функцій.

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy;$$

– якщо в області D функція $f(x,y) \geq 0$, то і $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$;

– якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ визначені в одній і тій самій області D i $f(x,y) \geq g(x,y)$, то і $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$;

– якщо область інтегрування функції $f(x,y)$ розбити на області D_1 і D_2 або на довільне скінченне число областей, які складають область D і які не мають спільних внутрішніх точок, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$;

– якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то $mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS$, де m і M - відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D;

– якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка (x_0; y_0), що: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S$.

Величину $f(x_0,y_0) = 1/S\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ називають середнім значенням функції $f(x,y)$ в області D.

<u>1.1.4. Обчислення подвійного інтегралу</u>. Обчислення подвійного інтегралу за формулою (1.2) як границі інтегральної суми, так само як і у випадку визначеного інтегралу, пов'язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтегралу зводять до обчислення так званого повторного інтегралу - двох звичайних визначених інтегралів.

Покажемо, як це робиться. Припустимо, що при $(x;\ y) \in D$ функція $f(x,y) \geq 0$. Тоді подвійний інтеграл виражає об'єм циліндричного тіла (рис. 1.2) з основою D, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y)$. Обчислимо цей об'єм за допомогою методу паралельних перерізів: $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, (1.3)

де $S(x)$ - площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x = a$ та $x = b$ - рівняння площин, які обмежують дане тіло. Перед

тим, як обчислювати площу зробимо певні припущення відносно області D.

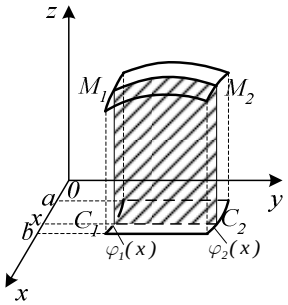


Рис. 1.2

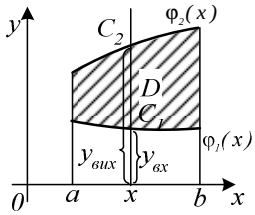


Рис. 1.3

Припустимо спочатку, що область інтегрування D обмежена двома неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ і двома прямими $x = a$ та $x = b$, причому $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ для всіх $x \in (a;b)$ (рис. 1.3).

Проведемо через точку ($x; 0$), де $x \in (a;b)$, пряму, паралельну вісі Oy. Ця пряма перетинає криві $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ в точках C_1 і C_2, які називатимемо відповідно точкою входу в область D і точкою виходу з області D. Ординати цих точок позначимо відповідно $y_{вх}$ та $y_{вих}$, тоді $y_{вх} = \varphi_1(x)$, $y_{вих} = \varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається правильною в напрямі вісі Oy. Інакше кажучи, область D називається правильною в напрямі вісі Oy, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно вісі Oy, перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

Знайдемо тепер площу $S(x)$. Для цього проведемо через точку ($x; 0; 0$) площину, перпендикулярну вісі Ox (рис. 1.2). У перерізі цієї площини і циліндричного тіла утворюється трапеція $C_1M_1M_2C_2$. Апліката $z = f(x,y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише y, причому y змінюється в межах від $y_{вх} = \varphi_1(x)$ до $y_{вих} = \varphi_2(x)$.

Площа $S(x)$ трапеції $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу: $S(x) = \int\limits_{y_{вх}}^{y_{вих}} z dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$. Підставивши знайдене значення $S(x)$ у формулу (1.3) враховуючи формулу (1.2), дістанемо:

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$, або в зручнішій формі:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy . \qquad (1.4)$$

Це і є шукана формула для обчислення подвійного інтеграла. Частина, яка стоїть праворуч у формулі (1.4) є повторний інтеграл. У повторному інтегралі інтегрування виконуємо спочатку по змінній *y* (при цьому змінна *x* вважається сталою), а потім по змінній *x*. Інтеграл по змінній *y* називають внутрішнім, а по змінній *x* - зовнішнім. У результаті обчислення внутрішнього інтегралу (в межах від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$) одержуємо певну функцію від однієї змінної *x*. Інтегруючи цю функцію в межах від *a* до *b*, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число - значення подвійного інтегралу.

1.1.5. Зауваження. *Зауваження* 1. Наведені геометричні міркування при одержанні формули (1.4) зроблені у випадку, коли $f(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D$. Проте формула (1.4) залишається справедливою і в загальному випадку. Строге доведення цієї формули ми опускаємо.

Зауваження 2. Якщо область *D* обмежена двома неперервними кривими $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ і двома прямими *y* = *c*, *y* = *d* (*c* < *d*), причому $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ для всіх $y \in (c;d)$, тобто якщо область *D* правильна в напрямі осі *Ox* (рис. 1.4), то справедлива формула

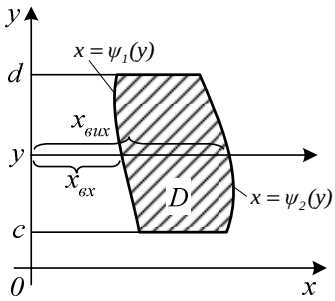


Рис. 1.4

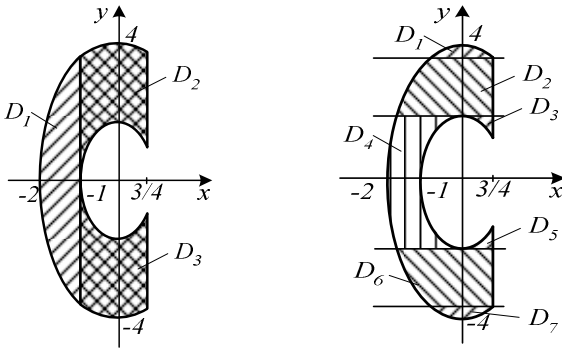
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.5)$$

Тут внутрішнім є інтеграл по змінній *x*. Обчислюючи його в межах від $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ (при цьому *y* вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної *y*. Інтегруючи потім цю функцію в межах від *c* до *d*, дістанемо значення подвійного інтегралу.

Зауваження 3. Якщо область D правильна в обох напрямах, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (1.4), так і за формулою (1.5). Результати матимемо однакові.

Зауваження 4. Якщо область не є правильною ні в напрямі осі *Ox*, ні в напрямі осі *Oy* (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше, ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі осі *Ox* чи вісі *Oy*.

Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних областях і додаючи результати (властивість адитивності), знаходимо шуканий подвійний інтеграл по області D.



а б

Рис. 1.5

<u>Приклад</u>. Область D обмежена еліпсами $x^2 + y^2/4 = 1$, $x^2/4 + y^2/16 = 1$ і прямою $x = 3/4$.

При інтегруванні в напрямі осі *Oy* область *D* складається з трьох частин (рис. 1.5, а).

При інтегруванні в напрямі осі *Ox* область *D* складається з

семи частин (рис. 1.5, б).

Зауваження 5. Повторні інтеграли у формулах (1.4) і (1.5) називаються інтегралами з різним порядком інтегрування. Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно від формули (1.4) перейти до формули (1.5), або навпаки.

У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x,y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 6. Правильну в напрямі осі *Oy* або осі *Ox* область D позначаємо відповідно: $D:\{(\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$, або $D:\{(\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le y\le d\}$.

<u>Приклад</u>. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xy^2dxdy$, якщо область D міститься в першій чверті і обмежена лініями $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$.

<u>Розв'язання.</u>

Область інтегрування D зображено на рис. 1.6. Функція $f(x,y)=xy^2$ неперервна в даній області. Обчислення даного подвійного інтегралу можна виконати за формулою (1.4), так і за формулою (1.5).

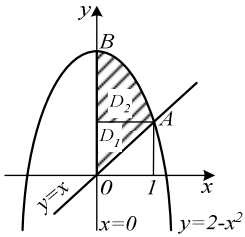


Рис. 1.6

Область D правильна в напрямі осі *Oy*, тобто

$$D:\{x\le y\le 2-x^2,\ 0\le x\le 1\},$$

тоді за формулою (1.4) маємо:

$$\iint\limits_D xy^2dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x^2} xy^2dy=\int\limits_0^1 x\frac{y^3}{3}\Big|_x^{2-x^2}dx=$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 (x(2-x^2)^3 - x^4)dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 (2-x^2)^3 d(2-x^2) - \frac{1}{3}\int_0^1 x^4 dx = \frac{67}{120}.$$

Обчислимо цей інтеграл іншим способом, користуючись формулою (1.5). Область D є правильною в напрямі осі Ox, але її треба розбивати на дві частини D_1 і D_2, оскільки лінія OAB, на якій містяться точки виходу з області, задається двома різними рівняннями: $D_1 : \{0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\}$; $D_2 : \left\{0 \le x \le \sqrt{2-y},\ 1 \le y \le 2\right\}$. Отже, даний інтеграл дорівнюватиме сумі двох інтегралів:

$$\iint_D xy^2 dxdy = \iint_{D_1} xy^2 dxdy + \iint_{D_2} xy^2 dxdy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^y xy^2 dx + \int_1^2 dy \int_x^{\sqrt{2-y}} xy^2 dx = \int_0^1 y^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^y dy +$$

$$+ \int_1^2 y^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2-y}} dy = \int_0^1 \frac{y^4}{2} dy + \int_1^2 \frac{(2-y)y^2}{2} dy = \frac{1}{10} + \frac{11}{24} = \frac{67}{120}.$$

Отримали той же результат. Очевидно, при обчисленні вихідного інтеграла у даному випадку вигідніше користуватися формулою (1.4).

<u>Приклад.</u> Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x,y)dx.$$

<u>Розв'язання.</u> Тут потрібно перейти від обчислення повторного інтегралу за формулою (1.5) до обчислення даного інтегралу за формулою (1.4). За даним інтегралом знайдемо область D.

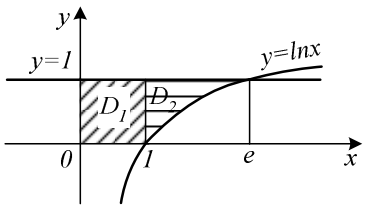


Рис. 1.7

Область інтегрування D обмежена лініями: $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = e^y$ або $y = \ln x$ (рис. 1.7). Якщо внутрішнє інтегрування провести по y, а зовнішнє – по x, то дану область D треба розглядати як

правильну в напрямі осі Oy. Оскільки лінія, на якій містяться точки входу в область, дана двома різними рівняннями, то цю область треба розбити на дві частини D_1 і D_2.

Маємо: $D_1 : \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$;

$D_2 : \{ln\, x \le y \le 1,\ 1 \le x \le e\}$.

Даний інтеграл дорівнюватиме сумі двох інтегралів:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^e dx \int_{ln\,x}^1 f(x,y)dy .$$

<u>1.1.6. Заміна змінних у подвійному інтегралі.</u> Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D і існує інтеграл: $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Припустимо, що за допомогою формул

$$x = x(u,\upsilon),\ \ y = y(u,\upsilon) \qquad (1.6)$$

ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та υ. Вважатимемо, що з формул (1.6) однозначно можна визначити u та υ:

$$u = u(x,y),\ \ \upsilon = \upsilon(x,y). \qquad (1.7)$$

Згідно з формулами (1.7), кожній точці $M(x;y) \in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u;\upsilon)$ на координатній площині з координатами u і υ. Нехай множина всіх точок $M^*(u;\upsilon)$ утворює обмежену замкнену область D^*. Формули (1.6) називаються формулами перетворення координат, а формули (1.7) - формулами оберненого перетворення.

<u>Теорема</u>. Якщо перетворення (1.7) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (1.6) мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник:

$$J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}, \qquad (1.8)$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv . \qquad (1.9)$$

Функціональний визначник (1.8) називається визначником

Якобі або якобіаном.

Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (1.6), ми маємо елемент площі $dxdy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|J(u,\upsilon)|dud\upsilon$ в координатах u, υ і область інтегрування D замінити відповідною їй новою областю D^*.

<u>Подвійний інтеграл у полярних координатах.</u> Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за відомими формулами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Обчислимо якобіан: $\partial x/\partial\rho = \partial(\rho\cos\varphi)/\partial\rho = \cos\varphi$; $\partial x/\partial\varphi = \partial(\rho\cos\varphi)/\partial\varphi = -\rho\sin\varphi$; $\partial y/\partial\rho = \partial(\rho\sin\varphi)/\partial\rho = \sin\varphi$; $\partial y/\partial\varphi = \partial(\rho\sin\varphi)/\partial\varphi = \rho\cos\varphi$. Знайдені частинні похідні підставимо у визначник:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho .$$

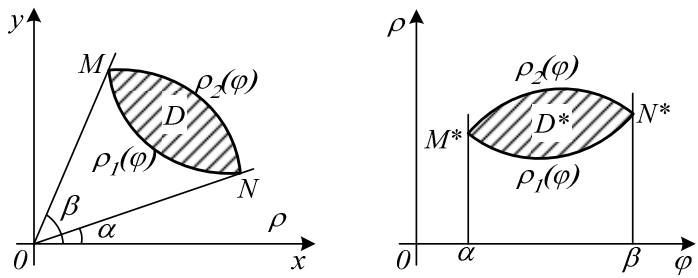
Отже, формула (1.9) набирає вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi . \qquad (1.10)$$

Тут область D дана в декартовій системі координат Oxy, а відповідна їй область D^* – у полярній системі координат.

Зауваження 1. У багатьох випадках формулу (1.10) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області D містить суму $x^2 + y^2$, оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 .$$



а б

Рис. 1.8

Зауваження 2. Якщо область D (рис. 1.8, а) обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та $\beta(\alpha < \beta)$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$, то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta)$ (рис. 1.8, б). Тому формулу (1.10) можна записати у вигляді

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho . \qquad (1.11)$$

Зауваження 3. Якщо область D охоплює початок координат, тобто точка O (0; 0) є внутрішньою точкою області D, то (1.10) можна записати у вигляді:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho , \qquad (1.12)$$

де $\rho(\varphi)$ - полярне рівняння межі області D^*.

<u>Приклад.</u> Обчислити інтеграл $\iint_D (6x - 3y)dxdy$, якщо область D - паралелограм, обмежений прямими: $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$ (рис. 1.9).

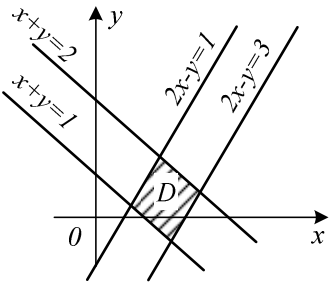


Рис. 1.9

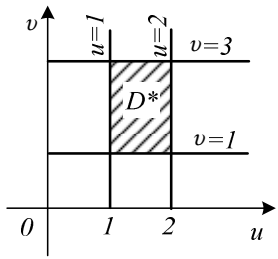


Рис. 1.10

<u>Розв'язання.</u> Безпосереднє обчислення цього інтегралу надто громіздке, тому що як в напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy область D треба розбити на три області і обчислити три подвійних інтеграла.

Виконаємо таку заміну змінних: $x + y = u$, $2x - y = \upsilon$, тоді прямі $x + y = 1$ та $x + y = 2$ в системі Oxy переходять в прямі $u = 1$ та $u = 2$ в системі $Ou\upsilon$ (рис. 1.10), а прямі $2x - y = 1$ та $2x - y = 3$ відповідно в прямі $\upsilon = 1$ та $\upsilon = 3$. Таким чином, область D (паралелограм) переходить у системі $Ou\upsilon$ у прямокутник D^*. Далі маємо:

$\begin{cases} x + y = u, \\ 2x - y = \upsilon. \end{cases}$ Розв'яжемо цю систему відносно x і y:

$\begin{cases} x = (u + \upsilon)/3 \\ y = (2u - \upsilon)/3 \end{cases}$. Обчислимо частинні похідні і сформуємо за формулою (1.8) якобіан:

$$J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -1/3, \quad |J(u,\upsilon)| = 1/3.$$

За формулою (1.9) обчислимо даний інтеграл у новій системі координат: $\iint\limits_D (6x - 3y)dxdy = \iint\limits_{D^*} \left(6 \cdot \frac{1}{3}(u + v) - 3 \cdot \frac{1}{3}(2u - v)\right)\frac{1}{3}dudv =$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 3\upsilon d\upsilon = u\Big|_1^2 \cdot (\upsilon^2/2)\Big|_1^3 = (2-1)\cdot(9-1)/2 = 4.$$

<u>Приклад.</u> Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$, якщо D - коло радіуса $R = 2$ з центром у початку координат.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки межа області D в полярній системі координат задається рівнянням $\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi = 4$ або $\rho = 2$, то за формулою (1.12) маємо:

$$\iint\limits_D \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4 - \rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(-\int_0^2 \sqrt{4 - \rho^2}\,d(4 - \rho^2)/2 = \pi(-2(4 - \rho^2)^{3/2}/3\Big|_0^2\right) = -16\pi/3.$$

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, якщо область D обмежена колами: $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ (рис. 1.11).

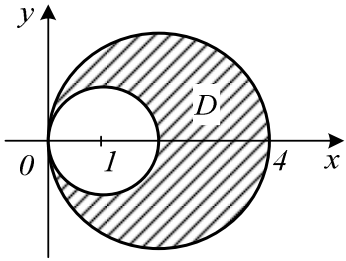


Рис. 1.11

Розв'язання. Знайдемо рівняння межі області D в полярних координатах: $\rho^2 cos^2 \varphi + \rho^2 sin^2 \varphi = 2\rho cos\varphi$, звідси $\rho = 2cos\varphi$ - полярне рівняння малого кола; аналогічно знаходимо, що $\rho = 4cos\varphi$ є полярне рівняння великого кола. Кут φ змінюється у межах від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Змінна ρ змінюється у межі від $2cos\varphi$ до $4cos\varphi$. Отже, за формулою (1.11) маємо:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2cos\varphi}^{4cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3} \Big|_{2cos\varphi}^{4cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (64cos^3\varphi - 8cos^3\varphi)d\varphi = \frac{56}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{56}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-sin^2\varphi)d(sin\varphi) = \frac{56}{3}\left(sin\varphi - \frac{sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{224}{9}.$$

1.1.7. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії.

Площа плоскої фігури. Якщо в площині *Oxy* задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D, то площу S цієї фігури знаходимо за формулою: $S = \iint\limits_D dxdy$. (1.13)

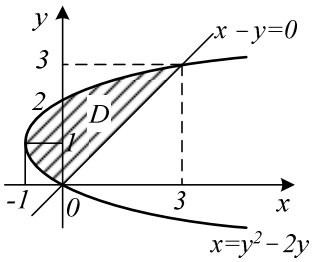


Рис. 1.12

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y$, $x - y = 0$ (рис. 1.12).

Розв'язання. Знайдемо ординати точок перетину даних ліній:

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи дає: $y_1 = 0$, $y_2 = 3$.

За формулою (1.13) знаходимо:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dy \int_{y^2-2y}^{y} dx$$

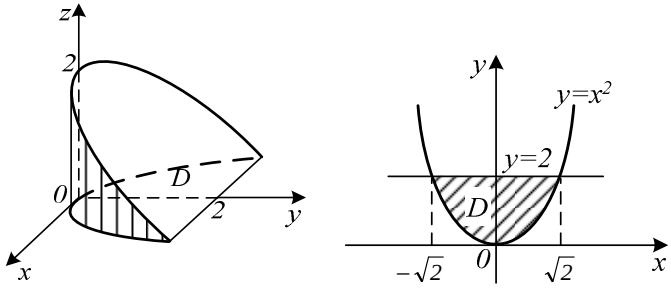
$$= \int_0^3 (y - y^2 + 2y)dy = \int_0^3 (3y - y^2)dy = 4{,}5.$$

Об'єм тіла. Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy, а зверху - поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна і невід'ємна в області D, знаходиться за формулою

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (1.14)$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $y = x^2$ і площинами: $z = 0$, $z = 2 - y$ (рис. 1.13, а).

Розв'язання. Областю D тут є параболічний сегмент (рис.1.13,б), тому $D: \left\{ x^2 \le y \le 2;\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \right\}$. За формулою (1.14):



а б

Рис. 1.13

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dx = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} (2-y)dy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2} dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2\right) dx = \frac{32\sqrt{2}}{15}.$$

Площа поверхні. Якщо поверхня σ, задана рівнянням $z = f(x,y)$, проектується на площину Oxy в область D і функції: $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ неперервні в цій області, то площу Q поверхні σ знаходять за формулою

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x'(x,y))^2 + (f_y'(x,y))^2}\, dxdy. \qquad (1.15)$$

<u>Доведення</u>. Повторимо все те, що робилось при визначенні подвійного інтегралу. Додамо до рис. 1.1. наступне. У точці M_i (рис. 1.14) проведемо дотичну площину Π_i і нормаль $\overline{N_i}$, які мають відповідні рівняння.

На площині Π_i виділимо ту частину, площа її $\Delta\delta_i$, яка проектується на площину Oxy в область ΔS_i. Складемо з них суму: $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\delta_i$. Границю цієї суми, коли найбільший з діаметрів (це величина λ) областей ΔS_i прямує до нуля, а число n цих областей прямує до нескінченності, назвемо площею поверхні $z = f(x,y)$. Тобто

$$Q = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta\delta_i . \qquad (1.16)$$

Обчислимо цю границю. Оскільки $\Delta\delta_i$ проектується в ΔS_i, то $\Delta S_i = \Delta\delta_i \cos\gamma_i$, де γ_i кут між $\overline{N_i}$ і ортом $\overline{\kappa}$ (рис. 1.14). Отже, $\Delta\delta_i = \Delta S_i / \cos\gamma_i$ косинус кута між векторами обчислюється за формулою: $\cos\gamma_i = (\overline{N_i} \cdot \overline{\kappa}) / \left|\overline{N_i}\right| \cdot \left|\overline{\kappa}\right|$. Вектор $\overline{N_i}$ має координати: ($f_x'(P_i)$, $f_y'(P_i) - 1$), а вектор $\overline{\kappa} = (0,0,1)$. Виконавши обчислення, маємо $\cos\gamma_i = 1 / \sqrt{f_x'(P_i)^2 + f_y'(P_i)^2 + 1}$ і відповідно: $\Delta\delta_i = \sqrt{f_x'(P_i)^2 + f_y'(P_i)^2 + 1}\ \Delta S_i$.

Останній вираз підставимо у (1.16), зробимо граничний перехід і дістанемо формулу (1.15).

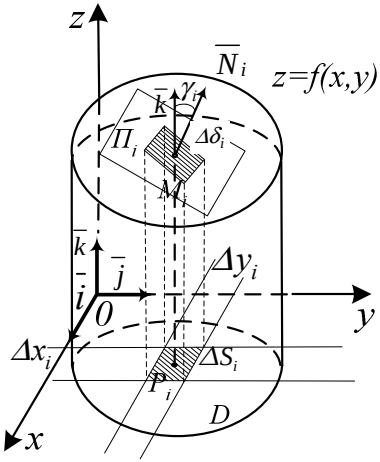
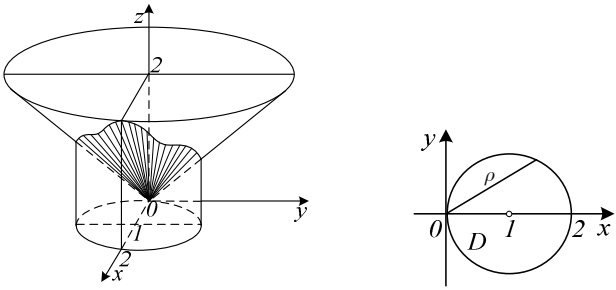


Рис. 1.14

<u>Приклад</u>. Знайти частину площі конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (рис. 1.15, а).



а б

Рис. 1.15

Розв’язання. За рівнянням конуса знаходимо частинні похідні:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \; z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Областю інтегрування D тут є коло $x^2+y^2-2x=0$, або $(x-1)^2+y^2=1$ (рис. 1.15,б). За формулою (1.15) площа поверхні дорівнює:

$$Q = \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}S = \sqrt{2}\pi,$$

де $S=\pi$ - площа кола радіуса 1. Дійсно, перейшовши у останньому інтегралі до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Маємо: $Q=\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \pi\sqrt{2}.$$

1.1.8. Застосування подвійного інтегралу до задач механіки.

Статичні моменти. Центр маси пластини. Нехай матеріальна пластина в площині Oxy має форму області D; густина пластини в точці $M(x;\ y)$ дорівнює $\gamma=(x,y)$, де $\gamma=(x,y)$ -

неперервна функція в області D. Розіб'ємо область D на частини $D_i(i=1,2,...,n)$, виберемо в кожній з них довільну точку $P_i(\xi_i;\eta_i)$ і наближено вважатимемо, що маса Δm_i частини D_i дорівнює $\gamma(\xi_i;\eta_i)\ \Delta S_i$, де ΔS_i - площа області D_i. Коли вважати, що кожна з цих мас зосереджена в точці $P_i(\xi_i;\eta_i)\in D$, то пластину можна розглядати як систему цих матеріальних точок. Якщо складемо їх, то отримаємо масу пластини: $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$.

Відомо, що статичний момент матеріальної точки відносно деякої вісі дорівнює добутку її маси на відстань до цієї осі. Отже, виконаємо наступне. Домножимо кожну з елементарних мас на відповідну координату, складемо їх і отримаємо статичні моменти пластин: $M_y\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$; $M_x\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ відносно осі Oy й осі Ox відповідно.

Щоб знайти точні значення сформованих інтегральних сум, перейдемо в них до границі при $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\ d(D_i)\to 0$. Інтегральні суми перейдуть у відповідні подвійні інтеграли:

$$m=\iint\limits_D\gamma(x,y)dxdy\ ; \qquad (1.17)$$

$$M_y=\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy\ ;\quad M_x=\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy\ . \qquad (1.18)$$

Враховуючи формули (1.17) і (1.18), координати центра мас знаходимо за формулами: $x_c=M_y/m$; $y_c=M_x/m$.

Якщо пластина однорідна, то $\gamma(x,y)=\gamma_0$.

Моменти інерції пластини. Відомо, що момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї і тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Отже, моменти інерції пластини відносно осі Oy й осі Ox наближено визначатимуться за формулами

$$I_y\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i\ ;\ I_x\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i^2\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i\ .$$

Перейшовши до границі в кожній із сум при

$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n,} d(D_i) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, дістанемо точні формули для обчислення моментів інерції розглядуваної пластини відносно координатних осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.19)$$

Знайдемо момент інерції I_0 пластини відносно початку координат. Враховуючи, що момент інерції матеріальної точки $(x; y)$ з масою m відносно початку координат дорівнює $m\,(x^2 + y^2)$, аналогічно одержуємо, що

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dxdy \cdot \qquad (1.20)$$

<u>Приклад</u>. Знайти масу пластини D, обмеженої лініями $y = 0$, $x + y = 2$, $y = x^2$, якщо густина пластини в кожній точці $(x; y)$ дорівнює $\gamma(x,y) = y^2x$ (рис. 1.16).

<u>Розв'язання</u>. Оскільки $D:\left\{\sqrt{y} \le x \le 2-y,\ \ 0 \le y \le 1\right\}$, то за формулою (1.17) маємо

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} xy^2dx = \int\limits_0^1 y^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{(2-y)^2y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)dy = \int\limits_0^1 \left(2y^2 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{y^4}{2}\right)dy = \frac{17}{120}.$$

<u>Приклад.</u> Знайти центр маси однорідної пластини $(\gamma = 1)$, обмеженої кривою $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ і віссю Ox (рис. 1.17).

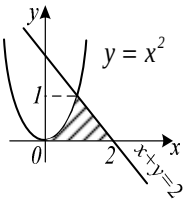


Рис. 1.16

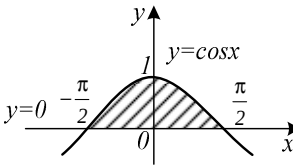


Рис. 1.17

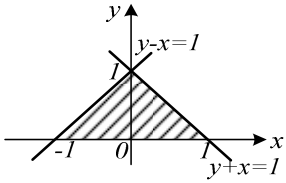


Рис. 1.18

<u>Розв'язання.</u> Внаслідок симетрії пластини відносно осі Oy маємо $x_c = 0$. Для знаходження y_c скористаємось другою з формул

(1.18). В даному разі $D:\left\{0 \le y \le \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$, тому маємо

$$M_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} ydy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)\ \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4};$$

$$m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2;\quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\pi}{8}.$$

Отже, центр маси даної пластини міститься у точці з координатами $(0;\frac{\pi}{8})$.

<u>Приклад.</u> Знайти момент інерції I_x, пластини D, обмеженої прямими $y = 0$, $x + y = 1$, $y - x = 1$, якщо густина в кожній точці пластини дорівнює ординаті цієї точки (рис. 1.18).

<u>Розв'язання.</u> Оскільки $D:\{y-1 \le x \le 1-y,\ 0 \le y \le 1\}$, $\gamma(x,y) = y$, то за першою з формул (1.19) маємо

$$I_x = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} y^3 dx = \int_0^1 y^3 x\ \Big|_{y-1}^{1-y} dy = \int_0^1 (y^3 - y^4 - y^4 + y^3)dy =$$

$$= \int_0^1 (2y^3 - 2y^4)dy = 2(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5})\Big|_0^1 = 2(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 0{,}1.$$

1.2. Потрійний інтеграл

<u>1.2.1. Визначення</u>. Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена в деякій тривимірній замкненій обмеженій області G. Розіб'ємо її на n довільних частин з об'ємами $V_i, (i = \overline{1,n})$. Множину цих частин назвемо n-м розбиттям. Нехай $\lambda_n = max\, d_i$. В кожній з довільних частин візьмемо навмання точку $N_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо суму

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta V_i. \qquad (1.21)$$

Її називають інтегральною сумою для даної функції в області G, складеної для її n-го розбиття і даного вибору точок

$N_i \in \Delta V_i, (i = 1, \overline{n})$.

Границя відповідної інтегральної суми при прямуванні до нуля найбільшого з діаметрів λ_n елементарних областей ΔV_i, якщо вона не залежить від способу розбиття області G на елементарні підобласті і вибору в них точок N, називається *потрійним інтегралом* і позначається символом

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\lambda_n \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i . \qquad (1.22)$$

Властивості потрійного інтегралу співпадають з розглянутими вище властивостями визначеного інтегралу й подвійного інтегралу. Має місто і теорема існування потрійного інтегралу. Її розглядати не будемо.

Якщо у (1.22) покласти $f(x,y,z) = 1$, тоді із визначення потрійного інтегралу дістанемо формулу для обчислення об'єму тіла G:

$$V_G = \iiint\limits_G dxdydz . \qquad (1.23)$$

Потрійний інтеграл (1.22) можна тлумачити, як кількість деякої фізичної величини, розподіленої в області G.

Наприклад, в області G розподілена речовина з густиною $\gamma(N)$, тоді наближена маса елемента ΔV_i дорівнює $\Delta m_i \approx \gamma(N_i)\Delta V_i$, а маса всього тіла, якому відповідає область G, $m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Після граничного переходу отримаємо точне значення величини m:

$$m = \iiint\limits_G \gamma(n)dV = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz . \qquad (1.24)$$

<u>1.2.2. Обчислення потрійного інтегралу.</u> Нехай область G розташована у тривимірній прямокутній системі координат. Вона обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, а з бічних сторін циліндричною поверхнею, і нехай проекція області G на площину Oxy утворює область D (рис. 1.19), в якій визначені й неперервні функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$.

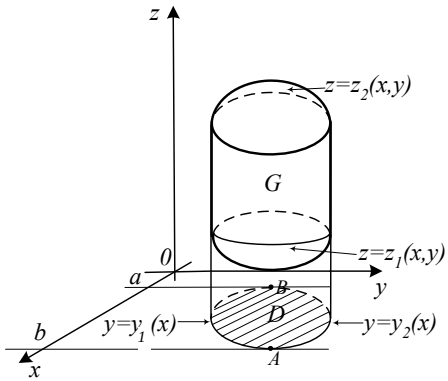


Рис. 1.19

Припустимо, що область G правильна у всіх напрямках. Тобто довільна пряма перетинає її межу не більш ніж у двох точках. Наприклад, прямі паралельні осі Oz, тоді має місце формула:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iint\limits_D dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \qquad (1.25)$$

Якщо при цьому область D обмежена лініями: $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$, тоді, при переході від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \qquad (1.26)$$

Згідно з цією формулою, обчислення потрійного інтегралу зводиться до послідовного інтегрування по кожній із змінних x, y і z окремо, але спочатку за змінною z, потім за змінною y і зовнішній інтеграл за змінною x. Порядок інтегрування може бути і іншим. Це залежить від розташування області G у просторі $Oxyz$ і її форми.

Наприклад, G є прямокутний паралелепіпед з гранями: $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = h$ і $z = H$, тоді у (1.26) межі інтегрування будуть сталими:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_h^H f(x,y,z)dz\,. \qquad (1.27)$$

У цьому випадку інтегрування можна проводити в будь-якому порядку. Якщо область G неправильна, тоді її треба розбити на декілька правильних підобластей. Обчислити інтеграли і результати додати. Розглянемо декілька прикладів.

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz$, де G – куб, обмежений площинами: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

<u>Розв'язання</u>. За формулою (1.27) маємо:

$$\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^1 y^2dy\int_0^1 z^3dz=\int_0^1 xdx\int_0^1 y^2\left.\frac{z^3}{4}\right|_0^1 dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 xdx\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{4}\int_0^1 x\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 dx=\frac{1}{12}\int_0^1 xdx=\frac{1}{12}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{24}.$$

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G (x+y+z)dV$, де G – піраміда, обмежена площинами: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

<u>Розв'язання</u>. Тут: $z_2=0$ і $z_2=1-x-y$; $y_1=0$ і $y_2=1-x$. Отже, за формулою (1.26) маємо:

$$\iiint\limits_G (x+y+z)dV=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left.\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\right|_0^{1-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x+y-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left.\left((x+y)^2/2-(x+y)^3/3-(1-x-y)^3/6\right|_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1(1/6-x^2/2+x^3/3+(1-x)^3/6)dx=$$

$$=\left.(x/6-x^3/6+x^4/12-(1-x)^4/24)\right|_0^1=1/6-1/6+1/12+1/24=1/8.$$

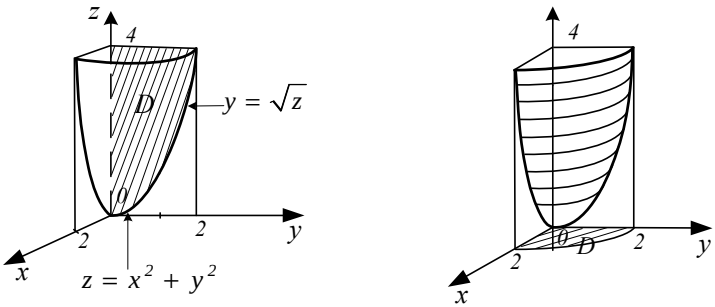
<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G 2xdV$, де G обмежена площинами: $x=0$, $y=0$, $z=4$ і параболоїдом $z=x^2+y^2$.

<u>Розв'язання</u>. Зобразимо дану область (рис. 1.20, а) і спроектуємо її на площину yOz. Межі інтегрування: $0\le z\le 4$;

$0 \le y \le \sqrt{z}$. За формулою (1.26) маємо:

$$\iiint_G 2xdV = 2\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_0^{\sqrt{z-y^2}} xdx = \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{z}} x^2 \Big|_0^{\sqrt{z-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{z}} (z - y^2)dy = \int_0^4 (zy - y^3/3)\Big|_0^{\sqrt{z}} dz = \frac{2}{3}\int_0^4 z^{3/2}dz = \frac{4}{15} z^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = \frac{128}{15}$$



а б

Рис. 1.20

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint_G zdV$, де G – верхня півкуля $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

<u>Розв'язання</u>. У площині xOy областю D є коло $x^2 + y^2 \le R^2$. За формулою (1.26) маємо:

$$\iiint_G zdV = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} z^2/2 \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2 - x^2 - y^2)/2dy = \int_{-R}^{R} ((R^2 - x^2)y - y^3/3)/2 \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx =$$

$= \frac{2}{3}\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^{3/2} dx = I$. Робимо заміну змінної: $x = R\sin t$;

$t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $dx = R\cos t dt$. Отже, $I = \frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - R^2 \sin^2 t)^{3/2} R\cos t dt =$

$$= \frac{2}{3}R^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{2}{3}R^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + 4\cos 2t + \cos 4t)/8 dt =$$

$$= \frac{R^4}{12}(3t + 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{12}\cdot 3\pi = \frac{\pi R^4}{4}.$$

<u>1.2.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі</u>. Нехай обмежена, правильна, замкнена область G простору (x,y,z) взаємно однозначно відображається на область $G*$ простору (u,v,w) за допомогою неперервних диференційованих функцій: $x = x(u,v,w)$; $y = y(u,v,w)$ і $z = z(u,v,w)$ і якобіана відображення $I(u,v,w)$ відмінного від нуля. Тобто

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_U & x'_V & x'_W \\ y'_U & y'_V & y'_W \\ z'_U & z'_V & z'_W \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1.28)$$

матимемо формулу заміни змінних у потрібному інтегралі:

$$\iiint\limits_{C\text{т}} f(x,y,z)dV =$$

$$= \iiint\limits_{G} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|I)(u,v,w)\right| dudvdw. \qquad (1.29)$$

Змінні u,v,w називають криволінійними координатами точки (x,y,z), а вираз $\left|I(u,v,w)\right| dudvdw$ – елементом об’єму у криволінійному просторі.

При розв’язанні інженерних задач найпоширенішим є використання циліндричних і сферичних криволінійних координат. Розглянемо їх.

Циліндричні координати. Точка $M(x,y,z)$ прямокутної системи координат в циліндричних координатах визначається за формулами: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$. Тут: $0 \le \rho \le \infty$;

$0 \le \varphi < 2\pi$; $\infty < z < \infty$ (див. рис. 1.21).

Сферичні координати. Точка $M(x,y,z)$ прямокутної системи координат у сферичних координатах визначається за формулами: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$; $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$; $z = \rho \cos\theta$, де $0 \le \rho < \infty$; $0 \le \varphi < 2\pi$; $0 \le \theta \le \pi$ (див. рис. 1.22).

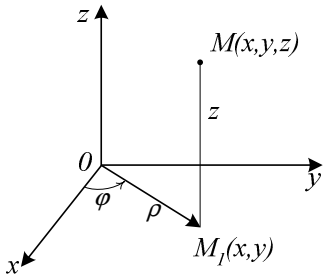
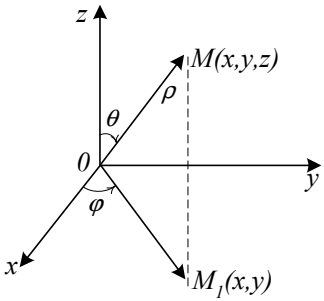


Рис. 1.21



Рим. 1.22

Обчислення потрійного інтегралу в циліндричних або сферичних координатах рекомендується проводити, якщо область G обмежена циліндричними або сферичними поверхнями. У цьому випадку повторний інтеграл у формулах (1.29) матиме сталі границі інтегрування, що значно спрощує їх обчислення.

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G 2xdxdydz$, де G – обмежена площинами: $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ і параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, використовуючи циліндричну систему координат.

<u>Розв'язання</u>. Обчислимо якобіан відображення прямокутної системи координат у циліндричну:

$$I(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \; ; \; dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz \, . \qquad (1.30)$$

Тут: $x'_\rho = \cos\varphi$; $y'_\rho = \sin\varphi$; $z'_\rho = 0$; $x'_\varphi = -\rho\sin\varphi$; $y'_\varphi = \rho\cos\varphi$;

$z'_{\varphi}=0$; $x'_z=0$; $y'_z=0$; $z'_z=1$. $|I|=\rho\neq 0$.

Оскільки область G проектується в область D на площину Oxy (рис. 1.20, б) у чверть кола $x^2+y^2=4$, то координата φ змінюється в межах від 0 до $\pi/2$, координата ρ – від 0 до 2. Область G обмежена знизу параболоїдом, а зверху – площиною, тому $z_1=\rho^2$ і $z_2=4$. Підставимо знайдене у (1.29) і з урахуванням (1.30) отримаємо:

$$\iiint\limits_G 2xdxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{z}d\rho\int\limits_{\rho^2}^{4}2\rho^2\cos\varphi dz=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{z}\rho^2(\cos\varphi)z\Big|_{\rho^2}^{4}d\rho=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{2}\rho^2(4-\rho^2)d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi(4\rho^3/3-\rho^5/5)\Big|_0^2 d\varphi=$$

$$=64\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=128/15\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}=128/15.$$

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G x^2y^2dxdydz$, де G – область, обмежена параболоїдом $z=x^2+y^2$, циліндром $x^2+y^2=4$ і координатною площиною $z=0$.

<u>Розв'язання</u>. Область G проектується на площину xOy в область D (рис. 1.23), яка являє собою коло, радіус якого одиниця.

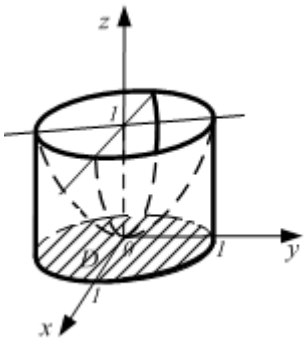


Рис. 1.23

Тому даний інтеграл доцільно обчислювати в циліндричній системі координат. За формулами (1.29) і (1.30) маємо:

$$\iiint\limits_G x^2 y^2 dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^5 d\rho \int\limits_0^{\rho^2} \cos^2\varphi \sin^2\varphi dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^5 z \Big|_0^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^7 d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \frac{\rho^8}{8}\Big|_0^2 d\varphi = \frac{2^8}{2^5}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = 4\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos 4\varphi) d\varphi =$$

$$= 4\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi .$$

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G xyz^2 dxdydz$, де G – область, обмежена частиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, розташованою у першому октанту.

<u>Розв'язання</u>. У даному випадку перейдемо до сферичної системи координат. Якобіан відображення прямокутної системи координат у сферичну має вигляд:

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\theta . \qquad (1.31)$$

$$dxdydz = \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\rho .$$

Тут: $x'_\rho = \sin\theta\cos\varphi$; $x'_\theta = \rho\cos\theta\cos\varphi$; $x'_\varphi = -\rho\sin\theta\sin\varphi$; $y'_\rho = \sin\theta\sin\varphi$; $y'_\theta = \rho\cos\theta\sin\varphi$; $y'_\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi$; $z'_\rho = \cos\theta$; $z'_\theta = -\rho\sin\theta$; $z'_\varphi = 0$. У даному прикладі межі інтегрування за новими змінними такі: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \rho \le 2$.

Отже

$$\iiint\limits_G xyz^2 dxdydz = \iiint\limits_{G*} \rho \sin\theta \cos\varphi \, \rho \sin\theta \sin\varphi \, \rho^2 \cos^2 \theta \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^2\theta d\theta \int\limits_0^2 \rho^6 d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{7}\rho^7 \Bigg|_0^2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\cos^2\theta d\cos\theta =$$

$$= -\frac{2^7}{28}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \frac{\cos^5\theta}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{32}{7}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{64}{105}.$$

Загальну рекомендацію щодо застосування тієї чи іншої системи координат дати складно. Це залежить як від області інтегрування, так і від вигляду підінтегральної функції.

1.2.4. Деякі застосування потрійних інтегралів.

Обчислення об'єму. Як було встановлено вище, об'єм V області G може бути обчислений за допомогою потрійного інтегралу за формулою (1.23). Ця формула більш універсальна, ніж відповідна формула, яка виражає об'єм тіла за допомогою подвійного інтегралу.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

Розв'язання. Перша поверхня є круговий конус з віссю обертання Oz. Друга поверхня є параболоїд обертання навколо вісі Oz. Ці поверхні перетинаються по лінії $x^2 + y^2 = 4*$, яка проектується на площину xOy в область D (рис. 1.24). Оскільки область D є коло, то інтегрування виконуємо в циліндричній системі координат:

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_\rho^{6-\rho^2} dz = \varphi\Bigg|_0^{2\pi} \int\limits_0^2 \rho z \Bigg|_\rho^{6-\rho^2} d\rho =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^2 \rho(6-\rho^2-\rho)d\rho = 2\pi\left(\frac{6\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\pi\left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi.$$

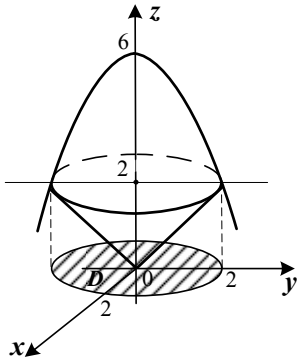


Рис. 1.24

*Лінія перетину поверхонь знаходиться з системи: $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=6-x^2-y^2. \end{cases}$; $\sqrt{x^2+y^2}=6-x^2-y^2$. $\sqrt{x^2+y^2}=t$; $t\ge 0$; $t=6-t^2$; $t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}$; $t_1=2$; $t_2=-3$. Отже, $\sqrt{x^2+y^2}=2$; $x^2+y^2=4$.

<u>Задачі механіки</u>. Нехай речовину неперервно розподілено в тривимірній області G з густиною $\gamma(x,y,z)=\gamma(N)$. Розділемо G на елементарні частини. Маса відповідної елементарної частини дорівнює $dm=\gamma dV$, де $dV=dxdydz$ – елемент об'єму в декартовій системі координат. Елементарні статичні моменти відносно координатних площин визначаються рівностями

$$dM_{xy}=zdm\,;\ dM_{yz}=xdm\,;\ dM_{xz}=ydm\,.$$

Після граничного переходу маса і статичні моменти тіла, якому відповідає область G, визначаються відповідними формулами:

$$m=\iiint\limits_{C\text{т}}\gamma dV\,;\ M_{xy}=\iiint\limits_{C\text{т}}z\gamma dV\,;\ M_{yz}=\iiint\limits_{C\text{т}}x\gamma dV\,;\ M_{xz}=\iiint\limits_{C\text{т}}y\gamma dV\,. \quad (1.34)$$

Координати центра маси (x_c,y_c,z_c) тіла задовольняють співвідношення

$$x_c=M_{yz}/m\,,\ y_cM_{xz}/m\,,\ z_c=M_{xy}/m\,, \quad (1.35)$$

згідно з визначенням цього поняття.

Елементарні моменти інерції відносно координатних осей дорівнюють:

$$dI_x = (y^2 + z^2)dm;\ dI_y = (x^2 + z^2)dm;\ dI_z = (x^2 + y^2)dm,$$

де $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $x^2 + y^2$ – квадрати віддалей точки $N(x,y,z)$ від відповідної вісі Ox, Oy, Oz. Згідно з визначенням, моментом інерції системи точок відносно осі називають суму добутків мас цих точок на квадрати їх віддалі до осі. Отже, моменти інерції всього тіла дорівнюють:

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\gamma dV;\ I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\gamma dV;\ I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\gamma dV. \quad (1.36)$$

Момент інерції тіла відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma dV. \quad (1.37)$$

<u>Приклад</u>. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $2z = x^2 + y^2$ і кулею $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

<u>Розв'язання</u>. Маємо тіло обертання навколо осі Oz (рис. 1.25). Тіло однорідне, тому візьмемо $\gamma(x,y,z) = 1$. Оскільки вісь Oz є віссю симетрії тіла, то $x_c = y_c = 0$. Отже, шуканою є величина z_c.

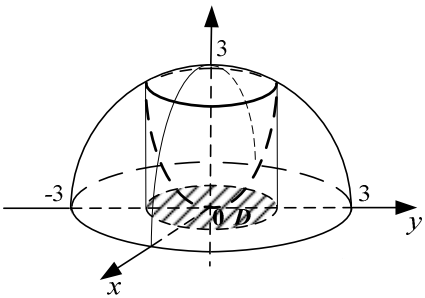


Рис. 1.25

Але спочатку знайдемо проекцію лінію перетину даних поверхонь з системи:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2z. \end{cases} \qquad 2z + z^2 = 3; \qquad z^2 + 2z - 3 = 0;$$

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2\,;\ z_1 = 1\,;\ z_2 = -3\,.$$

З другого рівняння виходить, що $z \geq 0$. Отже, лінія перетину даних поверхонь є коло $x^2 + y^2 = 2$, яке проектується на площину xOy в область інтегрування D з межами: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$; $-\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$. Оскільки тіло має осьову симетрію, то розглянемо її четверту частину, розташовану у першому октанті. За формулою (1.34) маємо: $m = \iiint\limits_G dV = 4\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dz =$

$$= 4\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\sqrt{3-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dy = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (\rho\sqrt{3-\rho^2} - \rho^3/3)\, d\rho =$$

$$= -2\pi((3-\rho^2)^{3/2}/3 + \rho^4/8)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(\sqrt{3} - 5/6)\,.$$

У повторному інтегралі перейшли до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Цей перехід виконайте самостійно.

За формулою (1.35) обчислимо аналогічно статичний момент:

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z dV = 4\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} z\, dz =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} z^2 \Bigg|_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(3 - (x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right) dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} (3y - x^2y - y^3/3 - (x^4y + 2x^2y^3/3 + y^5/5))\Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= \frac{4}{15}\int\limits_0^{\sqrt{2}} (16 - 6x^2 - x^4)\sqrt{2-x^2}\, dx = I\,.$$

У останньому інтегралі зробимо заміну змінної: $x = \sqrt{2}\sin t$,

$dx = \sqrt{2}\cos t dt$, де $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Отримаємо: $I = \frac{4}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16 - 12\sin^2 t - 4\sin^4 t)2\cos^2 t dt =$

$$= \frac{4}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16 - 6(1-\cos 2t) - (1-\cos 2t)^2(1+\cos 2t)dt = \frac{5}{3}\pi .$$

Інтегрування тригонометричного виразу у останньому інтегралі виконайте самостійно. За формулою (1.35) обчислюємо: $z_c = M_{xy}/m = \frac{5}{3}\pi/(2\pi(\sqrt{3}-5/6)) = 5/(6\sqrt{3}-5)$. Центр маси даного тіла міститься у точці $(0;0;5/(6\sqrt{3}-5))$.

<u>Приклад</u>. Знайти момент інерції однорідного $(\gamma = 1)$ циліндричного тіла, висота якого H , а радіус основи R , відносно вісі, яка є діаметром основи циліндра.

<u>Розв'язання</u>. Нехай вісь Oz напрямлена вздовж вісі циліндра; основа циліндра лежить у площині $Oxy(z=0)$ і центр основи збігається з початком координат (рис. 1.26). Момент інерції тіла будемо шукати відносно осі Oy .

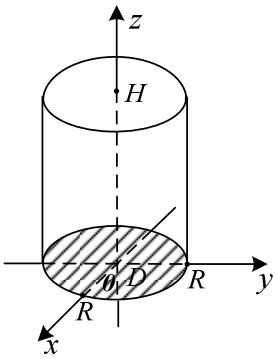


Рис. 1.26

Скористаємося формулою (1.36). Область D являє собою коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Отже, $I_y = \iint\limits_G\int (x^2 + z^2)dV = 4\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^H (x^2 + z^2)dz =$

$$= 4\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 z + z^3/3)\Big|_0^H dy = 4H\int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}(x^2 + H^2/3)dx = I .$$

Зробимо заміну змінної: $x = R\sin t$; $dx = R\cos t dt$, де $t \in [0; \pi/2]$.

$$I = 4HR^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(R^2 \sin^2 t + H^2/3)dt = HR^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt + \frac{4}{3}H^3R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

$$= \frac{HR^4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 4t)dt + \frac{4}{3}H^3R^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{HR^4}{2}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{3}H^3R^2 \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{HR^4}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}H^3R^2\pi = (3R^2 + 4H^2)\pi R^2 H/12.$$

Отже, момент інерції даного тіла відносно осі Oy, яка є діаметром основи циліндра, дорівнює $(3R^2 + 4H^2)\pi R^2 H/12$.

2. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Криволінійний інтеграл першого роду

2.1.1. Визначення. Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву $\overset{\cup}{AB}$ (рис. 2.1) і на цій кривій визначено обмежену функцію $f(x,y)$.

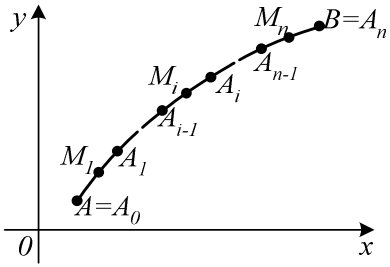


Рис. 2.1

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i} = \Delta\ell_i$ виберемо яку-небудь точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$, $i = \overline{1,n}$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i\,, \qquad (2.1)$$

де Δl_i - довжина дуги. Сума (2.1) називається інтегральною сумою для функції $f(x,y)$ по кривій AB. Нехай $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$ - найбільша з довжин окремих дуг $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$.

Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральні суми (2.1) мають скінчену границю, яка не залежить від розбиття кривої $\overset{\cup}{AB}$ і вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* (*по довжині дуги*) від функції $f(x,y)$ по кривій $\overset{\cup}{AB}$ і позначають

$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl$. Таким чином, за означенням

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i \ . \qquad (2.2)$$

Якщо границя (2.2) існує, то функція $f(x,y)$ називається інтегрованою на кривій $\overset{\cup}{AB}$, сама крива $\overset{\cup}{AB}$ - контуром інтегрування, A - початковою, а B - кінцевою точками інтегрування.

<u>2.1.2. Фізичний зміст</u>. Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу m з лінійною густиною $\gamma(x,y)$, то

$$m = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \gamma(x,y)dl \ ,$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

<u>2.1.3 Геометричний зміст</u>. При $f(x,y)\geq 0$ криволінійний інтеграл чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x,y)$ і паралельні вісі Oz, а напрямна збігається з кривою $\overset{\cup}{AB}$ на площині Oxy.

Якщо AB – не крива, а відрізок $[a;b],(a<b)$, що лежить на вісі Ox, то $f(x,y)=f(x,0)=f(x),\Delta l_i=\Delta x_i$ і криволінійний інтеграл першого роду стає звичайним визначеним інтегралом.

Якщо покласти $f(x,y)\equiv 1$, то площа циліндричної поверхні чисельно дорівнюватиме довжині дуги $\overset{\cup}{AB}$, тому довжину L дуги $\overset{\cup}{AB}$ можна знайти за формулою $L = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} dl$ **.**

<u>2.1.4. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду</u>. Нехай крива $\overset{\cup}{AB}$ задана рівняннями $x=x(t), y=y(t)$, де $t\in[\alpha;\beta]$. Значення α відповідає точці A, а значення β - точці B. Вважатимемо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ разом з похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на

відрізку $[\alpha,\beta]$, а функція $f(x,y)$ неперервна вздовж кривої $\overset{\cup}{AB}$. Для довільної точки $M(x(t);y(t))$ кривої $\overset{\cup}{AB}$ довжину дуги l можна розглядати як функцію параметра $t: l = l(t)$, тоді $l = \int\limits_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}\, d\tau$.

Звідси, згідно з правилом диференціювання визначеного інтеграла по верхній межі, маємо $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

Отже, $$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \quad (2.3)$$

Зокрема, якщо крива $\overset{\cup}{AB}$ в прямокутних координатах задана рівнянням $y = y(x), a \le x \le b$, де функція $y(x)$ неперервна разом із своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a;b]$, то формула (2.3) набирає вигляду

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx. \quad (2.4)$$

Якщо крива $\overset{\cup}{AB}$ задається рівнянням $x = x(y), c \le y \le d$ і функції $x(y)$ і $x'(y)$ неперервні на відрізку $[c;d]$, то

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\, dy. \quad (2.5)$$

Досі ми вважали, що криволінійний інтеграл першого роду розглядається для плоскої кривої $\overset{\cup}{AB}$. Знайдені результати легко перенести на випадок просторових кривих.

Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена та неперервна на просторовій кривій $\overset{\cup}{AB}$, яку задано рівняннями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta$, де функції $x(t), y(t), z(t)$ та $x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$. Тоді існує

криволінійний інтеграл $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y,z)dl$ і справджується формула:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt \,. \quad (1.6)$$

<u>2.1.5. Застосування криволінійного інтеграла першого роду в геометрії</u>. Нехай у площині Oxy задано кусково-гладку криву $\overset{\cup}{AB}$ замкнену чи незамкнену і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x,y)$, тоді:

а) площу S циліндричної поверхні, визначеної функцією $z = f(x,y)$, знаходять за формулою

$$S = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl \,. \quad (2.7)$$

<u>Приклад</u>. Обчислити $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x^2+2y^2)dl$, де $\overset{\cup}{AB}$ відрізок прямої від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;0)$.

<u>Розв'язання</u>. Знайдемо рівняння прямої: $y = 1-x$. За формулою (2.4) обчислимо

$$\int\limits_0^1 (x^2+2(1-x)^2)\sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 (x^2+2-4x+2x^2)dx =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^1 (3x^2-4x+2)dx = \sqrt{2}(3x^3/3-4x^2/2+2x)\Big|_0^1 = \sqrt{2}(1-2+2) = \sqrt{2} \,.$$

Отже, площа циліндричної поверхні, визначеної еліптичним параболоїдом $z = x^2+2y^2$, вздовж відрізка прямої $y = 1-x$ дорівнює $\sqrt{2}$.

б) довжину L кривої $\overset{\cup}{AB}$ визначають за формулою

$$L = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} dl \,. \quad (2.8)$$

<u>Приклад</u>. Обчислити довжину першого витка гвинтової лінії: $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = at$, $a > 0$.

Розв'язання. Щоб пройти перший виток параметр $t \in [0, 2\pi]$. Скористаємося формулою (2.6), поклавши $f(x,y,z)=1$. Тут: $x_t' = -a\sin t$; $y_t' = a\cos t$; $z_t' = a$.

Отже, $L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + a^2}\,dt =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2}\,dt = a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = a\sqrt{2}t\Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}a.$$

2.1.6. Застосування криволінійного інтегралу 1-го роду в механіці.

Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x,y)$, тоді:

а) маса кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int\limits_L \gamma(x,y)\,dl; \qquad (2.9)$$

б) координати x_c, y_c центра маси кривої L знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\gamma(x,y)\,dl}{\int\limits_L \gamma(x,y)\,dl} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\gamma(x,y)\,dl}{\int\limits_L \gamma(x,y)\,dl} = \frac{M_x}{m}, \qquad (2.10)$$

де M_x, M_y — статичні моменти кривої L відносно вісей Ox і Oy;

Приклад. Знайти координати центра маси півкола однорідної щільності $\gamma(x,y) = \gamma_0$ радіуса $R = 2$.

Розв'язання. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 4$ залишимо у параметричній формі: $x = 2\cos t$; $y = 2\sin t$; $t \in [0;\pi]$. Скористаємося формулами (2.9) і (2.10). Оскільки дуга симетрична відносно вісі Oy то $x_c = 0$.

$$m = \int\limits_0^{\pi} \gamma_0\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + a^2}\,dt = \gamma_0\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + a^2}\,dt =$$

$$= 2\gamma_0\int\limits_0^{\pi} dt = 2\pi\gamma_0.$$

$$y_c = M_x / m\ .\ M_x = \int_0^{\pi} y\gamma_0 dl = 2\gamma_0 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2\gamma_0(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 4\gamma_0\ .$$

$$y_c = 4\gamma_0 /(2\pi\gamma_0) = 2/\pi\ .$$

Отже, координати центра маси півкола: $(0; 2/\pi)$.

в) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої відносно вісей *Ox, Oy* і початку координат відповідно дорівнюють:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x,y) dl\ ;\ I_y = \int_L x^2 \gamma(x,y) dl\ ;$$

$$I_o = \int_L (x^2 + y^2)\gamma(x,y) dl\ . \qquad (2.11)$$

Визначення статичних моментів і моментів інерції тіла були дані у попередніх лекціях.

У випадку, коли крива однорідна, тобто має сталу густину γ_o, у формулах (2.9)-(2.11) слід вважати $\gamma(x,y) = \gamma_o$.

<u>Приклад</u>. Знайти момент інерції I_x відносно вісі *Ox* однорідної $(\gamma_o = 1)$ дуги кола *x=2cost, y=2sint,* яка міститься в першій чверті.

<u>Розв'язання.</u> Скориставшись першою з формул (2.11), маємо

$$I_x = \int_L y^2 dl = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2\pi\ .$$

2.2. *Криволінійний інтеграл другого роду*

<u>2.2.1. Визначення</u>. Криволінійний інтеграл другого роду визначається майже так само, як інтеграл першого роду. Нехай у площині *Oxy* задано гладку чи кусково-гладку криву $\overset{\cup}{AB}$ і на цій кривій визначено обмежену і неперервну функцію *P(x, y)*. На відміну від інтегралів першого роду вважатимемо криву напрямною лінією, у якої точки *A* та *B* є відповідно початковою та кінцевою точками. Розіб'ємо криву $\overset{\cup}{AB}$ точками $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ на *n* довільних частин, на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i\ , \qquad (2.12)$$

де Δx_i - проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox (рис.2.2).

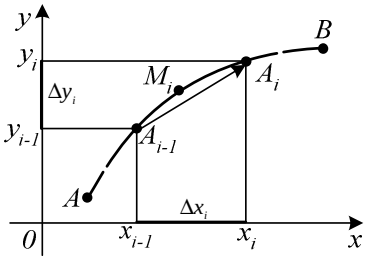


Рис. 2.2

Відмінність сум (2.1) і (2.12) очевидна.

Якщо при $\lambda = max\,\Delta l_i \to 0,\quad 1 \le i \le n$ інтегральні суми (2.12) мають скінчену границю, яка не залежить ні від розбиття кривої $\overset{\cup}{AB}$, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають криволінійним інтегралом від функції $P(x,y)$ по координаті x вздовж кривої $\overset{\cup}{AB}$ і позначають $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$. Таким чином,

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\ . \qquad (2.12)$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від обмеженої і неперервної функції $Q(x,y)$ по координаті y:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\ , \qquad (2.13)$$

де Δy_i - проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Oy (рис. 2.2). Суму

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Q(x,y)dy$$

називають ***криволінійним інтегралом другого роду*** (***по координатах***) або криволінійним інтегралом другого роду від функцій P і Q по кривій $\overset{\cup}{AB}$ і позначають символом

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (2.14)$$

Функції *P(x,y)* і *Q(x,y)* іноді позначатимемо через *P* і *Q*, а криволінійний інтеграл записуватимемо у вигляді $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$.

<u>2.2.2. Фізична інтерпретація криволінійного інтеграла другого роду.</u> Розглянемо задачу про роботу змінної сили на криволінійному шляху. Нехай матеріальна точка *M(x;y)* під дією змінної сили $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $\vec{i}$ та $\vec{j}$ - орти; *P=P(x,y)*, та *Q=Q(x,y)* - проекції сили на вісі *Ox* та *Oy*, рухається на площині *Oxy* вздовж кривої $\overset{\cup}{BC}$. Треба обчислити роботу *A* сили $\vec{F}$ при переміщенні точки *M* з точки *B* в точку *C* (рис. 2.3).

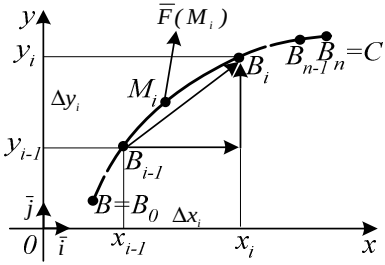


Рис. 2.3

Розіб'ємо криву $\overset{\cup}{BC}$ точками $B=B_0,B_1,...,B_{i-1},B_i,...,B_n=C$ на *n* частин і на кожній окремій дузі $\overset{\cup}{B_{i-1}B_i}$ візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$, де $i=\overline{1,n}$. На цю точку діє сила $\vec{F}(M_i) = P\vec{i} + Q\vec{j}$. Роботу ΔA_i, яку виконує ця сила при переміщенні точки по вектору $\overrightarrow{B_{i-1}B_i} = \Delta x_i\,\vec{i} + \Delta y_i\,\vec{j}$, можна знайти за допомогою скалярного добутку

$$\Delta A_i = \vec{F}(M_i)\cdot\overrightarrow{B_{i-1}B_i} = P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\,.$$

Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили $\vec{F}$ при

переміщенні матеріальної точки по дузі $\overset{\cup}{B_{i-1}B_i}$ довжиною Δl_i .

Робота сили вздовж усієї ламаної $B_0,B_1,...,B_{i-1},B_i,...,B_n$ дорівнює

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i \ .$$

Цей вираз дає наближене значення шуканої роботи A. Перейшовши до границі при $\lambda = max\,\Delta l_i \to 0,\ \ 1 \le i \le n$, знайдемо точне її значення:

$$A = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \left(\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i \right) = \int_{\overset{\cup}{BC}} Pdx + Qdy \ . \quad (2.15)$$

Отже, з погляду фізики криволінійний інтеграл другого роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

<u>2.2.3. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.</u> Зведемо криволінійний інтеграл другого роду до визначеного інтеграла. Нехай крива $\overset{\cup}{BC}$ задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $x \le t \le \beta$, де функції $x\ (t)$ та $y\ (t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'\ (t)$ та $y'\ (t)$, причому точці B кривої відповідає параметр α, а точці C - параметр β.

Тоді, $\int_{\overset{\cup}{BC}} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t))x'(t)dt$.

Аналогічно, $\int_{\overset{\cup}{BC}} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t))y'(t)dt$.

Отже,

$$\int_{\overset{\cup}{BC}} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} [\,P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\,]\,dt \ . \quad (2.16)$$

Якщо крива $\overset{\cup}{BC}$ задана рівнянням $y=y(x)$, $a \le x \le b$, де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a;b]$, то з формули (2.16) дістанемо

$$\int\limits_{\overset{\cup}{BC}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx . \qquad (2.17)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x=x(y)$, $c \le y \le d$, причому функції $x(y)$ та $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c;d]$, то з формули (2.16) дістанемо

$$\int\limits_{\overset{\cup}{BC}} Pdx + Qdy = \int\limits_c^d [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y),(y)]dy . \qquad (2.18)$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду можна поширити й на просторові криві. Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій $\overset{\cup}{BC}$, яку задано функціями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, які із своїми похідними $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[\alpha;\beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$A = \int\limits_{\overset{\cup}{BC}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz ,$$

який обчислюємо за формулою:

$$A = \int\limits_\alpha^\beta \big[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t)z(t))y'(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\big]dt. \qquad (2.19)$$

Формули (2.16)-(2.19) використовуються для обчислення криволінійних інтегралів другого роду. З цих формул випливає, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла.

На відміну від криволінійного інтеграла першого роду криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму шляху інтегрування і при зміні його на протилежний він теж змінює свій знак на протилежний.

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по замкненому контуру, тобто контуру інтегрування, в якому початкова та кінцева точки збігаються (мова йде про замкнені контури без точок самоперетину).

Для замкненого контуру існує лише два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контуру). Іншими словами, контур вважається позитивно орієнтованим, якщо при його обході область,

обмежена цим контуром, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по позитивно орієнтованому контуру L позначають так:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

2.2.4. Застосування криволінійного інтеграла другого роду в геометрії.

Обчислення площі плоскої фігури. Нехай на площині задана правильна область D: $\{y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$ (рис. 2.4).

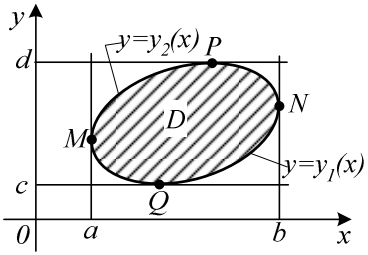


Рис. 2.4

Межу області D, тобто криву $PNQM$, позначимо через L і вважатимемо позитивно орієнтованою. Розглянемо інтеграл - $\oint ydx$ і зведемо його до визначених інтегралів:

$$-\oint_L ydx = -\left(\int_{MQN} ydx - \int_{NPM} ydx\right) = \int_{NPM} ydx - \int_{MQN} ydx = \int_a^b y_2(x)dx - \int_a^b y_1(x)dx = S ,$$

де S — площа області D.

Отже, площу S правильної області D, обмеженої кривою L, знаходять за формулою $S = -\oint_L ydx$. (2.20)

Аналогічно можна довести, що $S = \oint_L xdy$. (2.21)

Додаючи формули (2.20) і (2.21) , дістаємо ще одну формулу для обчислення площі $S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$. (2.22)

Приклад. Знайти площу області, обмеженої еліпсом

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \ , \ 0 \le t \le 2\pi .$$

Розв’язання. За формулою (1.22)

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

2.2.5. Застосування криволінійного інтеграла в механіці

Обчислення роботи. Роботу A сили $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$, яка переміщає матеріальну точку вздовж кривої L, обчислюємо за формулою (2.15).

Приклад. Знайти роботу сили $\vec{F}=yx\vec{i}+(y+x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ від точки $O(0;0)$ у точку $B(1;1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дані точки: $y=x$; $dy=dx$. Межа інтегрування: $x\in[0;1]$. Обчислюємо роботу: $A=\int_{OB} yxdx+(y+x)dy=\int_0^1(x^2dx+(x+x)dx)=$

$$=\int_0^1(x^2+2x)dx=\left(x^3/3+2x^2/2\right)\Big|_0^1=4/3.$$

2.2.6. Інтегрування диференціальних рівнянь вигляду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \qquad (2.23)$$

Нехай в деякій однозв'язній області D функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні, причому $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, тоді диференціальне рівняння (2.23) має назву диференціального рівняння у повних диференціалах. Загальний інтеграл цього рівняння $u(x,y)=C$ можна знайти за формулою:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C, \qquad (2.24)$$

де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні $y=y_0$, а другий - при сталому значенні x. Або

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C, \qquad (2.25)$$

Де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні y, а другий – при сталому значенні $x=x_0$.

Початкову точку $(x_0;y_0)$ в цих формулах треба вибирати так, щоб підінтегральні вирази якомога спрощувались.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\left(1/x+1/y\right)dx+\left(2/y-x/y^2\right)dy=0.$$

Переконаємося, що це диференціальне рівняння у повних диференціалах.

Розв'язання. Тут: $p(x,y)=1/x+1/y$; $Q(x,y)=2/y-x/y^2$. Знайдемо їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$. Вони рівні між собою. Отже, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Для її знаходження скористаємося формулою (2.24). Координати (x_0,y_0) – довільної початкової точки візьмемо рівними: $x_0=1$; $y_0=1$, (не можна брати $x_0=0$, $y_0=0$, бо в точці $(0;0)$ функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ не визначені). Отже, маємо

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,1)dx+\int_1^y Q(x,y)dy+C=$$

$$=\int_1^x\left(1/x+1\right)dx+\int_1^y\left(2/y-x/y^2\right)dy+C=\left(1n|x|+x\right)\Big|_1^x+\left(2ln|y|+x/y\right)\Big|_1^y+C=$$

$$=1n|x|+x-ln1-1+21n|y|+x/y-2ln1-x+C=ln|x|+2ln|y|+x/y+C_1,$$

де $C_1 = C - 1$ – довільна стала.

<u>2.2.7. Формула Гріна.</u> Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області. Вона широко застосовується у математичному аналізі:

$$\iint_D\left(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy. \qquad (2.26)$$

Тут D - деяка однозв'язна область, обмежена замкненим контуром L, а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\partial P/\partial y$ і $\partial Q/\partial x$ в цій області.

З формули (2.26) легко дістати формули для обчислення площі плоскої фігури: якщо у цю формулу підставити $P=-y$, $Q=0$, то дістанемо формулу (2.20); якщо $P=0$, $Q=x$ - формулу (2.21).

<u>Приклад.</u> Обчислити безпосередньо і за формулою (2.26) криволінійний інтеграл $I=\oint_L(x-2y)dx+(x+y)dy$, де L – коло $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язання. Скористаємось параметричними рівняннями кола:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Тоді $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$, тому

$$I = \int_0^{2\pi} \left((R\cos t - 2R\sin t)(-R\sin t) + (R\cos t + R\sin t)R\cos t \right) dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t))dt = 3\pi R^2 .$$

За формулою Гріна:

$$P = x - 2y, \quad Q = x + y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1;$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 3\iint_D dxdy = 3\pi R^2 .$$

Площа кола πR^2, це $\iint_D dxdy$. Маємо такий самий результат.

2.2.8. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Значення криволінійного інтеграла може залежати від того, якою саме кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування, а може і не залежати. Сформульована нижче теорема відбиває ті умови, за яких існує така незалежність.

Теорема. Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\partial p / \partial y$ і $\partial Q / \partial x$ в деякій замкненій однов'язній області D. Тоді наступні чотири умови еквівалентні (виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання останніх трьох):

1) для довільної замкненої Кусково-гладкої кривої, що належить області D, $\oint_L Pdx + Qdy = 0$;

2) для довільних точок M та N області D значення інтеграла $\oint_L Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D;

3) вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D;

4) в усіх точках області D виконується рівність частинних похідних $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$.

Доводити цю теорему не будемо, а розглянемо приклад.

Приклад. Обчислити $J=\int y^2dx+2xydy$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$ по лінії AB: а) $y=x$; б) $y=x^2$; в) $y=\sqrt{x}$.

Розв'язання: а) підставимо у J замість y змінну x і замість dy величину dx, тому що $y=x$. Маємо:

$$J=\int_0^1 x^2dx+2x^2dx=3\int_0^1 x^2dx=3x^3/3\Big|_0^1=1;$$

б) підставимо у J замість y величину x^2 і замість $dy=2xdx$, тому що $y=x^2$. Маємо:

$$J=\int_0^1 x^4dx+4xx^2xdx=\int_0^1 5x^4dx=5x^4/5\Big|_0^1=1;$$

в) підставимо у J замість y величину $\sqrt{x}$ і замість $dy=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. Маємо: $J=\int_0^1 xdx+2x\cdot\sqrt{x}\cdot\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=\int_0^1 2xdx=x^2\Big|_0^1=1$.

Отже, тут всі три відповіді однакові. Перевіримо, якій з умов теореми відповідає даний інтеграл. Він задовольняє другій умові. Перевіримо четверту умову. Тут: $P(x,y)=y^2$; $Q(x,y)=2xy$; $\partial P/\partial y=2y$; $\partial Q/\partial x=2y$. Отже, виконується і четверта умова.

3. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

3.1. Визначення поверхневих інтегралів. Гладка поверхня S називається *двосторонньою*, якщо обхід по будь-якому замкненому контуру, який лежить на S і не має спільних точок з границею, не змінює напряму нормалі. Сторони двосторонніх поверхонь можуть бути, таким чином, охарактеризовані напрямом відповідних нормалей. Надалі під поверхнею будемо розуміти двосторонню поверхню.

Нехай на гладкій поверхні S визначені й неперервні скалярна функція $F(M)$ і векторна функція $\bar{a}(M)$, яка має проекції $P(M), Q(M)$, $R(M)$ на відповідні координатні осі. Фіксуємо ту сторону цієї поверхні, яка представлена вибраним одиничним вектором нормалі до поверхні $\bar{n} = \vec{n}(M)$.

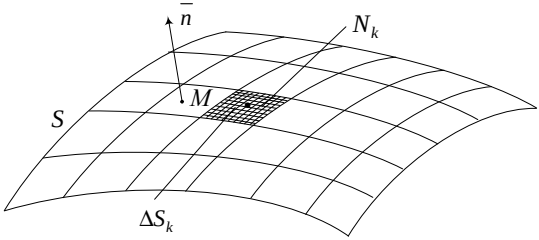


Рис. 3.1

Розділимо поверхню S довільними гладкими лініями на n елементарних частини $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ з площами відповідно $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$ (рис. 3.1) і нехай $N_k (k = 1,2,...,n)$ – довільні точки на елементарних поверхнях ΔS_k. Суми двох типів:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} F(N_k)\Delta\sigma_k; \qquad \beta_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(N_k)\vec{n}(N_k)\Delta\sigma_k \tag{3.1}$$

називаються *інтегральними сумами розбиття* δ_n, де $F(N_k)$ – значення скалярної функції в точці N_k; $\vec{a}(N_k)$ – значення вектора $\vec{a}(M)$ в точці N_k; $\vec{n}(N_k)$ – одиничний вектор нормалі в точці N_k.

Якщо існує границя інтегральної суми a_n при $max\Delta\sigma \to 0$ і $n \to \infty$, яка не залежить від способу розбиття поверхні S на елементарні частини й вибору точок N_k на цих частинних поверхнях,

то ця границя називається *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $F(M)$ на поверхні S і позначається через

$$\iint_S F(M)d\sigma \equiv \iint_S F(x,y,z)d\sigma = \lim_{\substack{max\Delta\sigma_{k\to 0} \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} (N_k)\Delta\sigma_k \qquad (3.2)$$

($d\sigma$ – диференціал площі поверхні).

Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду залежить від фізичного характеру даного скалярного поля: він може визначати масу, розподілену по деякій поверхні з густиною речовини $F(M)$, електричний заряд і інше.

Якщо на поверхні S неперервно розподілена речовина з густиною $\rho(M)$, тоді наближено маса елемента ΔS_k дорівнює $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\Delta\sigma_k$, а маса всього тіла дорівнює $m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta\sigma_k$. Точне значення шуканої величини одержимо в результаті граничного переходу

$$m = \lim_{\substack{max\Delta\sigma_{k\to 0} \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta\sigma_k = \iint_S \rho(M)d\sigma . \qquad (3.3)$$

Скінченна границя інтегральної суми β_n при $max\Delta\sigma \to 0$ (якщо він існує і не залежить від способу розбиття S на елементи ΔS_k і вибору точок N_k) називається *поверхневим інтегралом другого роду* від векторної функції $\bar{a}(P,Q,R)$ по вибраній стороні поверхні і позначається через

$$\iint_S \bar{a}\bar{n}d\sigma \equiv \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$$
$$= \lim_{\substack{max\Delta\sigma_{k\to 0} \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}(N_k)\bar{n}(N_k)\Delta\sigma_k , \qquad (3.4)$$

де $\bar{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – одинична нормаль до поверхні; $\bar{a}\cdot\bar{n}$ і $\bar{a}(N_k)\cdot\bar{n}(N_k)$ – скалярний добуток векторів.

Вирази $(\cos\alpha)d\sigma$, $(\cos\beta)d\sigma$, $(\cos\gamma)d\sigma$ є проекціями нескінченно малого елемента площі поверхні на координатні площини Oyz, Oxz і Oxy, які позначимо відповідно через $dydz$, $dxdz$ і $dxdy$. На основі цього інтеграл (3.4) записується також в іншій формі

$$\iint_S \overline{a}\overline{n}d\sigma \equiv \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$$
$$= \iint_S (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy). \qquad (3.5)$$

Перепишемо інтегральну суму β_n у вигляді

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}(N_k)\cdot\overline{n}(N_k)\Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^{n} a(N_k)\Delta\sigma_k, \qquad (3.6)$$

де $a(N_k)$ – проекція вектора $\overline{a}(N_k)$ на нормаль $\overline{n}(N_k)$.

При переході в цій рівності до границі отримаємо формулу зв'язку між поверхневими інтегралами першого й другого родів

$$\iint_S \overline{a}(M)\overline{n}(M)d\sigma = \iint_S a_n(M)d\sigma. \qquad (3.7)$$

3.2. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду. Обчислення інтеграла (3.2) зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

<u>3.2.1. Поверхня задана явно</u>. Нехай пряма паралельна осі Oz перетинає гладку поверхню S тільки в одній точці. Рівняння поверхні має вигляд $z = f(x,y)$ і S проектується на площину Oxy в область D. Припущення гладкості поверхні S означає неперервність частинних похідних z'_x і z'_y. Елемент $\Delta\sigma_{xy}$ площі D виражається у вигляді $\Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma\cos\gamma$. Виберемо ту сторону поверхні, для якої виконана умова $\cos\gamma > 0$ (рис. 3.2), де γ – гострий кут, який утворює нормаль $\overline{n}$ до поверхні S з віссю Oz. Отже,

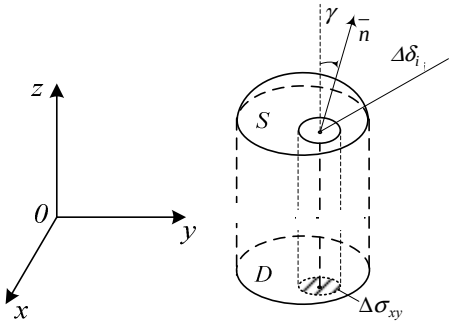


Рис. 3.2

$$\cos\gamma = 1/\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\ ;$$

$\cos\gamma$ – напрямний косинус нормалі до S в деякій точці N^* елемента ΔS. А тому маємо

$$\Delta\sigma = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\Big|_{N^*}\Delta\sigma_{xy}\,.$$

Змінимо в інтегральній сумі, яка відповідає інтегралу (3.2), величину $\Delta\sigma$ за останньою формулою, а величину z – за формулою $z = f(x,y)$ і оскільки точка N_k – довільна, тоді можна покласти $N_k = N_k^*$ і перейти до границі при $max\,\Delta\sigma_k \to 0$ і $n \to \infty$. Отримаємо формулу, яка виражає поверхневий інтеграл першого роду через подвійний інтеграл по проекції поверхні S на площину Oxy

$$\iint\limits_S F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy\,. \quad (3.8)$$

Якщо $F(M)\equiv 1$ на S, з визначення поверхневого інтеграла маємо $\iint\limits_S d\sigma = F_S$, де F_S – площа поверхні S. У цьому випадку формула (3.8) дає вираз площі поверхні через подвійний інтеграл:

$$S_D = \iint\limits_D \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy\,.$$

Замість площини Oxy поверхню S можна проектувати на площини Oxz і Oyz і аналогічно одержати формули, які виражають інтеграл на поверхні S через подвійні по її проекціях на площини Oyz і Oxz. Якщо гладку поверхню S задано рівняннями $x = x(y,z)$ або $y = y(x,z)$, то можна дістати відповідні формули:

$$\iint\limits_S F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} F(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x_y')^2+(x_z')^2}\,dydz\,; \quad (3.9)$$

$$\iint\limits_S F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} F(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y_x')^2+(y_z')^2}\,dxdz\,, \quad (3.10)$$

де D_{yz}, D_{xz} – проекції заданих поверхонь на площині Oyz та Oxz.

<u>3.2.2. Поверхня задана параметрично</u>

Нехай гладка поверхня задана параметрично: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, причому (u,v) є S'.

Розглянемо дотичну площину в деякій її точці M. Вектори, які лежать в дотичній площині, будемо позначати символом $d\bar{r}$. Вони розкладаються на два неколінеарних вектора $\bar{r}_u$ і $\bar{r}_v$, що дотикаються до параметричних ліній в точці M (рис. 3.3).

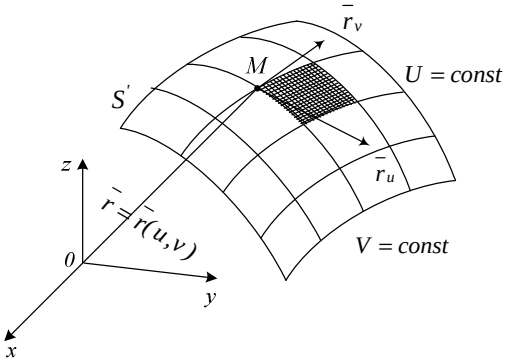


Рис. 3.3

Елементом площі $d\sigma(u,v)$ параметризованої поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ називається *площа паралелограма*, побудованого на частинних диференціалах $\bar{r}_u du$, $\bar{r}_v dv$ радіуса-вектора $\bar{r}$ точки поверхні. Площа паралелограма, побудованого на двох векторах, дорівнює модулю їх векторного добутку. А тому для елемента площі поверхні ми отримаємо формулу

$$d\sigma(u,v) = \left|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right| dudv . \qquad (3.11)$$

Повний диференціал $d\bar{r}$ радіуса-вектора точки поверхні зображується у вигляді

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv .$$

Знайдемо квадрат довжини вектора, який лежить у дотичній площині

$$\left|d\bar{r}\right|^2 = (\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)^2 = \bar{r}_u^2 du^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v dudv + \bar{r}_v^2 dv .$$

Введемо позначення: $E = \bar{r}_u^2$; $F = \bar{r}_u \bar{r}_v$; $G = \bar{r}_v^2$, тоді

$$\left|d\bar{r}\right|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 .$$

Зазначимо, що для будь-яких векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ справедливі формули

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right| sin(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}),\quad \bar{a}\bar{b} = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right| cos(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}),$$

де $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})$ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Піднесемо до квадрату і додамо ці формули:

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2 .$$

Звідси

$$\left|\bar{r}_u\times\bar{r}_v\right|^2 = \bar{r}_u^2\bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u\bar{r}_v)^2 = EG - F^2 ;$$

$$\left|\bar{r}_u\times\bar{r}_v\right| = \sqrt{EG - F^2} .$$

Для елемента площі згідно з (3.11) дістанемо вираз

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,dudv . \qquad (3.12)$$

Звідси для обчислення поверхневого інтеграла (3.2) справедлива формула

$$\iint\limits_S F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_S F(x(u,v),y(u,v)z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv , \qquad (3.13)$$

де

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 ;$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 ; \qquad (3.14)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} .$$

<u>Приклад</u>. Площина $3x + 4y - 5z = 6$ перетинає еліптичний циліндр $2x^2 + y^2 = 1$. Яка площа перерізу?

<u>Розв’язання</u>. Запишемо рівняння поверхні S у вигляді $z = \frac{1}{5}(3x + 4y - 6)$ і застосуємо формулу (3.8), знайшовши спочатку: $z_x' = \frac{3}{5}$; $z_y' = \frac{4}{5}$; $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$. Тоді

$$F_S = \iint\limits_S d\sigma = \iint\limits_A \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_{\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dy =$$

$$= 2\sqrt{2}\cdot 2\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-2x^2}\,dx = \left| \sqrt{2}x = \sin t, \sqrt{2}dx = \cos dt, 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right| = 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \pi .$$

3.3. Деякі застосування поверхневих інтегралів першого роду до механіки. Нехай на поверхні S (поверхня гладка або кусково-гладка) розподілено масу з поверхневою густиною $\mu = \mu(x,y,z)$, причому μ неперервна функція на цій поверхні. Таку поверхню називатимемо *матеріальною*.

Поверхневі інтеграли першого роду застосовують при обчисленні маси, координат центра маси, моментів інерції матеріальної поверхні. Виведення відповідних формул фактично не відрізняється від виведення формул для плоскої області або кривої. Тому наведемо формули без доведення.

Маса матеріальної поверхні

$$m = \iint\limits_S \mu d\sigma .$$

Координати центра маси:

$$x_c = \frac{1}{m} = \iint\limits_S x\mu(x,y,z)d\sigma ;$$

$$z_c = \frac{1}{m} = \iint\limits_S z\mu(x,y,z)d\sigma ;$$

$$y_c = \frac{1}{m} = \iint\limits_S y\mu(x,y,z)d\sigma .$$

Момент інерції поверхні S відносно осей координат

$$I_x = \iint\limits_S (y^2+z^2)\rho d\sigma ;\ I_y = \iint\limits_S (x^2+z^2)\rho d\sigma ;$$

$$I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)\rho d\sigma .$$

<u>Приклад</u>. Обчислити масу сфери, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює квадрату віддалі цієї точки від деякого діаметра

сфери $(\mu = x^2 + y^2)$.

Розв'язання. Нехай поверхня S є сферою радіуса R з параметричним зображенням $x = R\sin\theta\cos\varphi$; $y = R\sin\theta\sin\varphi$; $z = R\cos\theta$, тоді S' є прямокутник $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$. Використаємо формули (3.3) і (3.13) з врахуванням, що $\mu = x^2 + y^2$ і $u = \varphi$, $v = \theta$. Знаходимо:

$$E = R^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi = R^2 \sin^2\theta;$$

$$G = R^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi + R^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + R^2 \sin^2\theta = R;$$

$$F = -R\sin\theta\sin\varphi \cdot R\cos\theta\cos\varphi + R\sin\theta\cos\varphi \cdot R\cos\theta\sin\varphi = 0;$$

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin\theta;$$

$$m = \iint_S \mu d\sigma = \iint_S (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_S R^4 \sin^3\theta d\varphi d\theta =$$

$$= R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = 2\pi R^4 \int_{\pi}^{0} (1 - \cos^2\theta) d\cos\theta =$$

$$= 2\pi R^4 \left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{8}{3}\pi R^4.$$

Приклад. Нехай поверхня конуса $a^2x^2 = h^2(y^2 + z^2)$ покрита масою з густиною $\mu = 1$. Обчислити центр маси.

Розв'язання. Із умови симетрії $y_c = z_c = 0$, оскільки поверхня S задана рівнянням $x = \frac{h}{a}\sqrt{y^2 + z^2}$, причому y і z пробігають внутрішню частину круга D, яке має рівняння $y^2 + z^2 = a^2$. Дістанемо

$$S_{yz} = \iint_S x d\sigma = \iint_D x\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dydz = \frac{h}{a}\iint_D \sqrt{y^2 + z^2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} dydz.$$

Після введення в площині y, z полярних координат $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$ одержуємо

$$S_{yz} = \frac{h}{a}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi h a \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Оскільки площа поверхні конуса $\sigma = \pi a\sqrt{h^2 + a^2}$, то $x_c = \frac{2}{3}h$.

3.4. Обчислення поверхневих інтегралів другого роду. З метою зведення поверхневого інтеграла другого роду $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$ до подвійного інтеграла, замінимо у відповідній інтегральній сумі z на $z = f(x,y)$

$$\sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z_k)\cdot(\Delta\sigma_{xy})_k = \sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, f_k(x_k, y_k))(\Delta\sigma_{xy})_k .$$

Перехід у цій рівності до границі при $\lambda_n \to 0$ і $n \to \infty$ дає значення інтеграла по зовнішній стороні поверхні

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))dxdy .$$

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли другого роду за координатами x, z і y, z:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{D_{xy}} P\left[f(y,z),y,z\right]dydz ;$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \iint\limits_{D_{xy}} Q\left[x,f(x,z),z\right]dzdx ,$$

де поверхня S задана відповідно рівняння $x = f(y,z)$ і $y = f(x,z)$, а D_{yz} і D_{xz} – проекції поверхні S відповідно на площини Oyz і Oxz.

Для обчислення інтеграла загального вигляду (3.5) використовують ці формули, якщо поверхня S проектується на всі три координатні площини

$$\iint\limits_S \bar{a}\cdot\bar{n}d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz + \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz +$$

$$+\iint\limits_{D_{yz}} R(x,y,z(x,y))dxdy . \qquad (3.15)$$

У складніших випадках поверхня S розбивається на частини з такими властивостями, а інтеграл (3.5) – на суму інтегралів по цих частинах.

<u>Приклад</u>. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I = \iint\limits_S ydzdx$, де S – зовнішня сторона частини параболоїда $z = x^2 + y^2$ при $0 \le z \le 2$.

<u>Розв'язання</u>. Розіб'ємо дану поверхню на дві частини S_1 і S_2

(рис. 3.4) рівняння яких $y=\sqrt{z-x^2}$ при $y\ge 0$ і $y=-\sqrt{z-x^2}$ при $y\le 0$. Відповідно обидві частини проектуються на область D площини Oxz, межа якої складається із дуги параболи $z=x^2$ і відрізка прямої $z=2$, тобто

$$D=\left\{(x,z):-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2},\quad x^2\le z\le 2\right\}.$$

Зведемо поверхневі інтеграли по S_1 і S_2 до відповідних інтегралів по області D. Дістанемо

$$\iint\limits_{S_1} ydzdx=-\iint\limits_{D} y(x,z)dzdx=-\iint\limits_{D}\sqrt{z-x^2}\,dzdx;$$

тут перед подвійним інтегралом стоїть знак мінус, оскільки

$$\left(sgn(\cos\beta)=\begin{cases}-1 & \text{при } y>0\\ 1 & \text{при } y<0\end{cases}\right);$$

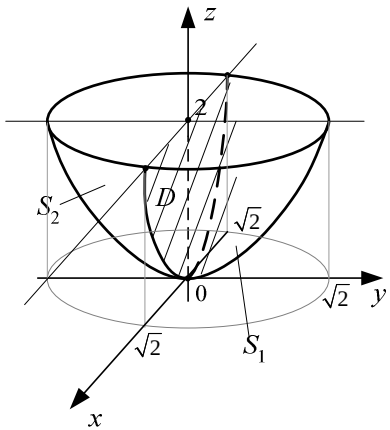


Рис. 3.4

$$\iint\limits_{S_2} ydz=\iint\limits_{D} y(x,z)dzdx=-\iint\limits_{D}\sqrt{z-x^2}\,dzdx.$$

Остаточно маємо:

$$I=\iint\limits_{D} ydzdx=-2\iint\limits_{D}\sqrt{z-x^2}\,dzdx.$$

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторного

інтегрування:

$$I = -2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{z - x^2}\, dz = -\frac{4}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{(2 - x^2)^3}\, dx .$$

Скористаємося заміною змінної: $x = \sqrt{2}\, sin\, t$; $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$; $dx = \sqrt{2}\, cos\, t dt$.

Отже, $I = -\frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^4 t dt = -\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + cos\, 2t)^2\, dt = -2\pi$.

<u>Приклад</u>. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $J = \iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, де S – зовнішня сторона поверхні, яка розміщена в першому октанті і складається з циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ і площин: $x = 0$, $y = 0$; $z = 0$; $z = H$.

<u>Розв'язання</u>. Обчислимо кожний з трьох інтегралів по відповідній проекції тіла на координатні площини (рис. 3.5):

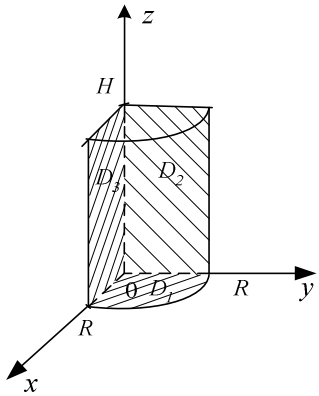


Рис. 3.5

$$\iint\limits_S yzdxdy = \iint\limits_{D_1} Hydxdy = H\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} ydy =$$

$$= \frac{H}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{H}{2}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{HR^3}{3} ;$$

$$\iint_S xzdydz = \iint_{D_2} z\sqrt{R^2 - y^2}\,dydz = \int_0^H zdz\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}\,dy = \frac{H^2R^2}{2}\int_0^{\pi/2} cos^2\,tdt = \frac{\pi H^2R^2}{8}\ ;$$

$$\iint_S xydxdz = \iint_{D_3} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dxdz = \int_0^H dz\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{HR^3}{3}.$$

Остаточно: $J = \frac{HR^3}{3} + \frac{\pi H^2R^2}{8} + \frac{HR^3}{3} = R^2H\left(\frac{\pi H}{8} + \frac{2}{3}R\right)$.

<u>Приклад</u>. Обчислити потік вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через зовнішню сторону сфери $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

<u>Розв'язання</u>. Згідно з визначенням потоку обчислимо поверхневий інтеграл другого роду (3.4)

$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)d\sigma\ ,$$

де S – зовнішній бік даної сфери. Знаходимо одиничний вектор нормалі $\bar{n}$ до поверхні $\bar{n} = \left\{\frac{x-a}{R}, \frac{y-b}{R}, \frac{z-c}{R}\right\}$,

який визначає зовнішній бік сфери. Враховуючи зв'язок (3.7) між поверхневими інтегралами, перепишемо інтеграл у вигляді

$$\iint_S \left(x^2\frac{x-a}{R} + y^2\frac{y-b}{R} + z^2\frac{z-c}{R}\right)d\sigma$$

і обчислимо його за формулою (3.13).

Для цього запишемо параметричне рівняння сфери: $x = a + R\cos v\sin u$; $y = b + R\sin v\sin u$; $z = c + R\cos u$; $0 \le u \le \pi$; $0 \le v \le 2\pi$. За формулами (3.10) і (3.14) знаходимо E, F, G і $d\sigma$. Підставимо їх у останній інтеграл і одержимо:

$$\int_0^{2\pi} dv\int_0^{\pi} R^2\sin u\big[(a + R\cos v\sin u)\cos v\sin u +$$

$$+(b + R\sin v\sin u)^2\sin v\sin u + (c + R\cos u)^2\cos u\big]du =$$

$$= 2aR^3\int_0^{2\pi}\cos^2 vdv\int_0^{\pi}\sin^3 udu + 2bR^3\int_0^{2\pi}\sin^2 vdv + \int_0^{\pi}\sin^3 udu +$$

$$+2cR^3\int_0^{2\pi}dv\int_0^{\pi}\cos^2 u\sin udu = \frac{8}{3}\pi R^3(a + b + c).$$

3.5. Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні з потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Ця формула є аналогом формули Гріна, яка зв'язує криволінійний інтеграл по замкненій кривій з подвійним інтегралом по плоскій області, обмеженій цією кривою

Замкнена просторова область, межа якої перетинається з будь-якою прямою, паралельною осям координат, не більше ніж у двох точках, називається *простою*. При цьому будемо розглядати зовнішню сторону поверхні, яка обмежує цю область. Вважатимемо, що ця поверхня гладка або кусково-гладка. Отже, якщо проста просторова область є обмежена кусково-гладкою поверхнею S і $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – функції неперервні в G разом з частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, тоді справедлива формула Остроградського-Гаусса:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dr=\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\,, \qquad (3.16)$$

причому поверхневий інтеграл другого роду слід обчислювати по зовнішній стороні поверхні S, яка обмежує область G.

<u>Приклад</u>. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчислити інтеграл другого роду:

$$I=\iint\limits_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz\,,$$

де S – зовнішня сторона поверхні, розміщена в першому октанті й складається з параболоїда обертання $z=x^2+y^2$, циліндра $x^2+y^2=1$ і координатних площин.

<u>Розв'язання</u>. За формулою (3.16) маємо:

$$P(x,y,z)=xz\,; \qquad Q(x,y,z)=x^2y\,; \qquad R(x,y,z)=y^2z\,;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=z\,; \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=x^2\,; \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=y^2\,;$$

$$\iint\limits_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz=\iiint\limits_G\left(z+x^2+y^2\right)dxdydz\,.$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до

циліндричних координат $x = \rho \cos\varphi$; $y = \rho \sin\varphi$; $z = z$. Якобіан переходу дорівнює ρ. Отже,

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\rho^2} (z + \rho^2) dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} + \rho^2 z \right) \Bigg|_0^{\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{\pi}{8}.$$

3.6. Формула Стокса. Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневими і криволінійними інтегралами.

Нехай S – двостороння поверхня, задана рівнянням $z = f(x,y)$, де функції $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ – неперервні в замкненій області, D – проекція S на площину Oxy; l – контур, який обмежує S, а λ – його проекція на площину Oxy, яка є межею області D (рис. 3.6). Вибираємо верхню сторону поверхні, тобто $\cos\gamma = \cos(nz) > 0$.

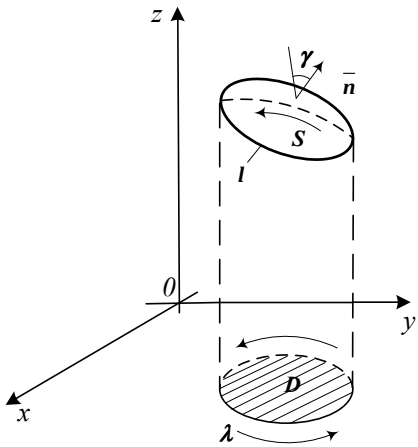


Рис. 3.6

Нехай кусково-гладка двостороння незамкнена поверхня S з границею l розміщена всередині просторової області G і функції:

$P(x,y,z)$; $Q(x,y,z)$; $R(x,y,z)$ разом зі своїми першими частинними похідними неперервні в G. Тоді

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx=\int_l\int Pdx+Qdy+Rdz\,, \qquad (3.17)$$

причому шлях інтегрування вздовж l такий, щоб вибрана сторона поверхні S знаходилась ліворуч.

Напрямні косинуси нормалі $\vec{n}$ у такому випадку будуть:

$$\cos\alpha=-z_x^{'}/\left|\overline{n}\right|;\ \cos\beta=-z_y^{'}/\left|\overline{n}\right|;$$

$$\cos\gamma=-1/\left|\overline{n}\right|,\ \text{де}\left|\overline{n}\right|=\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}\,.$$

Звідси $z_x^{'}\cos\gamma=-\cos\alpha$; $z_y^{'}\cos\gamma=-\cos\beta$.

Формулу (3.17) називають *формулою Стокса*.

Її можна записати у вигляді (3.18), якщо покласти: $\cos\alpha d\sigma=dydz$; $\cos\beta d\sigma=dxdz$; $\cos\gamma d\sigma=dxdy$.

$$\int_l P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma\,. \qquad (3.18)$$

Формула Стокса залишається справедливою для поверхонь, які можна розбити на скінченне число двосторонніх поверхонь, для яких виконуються відповідні умови.

Якщо поверхня S – це область D, яка лежить у площині Oxy, то $z=0$, $dz=0$. Із формули Стокса дістаємо формулу Гріна

$$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Формула Стокса дозволяє обчислити криволінійний інтеграл по замкнених межах за допомогою поверхневих інтегралів.

<u>Приклад</u>. Використовуючи формулу Стокса обчислити інтеграл $\int_l x^2y^3dx+dy+zdz$. Контур l – коло $x^2+y^2=R^2$, $z=0$; поверхня S є півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Інтегрування вздовж кола в

площині xOy провести в додатному напрямі.

<u>Розв'язання</u>. Тут: $P(x,y,z)=x^2y^3$; $Q(x,y,z)=1$; $R(x,y,z)=z$; $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2y^2$; $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=0$.

Отже, за формулою (4.17) маємо:

$$\int_l x^2y^3dx+dy+zdz=-3\iint_S x^2y^2dxdy=$$

$$=-3\int_{-R}^{R}x^2dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}y^2dy=-2\int_{-R}^{R}x^2\sqrt{(R^2-x^2)^3}dx=$$

$$=-4\int_0^{\pi/2}R^2\sin^2t\cdot\sqrt{(R^2-R^2\sin^2t)^3}=R\cos tdt=$$

$$=-4R^6\int_0^{\pi/2}\sin^2t\cos^4tdt=-4R^6\int_0^{\pi/2}(\cos^4t-\cos^6t)dt=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

4. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

4.1. Подвійні інтеграли

$\boxed{1}$ Зобразити область інтегрування та змінити порядок інтегрування

1. $$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$$

2. $$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$$

3. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

4. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

5. $$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)dy$$

6. $$\int_{0}^{\sqrt{2}/2} dy \int_{0}^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f(x,y)dx$$

7. $$\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$$

8. $$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$$

9. $$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy$$

10. $$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy$$

11. $$\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$$

12. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f(x,y)dx$$

13. $$\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} f(x,y)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f(x,y)dx$$

14. $$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x}}^{0} f(x,y)dy$$

15. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$$

16. $$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$$

17. $$\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$$

18. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^2} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f(x,y)dx$$

19. $$\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$$

20. $$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$$

21. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$$

22. $$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

23. $$\int_{0}^{\pi/4} dx \int_{0}^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\cos x} f(x,y)dy$$

24. $$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f(x,y)dx$$

25. $$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)dy$$

26. $$\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

27. $$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy$$

28. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

29. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$

30. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

$\boxed{2}$ Розставити границі інтегрування двома способами, якщо область інтегрування D подана зазначеними лініями

№ п/п	D
1.	$y=\sqrt{4-x^2}$; $y=\sqrt{3x}$; $x \ge 0$
2.	$x=\sqrt{8-y^2}$; $y \ge 0$; $y=x$
3.	$x^2=2-y$; $x+y=0$
4.	$x \ge 0$; $y \ge 0$; $y=1$; $x=\sqrt{4-y^2}$
5.	$x \ge 0$; $y \ge 1$; $y \le 3$; $y=x$
6.	$x \ge 0$; $y \ge x$; $y=\sqrt{8-x^2}$
7.	$x=\sqrt{2-y^2}$; $x=y^2$; $y \ge 0$
8.	$x \le 0$; $y \ge 1$; $y \le 3$; $y=-x$
9.	$y \ge 0$; $x=\sqrt{y}$; $y=\sqrt{6-x^2}$

№ п/п	D
16.	$x^2=2y$; $5x-2y-6=0$
17.	$x \ge 0$; $y \ge 0$; $y \le 1$; $y=\ln x$
18.	$y=\sqrt{2-x^2}$; $y=x^2$
19.	$y=x^2$ -2; $y=x$
20.	$y^2=2x$; $x^2=2y$; $x \le 1$
21.	$y^2=2-x$; $y=x$
22.	$y \ge 0$; $x+2y-12=0$; $y=x$
23.	$y=0$; $y \ge x$; $y=-\sqrt{2-x^2}$
24.	$y=-x$; $y^2=x+3$

10.	$y=\sqrt{4-x^2}$; $x\ge 0$; $x=1$; $y=0$
11.	$y\le 0$; $x^2=-y$; $x=\sqrt{2-y^2}$
12.	$y=6-x^2$; $y=-x$
13.	$x=0$; $y=0$; $y=1$; $(x-3)^2+y^2=1$
14.	$x\le 0$; $y=1$; $y=4$; $y=-x$
15.	$y=-x$; $3x+y=3$; $y=3$

25.	$x=-1$; $x=-2$; $y\ge 0$; $y=x^2$
26.	$y\ge 0$; $y\le 1$; $y=x$; $x^2+y^2=4$
27.	$x=0$; $x=-2$; $y\ge 0$; $y=x^2+4$
28.	$x=\sqrt{9-y^2}$; $y=x$; $y\ge 0$
29.	$x+2y-6=0$; $y=x$; $y\ge 0$
30.	$x\ge 0$; $y=1$; $y=-1$; $y=\log_{1/2} x$

3 Обчислити подвійний інтеграл по області інтегрування D, обмеженої вказаними лініями

1. $\iint (x^2+y)dxdy,$ $\quad D: x^2=y;\ \ y^2=x$
2. $\iint xy^2dxdy,$ $\quad D: y=x^2;\ \ y=2x$
3. $\iint (x+y)dxdy,$ $\quad D: y^2=x;\ \ y=x$
4. $\iint x^2ydxdy,$ $\quad D: y=2-x;\ \ y=x;\ \ x\ge 0$
5. $\iint (x^3-2y)dxdy,$ $\quad D:\ y=x^2-1;\ \ x\ge 0;\ \ y\le 0$
6. $\iint (y-x)dxdy,$ $\quad D:\ y=x;\ \ y=x^2$
7. $\iint (1+y)dxdy,$ $\quad D:\ y^2=x;\ 5y=x$
8. $\iint (x+y)dxdy,$ $\quad D:\ y=x^2-1;\ y=-x^2+1$
9. $\iint x(y-1)dxdy,$ $\quad D:\ y=5x;\ \ y=x;\ \ x=3$
10. $\iint (x-2)ydxdy,$ $\quad D:\ y=x;\ \ y=0{,}5x;\ \ x=2$

11. $\iint (x - y^2)dxdy,$ $\quad D:\ y = x^2;\ \ y = 1$

12. $\iint x^2 ydxdy,$ $\quad D:\ y = 2x^2;\ \ y = 0;\ \ x = 1$

13. $\iint (x^2 + y^2)dxdy,$ $\quad D:\ x = y^2;\ \ x = 1$

14. $\iint xydxdy,$ $\quad D:\ y = x^3;\ \ y = 0;\ \ x \le 2$

15. $\iint (x + y)dxdy,$ $\quad D:\ y = x^3;\ \ y = 8;\ \ y = 0;\ \ x = 3$

16. $\iint x(2x + y)dxdy,$ $\quad D:\ y = 1 - x^2;\ \ y \ge 0$

17. $\iint y(1 - x)dxdy,$ $\quad D:\ y^3 = x;\ \ y = x$

18. $\iint xy^3 dxdy,$ $\quad D:\ y^2 = 1 - x;\ \ x \ge 0$

19. $\iint x(y + 5)dxdy,$ $\quad D:\ y = x + 5;\ \ x + y + 5 = 0;\ \ x \le 0$

20. $\iint (x - y)dxdy,$ $\quad D:\ y = x^2 - 1;\ \ y = 3$

21. $\iint (x + 1)y^2 dxdy,$ $\quad D:\ y = 3x^2;\ \ y = 3$

22. $\iint xy^2 dxdy,$ $\quad D:\ y = x;\ \ y = 0;\ \ x = 1$

23. $\iint (x^3 + y)dxdy,$ $\quad D:\ x + y = 1;\ \ x + y = 2;\ \ x \le 1;\ \ x \ge 0$

24. $\iint xy^3 dxdy,$ $\quad D:\ y = x^3;\ \ y \ge 0;\ \ y = 4x$

25. $\iint (x^3 + 3y)dxdy,$ $\quad D:\ x + y = 1;\ \ y = x^2 - 1;\ \ x \ge 0$

26. $\iint xydxdy,$ $\quad D:\ y = \sqrt{x};\ \ y = 0;\ \ x + y = 2;\ \ x = 0$

27. $\iint y^2 x^{-2} dxdy$ $\quad D:\ y = x;\ \ xy = 1;\ \ y = 2$

28. $\iint y(1 + x^2)dxdy,$ $\quad D:\ y = x^3;\ \ y = 3x$

29. $\iint y^2(1 + 2x)dxdy,$ $\quad D:\ x = 2 - y^2;\ \ x = 0$

30. $\iint e^y dxdy,$ $\quad D:\ y = \ln x;\ \ y = 0;\ \ x = 2$

$\boxed{4}$ Обчислити подвійний інтеграл, використовуючи у полярні координати

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$

2. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

3. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dy$

5. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

6. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2+y^2)dy$

7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ln(1+x^2+y^2)dy$

8. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} cos(x^2+y^2)dy$

9. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$

10. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dy$

11. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt[3]{1+x^2+y^2}dy$

12. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

13. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)dy$

14. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}$

15. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$

16. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

18. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \cos(x^2+y^2)dy$

19. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

20. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$

21. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$

22. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

23. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$

24. $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}dy$

25. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$

26. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy$

27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

28. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\;dy$

29. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$

30. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

$\boxed{5}$ Обчислити площу плоскої фігури *D*, обмеженої зазначеними лініями

1. $D:\ \ y^2=4x,\ \ x+y=3,\ \ y\ge 0$

2. $D:\ x\ =\sqrt{4-y^2},\ y=\sqrt{3x},\ \ x\ge 0$

3. $D:\ \ y=6x^2,\ \ x+y=2,\ \ x\ge 0$

4. $D:\ y\ =x^2+2,\ x\ge 0,\ \ x=2,\ y=x$

5. $D:\ \ y^2=x+2,\ \ x=2$

6. $D:\ \ y=4x^2,\ \ 9y=x^2,\ \ y\le 2$

7. $D: \ x = -2y^2, \ x = 1-3y^2$
$x \le 0, \ y \ge 0$

8. $D: \ y = x^2, \ , \ y = -x$

9. $D: \ y = 8:(x^2+4), \ x^2 = 4y$

10. $D: \ x = y^2, \ x = \frac{3}{4}y^2 + 1$

11. $D: \ y = x^2 + 1, \ x + y = 3$

12. $D: \ y = \sqrt{2-x^2}, \ y = x^2$

13. $D: \ y^2 = 4x, \ x^2 = 4y$

14. $D: \ y = x^2 + 4x, \ y = x + 4$

15. $D: \ y = \cos x, \ y \le x + 1,$
$y \ge 0$

16. $D: \ 2y = \sqrt{x}, \ x + y = 5, \ x \ge 0$

17. $D: \ y = 2^x, \ y = 2x - x^2,$
$x = 2, \ x = 0$

18. $D: \ x = 4-y^2, \ x-y+2 = 0$

19. $D: \ y = -2x^2 + 2, \ y \ge -6$

20. $D: \ x = y^2, \ x = \sqrt{2-y^2}$

21. $D: \ y^2 = 4x \ , x = \frac{8}{(y^2+4)}$

22. $D: \ x^2 + y^2 = 4, \ y \le \frac{1}{2}x, \ y \ge 0$

23. $D: \ y = 4 - x^2, \ y = x^2 - 2x$

24. $D: \ y^2 = 4 - x, \ y = x + 2, \ y = \pm 2$

25. $D: \ x = y^2 + 1, \ x + y = 3$

26. $D: \ y = x^2, \ y = \frac{3}{4}x^2 + 1$

27. $D: \ x^2 = 3y, \ y^2 = 3x$

28. $D: \ x = y^2, \ y^2 = 4 - x$

29. $D: y = -x^2 + 1, \ x \le y + 1, x \ge 0$

30. $D: \ xy = 1, \ x^2 = y, \ y = 2, \ x = 0$

6 За допомогою подвійних інтегралів обчислити у полярних координатах площу плоскої фігури, обмеженої зазначеними лініями ($a > 0$)

1. $\rho = a(3 + \cos 2\varphi)$

16. $(x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2$

2. $(x^2+y^2)^3 = a^4x^2$

3. $\rho = a(2-\sin\varphi)$

4 $(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$

5. $\rho = a\cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}$

6. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$

7. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

8. $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2$

9. $\rho = a\ (1+\sin^2\varphi)$

10. $(x^2+y^2)^3 = a^3y^3$

11. $\rho = a^2\sin^2\varphi$

12. $(x^2+y^2)^2 = a^2(2x^2+y^2)$

13. $\rho = a\sin\varphi\sqrt{\sin\varphi}$

14. $(x^2+y^2)^2 = a^2(2x^2+3y^2)$

15. $\rho = a^2(2-\cos 2\ \varphi)$

17. $\rho^2 = a^2(3+\sin\varphi)$

18. $(x^2+y^2)^3 = a^2y^4$

19. $\rho = a\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}$

20. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy\ (y^2-x^2)$

21. $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$

22. $(x^2+y^2)^2 = a^2xy$

23. $\rho^2 = a^2(1+\cos^2\varphi)$

24. $(x^2+y^2)^3 = a^3x^3$

25. $\rho = a^2\cos^2\varphi$

26. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2+2y^2)$

27. $\rho = a\cos\varphi\sqrt{\cos\varphi}$

28. $(x^2+y^2)^2 = a^2(3x^2+2y^2)$

29. $\rho = a^2\left(2-sin\,2\varphi\right)$

30. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$

$\boxed{7}$ Обчислити об’єм тіла, обмеженого зазначеними поверхнями

1. $z = x^2+y^2,\ x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

2. $z = 2 - (x^2 + y^2),\ x + 2y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

3. $z = x^2,\ x - 2y + 2 = 0,\ x + y - 7 = 0,\ z \ge 0$

4. $z = 2x^2 + 3y^2, y = x^2,\ y = x,\ z \ge 0$

5. $z = 2x^2 + y^2, y \le x,\ x = 2,\ y = 3x,\ z \ge 0$

6. $z = x,\ y = 4,\ x = \sqrt{25 - y^2},\ y \ge 0,\ z \ge 0$

7. $z + x + y = 2,\ z \ge 0,\ y = \sqrt{x},\ y = x$

8. $y = 1 - x^2,\ x + y + z = 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

9. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

10. $z = 4 - 4x^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

11. $2x + 3y - 12 = 0,\ 2z = y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

12. $z = 10 + x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x = 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

13. $z = x^2 + 1,\ x + y = 6,\ x \ge 0,\ y = 2x,\ z \ge 0$

14. $z = 3x^2 + 2y^2 + 1, y = x^2 - 1,\ y = 3,\ z \ge 0$

15. $3y = \sqrt{x}, y \le x,\ x + y + z = 10,\ y = 1,\ z = 0$

16. $y^2 = 1 - x,\ x + y + z = 1,\ x = 0,\ z = 0$

17. $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 3x + 2y + 6,\ z = 0$

18. $x^2 = 1 - y,\ x + y + z = 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

19. $x = y^2,\ x = 1,\ x + y + z = 6,\ z \ge 0$

20. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

21. $y = x^2, y = 4,\ z = 2x + 5y + 10,\ z \ge 0$

22. $y = 2x,\ x + y + z = 2,\ x \ge 0,\ z \ge 0$

23. $y = 1 - z^2, y = x, y = -x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

24. $x^2 + y^2 = 4y,\ z^2 = 4 - y,\ z \ge 0$

25. $x^2 + y^2 = 1,\ z = 2 - x^2 - y^2,\ z \ge 0$

26. $y = x^2,\ z \ge 0,\ y + z = 2$

27. $z^2 = 4 - x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ z \ge 0$

28. $z = x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x \ge 0,\ y = 1,\ z \ge 0$

29. $z = y^2,\ x + y = 1,\ x \ge 0,\ z \ge 0$

30. $y^2 = x,\ x = 3,\ z = x,\ \ z \ge 0$

4.2. Потрійні інтеграли

$\boxed{8}$ Розставити границі інтегрування в потрійному інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, якщо область V обмежена зазначеними поверхнями. Побудувати область інтегрування

1. $x = 1,\ y = 3x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 2(x^2 + y^2)$
2. $x = 1,\ y = 4x,\ z \ge 0,\ z = \sqrt{3y}$
3. $x = 3,\ y = x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 3x^2 + y^2$
4. $y = 2x,\ y = 2,\ z \ge 0,\ z = 2\sqrt{x}$
5. $x = 0,\ y = x,\ y = 5,\ z \ge 0,\ z = 2x^2 + y^2$
6. $x \ge 0,\ y = 2x,\ y = 1,\ z \ge 0,\ x + y + z = 3$
7. $x \ge 0,\ y = 3x,\ y = 3,\ z \ge 0,\ x = 3\sqrt{z}$
8. $x = 5,\ y = 0{,}2x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = x^2 + 5y^2$
9. $x = 2,\ y = 4x,\ y = 3\sqrt{x},\ z \ge 0,\ z = 4$
10. $x = 2,\ y = 4x,\ \ z \ge 0,\ \ y = 2\sqrt{z}$
11. $x = 3,\ \ y = x/3,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0,\ \ \ 2z = x^2 + y^2$
12. $x = 4,\ \ y = x/4,\ \ z \ge 0,\ \ z = 4y^2$
13. $x \ge 0,\ y = 3x,\ y = 3,\ z \ge 0,\ z = 2(x^2 + y^2)$
14. $x \ge 0,\ y = 4x,\ y = 8,\ z \ge 0,\ z = 3x^2 + y^2$
15. $x \ge 0,\ y = 5x,\ y = 10,\ z \ge 0,\ z = x^2 + y^2$
16. $y = x,\ y = -x,\ y = 2,\ z \ge 0,\ z = 3(x^2 + y^2)$
17. $x = 1,\ y = 2x,\ y = 3x,\ z \ge 0,\ z = 2x^2 + y^2$
18. $y = x,\ y = -2x,\ y = 1,\ z \ge 0,\ z = x^2 + 4y^2$
19. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ \ z \ge 0,\ x + y = 1,\ z = 3x^2 + 2y^2$

20. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 3x + 2y = 6,\ z = x^2 + y^2$

21. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 2,\ z = 4 - x^2 - y^2$

22. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 3,\ z = 9 - x^2 - y^2$

23. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 3x + 4y = 12,\ z = 6 - x^2 - y^2$

24. $x \ge 0,\ y = x,\ z \ge 0,\ y = 3,\ z = 18 - x^2 - y^2$

25. $x = 2,\ y \ge 0,\ z \ge 0, y = 3x,\ z = 4(x^2 + y^2)$

26. $x \ge 0,\ y = 2x,\ y = 4,\ z \ge 0,\ z = 10 - x^2 - y^2$

27. $x = 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ y = 2x,\ z = 4\sqrt{y}$

28. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0, 2x + 3y = 6,\ z = 3 + x^2 + y^2$

29. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 4,\ z = 16 - x^2 - y^2$

30. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 5x + y = 5,\ z = x^2 + y^2$

9 Обчислити потрійний інтеграл від функції $F(x,y,z)$ по області V

№ п/п	$F(x,y,z)$	V		
1.	$2x^2 + 3y + z$,	$2 \le x \le 3$	$-1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 4$
2.	$x^2\ yz$	$-1 \le x \le 2,$	$0 \le y \le 3,$	$2 \le z \le 3$
3.	$x + y + 4z^2$	$-1 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 1$
4.	$x^2 + y^2 + z^2$	$0 \le x \le 3,$	$-1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 2$
5.	$x^2 y^2 z$	$-1 \le x \le 3,$	$0 \le y \le 2,$	$-2 \le z \le 5$
6.	$x + y + z$	$0 \le x \le 1,$	$-1 \le y \le 0,$	$1 \le z \le 2$
7.	$2x - y^2 - z$	$1 \le x \le 5,$	$0 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 0$
8.	$2xy^2 z$	$0 \le x \le 3,$	$-2 \le y \le 0,$	$1 \le z \le 2$
9.	$5xyz^2$	$-1 \le x \le 0,$	$2 \le y \le 3,$	$1 \le z \le 2$
10.	$x^2 + 2y^2 - z$	$0 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 3,$	$-1 \le z \le 2$
11.	$x + 2yz$	$-2 \le x \le 0,$	$0 \le y \le 1,$	$0 \le z \le 2$
12.	$x + yz^2$	$0 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 3$

13.	$xy+3z$	$-1 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 1,$	$1 \le z \le 2$
14.	$xy-z^2$	$0 \le x \le 2,$	$0 \le y \le 1,$	$-1 \le z \le 3$
15.	x^3+yz	$-1 \le x \le 2,$	$0 \le y \le 1,$	$0 \le z \le 1$
16.	x^3+y^2-z	$0 \le x \le 2,$	$-1 \le y \le 0,$	$0 \le z \le 1$
17.	$2x^2+y-z^3$	$0 \le x \le 1,$	$-2 \le y \le 1,$	$0 \le z \le 1$
18.	x^2yz^2	$0 \le x \le 2,$	$1 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 0$
19.	$x+y-z$	$0 \le x \le 4,$	$1 \le y \le 3,$	$-1 \le z \le 5$
20.	$x+2y+3z^2$	$-1 \le x \le 2,$	$0 \le y \le 1,$	$1 \le z \le 2$
21.	$3x^2+2y+z$	$0 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 1,$	$-1 \le z \le 3$
22.	$xy-z^3$	$0 \le x \le 1,$	$-1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 3$
23.	x^3yz	$-1 \le x \le 2,$	$1 \le y \le 3,$	$0 \le z \le 1$
24.	xy^2z	$-2 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 3$
25.	xyz^2	$0 \le x \le 2,$	$-1 \le y \le 0,$	$0 \le z \le 4$
26.	$x+yz$	$0 \le x \le 1,$	$-1 \le y \le 4,$	$0 \le z \le 2$
27.	$x+y^2-z^2$	$-2 \le x \le 0,$	$1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 5$
28.	$x+y+z^2$	$-1 \le x \le 0,$	$0 \le y \le 1,$	$2 \le z \le 3$
29.	$x+y^2-2z$	$1 \le x \le 2,$	$-2 \le y \le 3,$	$0 \le z \le 1$
30.	$x-y-z$	$0 \le x \le 3,$	$0 \le y \le 1,$	$-2 \le z \le 1$

10 Обчислити потрійний інтеграл від функції $F(x,y,z)$ по області V за допомогою циліндричної або сферичної систем координат

№ п/п	$F(x,y,z)$	V
1.	$x^2+y^2+z^2$	$x^2+y^2+z^2=4;\ \ x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ \ z \ge 0$
2.	$y\sqrt{x^2+y^2}$	$0 \le z \le 2;\ \ -x \le y \le x;\ \ z^2=4\left(x^2+y^2\right)$
3.	z^2	$1 \le x^2+y^2 \le 36;\ \ y \ge x;\ \ x \ge 0;\ \ z \ge 0$
4.	y	$x^2+y^2+z^2=32;\ \ y^2=x^2+z^2;\ \ y \ge 0$
5.	x	$x^2+y^2+z^2=8;\ \ x^2=y^2+z^2;\ \ x \ge 0$

6.	y	$4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$; $y \le \sqrt{3}x$; $y \ge 0$; $z \ge 0$
7.	y	$z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y \ge 0$
8.	$\dfrac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$	$x \ge 0$; $y \ge \sqrt{3}x$; $z \ge 0$; $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36$
9.	$\dfrac{y^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$	$y \ge 0$; $y \le \sqrt{3}x$; $z = 3(x^2 + y^2)$; $z = 3$
10.	$\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16$; $z \ge 0$
11.	$\dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$z = 2(x^2 + y^2)$; $y \ge 0$; $y \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$; $z = 18$
12.	$\dfrac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$	$z = x^2 + y^2$; $y \ge 0$; $y \le x$; $z = 4$
13.	$\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 = 4y$; $y + z = 4$; $z \ge 0$
14.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 = 2x$; $x + z = 2$; $z \ge 0$; $y \ge 0$
15.	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 = 16y$; $y + z = 16$; $z \ge 0$; $x \ge 0$
16.	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 = 2x$; $x + z = 2$; $z \ge 0$
17.	xy	$2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 8$; $z^2 = x^2 + y^2$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$
18.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 = 2y$; $x^2 + y^2 = 4y$; $x \ge 0$; $z \ge 0$; $z = 6$
19.	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 36$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $y \le -x$
20.	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 = 2x$; $x^2 + y^2 = 4x$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $z = 4$; $y \le x$
21.	$\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$; $y \ge 0$; $y \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$; $z \ge 0$

22.	$\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2-2x+y^2=0$; $y\ge 0$; $z\ge 0$; $x+z=2$
23.	x^2	$1\le x^2+y^2+z^2\le 16$; $y\ge 0$; $z\ge 0$; $y\le x$
24.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$x^2+y^2=4y$; $y+z=4$; $z\ge 0$
25.	$\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$4\le x^2+y^2+z^2\le 16$; $y\le\sqrt{3}\cdot x$; $y\ge 0$; $z\ge 0$
26.	$z\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=2x$; $y\ge 0$; $z\ge 0$; $z=3$
27.	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$1\le x^2+y^2+z^2\le 4$; $x\ge 0$; $y\ge 0$; $z\ge 0$; $y\le x$
28.	x	$x^2=2(y^2+z^2)$; $x=4$; $x\ge 0$
29.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$1\le x^2+y^2+z^2\le 9$; $y\ge 0$; $z\ge 0$; $y\le x$
30.	x	$z=\sqrt{18-x^2-y^2}$; $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $x\ge 0$

11 За допомогою потрійного інтеграла обчислити об’єм тіла, обмеженого зазначеними поверхнями. Зробити рисунок

1. $z^2=4-x$, $x^2+y^2=4x$
2. $z\ge 0$, $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y=7$
3. $z=4-y^2$, $x^2+y^2=4$, $z\ge 0$
4. $x\ge 0$, $z\ge 0$, $z=y$, $x=4$, $y=\sqrt{25-x^2}$
5. $x^2+y^2=1$, $z=2-x-y$, $z\ge 0$
6. $z\ge 0$, $z=4-x$, $x=2\sqrt{y}$, $y=2\sqrt{x}$
7. $z=y^2$, $x\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y=2$
8. $y\ge 0$, $z\ge 0$, $2x-y=0$, $x+y=9$, $z=x^2$
9. $y\ge 0$, $z\ge 0$, $z=x$, $x=\sqrt{9-y^2}$, $x=\sqrt{25-y^2}$
10. $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x=4$, $y=2x$, $z=x^2$
11. $x^2+y^2=4$, $z=4-x-y$, $z\ge 0$

12. $x \ge 0$, $z \ge 0$, $y = 2x$, $y = 3$, $z = \sqrt{y}$

13. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x = 3$, $y = 2x$, $z = y^2$

14. $x \ge 0$, $z \ge 0$, $y \ge x$, $z = 1 - x^2 - y^2$

15. $z \ge 0$, $y^2 = 2 - x$, $z = 3x$

16. $z \ge 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$

17. $z \ge 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$

18. $z \ge 0$, $y = 2$, $y = x$, $z = x^2$

19. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$

20. $z \ge 0$, $y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 4$

21. $z \ge 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$

22. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x - y = 0$, $2x + y = 2$, $4z = y^2$

23. $z \ge 0$, $z = x$, $x = \sqrt{4 - y^2}$

24. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $2x + y = 2$, $z = y^2$

25. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y = 2$, $z = x^2$

26. $z \ge 0$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$, $z = 1 - y^2$

27. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $y = 4$, $z = x$, $x = \sqrt{25 - y^2}$

28. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $y = 3 - x$, $z = 9 - x^2$

29. $z \ge 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = y^2$

30. $x \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y = 4$, $z = 4\sqrt{y}$

12 Обчислити масу неоднорідної матеріальної пластини D, обмеженої зазначеними лініями, якщо поверхнева щільність в кожній її точці $\mu = \mu(x, y)$

№ п/п	D	μ
1.	$y^2 = x$, $x = 3$	x
2.	$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$	x^2

3.	$x=0$, $y=0$, $2x+3y=6$,	$0{,}5y^2$
4.	$x^2+y^2=4x$	$4-x$
5.	$x=0$, $y=1$, $y=x$,	x^2+2y^2
6.	$x^2+y^2=1$	$2-x-y$
7.	$x^2+y^2=4y$	$\sqrt{4-y}$
8.	$y=x$, $y=-x$, $y=1$	$\sqrt{1-y}$
9.	$x=0$, $y=2x$, $x+y=2$,	$2-x-y$
10.	$x=1$, $x=y^2$	$4-x-y$
11.	$y=0$, $x^2=1-y$,	$3-x-y$
12.	$y=x^2$, $x=y^2$,	$3x+2y+6$
13.	$y=x^2$, $y=4$	$2x+5y+10$
14.	$x=0$, $y=0$, $x+y=1$	$2x^2+y^2$
15.	$x=0$, $y^2=1-x$	$2-x-y$
16.	$y=\sqrt{x}$, $y=x$	$2-x-y$
17.	$y=x^2-1$, $y=1$	$3x^2+2y^2+1$
18.	$x=1$, $y=x$, $y=0$,	x^2+2y^2+10
19.	$y=0$, $y=2x$, $x+y=6$,	x^2
20.	$x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^2+y^2=4$	$4-x^2$
21.	$y=x^2$, $y=2$	$2-y$
22.	$x=0$, $y=0$, $x+y=1$	x^2+y^2
23.	$y=x^2+1$, $x-y=3$	$4x+5y+2$
24.	$y=x^2-1$, $x+y=1$	$2x+5y+8$
25.	$x=0$, $y=0$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$	x
26.	$x=2$, $y=x$, $y=3x$	$2x^2+y^2$
27.	$y=x$, $y=x^2$	$2x+3y$
28.	$x=0$, $x+2y+2=0$, $x+y=1$	x^2
29.	$x=0$, $y=0$, $x+2y=1$	$2-(x^2+y^2)$

30. $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ $x^2 + y^2$

13 Обчислити статичний момент однорідної матеріальної пластини D, обмеженої зазначеними лініями, відносно поданої вісі координат

№ п/п	D	Вісь
1.	$x^2 + y^2 - 2ay = 0;\ \ x - y \le 0;$	Ox
2.	$x^2 + y^2 - 2ax = 0;\ \ x + y \le 0;$	Oy
3.	$x^2 + y^2 + 2ay \le 0;\ \ x - y \ge 0;$	Ox
4.	$x^2 + y^2 + 2ax = 0;\ \ x + y \ge 0;$	Ox
5.	$x^2 + y^2 + 2ax \ge 0;\ \ x^2 + y^2 + 2ay \le 0;\ \ x \le 0;$	Ox
6.	$x^2 + y^2 - 2ay \ge 0;\ \ x^2 + y^2 + 2ax \le 0;\ \ y \ge 0;$	Oy
7.	$x^2 + y^2 - 2ay \le 0;\ \ x^2 + y^2 - 2ax \ge 0;\ \ x \ge 0;$	Ox
8.	$x^2 + y^2 - 2ax \le 0;\ \ x^2 + y^2 + 2ay \ge 0;\ \ y \le 0;$	Oy
9.	$x^2 + y^2 - 2ax \ge 0;\ \ x^2 + y^2 + 2ay < 0;\ \ x \ge 0;$	Ox
10.	$x^2 + y^2 + 2ax \le 0;\ \ x^2 + y^2 + 2ay \ge 0;\ \ y \le 0;$	Oy
11.	$x^2 + y^2 - 2ay \le 0;\ \ x^2 + y^2 + 2ax \ge 0;\ \ x \le 0;$	Ox
12.	$x^2 + y^2 - 2ay \ge 0;\ \ x^2 + y^2 - 2ax \le 0;\ \ y \ge 0;$	Oy
13.	$x^2 + y^2 + 2ay = 0;\ \ x^2 + y^2 + ay = 0;\ \ x \le 0;$	Ox
14.	$x^2 + y^2 - 2ax = 0;\ \ x^2 + y^2 - ax = 0;\ \ y \ge 0;$	Oy
15.	$x^2 + y^2 + 2ay = 0;\ \ x^2 + y^2 + ay = 0;\ \ x \ge 0;$	Ox
16.	$x^2 + y^2 - 2ay = 0;\ \ x^2 + y^2 - ay = 0;\ \ x \ge 0;$	Ox
17.	$x^2 + y^2 - 2ay = 0;\ \ x^2 + y^2 - ay = 0;\ \ x \le 0;$	Ox
18.	$x^2 + y^2 + 2ax = 0;\ \ x^2 + y^2 + ax = 0;\ y \ge 0;$	Oy
19.	$x^2 + y^2 - 2ax = 0;\ \ x^2 + y^2 - ax = 0;\ y \le 0;$	Ox
20.	$x^2 + y^2 + 2ax = 0;\ \ x^2 + y^2 + ax = 0;\ \ y \le 0;$	Oy
21.	$x^2 + y^2 + 2ay = 0;\ \ x + y \le 0;\ \ x \ge 0;$	Ox

22.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ y\text{-}x\ge 0;\ \ x\ge 0;$	Ox
23.	$x^2+y^2+2ax=0;\ \ y\text{-}x\ge 0;\ \ y\le 0;$	Oy
24.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ x+y\ge 0;\ \ x\le 0;$	Ox
25.	$x^2+y^2+2ax=0;\ \ x+y\le 0;\ \ y\ge 0;$	Oy
26.	$x^2+y^2-2ax=0;\ \ y\text{-}x\le 0;\ \ y\ge 0;$	Ox
27.	$x^2+y^2-2ax=0;\ \ y\text{-}x\le 0;\ \ x+y\ge 0;$	Oy
28.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ y\text{-}x\ge 0;\ \ x+y\ge 0;$	Ox
29.	$x^2+y^2+2ax=0;\ \ x+y\le 0;\ \ y\text{-}x\ge 0;$	Oy
30.	$x^2+y^2+2ay=0;\ y\text{-}x\le 0;\ \ x+y\le 0;$	Ox

14 Обчислити координати центра мас однорідного тіла V, обмеженого зазначеними поверхнями

№ п/п	V	№ п/п	V
1.	$x=6(y^2+z^2);\ \ y^2+z^2=3;\ \ x=0$	16.	$x=7(y^2+z^2);\ \ x=28$
2.	$y=3\sqrt{x^2+z^2};\ \ x^2+z^2=36;\ \ y=0$	17.	$z=2\sqrt{x^2+y^2};\ \ z=8$
3.	$z=5(x^2+y^2);\ \ x^2+y^2=2;\ \ z=0$	18.	$z=8(y^2+x^2);\ \ z=32$
4.	$x=6\sqrt{y^2+z^2};\ \ y^2+z^2=9;\ \ x=0$	19.	$y=3\sqrt{x^2+z^2};\ \ y=9$
5.	$9y=x^2+z^2;\ \ x^2+z^2=4;\ \ y=0$	20.	$x^2+z^2=6y;\ \ y=8$
6.	$3z=\sqrt{x^2+y^2};\ \ x^2+y^2=4;\ \ z=0$	21.	$8x=\sqrt{y^2+z^2};\ \ x=0{,}5$
7.	$2x=y^2+z^2;\ \ y^2+z^2=4;\ \ x=0$	22.	$y^2+z^2=8x;\ \ x=2$
8.	$4y=\sqrt{x^2+z^2};\ \ x^2+z^2=16;\ \ y=0$	23.	$z=9\sqrt{x^2+y^2};\ \ z=36$
9.	$z=3(x^2+y^2);\ \ x^2+y^2=9;\ \ z=0$	24.	$x^2+z^2=4y;\ \ y=9$
10.	$x=2\sqrt{y^2+z^2}\ \ y^2+z^2=4;\ \ x=0$	25.	$x=5\sqrt{y^2+z^2};\ \ x=20$
11.	$y=x^2+z^2;\ \ y^2+z^2=10;\ \ y=0$	26.	$y^2+z^2=3x;\ \ x=9$
12.	$y=3\sqrt{x^2+z^2};\ \ y^2+z^2=16;\ \ y=0$	27.	$y=\sqrt{x^2+z^2};\ \ y=4$

13. $z = x^2 + y^2;\ x^2 + y^2 = 4;\ z = 0$

14. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2};\ x^2 + y^2 = 9;\ z = 0$

15. $x = y^2 + z^2;\ y^2 + z^2 = 9;\ x = 0$

28. $z = \sqrt{x^2 + y^2};\ z = 4$

29. $x^2 + y^2 = 2z;\ z = 3$

30. $x = y = z = 0;\ x + y + z = 3$

15 Обчислити момент інерції однорідного тіла V відносно зазначеної вісі координат, обмеженого поданими поверхнями. Щільність тіла δ дорівнює 1

№ п/п	V	Вісь
1.	$y^2 = x^2 + z^2;\ y = 4;$	Oy
2.	$x = y^2 + z^2;\ x = 2;$	Ox
3.	$y^2 = x^2 + z^2;\ y = 2;$	Oy
4.	$x = y^2 + z^2;\ x = 9;$	Ox
5.	$x^2 = y^2 + z^2;\ x = 2;$	Ox
6.	$y = x^2 + z^2;\ y = 2;$	Oy
7.	$x^2 = y^2 + z^2;\ x = 3;$	Ox
8.	$x = y^2 + z^2;\ x = 3;$	Ox
9.	$y = 2\sqrt{x^2 + y^2};\ y = 2;$	Oy
10.	$y = x^2 + z^2;\ y = 3;$	Oy
11.	$z = x^2 + z^2;\ z = 3;$	Ox
12.	$z = 3 - x^2 - y^2;\ z = 0;$	Oz
13.	$x = y^2 + z^2;\ y^2 + z^2 = 1;\ x = 0;$	Ox
14.	$z^2 = x^2 + y^2;\ z = 3;$	Oz
15.	$x^2 = y^2 + z^2;$ $y^2 + z^2 = 1;\ x = 0;$	Oz
16.	$y^2 = x^2 + z^2;$ $x^2 + z^2 = 4;\ y = 0;$	Oy
17.	$2y = x^2 + z^2;\ y = 2;$	Oy
18.	$x^2 = y^2 + z^2;\ x = 2;$	Ox
19.	$2z = x^2 + z^2;\ z = 2;$	Oz
20.	$z = 2(x^2 + y^2);\ z = 2;$	Ox
21.	$2z = x^2 + y^2;$ $x^2 + y^2 = 4;\ z = 0;$	Oz
22.	$x^2 = y^2 + z^2;$ $y^2 + z^2 = 4;\ x = 0;$	Oz
23.	$x = 1 - y^2 - z^2;\ x = 0;$	Ox
24.	$y = 4 - x^2 - z^2;\ y = 0;$	Oy

25. $x = 3(y^2 + z^2);\ x = 3;$ Ox

26. $z = 9 - x^2 - y^2;\ z = 0;$ Oz

27. $z = 4\sqrt{x^2 + y^2};\ z = 4;$ Oz

28. $z = 3(x^2 + y^2);\ z = 3;$ Oz

29. $x = 2\sqrt{y^2 + z^2};\ x = 2;$ Ox

30. $y = 3(x^2 + z^2);\ y = 3;$ Oy

4.3. Криволінійні інтеграли

$\boxed{16}$ Обчислити криволінійний інтеграл по дузі

1. $\int\limits_L \sqrt{2 - z^2}\left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dl$, де L - дуга кривої: $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0 \le t \le 2\pi$

2. $\oint\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dl$, де L - коло $x^2+y^2=4$

3. $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L_{OB} - відрізок прямої; $O(0,0)$; $B(2,2)$

4. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(-1,0,)$, $B(0,1,)$

5. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x - y)}$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(0,4)$, $B(4,0)$

6. $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де L - дуга кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$

7. $\int\limits_{L_{AB}} ydl$, де L_{AB} - дуга астроїди $x=\cos^3 t$; $y=\sin^3 t$; $A(1,0)$; $B(0,1)$

8. $\int\limits_{L_{OB}} y dl$, де L_{OB} - дуга параболи $y^2 = \frac{2}{3}x$; $O(0,0)$; $B\left(\frac{35}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$

9. $\oint\limits_{L} xy dl$, де L - контур прямокутника з вершинами: $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$

10. $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl$, де L - дуга кривої: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z = \sqrt{3}\, t$; $0 \le t \le 2\pi$

11. $\int\limits_{L} arctg \frac{y}{x} dl$, де L - дуга кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$

12. $\int\limits_{L} \sqrt{2y}\, dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$

13. $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L_{OA} - відрізок прямої; $O(0,0)$ $A(1,2)$

14. $\int\limits_{L} \frac{\left(y^2 - x^2\right)xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dl$, де L - дуга кривої $\rho = 9\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$

15. $\oint\limits_{L_{ABO}} (x + y) dl$, де L_{ABO} - контур трикутника з вершинами: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$

16. $\int\limits_{L} \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$; $0 \le t \le 2\pi$

17. $\oint\limits_{L_{OAB}} (x+y)dl$, де L_{OAB} - контур трикутника з вершинами: $O(0,0)$ $A(-1,0)$, $B(0,1)$

18. $\int\limits_{L} (x+y)dl$, де L - контур лемніскати Бернулі $\rho^2=\cos 2\varphi$, $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

19. $\oint\limits_{L} \sqrt{x^2+y^2}dl$, де L - коло $x^2+y^2=2y$

20. $\oint\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами: $O(0,0)$ $A(5,0)$, $B(5,3)$, $C(0,3)$

21. $\oint\limits_{L} \left(x^2+y^2\right)dl$, де L - коло $x^2+y^2=4x$

22. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}\right)dl$, де L_{AB} - дуга астроїди: $x=\cos^3 t$; $y=\sin^3 t$; $A(1,0)$; $B(0,1)$

23. $\oint\limits_{L} xydl$, де L_{OABC} - контур квадрата, рівняння сторін якого: $x=\pm 1$, $y=\pm 1$

24. $\int\limits_{L} y^2dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $0 \le t \le 2\pi$

25. $\oint\limits_{L_{ABCD}} xydl$, де L_{ABCD} - контур прямокутника з вершинами: $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$

26. $\oint\limits_L ydl$, де L - дуга параболи $y^2=2x$, яка відсічена параболою $x^2=2y$

27. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(4,0)$, $B(6,1)$

28. $\oint\limits_L (x-y)dl$, де L - коло $x^2+y^2=2x$

29. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L - перша чверть кола $\rho=2$

30. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де L_{AB} - відрізок прямої $A(1,1,1)$,$B(2,2,2)$

$\boxed{17}$ Обчислити криволінійний інтеграл по дузі

1. $\oint\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}dl$, де L - коло: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$

2. $\int\limits_L xyzdl$, де L - чверть кола: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=0{,}25R^2$, яка лежить в першому октанті

3. $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl$, де L - частина дуги спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, яка розташована всередені кола радіуса R з центром в полюсі

4. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L - дуга кривої: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0 \le t \le 2\pi$

5. $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L - перший виток конічної гвинтової лінії: $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0 \le t \le 2\pi$

6. $\int\limits_L (x+z)dl$, де L - дуга кривої: $x=t$, $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)t^2, z=t^3$, $0 \le t \le 1$

7. $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}dl$, де L - крива: $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right), x \ge 0$

8. $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - перший виток лемніскати: $\rho^2=a^2 \cos 2\varphi$

9 $\int\limits_L xydl$, де L - перша чверть еліпса: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

10. $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - чверть кола: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, яка лежить в першому октанті

11 $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-z}$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(0,0,-2)$; $B(4,0,0)$

12. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$

13. $\oint\limits_L (x-y)dl$, де L - коло $x^2+y^2-ax=0$

14. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$; $0 \le t \le 2\pi$

15. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$; $0 \le t \le 2\pi$

16. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L - розгортка кола: $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

17. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L_{AB} - відрізок прямої $A(0,-2)$, $B(4,0)$

18. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, $z=t$; $0 \le t \le 2\pi$

19. $\oint\limits_{L_{OABC}} yz\,dl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами: $O(0,0,0)$, $A(0,4,0)$, $B(0,4,2)$, $C(0,0,2)$

20. $\int\limits_L x^2 dl$, де L - дуга верхньої половини кола $x^2+y^2=a^2$

21. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$; $0 \le t \le 2\pi$

22. $\oint\limits_L y\,dl$, де L - дуга параболи $y^2=6x$, яка відсічена параболою $x^2=6y$

23. $\int\limits_{L_{AB}} x\,dl$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2$; $A(2,4)$, $B(1,1)$

24. $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - перший виток лемніскати $\rho^2=9\cos 2\varphi$

25. $\oint\limits_L \left(z^2+y^2\right)dl$, де L - коло $z^2+y^2=4$

26. $\int\limits_L y^2 dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$

27. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де L - розгортка кола: $x=6(\cos t+t\sin t)$,
$y=6(\sin t-t\cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$

28. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=9\cos t$,
$y=9\sin t$, $z=9t$; $0 \le t \le 2\pi$

29. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)^2 dl$, де L - коло: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$; $0 \le t \le 2\pi$

30. $\oint\limits_L y dl$, де L - дуга параболи $y^2=12x$, яка відсічена параболою $x^2=12y$

$\boxed{18}$ Обчислити криволінійний інтеграл по координатах

1. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2$;
$A(-1,1)$, $B(1,1)$

2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} - дуга астроїди: $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$;
$A(2,0)$, $B(0,2)$

3. $\int\limits_{L_{OA}} \left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$, де L_{OA} - дуга кубічної параболи $y=x^3$;
$O(0,0)$, $A(1,1)$

4. $\oint\limits_{L} (x+2y)dx+(x-y)dy$, де L - коло: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$
(додатний напрямок обходу контура)

5 $\oint\limits_{L} \left(x^2y-x\right)dx+\left(y^2x-2y\right)dy$, де L - дуга еліпса: $x=3\cos t$, $y=2\sin t$
(додатний напрямок обходу контура)

6. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx+x^2ydy$, де L_{AB} - дуга еліпса: $x=\cos t$, $y=\alpha\sin t$;
$A(1,0)$, $B(0,2)$

7. $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx-x^2dy$, де L_{OBA} - ламана: $O(0,0)$, $B(2,0)$, $A(2,1)$

8. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(1,1)$,$B(3,4)$

9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos ydx-\sin xdy$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(2\pi,-2\pi)$, $B(-2\pi,2\pi)$

10. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(1,2)$, $B(3,6)$

11. $\int\limits_{L_{AB}} xydx+(y-x)dy$, де L_{AB} - дуга кубічної параболи $y=x^3$; $A(0,0)$,
$B(1,1)$

12. $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, де L_{ABC} - ламана; $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$

13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx + yz^2dy - x^2zdz$, де L_{OB} - відрізок прямої; *O(0,0,0), B(-2,4,5)*

14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx + xdy$, де L_{OA} - дуга кола: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$; *O(R,0), A(0,R)*

15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx + (y-x)dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y^2=x$; *O(0,0), A(1,1)*

16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x-y+1)dz$, де L_{AB} - відрізок прямої; *A(1,1,1), B(2,3,4)*

17. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} - дуга параболи $y^2=4-4x$; *A(1,0), B(0,2)*

18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx + (y-x)dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y=x^2$; *O(0,0), B(1,1)*

19. $\int\limits_{L_{OB}} (xy-y^2)dx + xdy$, де L_{OB} - дуга параболи $y=x^2$; *O(0,0), B(1,1)*

20. $\int\limits_{L_{AB}} xdy - ydx$, де L_{AB} - дуга астроїди: $x=2\cos^3 t$; $y=2\sin^3 t$; *A(2,0), B(0,2)*

21. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y^2=4x$; *A(0,0), B(1,2)*

22. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2 ydy$, де L_{AB} - відрізок прямої; *A(1,0),B(0,2)*

23. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2 dy + z^2 dz$, де L_{AB} - дуга одного витка гвинтової лінії: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$; *A(1,0,0), B(1,0,4π)*

24. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx + xdy$, де L_{AB} - дуга лінії $y=\ln x$; *A(1,0), B(e ,1)*

25. $\oint\limits_{L} ydx + xdy$, де L - дуга еліпса: $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ (додатний напрямок обходу контура)

26. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx + x^2 dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$; *O(0,0), A(2,1)*

27. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy$, де L_{AB} - ламана лінія $y=|x|$; *A(-1,1), C (0,0), B(2,2)*

28. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2 dy + zdz$, де L_{OA} - відрізок прямої; *O(0,0,0), A(2,1,-1)*

29. $\oint\limits_{L} xdy - ydx$, де L - контур трикутника з вершинами: *A(-1,0), B(1,0), C(0,1)* (додатний напрямок обходу контура)

30. $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2+y\right)dx + \left(x+y^2\right)dy$, де L_{ABC} - ламана; *A(2,0), B(5,3), C(5,0).*

$\boxed{19}$ Обчислити криволінійний інтеграл по координатах

1. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, де L_{OA} - дуга параболи $y=2x^2$; $O(0,0)$, $A(1,2)$

2. $\int\limits_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, де L_{OBA} - ламана; $O(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $A(0,2,10)$

3. $\int\limits_{L} \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy$, де L - дуга циклоїди: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $\pi/6 \le t \le \pi/3$

4. $\int\limits_{L} yzdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz$, де L - дуга кривої: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=at/(2\pi)$, від точки перетину її з площиною $z=0$ до точки перетину її з площиною $z=a$

5. $\int\limits_{L_{OA}} 2xzdy - y^2dz$, де L_{OA} - дуга параболи $z = \frac{x^2}{4}$; $O(0,0,0)$, $A(2,0,1)$

6. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x - \frac{1}{y}\right)dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2$; $A(1,1)$,$B(2,4)$

7. $\int\limits_{L_{AB}} \cos zdx - \sin xdz$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(2,0,-2)$, $B(-2,0,2)$

8. $\int\limits_{L} ydx - xdy$, де L - чверть дуги кола: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, яка лежить в першому квадранті (додатний напрямок обходу контура)

9. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - x\right)dx + \frac{x^2}{y}dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$; $O(0,0)$, $A(1,2)$

10. $\oint\limits_L ydx - xdy$, де L - дуга еліпса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, (додатний напрямок обходу контура)

11. $\int\limits_{L_{OA}} xdy$, де L - дуга синусоїди $y=\sin x$; $O(0,0)$, $A(\pi,0)$

12. $\oint\limits_L xdy$, де L - контур трикутника, який утворюється прямими: $y=x$, $x=2$, $y=0$ (додатний напрямок обходу контура)

13. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, де L - верхня половина еліпса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (від′ємний напрямок обходу контура)

14. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, де L_{OB} - дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$; $O(0,0)$, $B(1,2)$

15. $\int\limits_L xdx + xydy$, де L - дуга верхньої половини кола $x^2+y^2=2x$ (додатний напрямок обходу контура)

16. $\int\limits_L \left(x - y\right)dx + dy$, де L - дуга верхньої половини кола $x^2+y^2=R^2$ (додатний напрямок обходу контура)

17. $\oint\limits_L \left(x^2 - y\right)dx$, де L - контур прямокутника, який утворився прямими: $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ (додатний напрямок обходу контура)

18. $\int\limits_{L_{OB}} 4x\sin^2 y dx + y\cos 2x dy$, де L_{OB} - відрізок прямої; $O(0,0)$, $B(3,6)$

19. $\oint\limits_{L} y dx - x dy$, де L - дуга еліпса: $x=6\cos t$, $y=4\sin t$
(додатний напрямок обходу контура)

20. $\int\limits_{L_{OA}} 2xy dx + x^2 dy$, де L_{OA} - дуга параболи $x=2y^2$; $O(0,0)$, $A(1,2)$

21. $\oint\limits_{L} \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy$, де L - контур трикутника з вершинами: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ (додатний напрямок обходу контура)

22. $\int\limits_{L_{ABO}} \left(xy-x\right)dx + \frac{x^2}{2}dy$, де L_{ABO} - ламана: $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(0,5;3)$ (додатний напрямок обходу контура)

23. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy-y^2\right)dx + x dy$, де L_{OA} - відрізок прямої; $O(0,0)$, $A(1,2)$

24. $\int\limits_{L_{OA}} x dy - y dx$, де L_{OA}-дуга кубічної параболи $y=x^3$; $O(0,0)$, $A(2,8)$

25. $\int\limits_{L_{AB}} 2y\sin 2x dx - \cos 2x dy$, де L_{AB} - будь-яка крива від точки $A(\pi/4,2)$ до точки $B(\pi/6,1)$

26. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy-x\right)dx + \frac{x^2}{2}dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y=4x^2$; $O(0,0)$, $B(1,4)$

27. $\int\limits_{L_{AB}} xy\,e^{x}\,dx + (x-1)e^{x}dy$, де L_{AB} - будь-яка крива від точки $A(0,2)$ до точки $B(1,2)$

28. $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2$; $A(-1,1)$, $B(1,1)$

29. $\int\limits_{L_{AB}} xdy$, де L_{AB} - дуга кола $x^2+y^2=a^2$; $x \geq 0$, $A(0,-a)$, $B(0,a)$

30. $\int\limits_{L} y^2dx + x^2dy$, де L - дуга еліпса: $x=5\cos t$, $y=2\sin t$, $y \geq 0$ (додатний напрямок обходу контура)

$\boxed{20}$ Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x,y)$, і знайти її

1. $\left(2x-3y^2+1\right)dx + \left(2-6xy\right)dy$
2. $\left(2xy^2\left(1+x^2y^2\right)^{-1}-3\right)dx + \left(2x^2y\left(1+x^2y^2\right)^{-1}-5\right)dy$
3. $-\left(0{,}5\cos 2y + y\sin 2x\right)dx + \left(x\sin 2y + \cos^2 x + 1\right)dy$
4. $\left(y^2e^{xy^2}+3\right)dx + \left(2xye^{xy^2}-1\right)dy$
5. $\left(\left(x+y\right)^{-1}+\cos x\cos y - 3x^2\right)dx + \left(\left(x+y\right)^{-1}-\sin x\sin y + 4y\right)dy$
6. $\left(yx^{-1}+\ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + xy^{-1}+1\right)dy$
7. $\left(e^{x+y}-\cos x\right)dx + \left(e^{x+y}+\sin y\right)dy$
8. $\left(y:\sqrt{1-x^2y^2}+2x\right)dx + \left(x:\sqrt{1-x^2y^2}+6y\right)dy$
9. $\left(e^{xy}+xye^{xy}+2\right)dx + \left(x^2e^{xy}+1\right)dy$
10. $\left(ye^{xy}+y^2\right)dx + \left(xe^{xy}+2xy\right)dy$
11. $\left(y\cos xy + 2x - 3y\right)dx + \left(x\cos xy - 3x + 4y\right)dy$

12. $(y\sin(x+y)+xy\cos(x+y-9x^2)dx+(x\sin(x+y)+$
$+xy\cos(x+y)+2y)dy$

13. $(5y+\cos x+6xy^2)dx+(5x+6x^2y)dy$

14. $(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy$

15. $(1+\cos xy)ydx+(1+\cos xy)xdy$

16. $(y-\sin x)dx+(x-2y\cos y^2)dy$

17. $(\sin 2x-x^{-2}y^{-1})dx-x^{-1}y^{-2}dy$

18. $(x+y)x^{-1}y^{-1}dx+(y-x)y^{-2}dy$

19. $(20x^3-21x^3y+2y)dx+(3+2x-7x^3)dy$

20. $(ye^{xy}-2\sin x)dx+(xe^{xy}+\cos y)dy$

21. $y(e^{xy}+5)dx+x(e^{xy}+5)dy$

22. $\left(x-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}-y\right)dy$

23. $e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy$

24. $(x\ln y+y)x^{-1}dx+(y\ln x+x)y^{-1}dy$

25. $(3x^2-2xy+y)dx+(x-x^2-3y^2-4y)dy$

26. $\left(2xe^{x^2-y^2}-\sin x\right)dx+\left(\sin y-2ye^{x^2-y^2}\right)dy$

27. $\left(y:\sqrt{1-x^2y^2}+x^2\right)dx+\left(x:\sqrt{1-x^2y^2}+y\right)dy$

28. $(1-y)x^{-2}y^{-1}dx+(1-2x)x^{-1}y^{-2}dy$

29. $((y-1)^{-1}-y(x-1)^{-2}-2)dx+((x-1)^{-1}-x(y-1)^{-2}+2y)dy$

30. $(3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy$

$\boxed{21}$ Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

1. $x^{-1}dy-y\cdot x^{-2}\cdot dx=0$
2. $(x:(x^2+y^2))dy-(y:(x^2+y^2))dx=0$
3. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$
4. $xdx+ydy+(ydx-xdy):(x^2+y^2)=0$

5. $(x:\sqrt{x^2-y^2}-1)dx-y:\sqrt{x^2-y^2}dy=0$

6. $2x(1-e^y)\cdot(1+x^2)^{-2}dx+e^y(1+x^2)^{-1}dy=0$

7. $2x\cdot y^{-3}dx+(y^2-3x^2)\cdot y^{-4}dy=0$

8. $(1-e^{x/y})dx+e^{x/y}(1-x:y)dy=0$

9. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$

10. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

11. $(x:\sqrt{x^2+y^2}+x^{-1}+y^{-1})dx+(y:\sqrt{x^2+y^2}+y^{-1}-y^{-2})dy=0$

12. $(3x^2tgy-2y^3\cdot x^{-3})dx+(x^3\sec^2 y+4y^3+3y^2\cdot x^{-2})dy=0$

13. $(2x+(x^2+y^2):(x^2y))dx=(x^2+y^2)x^{-1}y^{-2}dy$

14. $(\sin 2x\cdot y^{-1}+x)dx+(y-\sin^2 x:y^{-2})dy=0$

15. $3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0$

16. $(xdx+ydy):\sqrt{x^2+y^2}+(xdy-ydx):x^2=0$

17. $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0$

18. $y(x^2+y^2+a^2)dy+x(x^2-y^2-a^2)dx=0$

19. $(\sin y+y\sin x+x^{-1})dx+(x\cos y-\cos x+y^{-1})dy=0$

20. $(y+\sin x\cdot\cos^2 yx):\cos^2 yxdx+(x\sec^2 xy-\sin y)dy=0$

21. $(3x^2-y\cos xy+y)dx+(x-x\cos xy)dy=0$

22. $(12x^3-y^{-1}\cdot e^{x/y})dx+(16y+xy^{-2}\cdot e^{x/y})dy=0$

23. $(y:(2\sqrt{xy})+2xy\sin x^2y+4)dx+(x:(2\sqrt{xy})+x^2\sin x^2y)dy=0$

24. $y\cdot 3^{xy}\ln 3dx+(x\cdot 3^{xy}\ln 3-3)dy=0$

25. $((x-y)^{-1}+3x^2y^7)dx+(7x^3y^6-(x-y)^{-1})dy=0$

26. $(2y\cdot x^{-3}+y\cos xy)dx+(x^{-2}+x\cos xy)dy=0$

27. $(y:\sqrt{1-x^2y^2}-2x)dx+x:\sqrt{1-x^2y^2}dy=0$

28. $(5x^4y^4+28x^6)dx+(4x^5y^3-3y^2)dy=0$

29. $(2xe^{x^2+y^2}+2)dx+(2ye^{x^2+y^2}-3)dy=0$

30. $(3y^3\cos 3x+7)dx+(3y^2\sin 3x-2y)dy=0$

22 Геометричне та фізичне застосування криволінійних інтегралів

1. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y=(e^x+e^{-x}):2,\ 0\le x\le 1$.
2. Обчислити моменти інерції відносно вісей координат відрізка однорідної прямої $2x+y=1$, який лежить між ними.
3. Знайти координати центра мас чверті однорідного кола $x^2+y^2=a^2$, яка знаходиться в першому квадранті
4. Обчислити масу дуги кривої $y=ln\ x$, від точки $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}ln3\right)$ до точки $B\left(\sqrt{8};\frac{1}{2}ln8\right)$, якщо щільність дуги в кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.
5. Обчислити момент інерції відносно вісі Оу дуги полукубічної параболи $y^2=x^3$ від точки $O(0,0)$ до точки $A\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$.
6. Обчислити момент інерції відносно початку координат контура квадрата, який має сторони $x=\pm a;\ y=\pm a$. Щільність квадрата – стала.
7. Обчислити довжину дуги кривої $x=2-\frac{t^4}{4},\ y=\frac{t^6}{6}$, яка обмежена точками перетину її з вісями координат.
8. Обчислити координати центра мас однорідного полукола $x^2+y^2=4$, симетричного відносно вісі Ox.
9. Обчислити координати центра мас однорідної дуги одної арки циклоїди $x=t-sin\ t,\ y=1-cos\ t$.
10. Обчислити момент інерції відносно початку координат відрізка прямої, сталої щільності, який лежить між точкою $A(2,0)$ і точкою $B(0,1)$.
11. Обчислити координати центра мас однорідного контура сферичного трикутника $x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.
12. Обчислити статичні моменти відносно координатних вісей дуги астроїди $x=2cos^3t,\ y=2sin^3t$, яка розташована в першому квадранті.
13. Обчислити масу відрізка прямої $y=2-x$, який лежить між вісями координат, якщо лінійна щільність в будь-якій його точці пропорціональна квадрату її абсциси, а в точці $(2,0)$ дорівнює 4.
14. Найти статичний момент відносно вісі Oy однорідної дуги першого витка лемніскати Бернулі $\rho=a\sqrt{cos\,2\varphi}$.
15. Знайти роботу сили $\bar{F}=x\bar{i}+(x+y)\bar{j}$ при переміщенні точечної

маси m по дузі еліпса $x^2/16+y^2/9=1$.

16. Обчислити момент інерції відносно вісі Oz однорідної дуги першого витка гвинтової лінії $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$.

17. Обчислити масу кривої $\rho = 3\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, якщо щільність в будь-якій її точці пропорціональна відстані до полюса, а при $\varphi=\pi/4$ дорівнює 3.

18. Обчислити координати центра мас однорідної дуги першого витка гвинтової лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$.

19. Обчислити моменти інерції відносно координатних вісей дуги чверті кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, розташованої в першому квадранті.

20. Обчислити координати центра мас дуги першого витка гвинтової лінії $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$, якщо щільність в будь-якій її точці пропорціональна аплікаті точки і в точці $t=\pi$ дорівнює 1.

21. Обчислити масу дуги чверті еліпса $x^2+y^2/4=1$, розташованого в першому квадранті, якщо лінійна щільність в будь-якій її точці дорівнює добутку координат цієї точки.

22. Обчислити роботу сили $\bar{F}=(x-y)\bar{i}+x\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж контура квадрата, утвореного прямими $x=\pm a$, $y=\pm a$.

23. Обчислити статичний момент відносно вісі Ox однорідної дуги ланцюгової лінії $y=(e^x+e^{-x}):2$, $0\le x\le 0,5$.

24. Обчислити роботу сили $\bar{F}=xy\bar{i}+(x+y)\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $y=x$ від точки $(0,0)$ доточки $(1,1)$.

25. Обчислити статичний момент відносно вісі Ox однорідної дуги кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

26. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$.

27. Обчислити роботу сили $\bar{F}=(x+y)\bar{i}-x\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки від початку координат в точку $(1,1)$ вздовж параболи $y=x^2$.

28. Обчислити роботу сили $\bar{F}=y\bar{i}+(x+y)\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ у додатному напрямку.

29. Обчислити момент інерції відносно осей координат однорідного відрізка прямої $y=2x$ від точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$.

30. Обчислити роботу сили $\bar{F}=(x-y)\bar{i}+2y\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки від початку координат в точку *(1,-3)* вздовж параболи $y=-3x^2$.

4.4. Поверхневі інтеграли

23 Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, якщо *S* – частина площини *(p)*, яка відсічена координатними площинами

1. $\iint\limits_s (2x+3y+2z)ds,$ $\quad (p):\ x+3y+z=3$
2. $\iint\limits_s (2+y-7x+9z)ds,$ $\quad (p):\ 2x-y-2z=-2$
3. $\iint\limits_s (6x+y+4z)ds,$ $\quad (p):\ 3x+3y+z=3$
4. $\iint\limits_s (x+2y+3z)ds,$ $\quad (p):\ x+y+z=2$
5. $\iint\limits_s (3x-2y+6z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+y+2z=2$
6. $\iint\limits_s (5x-8y-z)ds,$ $\quad (p):\ 2x-3y+z=6$
7. $\iint\limits_s (2+y-7x+9z)ds,$ $\quad (p):\ x+3y+z=3$
8. $\iint\limits_s (3y-x-z)ds,$ $\quad (p):\ x-y+z=2$
9. $\iint\limits_s (3y-2x-2z)ds,$ $\quad (p):\ 2x-y-2z=-2$
10. $\iint\limits_s (2x-3y+z)ds,$ $\quad (p):\ x+2y+z=2$
11. $\iint\limits_s (5x+y-z)ds,$ $\quad (p):\ x+2y+2z=2$
12. $\iint\limits_s (3x+2y+2z)ds,$ $\quad (p):\ 3x+2y+2z=6$
13. $\iint\limits_s (2x+3y-z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+y+z=2$

14. $\iint\limits_s (9x+2y+z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+y+z=4$

15. $\iint\limits_s (3x+8y+8z)ds,$ $\quad (p):\ x+4y+2z=8$

16. $\iint\limits_s (4y-x+4z)ds,$ $\quad (p):\ x-2y+2z=2$

17. $\iint\limits_s (7x+y+2z)ds,$ $\quad (p):\ 3x-2y+2z=6$

18. $\iint\limits_s (2x+3y+z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+3y+z=6$

19. $\iint\limits_s (4x-y+z)ds,$ $\quad (p):\ x-y+z=2$

20. $\iint\limits_s (6x-y+8z)ds,$ $\quad (p):\ x+y+2z=2$

21. $\iint\limits_s (4x-4y-z)ds,$ $\quad (p):\ x+2y+2z=4$

22. $\iint\limits_s (2x+5y+z)ds,$ $\quad (p):\ x+y+2z=2$

23. $\iint\limits_s (4x-y+4z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+2y+z=4$

2.24. $\iint\limits_s (5x+2y+z)ds,$ $\quad (p):\ x+2y+z=2$

25. $\iint\limits_s (2x+5y+10z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+y+3z=6$

26. $\iint\limits_s (2x+15y+z)ds,$ $\quad (p):\ x+2y+2z=2$

27. $\iint\limits_s (3x+10y-z)ds,$ $\quad (p):\ x+3y+2z=6$

28. $\iint\limits_s (2x+3y+z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+2y+z=2$

29. $\iint\limits_s (5x-y+5z)ds,$ $\quad (p):\ 3x+2y+z=6$

30. $\iint\limits_s (x+3y+2z)ds,$ $\quad (p):\ 2x+y+2z=2$

$\boxed{24}$ Обчислити поверхневі інтеграли другого роду

1. $\iint\limits_s z^2 dxdy$, де S – зовнішня поверхня еліпсоїду $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

2. $\iint\limits_s (z+1)dxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

3. $\iint\limits_s zdxdy + ydxdz + xdydz$, де S – зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами: $x=0, y=0, x=1, y=1, z=0, z=1$.

4. $\iint\limits_s (y^2 + z^2)dydz$, де S – частина поверхні параболоїда $x = 9 - y^2 - z^2$, яка відсічена площиною $x=0$, (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\vec{i}$).

5. $\iint\limits_s yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, де S – верхня сторона площини $x + y + z = 4$, яка відсічена координатними площинами.

6. $\iint\limits_s x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, яка лежить в першому октанті.

7. $\iint\limits_s xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. $\iint\limits_s xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, де S – зовнішня частина площини $x + y + z = 1$, яка відсічена координатними площинами.

9. $\iint\limits_{s} yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, де S – зовнішня поверхня циліндру $x^2 + y^2 = 1$, яка відсічена площинами $z = 0, \quad z = 5$.

10. $\iint\limits_{s} y^2 zdxdy + xzdydz + x^2 ydxdz$, де S – частина поверхні параболоїду $z = x^2 + y^2$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overline{k}$).

11. $\iint\limits_{s} (x^2 + y^2)zdxdy$, де S – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

12. $\iint\limits_{s} x^2 dydz + z^2 dxdy$, де S – частина поверхні конусу $z^2 = x^2 + y^2$, що лежить між площинами $z = 0, \quad z = 1$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overline{k}$).

13. $\iint\limits_{s} (2y^2 - z)dxdy$, де S – частина поверхні параболоїду $z = x^2 + y^2$, яка відсічена площиною $z = 2$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overline{k}$).

14. $\iint\limits_{S} (x^2 + y^2 - 1)^{-1/2} dxdy$, де S – частина поверхні гіперболоїду $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, яка відсічена площинами $z = 0, \; z = \sqrt{3}$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overline{k}$).

15. $\iint\limits_{s} xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка лежить в першому октанті.

16. $\iint\limits_{s} x^2 dydz + zdxdy$, де S – частина поверхні параболоїду $z = x^2 + y^2$, яка відсічена площиною $z = 4$ (нормальний вектор $\overline{n}$

якої утворює тупий кут з ортом $\overline{k}$).

17. $\iint\limits_s x^2dydz + y^2dxdz - zdxdy$, де S – частина поверхні конусу $z^2 = x^2 + y^2$, яка відсічена площинами $z = 0,\ \ z = 3$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overline{k}$).

18. $\iint\limits_s x^2dydz - z^2dxdz + zdxdy$, де S – частина поверхні параболоїду $z = 3 - x^2 - y^2$, яка відсічена площиною $z = 0$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overline{k}$).

19. $\iint\limits_s yz\ dydz - x^2dxdz - y^2dxdy$, де S – частина поверхні параболоїду $x^2 + z^2 = y^2$, яка відсічена площинами $y = 0,\ \ y = 1$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overline{j}$).

20. $\iint\limits_s x^2dydz + 2y^2dxdz - zdxdy$, де S – частина поверхні параболоїду $z = x^2 + y^2$, яка відсічена площиною $z = 1$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overline{k}$).

21. $\iint\limits_s 2xdydz + (1+z)dxdy$, де S – внутрішня сторона циліндру $x^2 + y^2 = 4$, яка відсічена площинами $z = 0,\ \ z = 1$.

22. $\iint\limits_s 2xdydz - ydxdz + zdxdy$, де S – зовнішня сторона замкненої поверхні, утвореної параболоїдом $3z = x^2 + y^2$ і полусферою $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

23. $\iint\limits_s 4xdydz + 2ydxdz - zdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

24. $\iint\limits_s (x+z)dydz+(z+y)dxdy$, де S – зовнішня сторона циліндра $x^2+y^2=1$, яка відсічена площинами $z=0,\quad z=2$.

25. $\iint\limits_s 3xdydz-ydxdz-zdxdy$, де S – частина поверхні параболоїду $9-z=x^2+y^2$, яка відсічена площиною $z=0$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overline{k}$).

26. $\iint\limits_s (y-x)dydz+(z-y)dxdz+(x-z)dxdy$, де S – внутрішня сторона замкненої поверхні, утвореної конусом $x^2=y^2+z^2$ і площиною $x=1$.

27. $\iint\limits_s 3x^2dydz-y^2dxdz-zdxdy$, де S – внутрішня поверхня параболоїду $1-z=x^2+y^2$, яка відсічена площиною $z=0$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overline{k}$).

28. $\iint\limits_s (1+2x^2)dydz+y^2dxdz+zdxdy$, де S – частина поверхні конусу $x^2+y^2=z^2$, яка відсічена площинами $z=0,\quad z=4$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overline{k}$).

29. $\iint\limits_s x^2dydz+z^2dxdz+ydxdy$, де S – частина поверхні параболоїду $x^2+y^2=4-z$, яка відсічена площиною $z=0$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overline{k}$).

30. $\iint\limits_s (y^2+z^2)dydz-y^2dxdz+2yz^2dxdy$, де S – частина поверхні конусу $y^2=x^2+z^2$, яка відсічена площинами $y=0,\quad y=1$ (нормальний вектор $\overline{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overline{j}$).

25 Обчислити двома способами потік векторного поля $\bar{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, утвореною площиною (p) і координатними площинами:

1) використовуючи його означення;
2) за допомогою формули Остроградського – Гаусса

1. $\bar{a}(M)=3x\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$, (p): $x+3y+z=3$
2. $\bar{a}(M)=(3x-1)\bar{i}+(y-x+z)\bar{j}+4z\bar{k}$, (p): $2x-y-2z=2$
3. $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(y+z)\bar{k}$, (p): $3x+3y+z=3$
4. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+(z-x)\bar{j}+(x+2y+z)\bar{k}$, (p): $x+y+z=2$
5. $\bar{a}(M)=(y+2z)\bar{i}+(x+2z)\bar{j}+(x-2y)\bar{k}$, (p): $2x+y+2z=2$
6. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+2y\bar{j}+(x+y-z)\bar{k}$, (p): $x+2y+z=2$
7. $\bar{a}(M)=(3x-y)\bar{i}+(2y+z)\bar{j}+(2z-x)\bar{k}$, (p): $2x-3y+z=6$
8. $\bar{a}(M)=(2y+z)\bar{i}+(x-y)\bar{j}-2z\bar{k}$, (p): $x-y+z=2$
9. $\bar{a}(M)=(x+y)\bar{i}+3y\bar{j}+(y-z)\bar{k}$, (p): $2x-y-2z=-2$
10. $\bar{a}(M)=(x+y-z)\bar{i}-2y\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$, (p): $x+2y+z=2$
11. $\bar{a}(M)=(y-z)\bar{i}+(2x+y)\bar{j}+z\bar{k}$, (p): $2x+y+z=2$
12. $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2x-y+2z)\bar{k}$, (p): $x+2y+2z=2$
13. $\bar{a}(M)=(x+2z)\bar{i}+(y-3z)\bar{j}+z\bar{k}$, (p): $3x+2y+2z=6$
14. $\bar{a}(M)=4x\bar{i}+(x-y-z)\bar{j}+(3y+2z)\bar{k}$, (p): $2x+y+z=4$
15. $\bar{a}(M)=(2z-x)\bar{i}+(x+2y)\bar{j}+3z\bar{k}$, (p): $x+4y+2z=8$
16. $\bar{a}(M)=4z\bar{i}+(x-y-z)\bar{j}+(3y+z)\bar{k}$, (p): $x-2y+2z=2$
17. $\bar{a}(M)=(x+y)\bar{i}+(y+z)\bar{j}+2(z+x)\bar{k}$, (p): $3x-2y+2z=6$
18. $\bar{a}(M)=(x+y+z)\bar{i}+2z\bar{j}+(y-7z)\bar{k}$, (p): $2x+3y+z=6$
19. $\bar{a}(M)=(2x-z)\bar{i}+(y-x)\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$, (p): $x-y+z=2$
20. $\bar{a}(M)=(2y-z)\bar{i}+(x+y)\bar{j}+x\bar{k}$, (p): $x+2y+2z=4$
21. $\bar{a}(M)=(2z-x)\bar{i}+(x-y)\bar{j}+(3x+z)\bar{k}$, (p): $x+y+2z=2$

22. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+(x+3y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+y+2z=2$

23. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+z\bar{j}+(2x-y)\bar{k}$, (p): $2x+2y+z=4$

24. $\bar{a}(M)=(3x+y)\bar{i}+(x+z)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+2y+z=2$

25. $\bar{a}(M)=(y+z)\bar{i}+(2x-z)\bar{j}+(y+3z)\bar{k}$, (p): $2x+y+3z=6$

26. $\bar{a}(M)=(y+z)\bar{i}+(x+6y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+2y+2z=2$

27. $\bar{a}(M)=(2y-z)\bar{i}+(x+2y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+3y+2z=6$

28. $\bar{a}(M)=(y+z)\bar{i}+x\bar{j}+(y-2z)\bar{k}$, (p): $2x+2y+z=2$

29. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+z\bar{j}+(2x-y)\bar{k}$, (p): $3x+2y+z=6$

30. $\bar{a}(M)=z\bar{i}+(x+y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $2x+y+2z=2$

26 Обчислити двома способами циркуляцію векторного поля $\bar{a}(M)$ по контуру трикутника, утвореного в результаті перетину площини (p) : з координатними площинами, при додатньому напрямку обходу контура відносно нормального вектора $\bar{n}$ цієї площини:

1) використовуючи її означення;
2) за допомогою формули Стокса

1. $\bar{a}(M)=z\bar{i}+(x+y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $2x+y+2z=2$

2. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+z\bar{j}+(2x-y)\bar{k}$, (p): $3x+2y+z=6$

3. $\bar{a}(M)=(y+z)\bar{i}+x\bar{j}+(y-2z)\bar{k}$, (p): $2x+2y+z=2$

4. $\bar{a}(M)=(2y-z)\bar{i}+(x+2y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+3y+2z=6$

5. $\bar{a}(M)=(y+z)\bar{i}+(x+6y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+2y+2z=2$

6. $\bar{a}(M)=(y+z)\bar{i}+(2x-z)\bar{j}+(y+3z)\bar{k}$, (p): $2x+y+3z=6$

7. $\bar{a}(M)=(3x+y)\bar{i}+(x+z)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+2y+z=2$

8. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+z\bar{j}+(2x-y)\bar{k}$, (p): $2x+2y+z=4$

9. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+(x+3y)\bar{j}+y\bar{k}$, (p): $x+y+2z=2$

10. $\bar{a}(M)=(2y-z)\bar{i}+(x+y)\bar{j}+x\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+2y+2z=4$

11. $\bar{a}(M)=(2z-x)\bar{i}+(x-y)\bar{j}+(3x+z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+y+2z=2$

12. $\bar{a}(M)=(2x-z)\bar{i}+(y-x)\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x-y+z=2$

13. $\bar{a}(M)=(x+y+z)\bar{i}+2z\bar{j}+(y-7z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x+3y+z=6$

14. $\bar{a}(M)=(x+y)\bar{i}+(y+z)\bar{j}+2(z+x)\bar{k}$, $\quad (p):\quad 3x-2y+2z=6$

15. $\bar{a}(M)=4z\bar{i}+(x-y-z)\bar{j}+(3y+z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x-2y+2z=2$

16. $\bar{a}(M)=(2z-x)\bar{i}+(x+2y)\bar{j}+3z\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+4y+2z=8$

17. $\bar{a}(M)=4x\bar{i}+(x-y-z)\bar{j}+(3y+2z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x+y+z=4$

18. $\bar{a}(M)=(x+2z)\bar{i}+(y-3z)\bar{j}+z\bar{k}$, $\quad (p):\quad 3x+2y+2z=6$

19. $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2x-y+2z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+2y+2z=2$

20. $\bar{a}(M)=(y-z)\bar{i}+(2x+y)\bar{j}+z\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x+y+z=2$

21. $\bar{a}(M)=(x+y-z)\bar{i}-2y\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+2y+z=2$

22. $\bar{a}(M)=(x+y)\bar{i}+3y\bar{j}+(x+z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x-y-2z=-2$

23. $\bar{a}(M)=(2y+z)\bar{i}+(x-y)\bar{j}-2z\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x-y+z=2$

24. $\bar{a}(M)=(3x-y)\bar{i}+(2y+z)\bar{j}+(2z-x)\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x-3y+z=6$

25. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+2y\bar{j}+(x+y-z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+2y+z=2$

26. $\bar{a}(M)=(y+2z)\bar{i}+(x+2z)\bar{j}+(x-2y)\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x+y+2z=2$

27. $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}+(z-x)\bar{j}+(x+2y+z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+2y+z=2$

28. $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(y+z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad 3x+3y+z=3$

29. $\bar{a}(M)=(3x-y)\bar{i}+(y-x+z)\bar{j}+4z\bar{k}$, $\quad (p):\quad 2x-y-2z=2$

30. $\bar{a}(M)=3x\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$, $\quad (p):\quad x+3y+z=3$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Физматгиз, 1963. - 748 с.

2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Для ВТУЗОВ - М.: "Наука", 1973. - 720 с.

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: "Наука", 1985. - 384 с.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1, ч.2: Учебное пособие для втузов. - М.: «Наука», 1985. – С. 430, 560.

5. Вища математика. Основні розділи. Книга 1. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1995. – 372 с.

6. Вища математика. Спеціальні розділи. Книга 2. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1996. – 336 с.

7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: „Вид-во А.С.К.”, 2003. – 648 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

для практичних занять та самостійної роботи з вищої математики за темами: "Кратні інтеграли", "Криволінійні інтеграли" та "Поверхневі інтеграли" (для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.050701 "Електротехніка та електротехнології", 6.060101 "Будівництво")

Укладачі: **СТАНІШЕВСЬКИЙ** Степан Олександрович,
ПЕЧЕНІЖСЬКИЙ Юрій Євгенович

За авторською редакцією
Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2012, поз. 143М

Підп. до друку 25.10.2012 р. Формат 60x84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 1,9
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.