МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ

ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

(*для студентів 2 курсу денної форми навчання
за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»,
спеціальностей «Промислове та цивільне будівництво»,
«Міське будівництво та господарство»*)

Харків
ХНАМГ
2012

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт та самостійної роботи з дисципліни «Основи системного аналізу» (для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво», спеціальностей «Промислове та цивільне будівництво», «Міське будівництво та господарство») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: М. В. Федоров, О. М. Хренов. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 62 с.

Укладачі: М. В. Федоров,
О. М. Хренов

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджені з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів будівельних спеціальностей.

Рецензент: доц. каф. прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, к. т. н. І. В. Наумейко

Затверджено кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 15 від 30 травня 2011 р.

Лабораторна робота № 1
Побудова ієрархій (структуризація відносин)

Математична модель ієрархії. Поняття про ієрархії

Ієрархія – це система, що складається з об'єктів (елементів), згрупованих у незалежні підмножини (групи). Об'єкти *і-ої* групи знаходяться під впливом об'єктів *(і+1)* групи і, у той же час, впливають на об'єкти *(і-1)* групи. Ці групи, розташовані певним чином (над або під іншою групою), називаються рівнями (або кластерами). Вважається (для багатьох задач), що елементи одного рівня незалежні.

Існує кілька видів ієрархій, два з яких представлені на рис 1.1:

- домінантні ієрархії (а, б);
- холархії (в).

Домінантні ієрархії бувають повними й неповними. Повними називаються такі, у яких кожний елемент нижнього *(і+1)* рівня зв'язаний з кожним елементом *і-го* рівня (рис. 1.1, а), а неповними називаються такі ієрархії, для яких ця умова не виконується, тобто деякі елементи *(і+1)* рівня зв'язані не з всіма елементами *і-го* рівня.

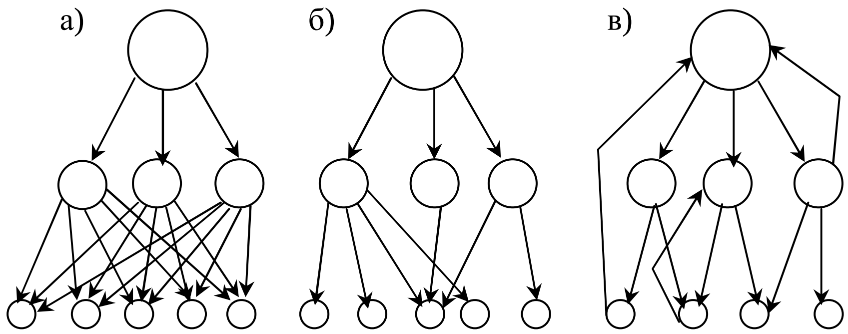


Рис. 1.1 – Види ієрархій: а) домінантна повна;
б) домінантна неповна; в) холархія.

Холархіями називають домінантні ієрархії зі зворотним зв'язком (рис. 1.1, в). Холархії також бувають повними й неповними.

Існує ще один вид ієрархій, який називають іноді «китайською шкатулкою». Він представляє таке співвідношення між класами об'єктів, коли один клас об'єктів є підмножиною більш могутньої множини, що, у свою чергу, є підмножиною наступних ще більш могутніх множин і т.д. Таку ієрархічну структуру має навколишній нас світ з усіма його складними об'єктами.

Побудова простих ієрархій домінантного типу

Припустимо, що мається деяка множина елементів, між якими існують визначені відносини.

Опис такої системи може бути реалізовано у двох взаємозалежних формах: у виді бінарної матриці й у виді спрямованого графа.

Бінарна матриця може бути представлена матрицею досяжності, що визначається по матриці залежності.

Матриця залежності *B* заповнюється в такий спосіб. Якщо множина вершин *H* визначена, то за допомогою бінарного відношення «залежить від» можна заповнити матрицю так, що відповіді «так» фіксують «одиницею», а відповіді «ні» фіксують «нулем», тобто елемент b_{ij} матриці дорівнює:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо i залежить від j} \\ 0, \text{якщо i не залежить від j} \end{cases}$$

Побудувавши в такий спосіб матрицю, переходимо до формування матриці досяжності.

Для цього формуємо бінарну матрицю $(I+B)$, (де I – одинична матриця) і зводимо її у деякий ступінь k, такий що виконується умова:

$$(I+B)^{k-1} \leq (I+B)^k = (I+B)^{k+1}.$$

Матриця $(I+B)^k = (I+B)^{k+1}$ і буде матрицею досяжності.

Матриця досяжності може бути побудована і більш простим шляхом, безпосередньо по вихідному спрямованому графі. У цьому графі дуга виходить із залежного елемента. Заповнення матриці бінарними елементами здійснюється по рядку (ліворуч праворуч) за правилом:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо з i можно попасти в j} \\ 0, \text{інакше} \end{cases}$$

Наявність матриці досяжності дозволяє розділити множину вершин на підмножини рівнів.

Для цього вершини поділяють на досяжні й попередні.

Вершину h_j називають досяжною з вершини h_i, якщо в орієнтованому графі існує шлях із h_i до h_j. Позначимо підмножину вершин, досяжних із вершини h_i через $R(h_i)$. Вершину h_j називають попередній вершині h_i, якщо можливо досягнення h_i із h_j. Позначимо підмножину вершин, що передують вершині h_i через $A(h_i)$.

Множина тих вершин $A(h_i)=R(h_i)\cap A(h_i)$, для яких виконується умова недосяжності з кожної з залишившихся вершин множини Н, може бути позначена як рівень ієрархії. Тобто, для структуризації деякої множини елементів H, зв'язаних визначеними відносинами залежності, необхідно виконати наступні процедури.

1. Скласти спрямований граф відносин між елементами множини H.
2. Сформувати матрицю досяжності по спрямованому графі.
3. Сформувати таблицю з елементами h_i, $R(h_i)$, $A(h_i)$ і $R(h_i)\cap A(h_i)$.

Для формування підмножини $R(h_i)$ з *i-ої* рядка матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці. Для формування підмножини $A(h_i)$ з *i-го* стовпця матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці.

Підмножина $R(h_i)\cap A(h_i)$ формується як логічне перетинання (сполучення) елементів двох підмножин .

4. Знайти елементи в таблиці, для яких виконується умова:

$$A(h_i)=R(h_i)\cap A(h_i).$$

Ці елементи й утворять перший рівень.

5. Викреслити отримані на першій ітерації елементи і застосувати вищеописані процедури (п.п. 1 – 4) знову. Ітерації повторюються доти, поки залишається більш одного елемента.

Описану вище методику структуризації продемонструємо на такому прикладі.

Припустимо. Що необхідно ієрархічно структурувати такі компоненти (елементи) як:

- економічна безпека (ЕНБ);
- військова безпека (ВБ);
- екологічна безпека (ЕЛБ);
- сільськогосподарський сектор економіки (СХ);

- сектор економіки, що робить електронну й обчислювальну техніку (ВТ);
- сектор машинобудування (МШ);
- сектор енергетичний (ЕН).

Спрямований граф відносин між елементами, розташованими довільним образом, показаний на рис. 1.2.

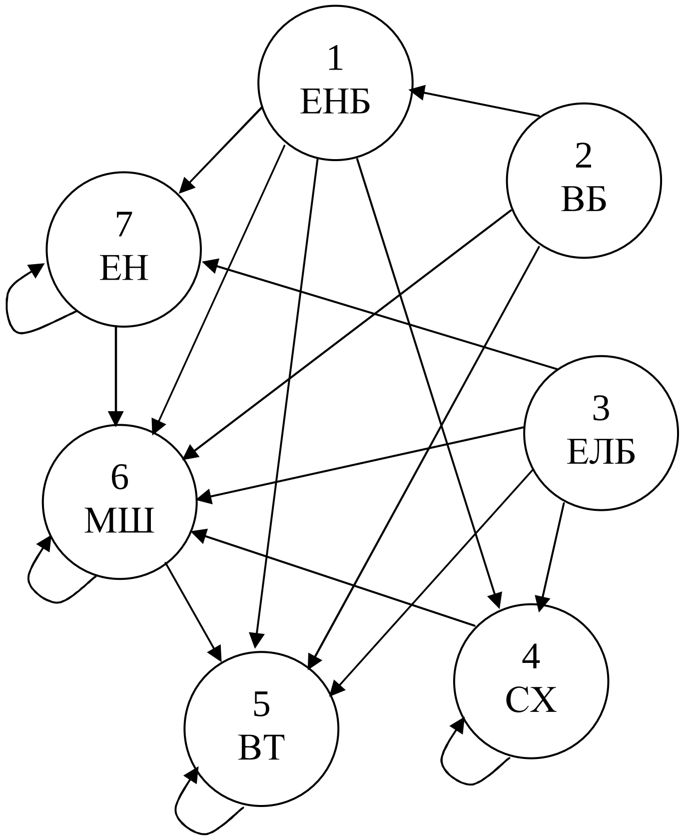


Рис. 1.2 – Вихідний спрямований граф.

Напрямок стрілки дуги визначається спрямованістю залежності: стрілка вказує на елемент, від якого залежить елемент, із якого вона виходить.

Матриця залежності для цієї схеми має вигляд:

		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
		ЕНБ	**ВБ**	**ЕЛБ**	**СХ**	**ВТ**	**МШ**	**ЕН**
1	**ЕНБ**	0	0	0	1	1	1	1
2	**ВБ**	1	0	0	0	1	1	0
3	**ЕЛБ**	0	0	0	1	1	1	1
4	**СХ**	0	0	0	1	0	1	0
5	**ВТ**	0	0	0	0	1	0	0
6	**МШ**	0	0	0	0	1	1	0
7	**ЕН**	0	0	0	0	0	1	1

Матриця досяжності має вигляд:

		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
		ЕНБ	**ВБ**	**ЕЛБ**	**СХ**	**ВТ**	**МШ**	**ЕН**
1	**ЕНБ**	1	0	0	1	1	1	1
2	**ВБ**	1	1	0	1	1	1	1
3	**ЕЛБ**	0	0	1	1	1	1	1
4	**СХ**	0	0	0	1	1	1	0
5	**ВТ**	0	0	0	0	1	0	0
6	**МШ**	0	0	0	0	1	1	0
7	**ЕН**	0	0	0	0	1	1	1

Використовуючи матрицю досяжності, будуємо таблицю, що є першою ітерацією аналізу.

h_i	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$R(h_i) \cap A(h_i)$
1	1,4,5,6,7	1,2	1
2	1,2,4,5,6,7	2	2
3	3,4,5,6,7	3	3
4	4,5,6	1,2,3,4	4
5	5	1,2,3,4,5,6,7	5
6	5,6,	1,2,3,4,6,7	6
7	5,6,7	1,2,3,7	7

З таблиці видно, що рівність $A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i)$ виконується для елементів 2 і 3. Отже, вони і є елементами першого рівня.

Викреслюючи з таблиці рядки з номерами 2 і 3, а також викреслюючи з усіх послідовностей цифри 2 і 3, одержуємо другу ітерацію, у якій критеріальна рівність виконується для елемента 1. Він і є елементом другого рівня.

Повторюючи ітерації, одержуємо остаточно п'ять рівнів елементів, що представлені на рис. 1.2.

Таке представлення початкової моделі є більш наочним із погляду аналізу залежностей одних елементів від інших. Результат ієрархічної структуризації дозволяє зробити висновок, що з погляду забезпечення безпеки держави критичним є електронна і машинобудівна галузі економіки.

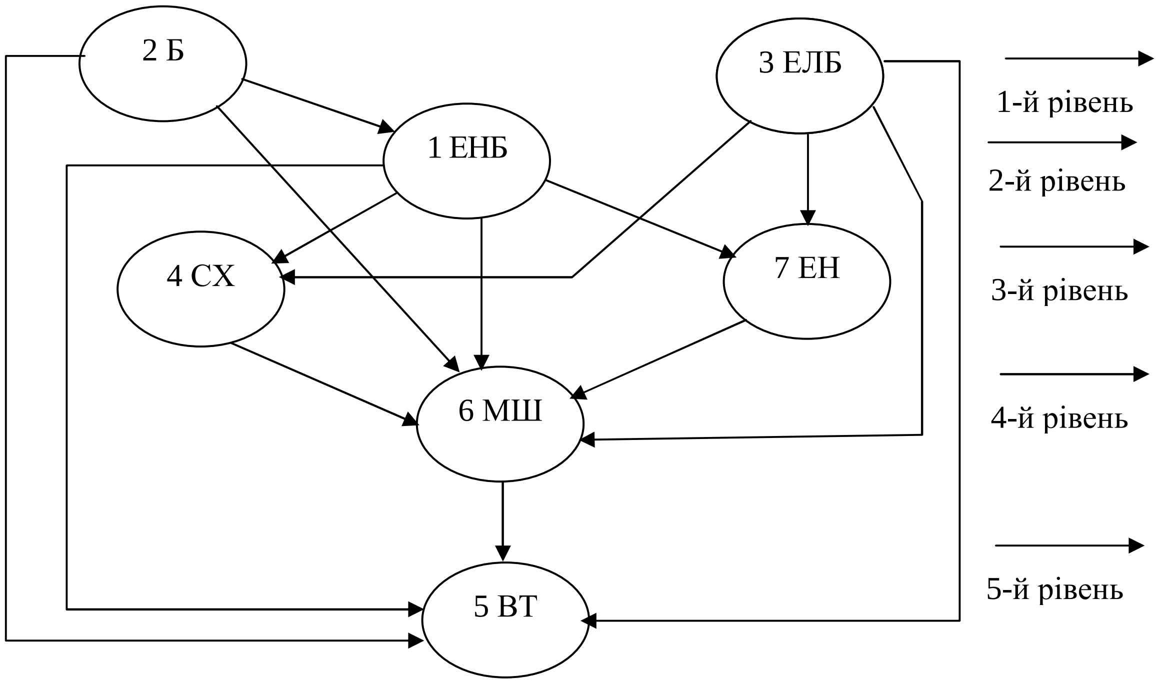


Рис. 1.3 – Ієрархічна структура вихідного графа.

Порядок виконання роботи.

1. Для приклада, розглянутого вище, побудувати таблиці для ітерацій 2 – 4. Порівняти отримані результати з результатами відображеними на рис. 1.3.
2. Технологічний процес можна розглядати як систему, елементами якої є окремі операції. Їхній взаємозв'язок, представлений матрицею залежностей, приведено в таблиці.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Примітка 1. Значення 1 у клітці (і , j) таблиці (де і - рядок, j - стовпець) означає, що операція і залежить від операції j (тобто операція j передує операції і).

Примітка 2. Правило вибору індивідуального варіанта. Нехай n – номер студента в списку групи, m, k – цілі числа, що визначаються по формулах

$$m = \begin{cases} n, \textit{якщо } n \le 10 \\ n-10, \textit{якщо } 10 < n \le 20 \\ n-20, \textit{якщо } 20 < n \le 30 \\ n-30, \textit{якщо } n > 30 \end{cases} \qquad k = \begin{cases} 11, \textit{якщо } n \le 10 \\ 12, \textit{якщо } 10 < n \le 20 \\ 13, \textit{якщо } 20 < n \le 30 \\ 14, \textit{якщо } n > 30 \end{cases}$$

Для одержання варіанта завдання варто викреслити m-й рядок і m-й стовпець, а також k-й рядок і k-й стовпець з вихідної матриці (рядки і стовпці, які залишились не перенумеровуються). Випишіть матрицю залежності для свого варіанта.

3. Побудуйте вихідний спрямований граф для отриманої матриці залежності.
4. Використовуючи граф, побудуйте матрицю досяжності.
5. За даними матриці досяжності побудуйте рівні порядку проходження операцій по черговості. Для цього для кожної ітерації аналізу необхідно побудувати таблиці аналогічні, розглянутим у прикладі.
6. Підсумковий результат представте у виді порядкового графа.

Контрольні питання

1. Визначення складної системи.
2. Визначення ієрархії.
3. Види ієрархій.
4. Визначення домінантної ієрархії (повної і неповної).
5. Холархії.
6. Ієрархія виду «Китайська шкатулка».
7. Матриця залежності.
8. Матриця досяжності.
9. Побудова матриці досяжності з матриці залежності.
10. Побудова матриці досяжності по вихідному графі залежності.
11. Визначення множини досяжних вершин.
12. Визначення множини попередніх вершин.
13. Як формується множина досяжних вершин з використанням матриці досяжності.
14. Як формується множина попередніх вершин з використанням матриці досяжності.
15. Алгоритм побудови рівнів ієрархії.

Лабораторна робота № 2

Побудова ієрархій для системи з циклами

Задача, розглянута в цій роботі багато в чому, аналогічна задачі розглянутої в попередній роботі, але її особливість полягає в тому, що аналізована система є більш складною й представлена графом з циклами. Тому для її рішення спочатку потрібно об'єднати елементи, зв'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).

Елементи x_i і x_j зв'язані циклом, якщо вони задовольняють відношенню: «Існує шлях з елемента x_i в елемент x_j і назад». Зокрема, при i = j елемент x_i може замикатися на себе, тобто є циклічним елементом. У матриці залежності цикл між елементами x_i, x_j представляється послідовністю одиниць у відповідних осередках, що зв'язують x_i і x_j, наприклад, якщо (i, j) = 1 і (j, i) = 1, то x_i, x_j зв'язані циклом; якщо (i, j) = 1 і (j, k) = 1 і (k, i) = 1, то x_i, x_j зв'язані циклом і т.д. Циклічний елемент у матриці залежності представляється одиницею у відповідному йому осередку, наприклад, якщо (i, i) = 1, то елемент x_i циклічний. Після виконання зазначеної операції об'єднання множина елементів виявляється розбитою на кілька класів еквівалентності, наприклад: C1 = {x1, x5, x6)}, C2 = {x3, x4}, C3 = {x2, x7, x10}, C4 = {x8} і т.д. Елементи у кожному класі зв'язані між собою циклами, тобто вважаються нерозрізненими. Потім алгоритм рішення задачі, розглянутої в роботі № 1 застосовується вже не до окремих елементів, а до класів C1, C2, C3, C4, тому що ці класи утворюють простий граф без контурів. Для побудови рівнів порядку на класах у вихідній матриці всі одиниці в осередках матриці, що зв'язують елементи з одного класу, заміняються нулями. Після цього до рядків і стовпців одного класу застосовується операція додавання.

Задача. За результатами іспитів продукції були виявлені типові несправності і проведене їхнє ранжирування по ряду ознак. Відповідна матриця залежностей дана в таблиці. Побудуйте рівні порядку на безлічі несправностей по відношенню переваги (« не менш важливий чим »). Підсумковий результат представте у виді порядкового графа.

Приклад рішення задачі

Матриця залежностей класів еквівалентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1					1				
2							1		
3		1		1					
4			1						
5						1			
6	1						1		
7									
8	1								1
9									

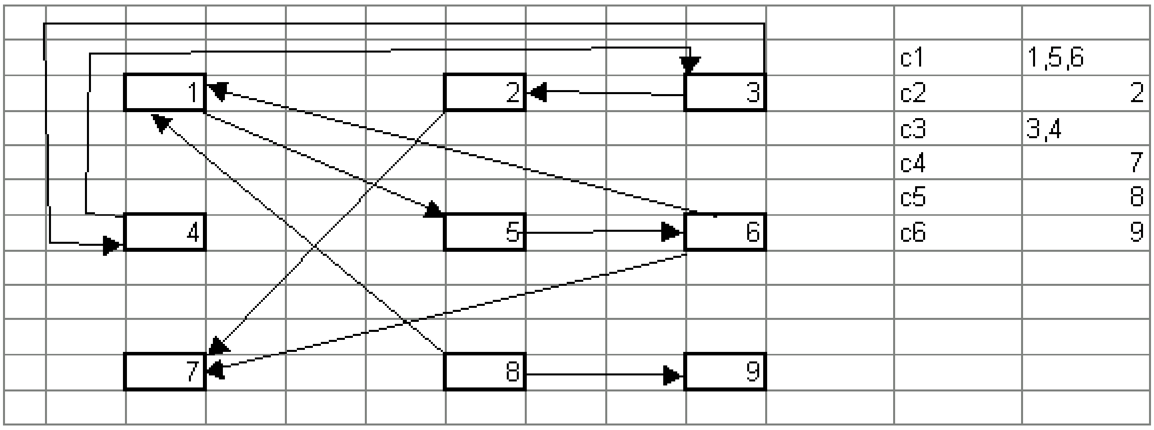


Рис. 2.1 – Вихідний спрямований граф.

	c1	c2	c3	c3	c1	c1	c4	c5	c6
c1									
c2							1		
c3		1							
c3									
c1									
c1							1		
c4									
c5	1								1
c6									

	c1	c2	c3	c4	c5	c6
c1				1		
c2				1		
c3		1				
c4						
c5	1					1
c6						

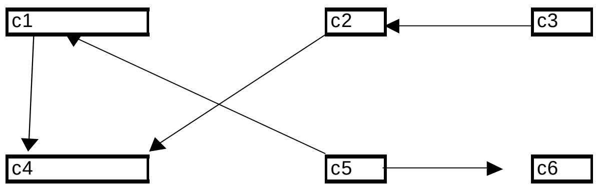


Рис. 2.2 – Вихідний спрямований граф класів еквівалентності.

Матриця досяжності

	c1	**c2**	**c3**	**c4**	**c5**	**c6**
c1	1			1		
c2		1		1		
c3		1	1	1		
c4				1		
c5	1			1	1	1
c6						1

Рівень 1

	R(h_i)	**A(h_i)**	**R(h_i) and A(hi)**	
c1	c1,c4	c1,c5	c1	
c2	c2,c4	c2,c3	c2	
c3	c2,c3,c4	c3	c3	c3
c4	c4	c1,c2,c3,c4,c5	c4	
c5	c1,c4,c5,c6	c5	c5	c5
c6	c6	c5,c6	c6	

Рівень 2

c1	c1,c4	c1	c1	c1
c2	c2,c4	c2	c2	c2
c4	c4	c1,c2,c4	c4	
c6	c6	c6	c6	c6

Рівень 3

c4	c4	c4	c4	c4

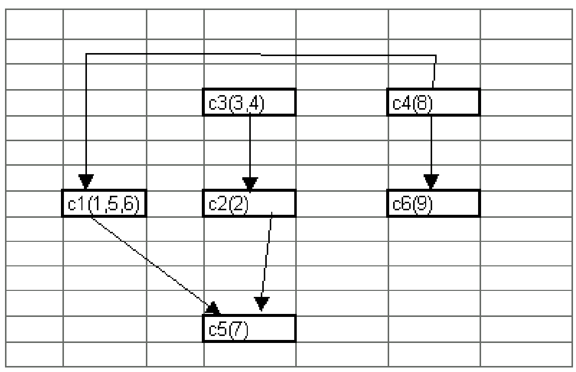


Рис. 2.3 – Ієрархічна структура графа класів еквівалентності.

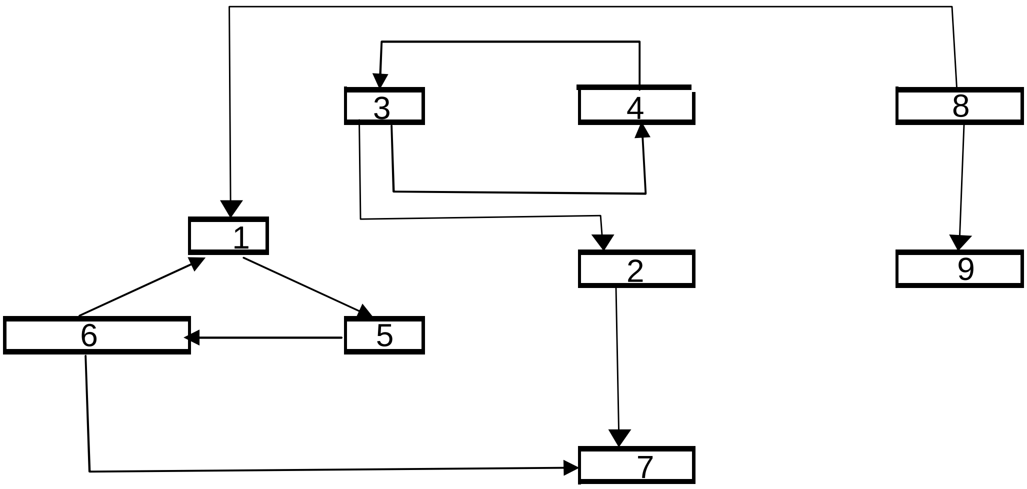


Рис. 3.4 – Ієрархічна структура вихідного графа.

Порядок виконання роботи

1. Побудувати матрицю залежностей для свого варіанта. Для одержання варіанта завдання варто викреслити m-й рядок і m-й стовпець, а також k-й рядок і k-й стовпець з вихідної матриці (рядки й стовпці, які залишились, не перенумеровуються).

Вихідна матриця залежностей має вигляд.

	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***
1					1						
2							1				
3		1		1							
4			1								
5						1					
6	1						1				
7										1	
8	1								1		
9											1
10		1									
11	1								1		

Значення m і k вибираються з наступної таблиці відповідно до номера студента в списку журналу групи.

№ п/п	m	k
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	10
10	1	3
11	2	4
12	3	5
13	4	6
14	5	7
15	6	8
16	7	9
17	8	10
18	9	11

№ п/п	m	k
19	1	4
20	2	5
21	3	6
22	4	7
23	5	8
24	6	9
25	7	10
26	8	11
27	1	5
28	2	6
29	3	7
30	4	8
31	5	9
32	6	10
33	7	11
34	1	6
35	2	7
36	3	8

№ п/п	m	k
37	4	9
38	5	10
39	6	11
40	1	7
41	2	8
42	3	9
43	4	10
44	5	11
45	1	8
46	2	9
47	3	10
48	4	11
49	1	9
50	2	10
51	3	11
52	1	10
53	2	11
54	1	11

2. Об'єднайте елементи, зв'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).
3. Побудуйте матрицю залежності класів еквівалентності.
4. Побудуйте спрямований граф для отриманої матриці залежності класів еквівалентності.
5. Використовуючи отриманий граф, побудуйте матрицю досяжності класів еквівалентності.
6. За даними матриці досяжності побудуйте рівні ієрархії класів еквівалентності. Для цього для кожної ітерації аналізу необхідно побудувати таблиці аналогічні тим, що розглядалися в попередній роботі.
7. Підсумковий результат представте у виді порядкового графа.

Контрольні питання

1. У якому випадку елементи x_i і x_j зв'язані циклом.
2. Як відбувається розбивка вихідної множини системи з циклами на класи еквівалентності.
3. Як перетворюється матриця залежності системи з циклами для побудови рівнів порядку.
4. Алгоритм побудови рівнів ієрархії для системи з циклами.

Лабораторна робота № 3
Метод аналізу ієрархій. Вектор пріоритетів

Будь-яка проблема являє собою складний об'єкт, що має ієрархічну структуру. При аналізі такого об'єкта дослідник, звичайно, зіштовхується зі складною системою взаємодії компонент проблеми (ресурси, мети, впливові особи й групи, політичні, економічні й інші фактори), які потрібно проаналізувати.

Метод аналізу ієрархій (МАІ) є систематичною процедурою для ієрархічного представлення компонентів проблеми. Метод становить у декомпозиції проблеми на усе більш прості складовій і подальшій обробці послідовності суджень особи, що приймає рішення (ЛПР), по парних порівняннях. У результаті може бути отриманий відносний ступінь (інтенсивність) взаємодії (впливу) компонентів нижнього і-го рівня на компоненти верхнього (і-1)-го рівня або і-го рівня на самий верхній (нульовий) рівень. Ці оцінки виражаються потім чисельно. МАІ включає процедури синтезу множинних суджень, одержання пріоритетності критеріїв і пошуку альтернативних рішень.

Теорія систем надала концептуальну основу для побудови нової методології, що дозволяє, описувати систему і її проблеми в термінах взаємозалежної ієрархічної структури. Ця методологія пропонує засоби для встановлення упорядкування пріоритетів і виміру інтенсивності взаємодії компонент, що описують структуру системи ієрархії. Методологія враховує роль людини (як елемента ієрархії) у складних соціальних і організаційних системах і приміряє численні і суперечливі устремління, що маються у людей, чиї інтереси торкаються поводження системи.

Метод аналізу ієрархій включає наступні основні етапи:

- декомпозиція проблеми;
- побудова ієрархічної структури моделі проблеми;
- експертне оцінювання переваг;
- побудова локальних пріоритетів;
- оцінка погодженості суджень;

- синтез локальних пріоритетів;
- висновки й пропозиції для прийняття рішень.

Шкала Т. Сааті

Метод аналізу ієрархій при побудові єдиної шкали для різних компонентів проблеми використовує міру ступеня впливу кожного фактора одного рівня на фактори верхнього рівня або на кінцеву мету. Ця міра утвориться в результаті висловлення суджень про ступінь впливу (важливості) цих факторів. Американський фахівець із системного аналізу Т. Сааті запропонував шкалу відносної важливості (значимості, переваги) представлену в таблиці:

Ступінь переваги одного об'єкта перед іншим	**Міра важливості (значимості) переваги**
Рівна важливість (значимість).Немає переваги	1
Слабка перевага по важливості. Слабка перевага.	3
Істотна або сильна перевага по важливості (значимості). Сильна перевага.	5
Дуже сильна або значна перевага по важливості (значимості). Дуже сильна перевага.	7
Абсолютна перевага.	9
Проміжна оцінка міри переваги між сусідніми значеннями	2, 4, 6, 8

Вибір дискретної шкали «1 – 9» для оцінки порівняльної міри важливості (значимості або рівня переваг), одержуваної в результаті висловлення суджень експертом, ґрунтується на наступних передумовах:

1. Якісні розходження значимі на практиці і мають елемент точності, коли величина порівнюваних об'єктів (предметів, явищ, процесів, видів діяльності) одного порядку або об'єкти близькі щодо властивості, по якій вони порівнюються.

2. Психометричні властивості людини дозволяють досить добре проводити якісні розмежування мір властивостей порівнюваних об'єктів по наступним рівням: *немає розходження*, *слабке розходження*, *сильне розходження*, *дуже сильне розходження, абсолютне розходження*. З огляду на компромісні оцінки розходження

між перерахованими вище рівнями значимості (важливості), одержуємо дев'ять рівнів (ступенів) розходження, що можуть бути добре погоджені.

3. У психології існує поняття психологічної межі здатності людини одночасно розрізняти якесь число предметів по якійсь властивості. Ця межа дорівнює 7±2, тобто для створення шкали, на якій ці предмети будуть розбірливі, необхідно 9 точок. З огляду на вищесказане, шкалу Сааті іноді називають психометричною шкалою.

Метод парних порівнянь

Для побудови шкали пріоритетів (переваг), одержуваної при експертному висловленні суджень про рівень розходження між порівнюваними об'єктами в МАІ застосовується метод парних порівнянь. Якщо для порівняння обране n (A_1, A_2,...,A_n) об'єктів, то результати порівнянь заносяться в квадратну n -мірну матрицю виду:

	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nj}	…	a_{nn}

Елементом цієї матриці a_{ij} є міра переваги об'єкта A_i у порівнянні з об'єктом A_j. Таким чином, і-й рядок матриці показує міру переваги і-го об'єкта над іншими (n-1) об'єктами і над самим собою. Міра переваги виражається експертом у шкалі Сааті і приймає значення від 1 до 9, якщо об'єкт A_i більш важливий, чим об'єкт A_j. У випадку, коли і=j, міра переваги дорівнює 1, тобто діагональні елементи матриці парних порівнянь завжди рівні 1. Варто враховувати, що для матриці парних порівнянь виконується наступна умова:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

Це означає, що якщо по шкалі Сааті об'єкт A_i більш важливий, чим об'єкт A_j і ця міра переваги дорівнює a_{ij} (наприклад a_{ij}=5), то міра переваги A_j-го об'єкта в порівнянні з об'єктом A_i – величина зворотна a_{ij} (тобто a_{ji}=1/5). Таким чином, експертом заповнюється тільки верхня наддіоганальна частина матриці парних порівнянь і матриця здобуває наступний вид (наприклад, для чотирьох порівнюваних об'єктів):

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	$1/a_{12}$	1	a_{23}	a_{24}
A_3	$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	a_{34}
A_4	$1/a_{14}$	$1/a_{24}$	$1/a_{34}$	1

Міра погодженості

У загальному випадку під погодженістю мається на увазі те, що при наявності основного масиву неопрацьованих даних усі інші дані можуть бути логічно отримані з них. Якщо порівнюються n об'єктів, то досить (n-1) судження, у яких порівнювані об'єкти представлені, принаймні, один раз. Усі інші судження (у випадку погодженості суджень) можуть бути виведені з них.

Повна погодженість включає як *порядкову погодженість*, що називають ще властивістю *транзитивності* (якщо A_i має перевагу над A_j, а A_j має перевагу над A_k, то A_i має перевагу над A_k), так і *кардинальну погодженість* ($a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$).

Очевидно, що домогтися повної погодженості матриці парних порівнянь при експертних оцінках об'єктів неможливо. Природно після експертних оцінок по методу парних порівнянь порушити питання про ступінь погодженості отриманих оцінок.

Як міру погодженості розглядають два показники:

- індекс погодженості (ІП);
- відношення погодженості (ВП).

З теорії матриць відомо, що погодженість зворотно симетричної матриці (яка виходить як результат застосування експертом методу парних порівнянь по шкалі Сааті) еквівалентна вимозі рівності її максимального власного значення λ_{max} і числа порівнюваних об'єктів n ($\lambda_{max} = n$).

Тому як міру неузгодженості розглядають нормоване відхилення λ_{max} від n, називане *індексом погодженості*:

$$ІП = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$$

Для того щоб оцінити, чи є отримане узгодження прийнятним чи ні, його порівнюють із випадковим індексом (ВІ).

Випадковим індексом називають індекс погодженості, розрахований для квадратної n-мірної позитивної зворотно симетричної матриці, елементи якої генеровані датчиком випадкових чисел, розподілених по рівномірному закону для інтервалу значень: 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для матриці з фіксованим значенням n індекс розраховується як середнє значення для вибірки N (наприклад, N=100). Нижче представлена таблиця величин випадкового індексу для різних матриць порядку від 2 до 15.

Порядок матриці (n×n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Випадковий індекс (ВІ)	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59

Одержавши в результаті розрахунку індекс погодженості і, вибравши з таблиці випадковий індекс для заданого порядку матриці, розраховують *відношення погодженості (ВП)*

$$ВП = \frac{ІП}{ВІ}$$

Якщо величина ВП менше 0,1, то ступінь погодженості варто вважати гарною. У деяких випадках прийнятним ступенем погодженості можна вважати діапазон (0,1 – 0,3). Це, як правило, відноситися до проблем, для яких прийняті по експертних висновках рішення не спричиняють серйозних негативних наслідків. У противному випадку (якщо ОС > 0,1 – 0.3) експерту рекомендується переглянути свої судження. Для цього необхідно виявити ті позиції в матриці суджень, що вносять максимальний вклад у величину відносини погодженості, і спробувати змінити міру непогодженості в меншу сторону на основі більш глибокого аналізу питання.

Вектор пріоритетів

Проведемо математичну обробку матриці парних порівнянь у шкалі Сааті з метою одержання вектора пріоритетів порівнюваних об'єктів. З математичної точки зору задача зводиться до обчислення головного власного вектора, що після нормалізації стає вектором пріоритетів.

Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь полягає в зведенні матриці в достатньо великі ступені і поділ суми кожного рядка на загальну суму елементів матриці. Ми скористаємося іншим, більш простим, способом, що дає добре наближення.

	A_1	A_2	…	A_n	**Головний власний вектор**	**Вектор пріоритетів**
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	V_1	P_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	V_2	P_2
…	…	…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	V_n	P_n

Компонента головного власного вектора обчислюється як середнє геометричне значень у рядку матриці:

$$V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}\,.$$

Компонента вектора пріоритетів обчислюється як нормоване значення головного власного вектора:

$$P_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}\,.$$

Наближені значення λ_{max} для оцінки відносини погодженості можна розрахувати за наступною формулою:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^{n} M_j P_j,$$

де $M_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ – сума елементів і-го стовпця матриці;

P_j – вектор пріоритетів аналізованої матриці.

Приклад побудови вектора пріоритетів

Нехай існує проблема покупки будинку. Виділено наступні фактори, що впливають на рішення цієї проблеми: розміри будинку, зручність сполучення, околиці, вік будинку, двір, упорядженість, загальний стан, фінансові умови покупки. Необхідно побудувати вектор пріоритетів цих факторів. Нижче приведена матриця парних порівнянь для розглянутих восьми факторів, заповнена судженнями експерта по шкалі Сааті, на основі яких і проведені відповідні обчислення.

загальне задоволення будинком	розміри будинку	зручність сполучення	околиці	вік будинку	двір	упорядженість	загальний стан	фінансові умови покупки	головний власний вектор	вектор пріоритетів
розміри будинку	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	2.053	0.175
зручність сполучення	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0.736	0.063
околиці	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	1.746	0.149
вік будинку	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0.227	0.019
двір	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0.418	0.036
упорядженість	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0.497	0.042
загальний стан	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	1.961	0.167
фінансові умови покупки	4	7	5	8	6	6	2	1	4.105	0.350
сума елементів стовпця	9.010	21.867	10.250	41.000	26.333	25.750	10.076	2.551	11.742	1.000

λ_{max}=9.863, ІП=0.266, ВІ=1.410 (визначаємо по таблиці), ВП=0.189

Слід зазначити, що відношення погодженості даної матриці трохи більше рекомендованого рівня (ВП > 0,1), однак, для задач використовуваного типу його можна прийняти.

У загальному випадку рівень погодженості повинний відповідати тому ризику, що супроводжує роботі з неузгодженими даними.

Наприклад, при порівнянні впливу лік на організм необхідно мати дуже високий рівень погодженості.

Порядок виконання роботи.

1. Для приклада, приведеного вище, обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП і порівняти з результатами, приведеними в таблиці.

2. Визначити з таблиці параметри свого варіанта, що задаються парою чисел m і k. Значення m і k вибираються з наступної таблиці відповідно до номера студента в списку журналу групи.

№ п/п	m	k	№ п/п	m	k	№ п/п	m	k
1	1	5	19	1	7	37	1	9
2	2	5	20	2	7	38	2	9
3	3	5	21	3	7	39	3	9
4	4	5	22	4	7	40	4	9
5	5	5	23	5	7	41	5	9
6	6	5	24	6	7	42	6	9
7	7	5	25	7	7	43	7	9
8	8	5	26	8	7	44	8	9
9	9	5	27	9	7	45	9	9
10	1	6	28	1	8	46	1	4
11	2	6	29	2	8	47	2	4
12	3	6	30	3	8	48	3	4
13	4	6	31	4	8	49	4	4
14	5	6	32	5	8	50	5	4
15	6	6	33	6	8	51	6	4
16	7	6	34	7	8	52	7	4
17	8	6	35	8	8	53	8	4
18	9	6	36	9	8	54	9	4

3. Визначити з таблиці проблему й список критеріїв для свого варіанта. Номер проблеми визначає значення m. Для визначення списку критеріїв необхідно з вихідного списку, зазначеного в таблиці для даної проблеми викреслити критерій зі значенням k .

m	**Проблема;** варіанти її рішення (множина альтернатив)	**Список критеріїв**
1	**Покупка автомобіля;** варіанти: 1) престижна іномарка; 2) економічна малолітражка; 3) порівняно новий автомобіль підвищеної прохідності	1) Місткість, 2) потужність двигуна, 3) комфорт, 4) забезпеченість запчастинами, 5) ціна, 6) рік випуску, 7) надійність, 8) економічність, 9) дизайн
2	**Вибір вимірювального приладу;** варіанти: 1) цифровий малогабаритний; 2) високоточний стрілочний; 3) багатофункціональний з виходом на ЕОМ	1) Вартість; 2) рівень автоматизації; 3) продуктивність (час на один вимір); 4) точність; 5) діапазон вимірів; 6) універсальність; 7) габарити; 8) надійність; 9) зручність експлуатації
3	**Оцінка якості промислової продукції;** варіанти: 1) вітчизняна; 2) західноєвропейська; 3) японська	1) Функціональні (споживчі) характеристики; 2) особиста безпека; 3) економічність; 4) надійність; 5) вартість; 6) дизайн; 7) зручність експлуатації; 8) довговічність; 9) забезпеченість запчастинами
4	**Вибір місця роботи;** варіанти: 1) приватна фірма; 2) державне підприємство; 3) навчальний інститут	1) Оклад; 2) самостійність; 3) професійний інтерес; 4) можливості одержання житлоплощі; 5) додаткові навантаження; 6) додаткові вигоди; 7) необхідність перенавчання; 8) далекість від будинку; 9) психологічний клімат
5	**Добір на посаду;** варіанти: 1) молодий фахівець; 2) досвідчений працівник середнього віку; 3) колишній офіцер, що пройшов перенавчання	1) Ділова кваліфікація; 2) досвід роботи; 3) стать; 4) вік; 5) почуття відповідальності; 6) освіта; 7) місце проживання кандидата; 8) організаторські здібності; 9) психологічна сумісність
6	**Упровадження нового технологічного методу (устаткування);** варіанти: 1) дуже нова закордонна розробка; 2) остання вітчизняна розробка; 3) апробована вітчизняна розробка	1) Вартість; 2) безпека; 3) ступінь автоматизації; 4) продуктивність; 5) експлуатаційні витрати; 6) універсальність; 7) надійність; 8) технологічна сумісність; 9) забезпеченість сировиною

m	**Проблема;** варіанти її рішення (множина альтернатив)	**Список критеріїв**
7	**Вибір виду транспорту для поїздки;** варіанти: 1) літак; 2) потяг; 3) автобус	1) Вартість квитка; 2) надійність; 3) комфортабельність; 4) час у дорозі; 5) безпека; 6) труднощі придбання квитка; 7) зручність розкладу; 8) індивідуальна пристосованість; 9) припустима вага багажу без додаткової оплати
8	**Вибір принтера для персонального комп'ютера;** варіанти: 1) матричний; 2) струминний; 3) лазерний	1) Вартість; 2) якість печатки; 3) швидкість печатки; 4) додаткові можливості (графіка, колір); 5) простота й зручність обслуговування; 6) наявність українських букв; 7) надійність; 8) кількість шрифтів; 9) забезпеченість запчастинами
9	**Оцінка якості життя;** варіанти: 1) великий промисловий центр; 2) провінційне мале місто; 3) пригород столичного міста	1) Суспільна безпека; 2) стан навколишнього середовища; 3) можливості для дозвілля й розваг; 4) можливості підвищення кваліфікації й одержання роботи; 5) медичне обслуговування; 6) вартість життя; 7) житлові умови; 8) рівень доходів; 9) ритм життя

4. Побудувати матрицю парних порівнянь для розглянутих восьми факторів, заповнивши її експертними оцінками по шкалі Сааті.

5. Обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП. Якщо значення ВП буде більше 0,3 скорегувати експертні оцінки.

Контрольні питання.

1. Матриця Сааті.
2. Метод парних порівнянь. Матриця парних порівнянь.
3. Повна погодженість.
4. Порядкова погодженість.
5. Кардинальна погодженість.
6. Умова погодженості зворотно симетричної матриці.
7. Індекс погодженості.
8. Випадковий індекс.

9. Відношення погодженості.
10. Діапазон гарного ступеня погодженості.
11. Діапазон прийнятного ступеня погодженості.
12. Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь.
13. Наближений спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь.
14. Визначення наближених значень компонент вектора пріоритетів.
15. Визначення наближеного значення λ_{max} .

Лабораторна робота № 4
Метод аналізу ієрархій.
Розрахунок локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів

Розглянемо проблему: «Вибір і покупка будинку *із заданим рівнем якості* або покупка такого будинку, який би викликав *загальне задоволення*».

Як альтернативні варіанти розглядаємо три будинки (А, Б, В) із наступними характеристиками.

Будинок А – найбільший будинок (із трьох), гарні околиці, інтенсивний рух транспорту, податки на будинок не великі. Двір більше, ніж у будинків Б і В. Загальний стан не дуже гарний, потрібна ґрунтовне лагодження й проведення малярських робіт. Будинок фінансується банком із високою процентною ставкою, тому фінансові умови можна вважати незадовільними.

Будинок Б – небагато менше будинку А, розташований далеко від автобусних зупинок. Навколо інтенсивний рух транспорту. У будинку відсутні сучасні зручності, але загальний стан будинку дуже гарний. Крім того, на будинок можна одержати заставну з досить низькою процентною ставкою, тобто фінансові умови цілком задовільні.

Будинок В – маленький і без сучасних зручностей. Околиці досить привабливі, але податки високі, однак, будинок у гарному стані і досить безпечний. Двір більше, ніж у будинку Б, однак, значно менше, ніж у будинку А. Обсяг відновно-ремонтних робіт дуже малий. Фінансові умови набагато краще, ніж для будинку А, але не так гарні, як для будинку Б.

Ієрархічна модель рішення проблеми для розглянутого приклада має такий вигляд:

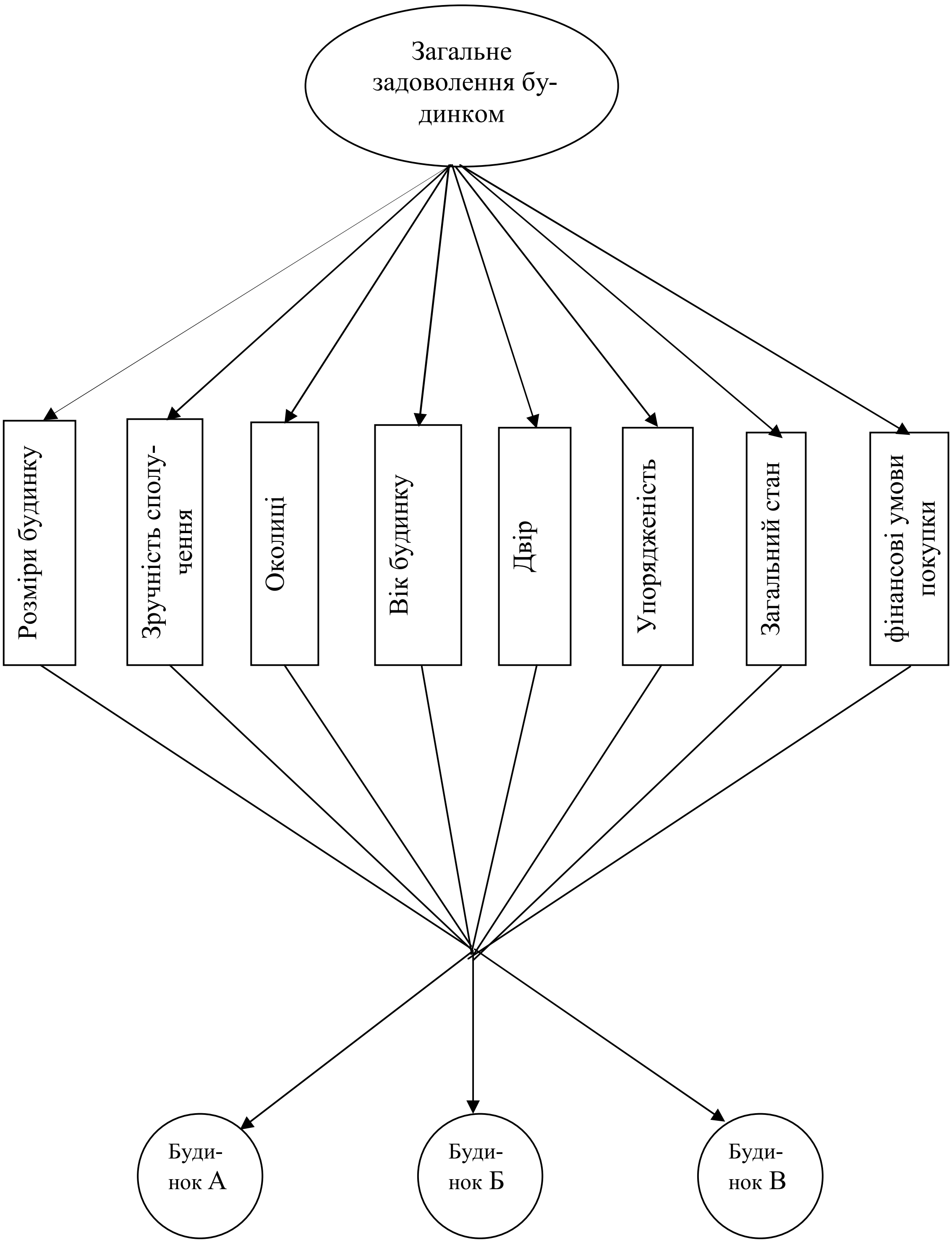


Рис. 4.1 – Ієрархічна модель рішення проблеми: вибір і покупка будинку.

Для того щоб прийняти обґрунтоване рішення на вибір будинку необхідно, виконати наступне.

Після побудови ієрархічної моделі проблеми починаємо перший етап аналізу, що складається в дослідженні ступеня впливу показників властивостей якості будинку на загальне задоволення будинком. У формальному виді цей етап складається в аналізі впливу факторів першого рівня ієрархії на мету аналізу – нульовий рівень. Цей етап був виконаний у попередній лабораторній роботі. Була представлена матриця парних порівнянь для восьми факторів 1-го рівня, заповнена судженнями експерта по шкалі Сааті. На підставі цих даних були визначені вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП.

На другому етапі переходимо до розгляду впливу факторів другого рівня на фактори першого рівня, тобто до аналізу «ваги» (переваги) кожного з розглянутих будинків (А, Б, В) стосовно кожного фактора першого рівня. Для цього необхідно сформувати й обробити вісім експертних матриць парного порівняння. Самі матриці й результати їхньої обробки у виді векторів пріоритетів і мір узгодженості представлені в таблиці.

Розміри будинку	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Зручність сполучення	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	6	8	0.754	А	1	5	4	0.233
Б	1/6	1	4	0.181	Б	1/5	1	1/3	0.054
В	1/8	1/4	1	0.065	В	1/4	3	1	0.712
				λ_{max}=3.136 ІП=0.068 ВП=0.117					λ_{max}=3.247 ІП=0.123 ВП=0.213
околиці	А	Б	В	Вектор пріоритетів	вік будинку	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	8	6	0.754	А	1	1	1	0.333
Б	1/8	1	1/4	0.065	Б	1	1	1	0.333
В	1/6	4	1	0.181	В	1	1	1	0.333
				λ_{max}=3.136 ІП=0.068 ВП=0.117					λ_{max}=3.000 ІП=0.000 ВП=0.000
двір	А	Б	В	Вектор пріоритетів	упорядженість	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	5	4	0.674	А	1	8	6	0.747
Б	1/5	1	1/3	0.101	Б	1/8	1	1/5	0.060
В	1/4	3	1	0.226	В	1/6	5	1	0.193
				λ_{max}=3.086 ІП=0.043 ВП=0.074					λ_{max}=3.197 ІП=0.099 ВП=0.170
загальний стан	А	Б	В	Вектор пріоритетів	фінансові умови покупки	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	1/2	1/2	0.200	А	1	1/7	1/5	0.072
Б	2	1	1	0.400	Б	7	1	3	0.649
В	2	1	1	0.400	В	5	1/3	1	0.279
				λ_{max}=3.000 ІП=0.000 ВП=0.000					λ_{max}=3.065 ІП=0.032 ВП=0.056

Аналіз векторів локальних пріоритетів показує, що будинок А кращий по чотирьох критеріях (розмір будинку, околиці, двір і упорядженість), будинок Б кращий по фінансовим умовам, а будинок В кращий по зручності сполучення.

На третьому етапі здійснюється синтез локальних пріоритетів або оцінка узагальнених (глобальних) пріоритетів. У нашім прикладі мова йде про одержання вектора глобальних пріоритетів будинків (А, Б, В,) стосовно мети верхнього рівня – загального задоволення будинком.

Для цього матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня, складену за результатами аналізу, представленого в приведеній вище таблиці, множать на вектор локальних пріоритетів 1-го рівня, отриманий у лабораторній роботі №3.

Матриця локальних пріоритетів 2-го рівня.

	розміри будинку	**зручність сполучення**	**околиці**	**вік будинку**	**двір**	**упорядженість**	**загальний стан**	**фінансові умови покупки**
А	0.754	0.233	0.754	0.333	0.674	0.747	0.200	0.072
Б	0.181	0.054	0.065	0.333	0.101	0.060	0.400	0.649
В	0.065	0.712	0.181	0.333	0.226	0.193	0.400	0.279

Вектор локальних пріоритетів 1-го рівня.

розміри будинку	0.175
зручність сполучення	0.063
околиці	0.149
вік будинку	0.019
двір	0.036
упорядженість	0.042
загальний стан	0.167
фінансові умови покупки	0.350

У результаті одержуємо узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів будинків (А, Б, В) стосовно кінцевої мети – покупці будинку. Цей вектор має вигляд:

Будинок	Вектор пріоритетів
А	0.379
Б	0.351
В	0.270

Таким чином, з обліком усіх розглянутих факторів, перевага при покупці віддається будинку А.

Порядок виконання роботи.

1. Для приклада, розглянутого вище, обробити вісім експертних матриць парного порівняння: для кожної матриці обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП. Побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня й узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів будинків (А, Б, В) стосовно кінцевої мети – покупки будинку. Отримані результати порівняти з результатами, приведеними в описі роботи.

2. Для проблеми, обраної в лабораторній роботі №3 виписати з таблиці, приведеної в цій роботі, варіанти її рішення.

3. Заповнити вісім експертних матриць парного порівняння.

4. Для кожної матриці обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП.

5. Побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня.

6. Використовуючи вектор локальних пріоритетів 1-го рівня, отриманий у роботі №3, і матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня, отриману в даній роботі, обчислити узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів стосовно кінцевої мети.

7. Прийняти рішення по проблемі.

Контрольні питання.

1. Три етапи прийняття обґрунтованого рішення проблеми.
2. Як побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня.
3. Як побудувати вектор глобальних пріоритетів.

Лабораторна робота № 5

Методи пошуку й вибору рішень.

Мінімаксний критерій. Критерій Байєса – Лапласа. Критерій Севіджа

Задача прийняття рішення трактується як задача вибору одного варіанта E_i з деякої множини варіантів рішень : $E_i \in E$. Будемо розглядати випадок, коли мається лише кінцеве число варіантів $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_m$. Умовимося, що кожним варіантом E_i однозначно визначається деякий результат e_i. Ці результати повинні допускати кількісну оцінку, яку також будемо позначати символом e_i. Будемо шукати варіант із максимальним результатом, тобто метою нашого вибору є $\max_i e_i$. Результати e_i частіше характеризуються, як виграші, корисності або надійності. Таким чином, вибір оптимального варіанта рішення виробляється за допомогою критерію

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,/\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i e_i \right\}. \qquad (1)$$

Правило (1) інтерпретується в такий спосіб: множина E_0 оптимальних варіантів складається з тих варіантів E_{i0}, що належать множині E усіх варіантів, і оцінка e_{i0} максимальна серед всіх оцінок e_i.

Розглянутий випадок прийняття рішень, при якому кожному варіанту рішення відповідає єдиний зовнішній стан (єдиний результат), є випадком детермінованих рішень. Цей випадок є найпростішим і частковим. У більш складних структурах кожному варіанту рішення E_i внаслідок різних зовнішніх умов F_j можуть відповідати різні результати e_{ij} рішень.

Під результатом рішення e_{ij} будемо розуміти оцінку, що відповідає варіанту E_i й умовам F_j і яка характеризує економічний ефект (прибуток), корисність або надійність виробу. Сімейство рішень описується деякою матрицею:

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} F_1 & \cdots & F_j & \cdots & F_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1j} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{i1} & \cdots & e_{ij} & \cdots & e_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{m1} & \cdots & e_{mj} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (2)$$

Особа, що приймає рішення (ОПР), намагається вибрати рішення з найкращими результатами. У даному випадку, первісна задача максимізації відповідно до критерію (1) повинна бути замінена іншою, котра буде враховувати всі наслідки кожного з варіантів рішення E_i.

Щоб прийти до однозначного і найвигіднішого варіанта рішення, коли яким-небудь варіантам рішень можуть відповідати різні умови, можна ввести підходящі оцінні (цільові) функції. При цьому матриця (2) зводиться до одного стовпця.

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array}\begin{array}{c} F_r \\ \begin{pmatrix} e_{1r} \\ \vdots \\ e_{ir} \\ \vdots \\ e_{mr} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Кожному варіанту приписується, таким чином, деякий результат, що характеризує, у цілому, усі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати символом e_{ir}.

Процедура вибору оптимального рішення зводиться до проблеми вкладення змісту в результат e_{ir}. З погляду ОПР частіше бажаний результат формується між оптимістичними й песимістичними способами побудови оцінних функцій.

Розглянемо оцінні функції, що може вибрати ОПР.

1) Оптимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i(\max_j e_{ij}). \qquad (3)$$

Точка зору азартного гравця. ОПР робить ставку на те, що буде найвигідніший випадок.

2) Позиція нейтралітету:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right). \qquad (4)$$

ОПР виходить із того, що усі відхилення результату від «середнього» випадку припустимі, і вибирає рішення, оптимальні з цього погляду.

3) Песимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} \right). \qquad (5)$$

ОПР виходить з того, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він вибирає самий вигідний варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку.

4) Позиція відносного песимізму ОПР:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \qquad (6)$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати в результаті в порівнянні з визначеним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів ОПР вибирає найкращий відповідно до представленої оцінної функції.

Ряд таких оцінних функцій можна було продовжити. Деякі з них одержали широке поширення в господарській діяльності. Так, якщо умови експлуатації заздалегідь не відомі, орієнтуються, звичайно, на найменш сприятливу ситуацію. Це відповідає оцінної функції (5). Часто використовуються також функції (4) і (6). Оцінна функція (3) дотепер у технічних додатках не застосовувалася.

Класичні критерії прийняття рішень

Мінімаксний критерій (ММ) використовує оцінну функцію (5), що відповідає позиції крайньої обережності, тобто

$$z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij}, \tag{7}$$

де z_{MM} - оцінна функція ММ-критерію і справедливо наступне співвідношення

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ \mathrm{E}_{i0} / \mathrm{E}_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}.$$

Обрані варіанти цілком виключають ризик. Це означає, що ОПР не може зштовхнутися з гіршим результатом, чим той, на який вона орієнтується. Які би умови F_j ні зустрілися, результат не може виявитися нижче z_{MM}. Ця властивість змушує вважати мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в технічних задачах він застосовується найчастіше, як свідомо, так і не усвідомлено. Однак, положення про відсутність ризику коштує різних утрат.

Нехай матриця рішень представлена у виді

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & F_2 \\ E_1 & 1 & 100 \\ E_2 & 1{,}1 & 1{,}1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & F_r \\ E_1 & 1 \\ E_2 & 1{,}1 \end{array}, \qquad z_{MM} = 1{,}1.$$

Хоча варіант E_1 здається більш вигідним, відповідно до ММ-критерію (7) оптимальним варто вважати $E_0 = \{E_2\}$. Ухвалення рішення за даним критерієм може виявитися ще менш розумним, якщо стан F_2 зустрічається частіше, ніж стан F_1 і рішення реалізується багаторазово.

Вибираючи варіант E_2, що пропонується ММ-критерієм, ми уникаємо невдалого результату 1, що реалізується у варіанті E_1 при зовнішньому стані F_1, зате втрачаємо виграш 100, одержуючи усього тільки 1,1. Цей приклад показує, що в численних практичних ситуаціях песимізм ММ-критерію може виявитися дуже невигідним.

Тому застосування ММ-критерію виправдується, якщо ситуація, у якій приймається рішення, характеризується наступними обставинами:

- про можливості появи зовнішніх станів F_j нічого не відомо;

- рішення реалізується лише один раз;
- необхідно виключити який би те ні було ризик, тобто ні при яких умовах F_j не допускається одержати результат, менший чим z_{MM}.

Критерій Байєса- Лапласа (BL-критерій).

Нехай p_j - імовірність появи зовнішнього стану F_j, тоді для BL-критерію оцінна функція має вигляд

$$z_{BL} = \max_i e_{ir} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j \ , \tag{8}$$

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,/\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j \wedge \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}.$$

Правило вибору можна інтерпретувати в такий спосіб: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить математичне чекання значень кожного з рядків. Вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця .

Умови, при яких використовується даний критерій:

- імовірності появи станів F_j відомі і не залежать від часу;
- рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;
- для кінцевого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

Критерій Севіджа (S-критерій).

Сформуємо оцінну функцію. Нехай

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \tag{9}$$

і

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right), \tag{10}$$

тоді оцінна функція має вигляд

$$z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \left(\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right). \tag{11}$$

Тоді множина оптимальних варіантів рішення є

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,\middle|\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}.$$

Величину $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ можна інтерпретувати подвійно:

- як максимальний додатковий виграш, що досягається, якщо в стані F_j замість варіанта E_i вибрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану варіант;
- як утрати (штрафи), що виникають у стані F_j при заміні оптимального для нього варіанта на варіант E_i.

Тоді величина e_{ir} являє собою - при інтерпретації a_{ij} як утрати - максимальноутливі (по всіх зовнішніх станах F_j, $j = 1,...,n$) втрати у випадку вибору варіанта E_i. Далі максимально можливі втрати мінімізуються за рахунок вибору підходящого варіанта E_i.

Правило вибору оптимального варіанта за критерієм Севіджа:

- кожний елемент матриці рішень $\|e_{ij}\|$ віднімається з найбільшого результату $\max_i e_{ij}$ відповідного стовпця. Різниці a_{ij} утворять матрицю залишків $\|a_{ij}\|$. Ця матриця доповнюється стовпцем найбільших різниць e_{ir};
- вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найменше для цього стовпця значення.

Умови застосування S-критерію такі ж, як для ММ-критерію.

Приклад

Дано матрицю рішень $\| e_{ij} \|$, розміром $m \times n$, $m = 8$, $n = 8$, результатами якої є збитки. Здійснити вибір найкращого варіанту рішення за допомогою критеріїв: мінімаксного, Байєса-Лапласа і Севіджа. Відомо, що імовірності появи зовнішніх станів F_j, j=1,...,8 мають наступні значення:

$$p_1 = 0{,}3 \;,\; p_2 = \ldots = 0{,}1.$$

$$\|e_{ij}\| = \begin{Vmatrix} -5,1 & -7,5 & -2,4 & -7,1 & -8,17 & -6,2 & -3,85 & -6,4 \\ -5,7 & -5,06 & -6,3 & -7,9 & -8,0 & -5,1 & -4,8 & -6,22 \\ -8,5 & -5,72 & -6,18 & -3,1 & -1,2 & -5,5 & -7,2 & -3,16 \\ -7,51 & -6,15 & -4,2 & -1,58 & -7,7 & -6,2 & 9,11 & -4,18 \\ -4,8 & -6,12 & -6,0 & -8,2 & -5,13 & -7,14 & -9,02 & -5,17 \\ -3,11 & -5,46 & -6,2 & -7,3 & -3,11 & -9,26 & -7,0 & -6,0 \\ -5,17 & -3,26 & -5,4 & -4,8 & -6,8 & -5,3 & -6,12 & -5,3 \\ -2,1 & -6,83 & -5,2 & -5,7 & -6,11 & -8,5 & -5,4 & -6,81 \end{Vmatrix}$$

Рішення. Спочатку будемо шукати оптимальний варіант рішення за допомогою ММ-критерію, для цього матрицю рішень доповнюємо стовпцем $e_{ir} = \min\limits_{j} e_{ij}$ - найменших результатів кожного рядка, тобто

$$\|e_{ir}\| = \begin{Vmatrix} -8,17 \\ -8,0 \\ -8,5 \\ -9,11 \\ -9,02 \\ -9,26 \\ -6,8 \\ -8,5 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_7 \\ \\ \end{matrix}$$

Тепер будемо вибирати варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця, тобто $Z_{MM} = \max\limits_{i} e_{ir} = -6,8$. Цей результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{E_7\}$.

Застосуємо критерій Байєса-Лапласа для пошуку оптимального варіанта. Знайдемо математичні чекання кожного рядка $\sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} p_j$ і запишемо їх у додатковий стовпець e_{ir}:

$$\begin{Vmatrix} -5,10\times0,3 - 0,1\times(7,50+2,40+7,10+8,17+6,20+3,85+6,40) \\ -5,70\times0,3 - 0,1\times(5,06+6,30+7,90+8,00+5,10+4,80+6,22) \\ -8,50\times0,3 - 0,1\times(5,72+6,18+3,10+1,20+5,50+7,20+3,16) \\ -7,51\times0,3 - 0,1\times(6,15+4,20+1,58+7,70+6,20+9,11+4,18) \\ -4,80\times0,3 - 0,1\times(6,12+6,00+8,20+5,13+7,14+9,02+5,17) \\ -3,11\times0,3 - 0,1\times(5,46+6,20+7,30+3,11+9,26+7,00+6,00) \\ -5,17\times0,3 - 0,1\times(3,26+5,40+4,80+6,80+5,30+6,12+5,30) \\ -2,10\times0,3 - 0,1\times(6,83+5,20+5,70+6,11+8,50+5,40+6,81) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5,692 \\ -6,048 \\ -5,756 \\ -6,165 \\ -6,118 \\ -5,366 \\ -5,249 \\ -5,085 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ = \|e_{ir}\| \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{matrix}$$

Далі застосуємо оцінну функцію (8) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{BL} = \max_i e_{ir} = -5{,}085$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

Для використання критерію Севіджа побудуємо матрицю різниць $\| a_{ij} \|$ відповідно до формули (9)

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 3{,}00 & 4{,}24 & 0{,}00 & 5{,}52 & 6{,}97 & 1{,}10 & 0{,}00 & 3{,}24 \\ 3{,}60 & 1{,}80 & 3{,}90 & 6{,}32 & 6{,}80 & 0{,}00 & 0{,}95 & 3{,}06 \\ 6{,}40 & 2{,}46 & 3{,}78 & 1{,}52 & 0{,}00 & 0{,}40 & 3{,}35 & 0{,}00 \\ 5{,}41 & 2{,}89 & 1{,}80 & 0{,}00 & 6{,}50 & 1{,}10 & 5{,}26 & 1{,}02 \\ 2{,}70 & 2{,}86 & 3{,}60 & 6{,}62 & 3{,}93 & 2{,}04 & 5{,}17 & 2{,}01 \\ 1{,}01 & 2{,}20 & 3{,}80 & 5{,}72 & 1{,}91 & 4{,}16 & 3{,}15 & 2{,}84 \\ 3{,}07 & 0{,}00 & 3{,}00 & 3{,}22 & 5{,}60 & 0{,}20 & 2{,}27 & 2{,}14 \\ 0{,}00 & 3{,}57 & 2{,}80 & 4{,}12 & 4{,}91 & 3{,}40 & 1{,}55 & 3{,}65 \end{Vmatrix}$$

Для цієї матриці побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \max_j a_{ij}$ відповідно формулі (10) і за допомогою оцінюючої функції $Z_S = \min_i e_{ir} = 4{,}91$ знайдемо оптимальний варіант рішення $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

$$\| e_{ir} \| = \begin{Vmatrix} 6{,}97 \\ 6{,}80 \\ 6{,}40 \\ 6{,}50 \\ 6{,}62 \\ 5{,}72 \\ 5{,}60 \\ 4{,}91 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{matrix}$$

Таким чином, використовуючи класичні критерії, ми одержали ряд оптимальних варіантів $E_{i0} = \{ E_7, E_8 \}$. Для вибору найкращого з них необхідні додаткові умови.

Порядок виконання роботи.

Дано матрицю рішень, розміром 8×8 (результатами якої є або прибуток або збитки). Здійснити вибір оптимального варіанта рішення за допомогою критеріїв:

1. Мінімаксного;
2. Байєса-Лапласа;
3. Севіджа.

Матриця рішень і розподіл імовірностей появи зовнішніх станів вибираються за номером у списку групи.

Варіанти матриці рішень знаходяться в таблиці 1. Імовірностеі p_j - появи зовнішніх станів F_j, j=1,...,n дани в таблиці 2 по варіантах.

Таблиця 1 – Варіанти матриці рішень

Варіант 1

52	71	80	79	60	49	79	66
29	95	2	55	60	17	94	61
56	11	90	20	51	31	75	94
56	68	24	30	47	55	19	11
7	83	26	2	31	19	20	67
41	98	7	82	91	37	66	9
21	86	96	27	43	94	45	17
45	7	62	55	2	30	69	5

Варіант 2

-8	-53	-53	-33	-91	-89	-51	-34
-97	-75	-37	-16	-63	-77	-28	-28
-94	-90	-97	-19	-93	-75	-84	-85
-35	-35	-31	-37	-78	-95	-93	-34
-3	-11	-3	-59	-38	-81	-62	-42
-4	-96	-76	-1	-37	-67	-78	-75
-16	-73	-21	-70	-82	-75	-7	-91
-27	-16	-19	-87	-55	-79	-31	-85

Варіант 3

2	20	39	66	3	18	90	24
84	32	83	30	45	16	94	48
70	40	89	37	16	73	22	20
35	66	95	34	88	21	19	33
62	37	86	56	69	98	7	86
71	89	74	20	97	78	45	45
27	87	12	43	84	24	29	78
12	75	23	11	10	12	77	93

Варіант 4

-78	-60	-44	-74	-66	-79	-72	-91
-71	-42	-14	-12	-76	-70	-27	-53
-6	-57	-56	-69	-71	-45	-88	-17
-70	-95	-74	-3	-79	-90	-47	-63
-98	-2	-1	-26	-77	-20	-52	-90
-41	-17	-86	-90	-29	-20	-32	-83
-14	-33	-24	-32	-30	-62	-11	-5
-59	-67	-57	-19	-8	-50	-8	-58

Варіант 5

76	19	38	92	75	9	45	70
43	62	97	41	5	57	50	81
49	36	22	56	49	67	95	32
42	77	63	65	27	34	95	70
21	28	81	26	66	38	66	94
26	92	62	46	14	6	90	54
45	76	75	1	89	97	30	79
97	39	28	24	21	78	34	34

Варіант 6

-47	-98	-44	-15	-4	-92	-80	-39
-94	-25	-3	-74	-27	-3	-84	-85
-75	-50	-2	-13	-45	-57	-42	-40
-31	-78	-88	-40	-63	-37	-22	-74
-24	-97	-64	-5	-55	-23	-22	-43
-6	-22	-5	-2	-32	-72	-67	-72
-87	-60	-92	-3	-44	-5	-61	-48
-53	-68	-53	-26	-91	-44	-57	-54

Варіант 7

52	24	64	50	63	47	61	27
78	31	14	22	66	19	22	81
90	66	25	71	23	36	3	28
37	41	8	17	12	8	59	92
84	21	7	50	56	40	90	37
21	29	12	80	59	85	70	75
44	31	17	76	56	81	97	22
95	40	68	16	82	62	22	95

Варіант 8

-8	-24	-4	-39	-2	-36	-72	-20
-85	-61	-15	-85	-57	-38	-9	-3
-10	-74	-11	-13	-71	-20	-26	-58
-43	-47	-53	-47	-82	-58	-89	-50
-15	-11	-67	-65	-3	-62	-72	-95
-65	-54	-72	-92	-87	-84	-23	-4
-85	-81	-95	-49	-70	-47	-7	-11
-16	-78	-76	-63	-27	-13	-17	-46

Продовження табл. 1

Варіант 9

11	57	95	55	19	12	56	70
83	96	94	22	5	58	47	81
70	77	4	73	5	72	14	32
22	56	79	79	32	43	6	70
58	60	95	68	9	29	56	94
36	64	61	1	86	81	33	54
60	48	76	2	66	61	7	79
61	11	56	61	7	54	32	34

Варіант 10

-6	-84	-38	-9	-75	-68	-47	-57
-11	-13	-47	-87	-4	-13	-41	-11
-19	-82	-17	-46	-46	-3	-54	-98
-1	-40	-24	-18	-45	-73	-36	-62
-67	-45	-28	-5	-85	-55	-32	-71
-8	-69	-43	-75	-36	-43	-87	-30
-57	-52	-83	-73	-89	-1	-57	-30
-79	-85	-43	-63	-47	-96	-54	-65

Варіант 11

95	40	68	16	82	62	22	87
57	59	17	93	37	27	55	55
72	76	11	49	23	2	12	12
2	25	58	67	80	66	26	15
11	36	9	48	36	74	33	29
80	73	75	81	37	90	33	65
58	16	88	38	80	94	12	28
70	89	90	83	25	62	22	90

Варіант 12

-52	-49	-23	-50	-79	-54	-66	-7
-83	-90	-47	-17	-1	-68	-19	-59
-36	-3	-29	-3	-71	-86	-86	-5
-56	-47	-65	-43	-29	-62	-65	-79
-73	-83	-54	-64	-39	-70	-43	-41
-57	-90	-44	-59	-31	-65	-25	-65
-75	-90	-69	-70	-18	-73	-6	-70
-9	-11	-44	-21	-63	-72	-69	-74

Варіант 13

78	36	97	71	29	55	22	38
66	14	4	22	71	78	84	81
81	80	43	23	54	8	69	32
46	30	31	3	95	75	91	24
85	25	25	17	73	89	53	61
30	87	68	35	71	74	2	26
12	73	71	95	14	65	49	7
73	56	18	15	35	71	14	57

Варіант 14

-36	-22	-64	-85	-45	-84	-16	-72
-11	-73	-9	-37	-39	-73	-44	-56
-6	-20	-54	-51	-49	-68	-11	-14
-92	-61	-93	-62	-17	-89	-74	-69
-48	-29	-82	-74	-79	-21	-7	-19
-8	-39	-16	-59	-23	-47	-54	-24
-60	-51	-17	-16	-11	-95	-25	-24
-64	-79	-29	-9	-96	-39	-36	-17

Варіант 15

54	34	98	12	16	31	88	93
90	35	15	20	23	96	8	17
77	35	5	80	48	6	13	6
20	42	23	6	56	98	25	64
73	56	18	15	35	71	14	57
66	78	40	61	22	63	84	53
3	85	45	46	51	33	32	4
61	59	6	24	92	52	37	87

Варіант 16

-80	-76	-87	-33	-7	-43	-18	-7
-82	-79	-1	-67	-38	-26	-59	-29
-18	-46	-49	-89	-92	-30	-19	-44
-63	-53	-20	-90	-24	-48	-75	-13
-32	-29	-75	-14	-57	-37	-39	-54
-52	-2	-40	-89	-12	-77	-73	-26
-20	-88	-46	-23	-73	-96	-54	-55
-48	-5	-13	-71	-84	-10	-12	-2

Варіант 17

97	27	68	76	88	41	72	61
87	82	90	2	77	54	3	94
55	9	45	42	48	87	41	81
36	48	32	85	6	17	42	12
87	1	29	69	67	68	90	55
72	88	36	97	2	92	65	95
57	51	42	30	76	34	77	2
7	90	31	95	41	32	43	6

Варіант 18

-43	-44	-54	-84	-48	-51	-59	-29
-11	-23	-94	-44	-84	-65	-86	-49
-85	-89	-60	-51	-32	-40	-79	-21
-48	-89	-21	-73	-52	-87	-67	-7
-23	-43	-32	-5	-40	-67	-49	-6
-78	-38	-12	-1	-54	-21	-32	-68
-86	-92	-40	-97	-65	-73	-31	-18
-49	-46	-76	-1	-16	-75	-39	-38

Продовження табл. 1

Варіант 19

15	50	59	46	73	87	17	42
71	64	74	2	97	42	56	33
86	62	24	89	5	12	51	10
64	73	37	38	3	27	85	92
49	62	32	25	4	18	70	15
28	88	48	37	14	40	66	87
15	27	77	7	83	23	55	61
65	57	38	63	85	48	68	68

Варіант 20

-63	-25	-53	-51	-5	-7	-67	-28
-29	-50	-88	-80	-95	-24	-81	-44
-49	-6	-50	-8	-50	-40	-8	-27
-91	-60	-46	-70	-65	-7	-69	-7
-56	-49	-3	-14	-9	-46	-36	-67
-45	-21	-69	-95	-98	-95	-15	-97
-31	-44	-64	-9	-51	-25	-34	-4
-70	-9	-50	-95	-9	-58	-26	-67

Варіант 21

43	36	9	32	36	73	79	61
30	52	73	20	56	59	82	74
33	58	15	95	35	55	38	86
29	73	16	9	52	75	5	23
34	65	46	24	63	88	93	85
9	50	70	76	12	84	4	51
42	17	23	34	72	70	91	50
68	98	32	36	97	71	74	53

Варіант 22

-10	-91	-14	-62	-10	-68	-93	-16
-61	-70	-28	-91	-26	-1	-81	-5
-11	-58	-6	-25	-44	-39	-50	-89
-71	-4	-79	-42	-66	-34	-78	-30
-32	-78	-89	-29	-48	-1	-47	-23
-81	-22	-29	-76	-86	-3	-93	-67
-24	-13	-23	-26	-63	-10	-96	-77
-23	-97	-41	-3	-51	-81	-94	-90

Варіант 23

63	30	56	3	37	39	92	26
10	33	35	60	16	15	88	91
19	85	88	63	3	5	79	29
22	68	59	16	49	40	39	78
19	87	85	7	59	31	53	9
6	65	31	81	35	61	25	59
40	17	49	50	30	57	15	84
60	64	25	37	9	27	43	65

Варіант 24

-7	-14	-27	-8	-12	-20	-31	-93
-82	-94	-64	-79	-80	-15	-33	-18
-41	-80	-84	-25	-86	-7	-19	-61
-47	-61	-34	-85	-55	-95	-23	-68
-13	-88	-50	-56	-7	-82	-2	-64
-80	-6	-27	-73	-4	-27	-46	-6
-78	-89	-77	-36	-82	-40	-27	-40
-62	-15	-6	-39	-15	-66	-62	-61

Варіант 25

31	7	50	9	23	2	62	55
8	69	18	35	92	38	78	39
95	24	42	32	5	46	22	27
47	9	64	21	30	82	21	26
6	48	19	63	85	3	37	96
80	19	64	64	22	12	31	31
70	28	15	25	14	12	77	54
91	93	54	50	33	82	77	27

Варіант 26

-68	-37	-3	-4	-98	-55	-83	-57
-5	-89	-84	-79	-1	-49	-48	-80
-93	-58	-16	-20	-16	-98	-10	-12
-66	-24	-77	-64	-38	-38	-42	-82
-75	-84	-25	-23	-58	-92	-14	-75
-70	-64	-22	-68	-74	-19	-12	-40
-58	-3	-49	-19	-19	-95	-92	-27
-96	-43	-27	-66	-71	-18	-56	-85

Варіант 27

12	56	63	27	35	70	42	11
11	44	86	8	86	20	38	31
95	23	64	4	93	41	51	9
29	63	51	94	8	9	65	3
16	23	17	43	50	37	82	78
18	8	51	37	18	14	86	85
73	98	5	72	42	45	73	66
46	9	91	61	29	23	78	27

Варіант 28

-57	-2	-81	-43	-97	-53	-9	-8
-43	-89	-84	-45	-80	-92	-51	-82
-11	-31	-19	-80	-58	-50	-20	-37
-66	-80	-24	-21	-72	-5	-59	-91
-89	-21	-12	-89	-72	-97	-68	-25
-57	-38	-26	-43	-93	-45	-53	-33
-25	-29	-7	-48	-41	-50	-86	-86
-33	-41	-38	-4	-91	-71	-60	-46

Продовження табл. 1

Варіант 29

83	1	58	17	27	77	42	93
23	57	43	21	2	19	82	63
58	98	12	11	88	88	42	44
46	37	28	27	95	32	46	90
54	52	34	98	73	62	14	93
77	94	61	68	7	4	63	88
32	13	52	49	42	66	87	12
68	47	23	29	80	89	60	33

Варіант 30

-76	-42	-9	-72	-9	-94	-94	-12
-71	-86	-57	-98	-1	-6	-41	-54
-83	-66	-52	-75	-16	-68	-24	-33
-80	-21	-31	-49	-13	-83	-8	-4
-60	-61	-98	-25	-79	-43	-36	-58
-67	-37	-56	-26	-7	-90	-57	-25
-73	-29	-8	-40	-46	-58	-37	-26
-97	-34	-41	-73	-91	-63	-63	-4

Варіант 31

82	16	25	76	43	64	82	11
30	61	19	63	5	10	54	39
76	87	58	28	65	77	37	7
73	12	55	30	67	86	61	68
61	11	27	45	10	46	36	18
32	34	4	6	35	67	35	83
66	11	23	23	93	19	30	43
32	12	72	76	91	62	73	59

Варіант 32

-50	-43	-58	-10	-23	-34	-68	-63
-75	-64	-67	-46	-65	-51	-49	-14
-91	-86	-39	-10	-79	-84	-7	-19
-47	-80	-3	-43	-11	-87	-97	-38
-50	-44	-42	-46	-83	-41	-27	-86
-29	-8	-78	-80	-88	-24	-64	-23
-85	-62	-65	-35	-67	-11	-58	-78
-61	-8	-27	-57	-90	-70	-27	-25

Варіант 33

29	26	37	63	14	35	31	61
24	62	89	75	51	37	49	77
38	67	36	98	5	92	61	39
51	28	95	4	70	21	14	55
85	14	33	79	30	87	65	22
83	38	47	77	69	43	59	84
97	69	7	78	25	76	57	8
18	21	26	71	62	59	22	33

Варіант 34

-26	-29	-42	-31	-28	-30	-41	-54
-65	-94	-30	-63	-20	-68	-73	-31
-10	-92	-52	-1	-15	-38	-15	-2
-6	-24	-66	-92	-32	-6	-15	-63
-65	-33	-29	-55	-33	-3	-88	-25
-76	-18	-51	-49	-24	-85	-48	-41
-67	-36	-68	-2	-74	-72	-90	-75
-12	-21	-53	-72	-4	-91	-73	-18

Варіант 35

76	95	50	39	25	11	29	64
27	33	92	78	65	29	89	38
73	60	64	36	36	42	19	31
43	36	32	30	24	24	5	97
92	56	86	42	36	30	21	96
13	2	24	80	71	62	10	84
68	98	61	8	19	86	40	65
85	78	10	88	33	18	16	20

Варіант 36

-62	-62	-70	-97	-35	-76	-78	-28
-53	-36	-9	-62	-1	-93	-5	-92
-36	-38	-42	-83	-52	-97	-98	-98
-59	-90	-79	-73	-91	-51	-34	-84
-24	-85	-3	-82	-21	-56	-20	-50
-14	-37	-35	-73	-96	-2	-29	-51
-68	-79	-41	-17	-28	-69	-54	-45
-7	-34	-2	-89	-12	-81	-86	-79

Варіант 37

67	5	68	28	40	82	68	52
95	42	78	35	25	14	85	48
63	32	78	84	65	69	50	88
89	8	53	68	39	45	94	13
12	1	25	85	64	36	48	61
59	54	42	75	78	34	96	11
74	64	92	77	10	11	95	38
37	24	58	34	17	19	92	58

Варіант 38

-15	-52	-52	-35	-77	-76	-59	-49
-58	-67	-59	-42	-38	-59	-66	-70
-97	-69	-91	-53	-13	-64	-24	-27
-15	-88	-43	-53	-43	-90	-35	-42
-5	-18	-32	-3	-52	-7	-61	-75
-45	-14	-10	-13	-27	-23	-66	-84
-8	-17	-37	-16	-55	-46	-43	-37
-19	-70	-68	-71	-42	-93	-10	-72

Продовження табл. 1

Варіант 39

88	72	88	68	4	83	76	7
35	7	70	61	50	94	3	94
80	3	26	40	20	75	98	87
40	13	11	59	8	84	84	5
82	86	33	27	81	74	19	87
80	77	51	98	52	90	52	47
77	75	56	87	98	74	52	3
12	56	75	72	15	21	3	97

Варіант 40

-22	-54	-18	-1	-56	-9	-21	-25
-91	-71	-61	-55	-74	-58	-8	-7
-74	-45	-73	-20	-53	-29	-64	-5
-82	-23	-67	-76	-48	-40	-66	-85
-13	-90	-57	-22	-3	-70	-17	-16
-32	-19	-95	-40	-51	-26	-56	-36
-16	-13	-48	-57	-65	-96	-69	-89
-86	-92	-10	-13	-46	-3	-11	-40

Варіант 41

43	83	29	65	46	60	73	42
8	82	77	26	55	22	75	69
56	41	38	30	41	16	15	62
80	59	86	7	26	79	81	60
34	39	54	17	55	22	49	94
62	43	90	44	40	66	25	46
39	75	48	86	68	49	77	69
29	49	46	3	13	78	34	31

Варіант 42

-61	-89	-74	-45	-95	-38	-30	-17
-27	-86	-93	-41	-86	-18	-70	-56
-78	-7	-62	-8	-32	-46	-44	-88
-21	-97	-24	-66	-63	-83	-83	-48
-19	-67	-14	-91	-4	-36	-11	-73
-46	-52	-15	-13	-20	-20	-41	-42
-68	-4	-82	-98	-52	-42	-87	-29
-6	-76	-25	-63	-73	-81	-14	-41

Таблиця 2 – Варіанти розподілу ймовірностей

№ варіанта	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
1	0.19	0.06	0.10	0.08	0.27	0.01	0.26	0.03
2	0.05	0.06	0.01	0.03	0.22	0.22	0.21	0.20
3	0.09	0.14	0.14	0.08	0.15	0.11	0.18	0.10
4	0.18	0.14	0.14	0.21	0.06	0.01	0.10	0.15
5	0.32	0.13	0.22	0.05	0.13	0.03	0.08	0.04
6	0.11	0.08	0.05	0.19	0.03	0.13	0.21	0.21
7	0.23	0.12	0.02	0.09	0.24	0.16	0.13	0.02
8	0.05	0.05	0.08	0.05	0.18	0.23	0.19	0.17
9	0.22	0.11	0.08	0.17	0.13	0.16	0.08	0.06
10	0.12	0.10	0.23	0.04	0.04	0.20	0.02	0.24
11	0.18	0.04	0.05	0.07	0.03	0.08	0.21	0.34
12	0.06	0.26	0.21	0.19	0.08	0.06	0.01	0.13
13	0.10	0.10	0.19	0.13	0.19	0.05	0.19	0.05
14	0.13	0.07	0.06	0.16	0.14	0.08	0.24	0.12
15	0.19	0.16	0.18	0.03	0.01	0.29	0.05	0.09
16	0.16	0.13	0.19	0.03	0.11	0.17	0.08	0.11
17	0.08	0.16	0.11	0.11	0.15	0.10	0.12	0.18
18	0.03	0.02	0.16	0.26	0.18	0.04	0.02	0.28
19	0.22	0.09	0.04	0.13	0.02	0.15	0.22	0.12
20	0.02	0.10	0.24	0.24	0.22	0.09	0.06	0.04
21	0.15	0.16	0.01	0.00	0.19	0.16	0.06	0.26
22	0.12	0.22	0.17	0.00	0.24	0.09	0.14	0.03
23	0.11	0.08	0.02	0.14	0.16	0.17	0.15	0.17
24	0.18	0.01	0.15	0.19	0.13	0.17	0.15	0.03

Продовження табл. 2

25	0.18	0.15	0.03	0.13	0.13	0.22	0.16	0.01
26	0.05	0.20	0.14	0.20	0.09	0.07	0.11	0.14
27	0.06	0.17	0.08	0.16	0.16	0.09	0.12	0.16
28	0.18	0.02	0.08	0.21	0.07	0.19	0.07	0.18
29	0.07	0.13	0.08	0.18	0.20	0.05	0.20	0.09
30	0.22	0.12	0.01	0.23	0.24	0.12	0.05	0.01
31	0.17	0.32	0.09	0.16	0.04	0.04	0.07	0.12
32	0.00	0.33	0.25	0.09	0.02	0.18	0.05	0.08
33	0.22	0.00	0.11	0.01	0.11	0.03	0.27	0.24
34	0.19	0.05	0.12	0.01	0.16	0.14	0.23	0.10
35	0.22	0.07	0.04	0.22	0.01	0.14	0.19	0.12
36	0.14	0.01	0.12	0.22	0.06	0.23	0.17	0.05
37	0.13	0.04	0.12	0.04	0.25	0.11	0.26	0.05
38	0.07	0.02	0.21	0.22	0.17	0.14	0.17	0.01
39	0.10	0.06	0.13	0.13	0.16	0.23	0.08	0.11
40	0.10	0.20	0.10	0.01	0.12	0.18	0.15	0.14
41	0.02	0.14	0.14	0.08	0.04	0.25	0.10	0.23
42	0.09	0.01	0.09	0.17	0.24	0.19	0.12	0.10

Контрольні питання.

1. Що являє собою прийняття рішення.
2. Вибір оптимального варіанта рішення для випадку, коли кожному варіанту рішення відповідає єдиний зовнішній стан.
3. Вибір оптимального варіанта рішення для випадку, коли кожному варіанту рішення, унаслідок різних зовнішніх умов, можуть відповідати різні результати рішень.
4. Мінімаксний критерій (ММ).
5. Умови, при яких використовується мінімаксний критерій.
6. Критерій Байєса-Лапласа (BL-критерій).
7. Умови, при яких використовується критерій Байєса-Лапласа.
8. Критерій Севіджа (S-критерій).
9. Умови, при яких використовується критерій Севіджа.

Лабораторна робота № 6

Методи пошуку і вибору рішень. Критерій Гурвіца. Критерій Ходжа - Лемана. Критерій Гермейєра

Похідні критерії прийняття рішень

Критерій Гурвіца (HW-критерій).

Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Гурвіц запропонував критерій, оцінна функція якого знаходиться десь між точками зору граничного оптимізму і крайнього песимізму.

$$z_{HW} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right), \qquad (1)$$

де $0 \le c \le 1$ - множник ваги.

Тоді $E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right) \wedge 0 \le c \le 1 \right\}$.

Правило вибору відповідно до HW-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого і найбільшого результатів для кожного рядка.

Вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $c = 1$ критерій Гурвица перетворюється в ММ-критерій, а для $c = 0$ він перетворюється в критерій азартного гравця. Найчастіше множник ваги приймається в якості деякої «середньої» точки зору, $c = 0{,}5$.

При виборі HW-критерію пред'являються наступні вимоги:

- про ймовірності появи станів F_j нічого невідомо;
- реалізується лише мала кількість рішень;
- допускається деякий ризик.

Критерій Ходжа-Лемана (HL-критерій).

Оцінна функція даного критерію визначається виразом

$$z_{HL} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right), 0 \le \nu \le 1. \qquad (2)$$

Множина оптимальних рішень записується у виді

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}.$$

Параметр ν виражає ступінь довіри до розподілу ймовірностей. Цей параметр практично не піддається оцінці, тобто вибір параметра ν піддається впливу суб'єктивізму.

Критерій Гермейєра (G-критерій).

Даний критерій орієнтований на величини втрат, тобто на негативні значення усіх e_{ij}.

Як оцінна функція виступає вираження:

$$z_G = \max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} p_j, \qquad (3)$$

$$\text{тоді } E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} p_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}.$$

Оскільки в господарських задачах переважно мають справу з витратами, умова $e_{ij} < 0$ звичайна виконується.

У випадку ж, коли серед величин e_{ij} зустрічаються і позитивні значення, можна перейти до строго негативних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$, при $a > 0$, де $a = \max_{i,j} e_{ij} + 1$. Вибір оптимального варіанта рішення істотно залежить від a.

Правило вибору відповідно до G-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у ній результату на ймовірність відповідного стану F_j. Вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

G-критерій узагальнює ММ-критерій. У випадку рівномірного розподілу $p_j = \frac{1}{n}$, $j = 1,2,...,n$ критерії G і ММ стають ідентичними.

Умови застосовності G-критерію:

- імовірності появи станів F_j відоме;
- рішення реалізовується один або багато разів;
- допускається деякий ризик.

Якщо функція розподілу відома не настільки явно, то при вживанні G-критерію, мають невиправдано великий ризик.

Приклад.

Розглядається задача вибору оптимального варіанта рішення за допомогою похідних критеріїв Гурвіца, Ходжа-Лемана, Гермейєра для матриці рішень із лабораторної роботи №5 із такими ж умовами розподілу ймовірностей появи зовнішніх станів, якщо відомо, що c = 0,5, v = 0,5.

<u>*Рішення.*</u> Спочатку знайдемо оптимальний варіант рішення за допомогою HW-критерію, для цього визначимо максимальні $\max_j e_{ij}$ і мінімальні

$\min\limits_j e_{ij}$ результати кожного рядка і помножимо їх на коефіцієнти (1-c)=0,5, c=0,5, відповідно. Адже

$$0{,}5\times\max_j e_{ij}=\begin{Vmatrix}-2{,}4\times0{,}5\\-4{,}8\times0{,}5\\-1{,}2\times0{,}5\\-1{,}58\times0{,}5\\-4{,}8\times0{,}5\\-3{,}11\times0{,}5\\-3{,}26\times0{,}5\\-2{,}1\times0{,}5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1{,}2\\-2{,}4\\-0{,}6\\-0{,}79\\-2{,}4\\-1{,}55\\-1{,}63\\-1{,}05\end{Vmatrix}\qquad 0{,}5\times\min_j e_{ij}=\begin{Vmatrix}-8{,}17\times0{,}5\\-8{,}0\times0{,}5\\-8{,}5\times0{,}5\\-9{,}11\times0{,}5\\-9{,}02\times0{,}5\\-9{,}26\times0{,}5\\-6{,}8\times0{,}5\\-8{,}5\times0{,}5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-4{,}08\\-4{,}0\\-4{,}25\\-4{,}55\\-4{,}51\\-4{,}63\\-3{,}4\\-4{,}25\end{Vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir}=\left(c\min\limits_j e_{ij}+(1-c)\max\limits_j e_{ij}\right)$ здобуває виду

$$\|e_{ir}\|=\begin{Vmatrix}-1{,}2\\-2{,}4\\-0{,}6\\-0{,}79\\-2{,}4\\-1{,}55\\-1{,}63\\-1{,}05\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}-4{,}08\\-4{,}0\\-4{,}25\\-4{,}55\\-4{,}51\\-4{,}63\\-3{,}4\\-4{,}25\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-5{,}28\\-6{,}4\\-4{,}85\\-5{,}34\\-6{,}91\\-6{,}18\\-5{,}03\\-5{,}3\end{Vmatrix}\begin{matrix}\\\\\leftarrow E_3\\\\\\\\\\\\\end{matrix}$$

По формулі (1) значення оцінюючої функції критерію Гурвіца є $Z_{HW}=-4{,}85$, що відповідає оптимальному варіанту $E_{i0}=\{E_3\}$.

Застосуємо критерій Ходжа-Лемана для пошуку оптимального варіанта. Знайдемо математичні чекання $\sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij}p_j$ і мінімальні елементи $\min\limits_j e_{ij}$ кожного рядка і помножимо їх на коефіцієнти v = 0,5 і (1- v)=0,5, відповідно. Адже

$$0{,}5\times\sum_{j=1}^{n}e_{ij}\,p_j=\begin{Vmatrix}-5{,}692\times0{,}5\\-6{,}048\times0{,}5\\-5{,}756\times0{,}5\\-6{,}165\times0{,}5\\-6{,}118\times0{,}5\\-5{,}366\times0{,}5\\-5{,}249\times0{,}5\\-5{,}085\times0{,}5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-2{,}846\\-3{,}024\\-2{,}878\\-3{,}082\\-3{,}059\\-2{,}683\\-2{,}624\\-2{,}542\end{Vmatrix}\qquad 0{,}5\times\min_j e_{ij}=\begin{Vmatrix}-8{,}17\times0{,}5\\-8{,}0\times0{,}5\\-8{,}5\times0{,}5\\-9{,}11\times0{,}5\\-9{,}02\times0{,}5\\-9{,}26\times0{,}5\\-6{,}8\times0{,}5\\-8{,}5\times0{,}5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-4{,}08\\-4{,}0\\-4{,}25\\-4{,}55\\-4{,}51\\-4{,}63\\-3{,}4\\-4{,}25\end{Vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir}=\left[v\sum\limits_{j=1}^{n}e_{ij}p_j+(1-v)\min\limits_j e_{ij}\right]$ здобуває виду

$$\left\| e_{ir} \right\| = \left\| \begin{matrix} -2,846 \\ -3,024 \\ -2,878 \\ -3,082 \\ -3,059 \\ -2,683 \\ -2,624 \\ -2,542 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} -4,08 \\ -4,0 \\ -4,25 \\ -4,55 \\ -4,51 \\ -4,63 \\ -3,4 \\ -4,25 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -6,926 \\ -7,024 \\ -7,128 \\ -7,632 \\ -7,569 \\ -7,313 \\ -6,024 \\ -6,792 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_7 \\ \\ \end{matrix}$$

Далі застосуємо оцінюючу функцію (2) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{HL} = \max\limits_{i} e_{ir} = -6,024$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_7 \}$.

Для використання критерію Гермейєра побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \min\limits_{j} \left(e_{ij}\ p_j \right)$:

$$\min_j \left\| \begin{matrix} -5,1 \times 0,3 & -7,5 \times 0,1 & -2,4 \times 0,1 & -7,1 \times 0,1 & -8,17 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -3,85 \times 0,1 & -6,4 \times 0,1 \\ -5,7 \times 0,3 & -5,06 \times 0,1 & -6,3 \times 0,1 & -7,9 \times 0,1 & -8,0 \times 0,1 & -5,1 \times 0,1 & -4,8 \times 0,1 & -6,22 \times 0,1 \\ -8,5 \times 0,3 & -5,72 \times 0,1 & -6,18 \times 0,1 & -3,1 \times 0,1 & -1,2 \times 0,1 & -5,5 \times 0,1 & -7,2 \times 0,1 & -3,16 \times 0,1 \\ -7,5\,1 \times 0,3 & -6,15\, \mathrm{v} 0,1 & -4,2 \times 0,1 & -1,58 \times 0,1 & -7,7 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -9,11 \times 0,1 & -4,18 \times 0,1 \\ -4,8 \times 0,3 & -6,12 \times 0,1 & -6,0 \times 0,1 & -8,2 \times 0,1 & -5,13 \times 0,1 & -7,14 \times 0,1 & -9,02 \times 0,1 & -5,17 \times 0,1 \\ -3,11 \times 0,3 & -5,46 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -7,3 \times 0,1 & -3,11 \times 0,1 & -9,26 \times 0,1 & -7,0 \times 0,1 & -6,0 \times 0,1 \\ -5,17 \times 0,3 & -3,26 \times 0,1 & -5,4 \times 0,1 & -4,8 \times 0,1 & -6,8 \times 0,1 & -5,3 \times 0,1 & -6,12 \times 0,1 & -5,3 \times 0,1 \\ -2,1 \times 0,3 & -6,83 \times 0,1 & -5,2 \times 0,1 & -5,7 \times 0,1 & -6,11 \times 0,1 & -8,5 \times 0,1 & -5,4 \times 0,1 & -6,81 \times 0,1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \min_j \left\| \begin{matrix} -1,53 & -0,75 & -0,24 & -0,71 & -0,82 & -0,62 & -0,39 & -0,64 \\ -1,71 & -0,51 & -0,63 & -0,79 & -0,80 & -0,51 & -0,48 & -0,62 \\ -2,55 & -0,57 & -0,62 & -0,31 & -0,12 & -0,55 & -0,72 & -0,32 \\ -2,25 & -0,62 & -0,42 & -0,16 & -0,77 & -0,62 & -0,91 & -0,42 \\ -1,44 & -0,61 & -0,60 & -0,82 & -0,51 & -0,71 & -0,90 & -0,52 \\ -0,93 & -0,55 & -0,62 & -0,73 & -0,31 & -0,93 & -0,70 & -0,60 \\ -1,55 & -0,33 & -0,54 & -0,48 & -0,68 & -0,53 & -0,61 & -0,53 \\ -0,63 & -0,68 & -0,52 & -0,57 & -0,61 & -0,85 & -0,54 & -0,68 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -1,53 \\ -1,71 \\ -2,55 \\ -2,25 \\ -1,44 \\ -0,93 \\ -1,55 \\ -0,85 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{matrix} = \left\| e_{ir} \right\|$$

Величина оцінюючої функції відповідно до формули (3) є $Z_G = \max_i e_{ir} = -0,85$.

Знайдемо оптимальний варіант рішення: $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

Порядок виконання роботи.

Дано матрицю рішень, розміром 8×8, результатами якої є або прибуток або збитки. Здійснити вибір оптимального варіанта рішення за допомогою критеріїв:

4. Гурвіца;
5. Ходжа - Лемана;
6. Гермейєра.

Матриця рішень і розподіл імовірностей появи зовнішніх станів вибираються по номері в списку групи.

Варіанти матриці рішень і розподіл імовірностей появи зовнішніх станів зазначені відповідно в таблицях 1 і 2 лабораторні роботи № 5.

Контрольні питання.

1. Критерій Гурвіца (HW-критерій).
2. Вимоги, які висуваються, при при виборі критерію Гурвіца (HW-критерію).
3. Критерій Ходжа-Лемана (HL-критерій).
4. Критерій Гермейєра (G-критерій).
5. Умови застосування критерію Гермейєра (G-критерію).

Лабораторна робота № 7

Класифікація об'єктів. Стратегія найближчого сусіда. Стратегія далекого сусіда

Основна мета *кластерного аналізу* - виділити у вихідних багатомірних даних такі однорідні підмножини, щоб об'єкти усередині групи були схожі один на одного, а об'єкти з різних груп - не схожі. Під "подібністю" розуміється близькість об'єктів у багатомірному просторі ознак, і тоді задача зводиться до виділення в цьому просторі природних скупчень (кластерів) об'єктів, що вважаються однорідними групами.

У кластерном аналізі існує проблема виміру близькості об'єктів. Основні труднощі, що виникають при цьому: неоднозначність вибору способу нормування й визначення відстані між об'єктами.

Нормування показників (ознак) об'єктів являє собою перехід до деякого однакового опису всіх ознак і введенню нової умовної одиниці виміру. Нормування необхідно, коли ознаки обмірювані в різних одиницях виміру.

Приведемо найбільш розповсюджені способи нормування ознак (перехід від вихідних значень x до нормованого z):

$$\begin{aligned}
z^1 &= (x-\overline{x})/\sigma,\\
z^2 &= x/\overline{x},\\
z^3 &= x/x',\\
z^4 &= x/x_{max},\\
z^5 &= (x-\overline{x})/(x_{max}-x_{min}),
\end{aligned}$$

де $\overline{x},\sigma$ - відповідно середнє й середнє квадратичне відхилення ознаки x; x' - деяке еталонне (нормативне) значення x, $x_{\max}, x_{\min}$ - найбільше й найменше значення x.

Відстанню (метрикою) між об'єктами в просторі ознак називається така величина $d(x,y)$, що задовольняє аксіомам:

1) симетрія: $d(x,y)=d(y,x)\geq 0$,

2) нерівність трикутника. Дано три об'єкти x,y,z відстані між ними задовольняють умові: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$,

3) розрізнення нетотожних об'єктів: якщо $d(x,y) \neq 0$, те $x \neq y$,

4) нерозрізненість ідентичних об'єктів: якщо $d(x,y)=0$, те x й y ідентичні.

Пераховані чотири вимоги повинні бути обов'язковими атрибутами міри подібності між об'єктами. Розглянемо основні способи визначення близькості між об'єктами або міри подібності. Виділяють наступні метрики:

***Лінійна відстань (манхетеньска відстань) або відстань міських кварталів)*:**

$$d_{ij}^{L} = \sum_{k=1}^{m} \left| x_{ik} - x_{jk} \right|, \tag{1}$$

де d_{ij} - відстань між об'єктами i, j, x_{ik} - значення k-ї ознаки для i-го об'єкта;

***Евклідова відстань*:**

$$d_{ij}^{E} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ik} - x_{jk} \right)^2}\ ; \tag{2}$$

***Узагальнена відстань Мінковського*:**

$$d_{ij}^{P} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ik} - x_{jk} \right)^p}\ ; \tag{3}$$

Метрики відстані мають недоліки, що складаються в тім, що оцінка подібності залежить від розходжень у зсуву даних. Ознаки, у яких одночасно великі абсолютні значення і стандартні відхилення, можуть принизити вплив ознак із меншими абсолютними розмірами і стандартними відхиленнями. Щоб зменшити такий вплив, вихідні дані нормують за допомогою нормувань z^1 або z^5.

Огляд методів кластерного аналізу

Хоча немає загальноприйнятого строгого математичного визначення поняття «кластер», багато дослідників виділяють основні *властивості кластерів* - щільність, дисперсія, розмір, форма й віддільність.

Щільність - це властивість, що дозволяє визначити кластер, як скупчення крапок у просторі даних, відносно щільне в порівнянні з іншими областями простору, що містять або мало крапок, або не мають їх зовсім.

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання крапок у просторі щодо центра кластера. Дисперсія й щільність тісно взаємозалежні між собою. Кластер можна назвати «щільним», якщо всі крапки знаходяться поблизу його центра ваги.

Властивість кластерів - ***розмір*** зв'язаний з дисперсією. Якщо кластер можна ідентифікувати, то можна виміряти його радіус. Ця властивість корисна, якщо розглянуті кластери є гіперсферами в багатомірному просторі.

Форма - це розташування крапок у просторі. Незважаючи на те що кластери зображують у формі гіперсфер або еліпсоїдів, можливі кластери, які мають подовжені форми.

Віддільність характеризує ступінь перекриття кластерів і наскільки далеко друг від друга вони розташовані в просторі.

Згідно Еверіту кластери - це безперервні області простору з відносно високою щільністю крапок, відділені від інших таких само областей областями з відносно низькою щільністю крапок.

Кластерні методи утворюють сім основних сімейств:

1) ієрархічні агломеративні методи;

2) ієрархічні дівізімні методи;

3) ітеративні методи угруповання;

4) методи пошуку модальних значень щільності;

5) факторні методи;

6) методи згущень;

7) методи, що використовують теорію графів.

Дані сімейства відповідають різним підходам до створення груп, і застосування різних методів до тих самих даних може привести до результатів, які сильно розрізняються.

Із сімейств кластерних методів найбільше часто на практиці вживаються ***ієрархічні агломеративні методи,*** що використовують метрики відстані d_{ij}^{L}, d_{ij}^{E}, d_{ij}^{P} для визначення міри подібності між об'єктами. Ієрархічні агломеративні методи розрізняються, головним чином, ***за правилами (стратегіями) побудови кластерів.*** Існує багато різних стратегій створення кластерів, кожна з яких породжує специфічний ієрархічний метод: найближчого сусіда, далекого сусіда, середнього незваженого зв'язку, гнучкий, агломеративне об'єднання й інші. Однак, усі ці методи підлеглі єдиному алгоритму.

Прямий алгоритм класифікації n об'єктів.

Нехай задана матриця $A_{n\times m}$, де n - число об'єктів, m - число ознак, що описують кожний об'єкт; $a_{ij}, i=1,...,n,\ j=1,...,m$ - елемент матриці $A_{n\times m}$, що визначає значення j-ї ознаки для i-го об'єкта; $a_{ij} \geq 0$.

Крок 1. На цьому кроці кожний об'єкт вважається окремим кластером, тобто на початку маємо n кластерів. Обчислимо усі відстані d_{ij}, i, j=1,2,...,n по одній з формул (1) - (3). Складемо матрицю G розміром $n \times n$ відстаней між усіма n об'єктами, тобто

$$G = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2n} \\ . & . & . & . \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & ... & d_{n-1,n} \\ d_{n1} & d_{n2} & ... & d_{nn} \end{Vmatrix}$$

Крок 2. У матриці G відшукаємо мінімальну відстань d_{ij}, $i \neq j$, (це значить, що i-й і j-й об'єкти мають максимальну міру подібності) і складемо з них новий (n+1)-й кластер. Позначимо цей кластер через $h=(i \cup j)$. Якщо є декілька мінімальних d_{ij}, то вибирають який-небудь із них.

Крок 3. Обчислимо відстані між новим кластером h і іншими об'єктами, що залишилися ще некласифікованими , по формулі

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma \left| d_{ik} - d_{jk} \right| \qquad (4)$$

$$k = 1,2,...,i-1,i+1,...,j-1,j+1,...,n,$$

де d_{ik} - відстань між k-м об'єктом і i-м об'єктом, що входить у кластер h, d_{jk} - відстань між k-м об'єктом і j-м об'єктом, що входить у кластер h, d_{ij} - відстань, що було знайдено на кроці 2. По формулі (4) не визначається відстань між окремими об'єктами, а визначається відстань між кластером і кластером або між кластером і об'єктом.

Параметри α_1, α_2, β, γ визначають стратегії об'єднання кластерів у нові кластери.

Крок 4. Побудуємо нову матрицю відстаней G_1 з матриці G шляхом додавання (n+1)-го рядка і (n+1)-го стовпця з елементами d_{kh}, k=1,2,...,i-1,i+1,...,j-1,j+1,...,n, потім i-й і j-й рядки, а також i-й і j-й стовпці викреслюються. Для матриці G_1 шукаємо знову мінімальну відстань d_{ij}, $i \neq j$ і формуємо наступний (n+2)-і кластер. Далі, якщо цей кластер має номер (2n-1), то процедура формування кластерів закінчується й переходимо до кроку 5, якщо номер кластера не дорівнює (2n-1), те переходимо до кроку 3. На кожному кроці запам'ятовуємо мінімальну величину і до якого кластера вона відноситься.

Крок 5. Будуємо так называну дендрограму (графік покрокової класифікації об'єктів), де по осі абсцис відкладаємо номера об'єктів (кластерів), а по осі ординат рівень об'єднання або значення мінімальних d_{ij}. Кінець алгоритму.

Монотонні стратегії об'єднання

Стратегія найближчого сусіда. Відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома найближчими об'єктами в цих кластерах:

$$d_{kh} = \min(d_{ik}, d_{jk}) \qquad (5)$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = -0.5$.

Стратегія є монотонною, тобто від кроку до кроку значення максимальної міри подібності не зменшується.

Дана стратегія стійка до будь-яких перетворень даних і будь-якому переупорядкуванню об'єктів у матриці A. Головний недолік стратегії найближчого сусіда в тім, що вона приводить до появи «ланцюжків» (появі великих довгастих кластерів).

Стратегія далекого сусіда. У цій стратегії відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома самими віддаленими представниками цих кластерів:

$$d_{kh} = \max(d_{ik}, d_{jk}) \qquad (6)$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = 0.5$

Головний недолік даної стратегії полягає в тому, що на перших кроках утворюються кластери з несхожих об'єктів.

Приклад.

Дано матрицю ознак $\| e_{ij} \|$ розміром $n \times m$, n=7, m=2. Здійснити класифікацію об'єктів у схожі групи (кластери), використовуючи прямій алгоритм автоматичної класифікації. Для обчислення відстані між об'єктами необхідно використовувати метрику Евкліда й стратегію найближчого сусіда.

Рішення.

Крок 1. Маємо 7-м об'єктів, що описуються двома ознаками e_1, e_2.

$$\| e_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 9 & 3 \\ 7 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix}$$

Вважаємо, що кожний окремий об'єкт визначає кластер. Побудуємо початкову матрицю відстаней G, для цього обчислимо відстані Евкліда по формулі

$$d_{ij}^{E} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} \left(e_{ik} - e_{jk} \right)^2} \; , \; i, j = 1, 2, \; ..., 7 \; , \; i \neq j \; .$$

Матриця відстаней симетрична і має вигляд:

№ кластера	1	2	3	4	5	6	7		min
1	0.00	5.66	5.83	2.24	1.00	4.12	4.24		1.00
2		0.00	1.41	5.39	5.00	5.00	1.41		1.41
3			0.00	6.08	5.00	4.12	2.00		2.00
4				0.00	2.83	5.83	4.12		2.83
5					0.00	3.16	3.61		3.16
6						0.00	4.12		4.12
7							0.00		

Крок 2. Елемент $d_{15} = \min\limits_{i,j} d_{ij}^{E} = 1$ матриці відстаней G є мінімальний, тобто об'єкти 1 і 5 найбільш схожі, і складають новий 8-й кластер або $8 = (1 \cup 5)$.

min= 1.00 Кластер 8: 1,5

Крок 3,4. Обчислимо по формулі (5) відстані між новим 8-м кластером і іншими об'єктами, що залишилися поки некласифікованими, тобто

$$d_{k8} = \min(d_{1k}, d_{5k}), \; k = 2,3,4,6,7,$$

$$d_{28} = 5.00 \; , \; d_{38} = 5.00 \; , \; d_{48} = 2.24 \; , \; d_{68} = 3.16 \; , \; d_{78} = 3.61$$

Нова матриця відстаней G_1 формується з матриці G шляхом додавання 8-го рядка і 8-го стовпця з елементами d_{28}, d_{38}, d_{48}, d_{68}, d_{78}, а потім 1-й, 5-й рядки і 1-й, 5-й стовпці віддаляються.

№ кластера	2	3	4	6	7	8		min
2	0.00	1.41	5.39	5.00	1.41	5.00		1.41
3		0.00	6.08	4.12	2.00	5.00		2.00
4			0.00	5.83	4.12	2.24		2.24
6				0.00	4.12	3.16		3.16
7					0.00	3.61		3.61
8						0.00		

На матриці G_1 шукаємо мінімальний елемент, тобто - це елемент 1,41, що відповідає d_{23} або d_{27}. Обираємо який-небудь з них, наприклад, d_{23} = 1,41, тобто об'єкти 2 і 3 поєднуються в новий 9-й кластер.

min = 1.41 Кластер 9: 2,3

Оскільки номер 9-го кластера не дорівнює (2n-1)=13, то повторюємо кроки 3,4.

По формулі (5) обчислимо відстані між 9-м кластером і іншими об'єктами й кластерами, тобто

$$d_{k9} = \min(d_{2k}, d_{3k}),\ k = 4,6,7,8.$$

$$d_{49} = 5.39,\ d_{69} = 4.12,\ d_{79} = 1.41,\ d_{89} = 5.00$$

Нова матриця відстаней G_2 формується з матриці G_1 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами d_{49}, d_{69}, d_{79}, d_{89}, потім 2-й, 3-й рядки і 2-й, 3-й стовпці віддаляються.

№ кластера	4	6	7	8	9		min
4	0.00	5.83	4.12	2.24	5.39		2.24
6		0.00	4.12	3.16	4.12		3.16
7			0.00	3.61	1.41		1.41
8				0.00	5.00		5.00
9					0.00		

На матриці G_2 шукаємо мінімальний елемент, це елемент 1,41, що відповідає d_{79}, тобто об'єкти 7 і 9 поєднуються в новий 10-й кластер.

min = 1.41 Кластер 10: 7,9

Оскільки номер $10 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3,4.

Обчислюємо відстані між 10-м кластером і іншими об'єктами й кластерами, тобто

$$d_{k,10} = \min(d_{7k}, d_{9k}),\ k = 4,6,8.$$

$$d_{4,10} = 4.12,\ d_{6,10} = 4.12,\ d_{8,10} = 3.61$$

Нова матриця відстаней G_3 формується з матриці G_2 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{4,10}$, $d_{6,10}$, $d_{8,10}$, причому 7-й, 9-й рядки і 7-й, 9-й стовпці віддаляються.

№ кластера	**4**	**6**	**8**	**10**		**min**
4	0.00	5.83	2.24	4.12		2.24
6		0.00	3.16	4.12		3.16
8			0.00	3.61		3.61
10				0.00		

Мінімальний елемент матриці G_3 є $d_{4,8} = 2.24$, тобто об'єкти 4 і 8 поєднуються в новий 11-й кластер.

min = 2.24 Кластер 11: 4,8

Оскільки номер $11 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3,4.

Обчислимо відстані між 11-м кластером і іншими об'єктами або кластерами, тобто

$$d_{k,11} = \min(d_{4k}, d_{8k}),\ k = 6,10.$$

Отже, $d_{6,11} = 3.16$, $d_{10,11} = 3.61$.

Нова матриця відстаней G_4 формується з матриці G_3 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{6,11}$, $d_{10,11}$, причому 4-й, 8-й рядки і 4-й, 8-й стовпці віддаляються.

№ кластера	**6**	**10**	**11**		**min**
6	0.00	4.12	3.16		3.16
10		0.00	3.61		3.61
11			0.00		

Мінімальний елемент матриці G_4 є $d_{6,11} = 3.16$, тобто об'єкти 6 і 11 поєднуються в новий 12-й кластер.

min= 3.16 Кластер 12: 6,11

Оскільки номер $12 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3,4.

Обчислимо відстані між 12-м кластером і іншими об'єктами й кластерами або об'єктами, що залишилися, тобто

$$d_{k,12} = \min(d_{6k}, d_{11k}),\ k = 10.$$

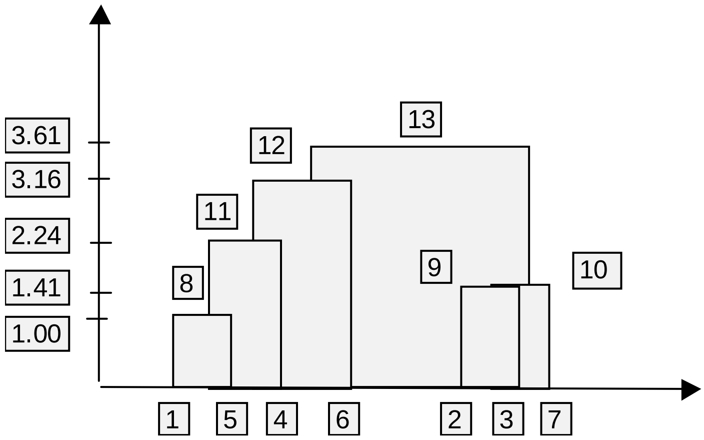
$$d_{10,12} = 3.61$$

Нова матриця відстаней G_5 формується з матриці G_4 шляхом додавання рядка й стовпця з елементом $d_{10,12}$, причому 6-й, 11-й рядки і 6-й, 11-й стовпці віддаляються.

№ кластера	**10**	**12**		**min**
10	0.00	3.61		3.61
12		0.00		

Мінімальний елемент матриці G_5 єдиний $d_{10,12} = 3.61$, тобто об'єкти 10 і 12 поєднуються в новий 13-й кластер. Тому що номер 13 = 13, то алгоритм закінчується й переходимо до кроку 5.

Крок 5. Будуємо дендрограму об'єднань.



Порядок виконання роботи.

Дано матрицю ознак, розміром 8×2. Класифікувати об'єкти в подібні групи, використовуючи як метрику Евклідову відстань і стратегію об'єднання:

1. Найближчого сусіда;
2. Далекого сусіда.

Матриця ознак вибирається за номером у списку групи.

Варіанти зазначені в таблиці 1 лабораторної роботи № 5. З вихідної матриці як матрицю ознак вибирають перші два стовпці, при цьому знак числа не враховується.

Контрольні питання.

1. Основна мета кластерного аналізу.
2. Що розуміється під "подібністю" об'єктів.
3. Нормування показників (ознак) об'єктів.
4. Найбільш розповсюджені способи нормування ознак.
5. Яка величина може називатися відстанню (метрикою) між об'єктами в просторі ознак.
6. Лінійна відстань (манхетеньска відстань або відстань міських кварталів).
7. Евклідова відстань.
8. Узагальнена відстань Мінковського.

9. Властивість кластерів: щільність.
10. Властивість кластерів: дисперсія.
11. Властивість кластерів: розмір.
12. Властивість кластерів: форма.
13. Властивість кластерів: віддільність.
14. Визначення кластерів згідно Еверіту.
15. Прямий алгоритм класифікації n об'єктів.
16. Стратегія найближчого сусіда.
17. Стратегія далекого сусіда.

Лабораторна робота № 8

Класифікація об'єктів. Стратегія середнього зв'язку що, не зважується. Гнучка стратегія. Стратегія агломеративного об'єднання

Стратегія середнього зв'язку, що не зважується.

Запропонована Міченером і Сокелом у 1958 році як «засіб боротьби» із крайностями стратегій найближчого й далекого сусіда. Найчастіше використовується варіант, коли обчислюють середню арифметичну подібність між об'єктами кластера й кандидатом на включення. Стратегія монотонна.

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma \left| d_{ik} - d_{jk} \right| \qquad (1)$$

$$k = 1,2,...,i-1,i+1,...,j-1,j+1,...,n,$$

Параметри стратегії у формулі (1) наступні $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = \gamma = 0.$

Тобто

$$d_{kh} = 0.5\, d_{ik} + 0.5\, d_{jk}$$

Дана стратегія вибудовує кластери, що у просторі ознак утворюють гіперсфери.

Гнучка стратегія: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 1,\ \alpha_1 = \alpha_2, \beta < 1, \gamma = 0.$ Стратегія монотонна, її властивості цілком залежать від β. Якщо β>0, то стратегія стискає простір і навпаки розтягує простір при β<0. На практиці, звичайно, використовують значення $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.625,\ \beta = -0.25,\ \gamma = 0.$

$$d_{kh} = 0.625\, d_{ik} + 0.625\, d_{jk} - 0.25\, d_{ij}$$

Стратегія дає кластери у виді гіперсфер.

Стратегія агломеративного об'єднання: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta = \gamma = 0.$

$$d_{kh} = d_{ik} + d_{jk}$$

Усі перераховані стратегії належать до класу монотонних стратегій з параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$, для яких справедливі нерівності: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta \geq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \quad \gamma \geq -\min(\alpha_1, \alpha_2)$.

Порядок виконання роботи.

Дано матрицю ознак, розміром 8×2. Класифікувати об'єкти в подібні групи, використовуючи як метрику Евклідову відстань і стратегію об'єднання:

7. Стратегія середнього незваженого зв'язку.
8. Гнучка стратегія.
9. Стратегія агломеративного об'єднання.

Матриця ознак вибирається за номером у списку групи.

Варіанти зазначені в таблиці 1 лабораторної роботи № 5. З вихідної матриці як матрицю ознак вибирають перші два стовпці, при цьому знак числа не враховується.

Контрольні питання.

1. Стратегія середнього незваженого зв'язку.
2. Гнучка стратегія.
3. Стратегія агломеративного об'єднання.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Спицнадель В. Н. Основы системного анализа: Учеб. пособие. – СПб.: «Изд. дом «Бизнесс-пресса», 2000 г. – 326 с.
2. Романов В. Н. Системный анализ для инженеров. – СПб: СПб гос. университет, 1998.
3. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991.
4. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П., Введение в системный анализ. – М.: Высш. школа, 1989.
5. Мандель М. Д. Кластерный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1988.
6. Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: Математические основы. – М.: Мир, 1978.
7. Романов В. Н. Основы системного анализа // Методические указания к практическим занятиям. – СПб.: СЗПИ, 2000.
8. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Теорія прийняття рішень в задачах контролю та управління» для студентів денної форми навчання спеціальностей «Прикладна математика», «Системний аналіз та управління», «Інформатика» / Упоряд.: Д. О. Примаков, Л. Ю. Артюх. – Х.: ХТУРЕ, 1999. – 48 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки

до виконання лабораторних робіт
та самостійної роботи

з дисципліни

«Основи системного аналізу»

(для студентів 2 курсу денної форми навчання
за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»,
спеціальностей «Промислове та цивільне будівництво»,
«Міське будівництво та господарство»)

Укладачі: **Федоров** Микола Вікторович,
Хренов Олександр Михайлович

Відповідальний за випуск *М. В. Федоров*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2011, поз. 457М

Підп. до друку 09.06.2011 р. Формат 60×84/16

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,8

Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.