

УДК 621.01 : 531

А.Г.ЮРЬЕВ, д-р техн. наук, И.Р.СЕРЫХ, канд. техн. наук

*Белгородский государственный технологический университет им. В.Г.Шухова
(Российская Федерация)*

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ

Синтез стержневой системы ведется на основе стационарности функционала Кастильяно с дополнительными условиями. Для сжатых стержней вводится виртуальное состояние с редуцированной внутренней силой.

Синтез стержневой системы ведется на основе стационарности функционала Кастильяно с дополнительными условиями. Для сжатых стержней вводится виртуальный стан с редуцированной внутренней силой.

Pivotal systems design is conducted in the basis of Castigliano functional stationary state with complementary conditions. Virtual state with reduced internal forces is for compressed pivots introduced.

Ключевые слова: структурный синтез, оптимальная ферма, безопасная устойчивость, функционал Кастильяно.

Структурный синтез означает создание конструкции, которая в пределах оговоренных требований эффективно выполняет функциональное назначение. В 80-е годы прошлого века на смену теоретически необоснованному критерию весовой оптимизации пришел энергетический критерий [1]. Потенциальная энергия системы в положении устойчивого равновесия достигает абсолютного минимума по перемещениям в функциональном пространстве, расширенном за счет полей функций конфигурации и (или) модулей упругости материала. Это происходит при приобретении конструкцией максимальных жесткостных показателей, так что в точке стационарности функционал имеет минимакс – минимум по функциям перемещений максимумов по функциям конфигурации и (или) модулей упругости материала.

Задачу отыскания формы наиболее устойчивого упругого стержня с заземленными концами, т.е. такого стержня, для которого основная критическая сила потери устойчивости имеет наибольшее значение по сравнению со всеми подобными стержнями той же длины, объема и материала, рассматривали Таджабахт и Келлер [2].

Дальнейшие исследования [3] показали, что постановка задачи с простой модой потери устойчивости не приводит к оптимальному решению. Это следует из существования заземленных стержней другой формы, но с прежними значениями объема, длины и констант материала, которые характеризуются большей величиной силы, вызывающей потерю устойчивости равновесия.

Н. Ольхофф [3] предложил более совершенную постановку задачи. Аналитическое исследование основано на функционале потенциальной энергии продольного изгиба стержня с учетом слагающих, отражающих ограничения на объем и минимум площади сечения. Кроме того, вводится удобная нормировка двух мод потери устойчивости. Задача оптимизации для этого функционала формулируется с учетом кратности критической силы, а основные уравнения получаются вариационным путем. Оптимальная задача без геометрических ограничений, а также задача для простой моды содержатся в расширенной формулировке как частные случаи.

Уравнения, описывающие задачу оптимизации, получены как уравнения Эйлера – Лагранжа, следующие из стационарности упомянутого выше функционала по отношению к вариации параметров. Они составляют в совокупности нелинейную интегро-дифференциальную задачу на собственные значения.

Метод решения включает численную процедуру последовательных приближений, основанную на конечно-разностной формулировке уравнений, полученных формальным интегрированием.

Оптимальный стержень оказывается симметричным с точностью до погрешности вычислений (в процедуре решения симметрия не предполагалась). Тем не менее, он имеет сложную конфигурацию. Следует, однако, помнить, что даже в тех случаях, когда из-за большой стоимости или трудностей технологического характера возможности применения стержня или стержневой системы оптимальной формы ограничены, исследования оптимальных проектов имеют важное значение, так как позволяют теоретически оценить качество традиционных конструкций.

Но при большом количестве элементов, составляющих стержневую систему, описанный аналитический метод теряет силу. Примером могут служить фермы, для которых в настоящей статье предлагается новое решение задачи.

Обратимся к принципу возможных изменений напряженного состояния и рассмотрим изопериметрическую задачу для пространственной фермы. Функционал Кастильяно имеет вид [4]:

$$I = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i^2 \ell_i}{2EA_i} + \alpha N_i \ell_i T_i \right) + \lambda_1 \sum_{i=1}^n A_i \ell_i, \quad (1)$$

где N_i – продольное усилие в i -м стержне, число которых n , от силового воздействия; ℓ_i и A_i – длина и площадь поперечного сечения; E – модуль продольной упругости; α – коэффициент линейного расширения материала; T_i – температура i -го стержня; λ_1 – множитель Лагранжа.

Следствием стационарности функционала являются m уравнений совместности деформаций (m – число лишних связей):

$$\frac{\partial I}{\partial N_m} = 0, \quad (2)$$

уравнение объема (V_0 – заданный объем)

$$\sum_{i=1}^n A_i \ell_i = V_0 \quad (3)$$

и r уравнений структурообразования (r – число варьируемых параметров); в частности, при варьировании площадей сечений они принимают вид:

$$\frac{N_i^2}{2EA_i^2} = \lambda_1 \quad (= \text{const}). \quad (4)$$

В фермах со сжатыми стержнями необходимо выполнение условия безопасной устойчивости. Это эквивалентно введению виртуального состояния с внутренними силами N_i/φ_i для сжатых стержней (φ_i – коэффициент уменьшения расчетного сопротивления R). Аналогично уравнению (4) получаем

$$\frac{N_i^2}{2E\varphi_i^2 A_i^2} = \lambda_1 \quad (= \text{const}). \quad (5)$$

Уравнения структурообразования являются составляющими критерия оптимальности конструкции фермы. В частности, уравнения (4) свидетельствуют о равнонапряженности растянутых стержней фермы из однородного материала.

В общем случае получаем систему нелинейных уравнений (2)-(5), которую в большинстве случаев можно свести к одному нелинейному разрешающему уравнению.

Рассмотренные примеры показали, что оптимальная ферма отвечает минимальному расходу материала и минимальной потенциальной энергии деформации. Оптимальная ферма является также конструкцией наибольшей жесткости, поскольку ей соответствует минимальная работа внешних сил. Если задана лишь одна сила, то перемещение по ее направлению будет минимальным при оптимальном варианте фермы.

В заключение отметим, что проблеме безопасной устойчивости стержней ферм на уровне их оптимального проектирования не уделялось должного внимания. Часто встречающаяся в литературе теорема Леви сформулирована без учета возможной потери устойчивости стерж-

ней. Теория Максвелла - Мичелла не получила практического применения при проектировании ферм главным образом из-за того, что конструкции на ее основе неудовлетворительны с точки зрения устойчивости равновесия.

1.Юрьев А.Г. Строительная механика: синтез конструкций / А.Г. Юрьев. – М.: МИСИ, 1982. – 100 с.

2.Tadjbakhsh, I. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues / I.Tadjbakhsh, J.V.Keller // J. Appl. Mech. – 1962. – V.29. – P.159-164.

3.Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций: вопросы вибрации и потери устойчивости / Н. Ольхофф; пер. с англ. А.М. Самсонова; под ред. К.А.Лурье и А.В. Черкаева. – М.: Мир, 1981. – 277 с.

4.Юрьев А.Г. Оптимальное проектирование фермы с учетом безопасной устойчивости / А.Г.Юрьев // Предотвращение аварий зданий и сооружений: Сб. науч. тр. НИИ «Промбезопасность». – М.: НИИ «Промбезопасность», 2008. – С.305-310.

Получено 27.04.2012

УДК 624.74 : 539.3

В.П.АГАПОВ, д-р техн. наук

МГАКХиС, г.Москва (Российская Федерация)

А.В.ВАСИЛЬЕВ

ООО НСЦ «Надежность», г.Москва (Российская Федерация)

О МОДЕЛИРОВАНИИ КОЛОНН СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ОБЪЕМНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Предлагается новый подход к моделированию колонн прямоугольного поперечного сечения при расчете строительных конструкций методом конечных элементов. При этом каждая колонна представляется совокупностью объемных конечных элементов в виде шестигранников с произвольной разбивкой по сечению и высоте. Промежуточные узлы сетки конечных элементов колонны исключаются на стадии формирования ее матричных характеристик. В результате этого при незначительном увеличении числа степеней свободы конструкции удается избавиться от недостатков, присущих традиционному способу моделирования колонн одномерными элементами.

Пропонується новий підхід до моделювання колон прямокутного поперечного перерізу при розрахунку будівельних конструкцій методом кінцевих елементів. При цьому кожна колона представляється сукупністю об'ємних кінцевих елементів у вигляді шестигранників з довільною розбивкою по перетину і висоті. Проміжні вузли сітки кінцевих елементів колони виключаються на стадії формування її матричних характеристик. В результаті цього при незначному збільшенні числа ступенів свободи конструкції вдається позбутися від недоліків, властивих традиційному способу моделювання колон однимірними елементами.

The new approach to rectangular column modeling in finite element analysis of building structures is suggested. Each column is presented by the set of the volume 8-node elements with arbitrary discretization on the cross section and on the height of the column. The inner nodes of the finite element mesh are excluded sequentially layer by layer, thus reducing the stiffness matrix and other characteristics of the column to its top and bottom cross sections.

Ключевые слова: строительные конструкции, колонны прямоугольного сечения, метод конечных элементов, суперэлементы.