

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА**

**В. П. ШПАЧУК
В. О. ПУШНЯ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з курсу
«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»**

*(для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання
бакалаврів напрямку підготовки 6.070101 – «Транспортні технології
(за видами транспорту)»*

**Харків
ХНАМГ
2012**

Шпачук В.П. Конспект лекцій з курсу «Технічна механіка» (для студентів 2 курсу денної та заочної форми навчання бакалаврів напряму підготовки 6.070101 – «Транспортні технології (за видами транспорту)» / В.П. Шпачук, В.О. Пушня; Харк. нац. акад. міськ госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 113 с.

Автори: В.П. Шпачук
В.О. Пушня

Рецензенти:

- М.Ф. Пацегон, д-р техн. наук, професор кафедри теоретичної механіки Харківського національного університету ім. В.М. Каразіна;

- О.К. Морачковський, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Харківського національного технічного університету «ХПІ».

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 9 від 12.04.2011 р.

© Шпачук В.П., Пушня В.О., 2012

ВСТУП

Різні конструкції, машини й механізми використовуються в різноманітних галузях техніки і здебільшого вони складаються з аналогічних деталей і вузлів. Звідси випливає, що використовуються ті самі методи аналізу, розрахунку й проектування їх. Рішення цих задач поєднує «Технічна механіка», що складається із трьох основних розділів: теоретичної механіки; основи розрахунків на міцність конструкцій, деталей машин і механізмів.

Теоретичні основи побудови машин і розрахунки конструкцій і деталей машин на міцність почали формуватися за далеких часів. Це було пов'язано із практичним використанням механічних пристроїв таких як блок, похила площина, важіль для побудови великих споруд. Основні поняття механіки розвивалися у нерозривному зв'язку із практичними потребами людства. Протягом історії розвитку механіки можна простежити взаємний зв'язок між проблемами механіки й техніки.

Перші наукові результати в галузі механіки знаходимо в працях Аристотеля (384-322 р. до н. е.) і Архімеда (287-212 р. до н. е.), якому належать один з основних законів гідростатики й теорія важеля.

Перші дослідження в галузі теорії механізмів виконані Леонардо да Вінчі (1452-1519).

М. Копернік (1473-1543) у загальних рисах накреслив геліоцентричну теорію руху планет, а І. Кеплер підтвердив цю теорію законами, які дали змогу І. Ньютону обґрунтувати закон всесвітнього тяжіння. Важливі дослідження провели Галілей (1564-1642), Х. Гюйгенс (1629-1695) і Р. Декарт (1596-1650). І. Ньютон (1643-1727) у своїй визначній праці «Математичні начала натуральної філософії» об'єднав, узагальнив і обґрунтував досягнення механіки на той час. Закони класичної механіки визначають найбільш загальні властивості механічних рухів.

Швидкий і успішний розвиток науки сприяв блискучому розв'язанню багатьох практичних задач із галузі техніки. Розрахунки конструкцій і теорія механізмів виникли наприкінці 18 ст.

Серед видатних учених 18 ст. слід відзначити Й. Бернуллі (1667-1748), Д. Даламбера (1717-1783), Ж. Лагранжа (1736-1813). Лагранж розробив загальний аналітичний метод розв'язування задач динаміки. Світове значення мають праці П.А. Чебишева (1821-1894). Ряд проблем механіки та теорії механізмів поставлено й розв'язано С.А. Чаплигінін (1859-1942), М.Е. Жуковським (1847-1921), якому належать праці з механіки та аеромеханіки.

Розрахунки елементів конструкцій – опір матеріалів є наука про міцність частин конструкцій, будівель і машин. Ця наука, побудована на положеннях механіки, яка розглядає рівновагу тіл під дією зовнішніх і внутрішніх сил, і спирається на ряд положень, одержаних на основі експериментальних досліджень поведінки матеріалів під навантаженням. Основи цієї науки було закладено у далекому минулому, але широкого розвитку вона набула в період розвитку техніки в 19 ст. Праці Остроградського, Журавського, Кіричова, Крилова, присвячені опору матеріалів, є класичними і мають світове значення. Велику практичну цінність мають праці Галеркіна, Келдиша, Диника, Власова.

У курсу «Деталі машин» на основі викладених положень механіки й опору матеріалів подано основні положення й принципи побудови конструктивних форм деталей, що складають машину. Основи побудови деталей машин почали формуватися із середини 19 ст. у зв'язку з розвитком техніки й машинобудування. Тоді при розрахунках і побудові деталей машин в основу брали міцність деталей. Збільшення навантажень і швидкостей руху частин і механізмів машин висунуло наприкінці 19 ст. принципи побудови деталей, основані на врахуванні допустимих деформацій і стійкості деталей проти спрацювання, як основних характеристик надійної роботи машин.

У цілому курс технічної механіки має метою дати студентам загально технічну підготовку, тобто закласти фундамент для успішного навчання й подальшої праці.

1. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Теоретична механіка вивчає загальні закони руху та рівноваги матеріальних тіл і виникаючі між ними взаємодії. Ґрунтується теоретична механіка на законах Ньютона і називається класичною механікою на відміну від механіки теорії відносності Ейнштейна і квантовій механіці. В основі класичної механіки лежить поняття про абстрактний геометричний простір, якій за своїми властивостями не зв'язаний з рухом матерії. Приймається, що час протікає рівномірно, однаково, незалежно від тих явищ, які відбуваються. Теоретична механіка складається із трьох розділів: статика, кінематики, і динаміки. Статика вивчає еквівалентність систем сил і умови їх рівноваги, кінематика - геометричні властивості руху тіл, динаміка – механічний рух тіл під дією сил. Теоретична механіка розглядає рух та рівновагу абсолютно твердого тіла, це тіло, для котрого відстань між будь-якими його точками не змінюється під дією інших тіл.

1.1. Статика

Статикою називається розділ теоретичної механіки, у якому вивчаються загальні положення про сили та умови рівноваги сил, які діють на тверде тіло або на систему твердих тіл.

1.1.1. Основні поняття й аксіоми статики, в'язі та їх реакції

Сила – міра механічної взаємодії тіл. Сила величина векторна. Числове значення сили називають модулем сили. Пряму, по якій напрямлений вектор сили, називають *лінією дії сили*. На рис 1.1 зображено силу P , прикладену в точці A , яка має лінію дії $m - n$. Одиниця вимірювання сили – ньютон ($[H] = [кг \cdot м/с^2]$).

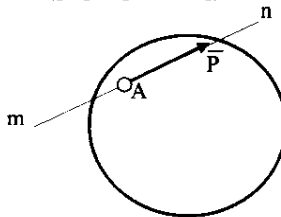


Рис. 1.1

Механічною взаємодією тіл називається взаємодія, за якої відбувається зміна взаємного розташування тіл або зміна їх форми.

Тіло називають *вільним*, якщо інші тіла не заважають його переміщенню у просторі; у противному разі тіло називають *невільним*.

Система сил називається зрівноваженою (еквівалентною нулю), якщо тіло під дією цих сил може знаходитися у стані спокою.

Системи сил називаються еквівалентними, якщо одну систему сил, що діють на вільне тверде тіло, можна замінити іншою, не порушуючи при цьому стану спокою чи руху тіла.

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то цю силу називають *рівнодійною*.

Зосереджена сила – це сила прикладена в одній точці тіла.

Розподілені сили – сили, які діють на точки поверхні, лінії чи об'єму.

Аксіоми статички являють собою результат узагальнення дослідів та спостережень людства.

Аксіома 1 (аксіома інерції). Ізольоване тіло зберігає стан спокою або прямолінійного рівномірного руху відносно системи координат, що рухається поступально, рівномірно й прямолінійно.

Аксіома 2 (аксіома рівноваги двох сил). Для рівноваги вільного твердого тіла, на яке діє дві сили, необхідно і достатньо, щоб ці сили були рівні за модулем і діяли вздовж однієї лінії дії у протилежних напрямках (рис 1.2): $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

Аксіома 3 (аксіома додавання або відкидання зрівноваженої системи сил). Рівновага або механічний рух твердого тіла не порушиться, якщо до тіла прикласти або відняти зрівноважену систему сил.

Висновок з аксіом 2 і 3. Механічний стан твердого тіла не порушиться, якщо силу перенести в довільну точку тіла вздовж лінії її дії.

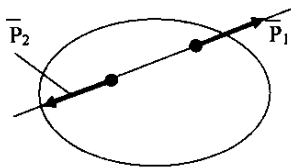


Рис. 1.2

Нехай на тіло в точці A діє сила \vec{P}_1 (рис 1.3). У довільно взятій точці B лінії дії сили \vec{P}_1 прикладемо сили $\vec{P}_2 = -\vec{P}_3 = \vec{P}_1$ (аксіома 2,3).

Відкинемо зрівноважені сили $\vec{P}_1 = -\vec{P}_3$ (аксіома 3). Залишається сила \vec{P}_2 , яка прикладена в точці B .

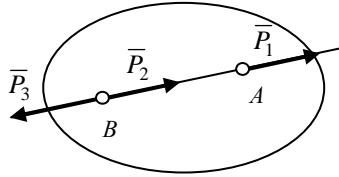


Рис. 1.3

Одержаний висновок, справедливий тільки для сил, які діють на абсолютно тверде тіло.

Аксиома 4 (аксіома про паралелограм сил). Система двох сил, прикладених в одній точці твердого тіла, має рівнодійну, яка прикладена в тій самій точці і яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах (рис. 1.4) :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \quad (1.1)$$

Модуль рівнодійної знаходиться за теоремою косинусів

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} . \quad (1.2)$$

Окремі випадки :

Сили діють по одній прямій в одному напрямі ($\alpha = 0$):
 $R = F_1 + F_2$.

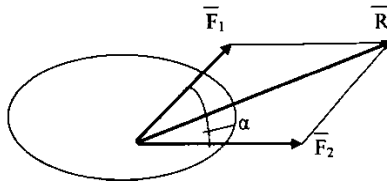


Рис. 1.4

Сили діють по одній прямій у протилежному напрямі ($\alpha = 180$):
 $R = F_1 - F_2$.

Сили діють під прямим кутом ($\alpha = 90$):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} .$$

Аксиома 5 (аксіома взаємодії тіл). Сили взаємодії двох тіл однакові за модулем і протилежно напрямлені по одній прямій (рис. 1.5) ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$).

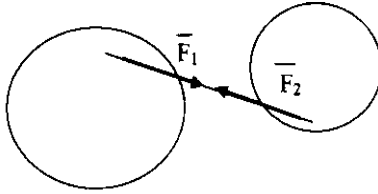


Рис. 1.5

Аксиома 6 затвердіння дозволяє застосувати умови рівноваги, знайдені для абсолютно твердого тіла, до вивчення рівноваги тіл і середовищ, які можуть деформуватись (троси, пружини, рідина, тощо).

На практиці звичайно зустрічаються з невідільними тілами. Наступна аксіома дає можливість розглядати невідільне тіло як вільне.

В'язю називаються тіла або обмеження, які накладають на розміщення тіла й швидкості точок його в просторі.

Сила, із якою в'язь діє на тіло, називається реакцією в'язі, або просто реакцією.

Аксиома 7 (аксіома про звільнення від в'язей). Невідільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі і замінити їх реакціями.

Активні сили намагаються рухати тіло, а реактивні сили протидіють цьому переміщенню.

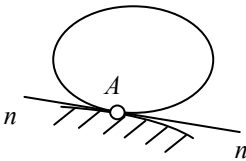
Числове значення реакцій завжди залежить від активних сил. Визначення реакцій має велике значення для розрахунку міцності конструкцій.

Розглянемо, як зображаються реакції основних типів в'язей.

Ідеальна гладенька поверхня. Реакція поверхні напрямлена перпендикулярно до дотичної площини ($n - n$ або $t - t$) і прикладена у точці стиску тіл (рис 1.6, 1.7).

Гнучка в'язь (нитка, канат, ланцюг). Реакція гнучкого тіла напрямлена вздовж дотичної у будь-якої точці нитки (рис 1.8, 1.9).

Невідільне тіло



Вільне тіло

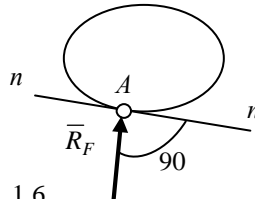


Рис. 1.6

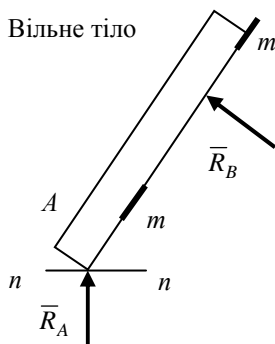
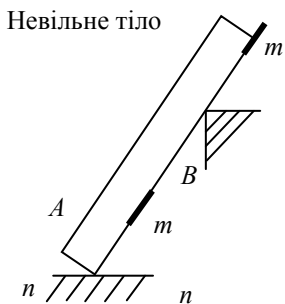


Рис. 1.7

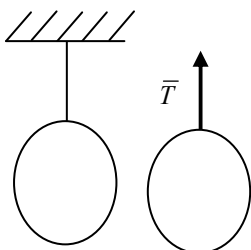


Рис. 1.8

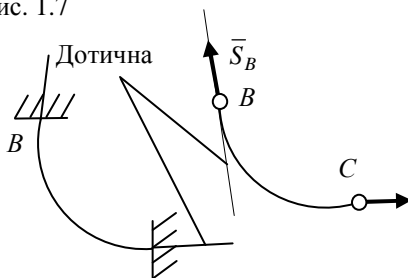


Рис. 1.9

Циліндричний гладенький шарнір. Шарнір – це рухоме з'єднання двох тіл, яке допускає тільки обертання навколо спільної осі. Реакція R_A циліндричного шарніра A може мати довільний напрям, перпендикулярний до осі шарніра. Реакцію шарніра зображають у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових $X_A; Y_A$ (рис 1.10)

$$R = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}.$$

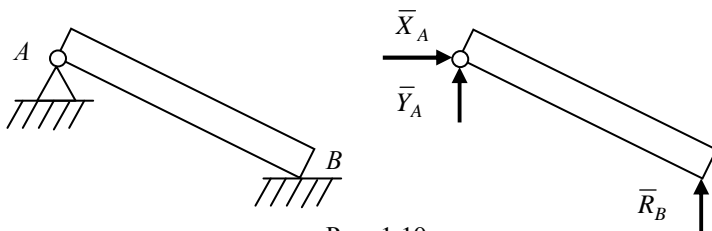


Рис. 1.10

Рухомий циліндричний шарнір. Реакція \bar{R}_A шарніра нормальна опорній поверхні котків (рис. 1.11).

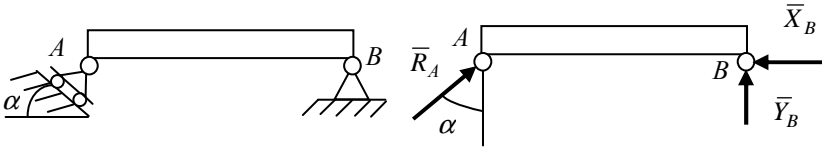


Рис. 1.11

Ідеальний стержень – це стержень, закріплений шарнірами на кінцях (рис. 1.12) і на нього діють тільки реакції шарнірів. Реакція ідеального стержня напрямлена по прямій, яка з’єднує шарніри (AB або CD).

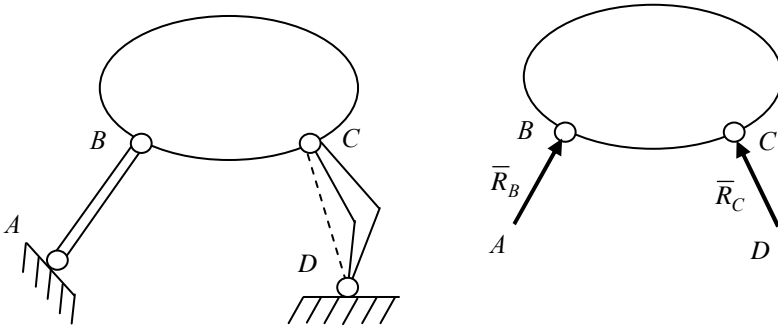


Рис. 1.12

Защемлення (жорстке кріплення). Балка AB жорстко закріплена в стіні. Реакції защемлення зображуються із двох взаємно перпендикулярних складових \bar{X}_A ; \bar{Y}_A і пари сил із моментом M_A (рис. 1.13).

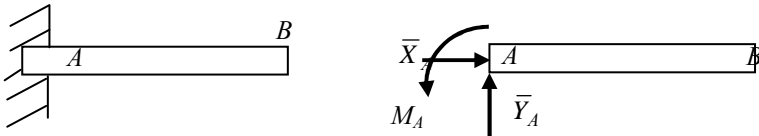


Рис. 1.13

1.1.2. Система збіжних сил, рівнодійна та умови рівноваги системи збіжних сил

Система збіжних сил – це система сил, лінії дій яких перетинаються в одній точці (рис 1.14).

Аксиома паралелограма сил дає змогу визначити рівнодійну й

умови рівноваги системи збіжних сил.

Рівнодійна системи збіжних сил дорівнює векторній сумі цих сил:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_K . \quad (1.4)$$

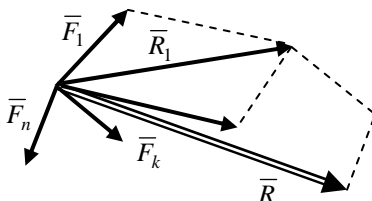


Рис. 1.14

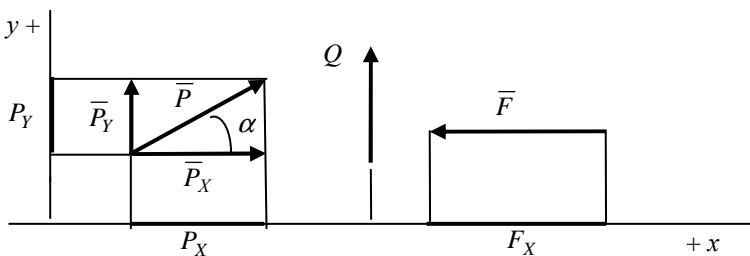
Система збіжних сил врівноважується, якщо рівнодійна цієї системи дорівнює нулю:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_K = 0 . \quad (1.5)$$

При розв'язуванні задач користуються методом проєкцій.

Проекцією сили на вісь називають відрізок, що лежить між двома перпендикулярами, опущеними на вісь із початку й кінця вектора сили (рис 1.15).

Установимо **правило знаків**, якщо напрям проєкції сили на вісь збігається з додатним напрямом осі, то проєкція вважається додатною, і навпаки.



$$P_X = P \cos \alpha ; P_Y = P \sin \alpha ; Q_X = 0 ; Q_Y = Q ; F_X = -F ; F_Y = 0 .$$

Рис. 1.15

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проєктується на цю вісь у натуральну величину: $Q_Y = Q ; F_X = -F$.

Якщо вектор сили перпендикулярний осі, то його проєкція на цю вісь дорівнює нулю: $Q_X = 0 ; F_Y = 0$.

Аналітичне визначення рівнодійної системи збіжних сил.

Проектуючи рівність (1.4) знаходимо проекції рівнодійної на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} R_X &= \sum F_{KX}; & R_Y &= \sum F_{KY}; & R_Z &= \sum F_{KZ}; \\ \text{модуль рівнодійної:} \\ R &= \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}; \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

та напрямні косинуси: $\cos(R, Ox) = R_X / R$; $\cos(R, Oy) = R_Y / R$; $\cos(R, Oz) = R_Z / R$.

Отже, проекції рівнодійної системи збіжних сил на осі координат дорівнюють сумам проекцій складових.

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.

На підставі (1.5) і (1.6) маємо:

$$\sum F_{KX} = 0; \quad \sum F_{KY} = 0; \quad \sum F_{KZ} = 0. \quad (1.7)$$

Отже, система збіжних сил врівноважується, коли суми проекцій сил на осі координат дорівнюють нулю.

Приклад 1.1. Лампу вагою ІОН закріплено вірвочками AB і AC .

Визначити натяг вірвочок, якщо $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 120^\circ$ (рис 1.16,а).

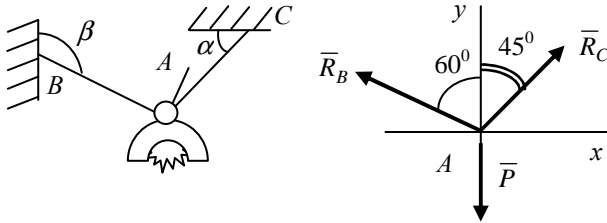


Рис. 1.16

Розглянемо рівновагу вузла A (рис 1.16,б). У цій точці прикладена сила P (вага лампи) і реакції вірвочок \bar{R}_B , \bar{R}_C . Рівняння рівноваги одержаної системи збіжних сил:

$$\sum F_{KX} = -\bar{R}_B \sin 60 + \bar{R}_C \sin 45 = 0;$$

$$\sum F_{KY} = \bar{R}_B \cos 60 + \bar{R}_C \cos 45 = 0.$$

Визначимо невідомі $\bar{R}_B = 4,48$ Н, $\bar{R}_C = 5,49$ Н.

1.1.3. Момент сили відносно точки у просторі, момент сили для плоскої системи сил, момент сили відносно осі у просторі

Обертальна дія сили характеризується моментом сили.

Моментом сили відносно точки називається вектор, прикладений у точці, перпендикулярний до площини, в якій лежить точка й лінія дії сили, і напрямлений у той бік, звідки обертання силою видно проти ходу стрілки годинника (рис 1.17).

Величина моменту дорівнює добутку модуля сили на плече:

$$m_0(F) = F \cdot h. \quad (1.8)$$

Плече сили відносно точки – це перпендикуляр, опущений з точки на лінію дії сили.

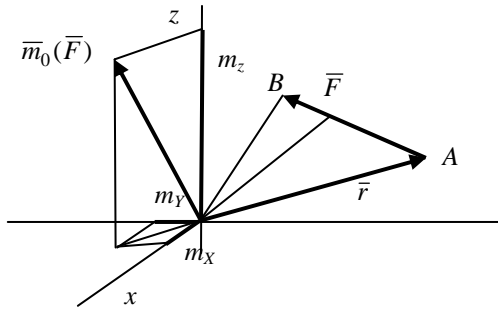


Рис. 1.17

Вектор моменту сили можна визначити у вигляді векторного добутку:

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \cdot \bar{F}, \quad (1.9)$$

де r – радіус-вектор точки прикладення сили F .

Момент сили відносно точки:

- не зміниться, якщо точку прикладення сили переносити вздовж її лінії дії;

- дорівнює нулю тільки тоді, коли сила дорівнює нулю або коли моментна точка лежить на лінії дії сили (плече сили дорівнює нулю).

Нехай $F_x; F_y; F_z$ – проєкції сили на осі координат; x, y, z – координати точки прикладення сили (або проєкції вектора r); i, j, k – одиничні вектори осей координат.

Тоді (1.9) визначається так

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \cdot \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ z & y & x \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix} = \begin{cases} \bar{i}(yF_Z - zF_Y) + \\ + \bar{j}(yF_X - xF_Z) + \\ + \bar{k}(yF_Y - yF_X) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_X \\ m_Y \\ m_Z \end{cases} \quad (1.10)$$

проекції на осі координат вектора $\bar{m}_0(\bar{F})$ – моменту сили відносно початку координат.

Модуль моменту й напрямні косинуси його визначаються так

$$\left. \begin{aligned} m_0(F) &= \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2} \\ \cos(m_0, Ox) &= m_X / m_0; \cos(m_0, Oy) = m_Y / m_0; \cos(m_0, Oz) = m_Z / m_0 \end{aligned} \right\} (1.11)$$

$$\text{Тут } m_X = yF_Z - zF_Y; m_Y = zF_X - xF_Z; m_Z = xF_Y - yF_X - \quad (1.12)$$

проекції на осі координат вектора $\bar{m}_0(\bar{F})$ моменту сили відносно початку координат.

Плоска система сил. Коли всі сили лежать в одній площині (плоска система сил), то момент сили відносно точки, що лежить у цій самій площині, можна розглядати як алгебраїчну величину, яка дорівнює проекції моменту на вісь розташовану перпендикулярно цій площині (рис. 1.18).

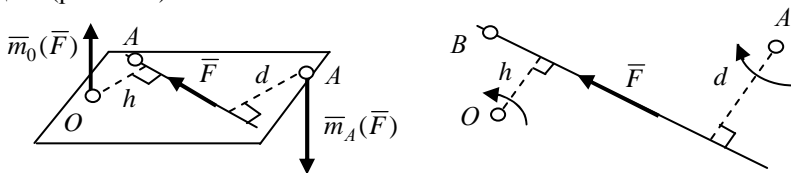


Рис. 1.18

де h або d – плече сили F .

Моментом сили відносно точки називається називають добуток модуля сили на її плече:

$$m_0(F) = F \cdot h; \quad m_B(F) = 0.$$

Момент сили вважають додатним, якщо сила намагається обертати своє плече проти ходу стрілки годинника, і навпаки. Одна й та сила відносно різних точок може створювати додатний і від'ємний момент (рис. 1.18).

Момент сили відносно точки, що лежить на лінії дії сили, дорівнює нулю, оскільки тут плече дорівнює нулю.

Одиниця моменту сили – ньютон на метр [Н.м].

Приведемо також поняття про момент сили відносно осі.

Момент сили відносно осі – це алгебраїчна величина, яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі,

відносно точки перетину осі із площиною:

$$m_z(F) = m_A(F_{\Pi}) = \pm F_{\Pi} \cdot h. \quad (1.13)$$

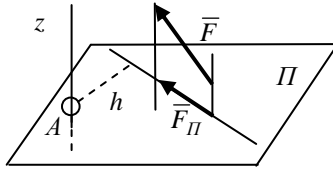


Рис. 1.19

Тут h – плече сили F_{Π} відносно точки A ; F_{Π} – проекція сили F на площину Π , перпендикулярну до осі z .

Отже, щоб знайти момент сили відносно осі, слід спроектувати силу на площину перпендикулярну до осі, проведену через довільну точку, що лежить на осі, і потім помножити цю проекцію

на довжину перпендикуляра, опущеного з точки на лінію дії проекції сили. Момент сили вважають додатним, якщо з додатного напрямку осі проекція сили намагається обернути своє плече проти ходу стрілки годинника, і навпаки.

Можна стверджувати, що величина моменту сили відносно осі не залежить від положення площини і дорівнює проекції моменту на цю вісь.

Отже, аналітично момент сили відносно відповідної осі обчислюється формулами (1.12).

1.1.4. Пара сил, момент пари, теорема про суму моментів сил пари, властивості пар, теорема про додавання пар, рівновага системи пар сил

Система двох паралельних сил, які рівні за модулем і протилежні за напрямом називається парою сил або просто парою (рис. 1.20).

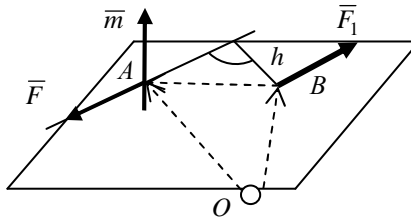


Рис. 1.20

Отже, сили пари $F = -F_1$.

Система сил, які утворюють пару, не може знаходитись у рівновазі (див. аксіому рівноваги двох сил).

З курсу фізики відомо, що дві антипаралельні сили еквівалентні рівнодіючій, яка дорівнює різниці цих сил. Для пари рівнодіюча дорівнює нулю:

$$R = F - F_1 = 0. \quad (1.14)$$

Тобто, пара сил не має рівнодіючої і її можна зрівноважити тільки парою сил.

Дія пари на тверде тіло зводиться до деякого обертового ефекту.

Для характеристики цього ефекту введемо поняття моменту пари, який являє собою вектор, перпендикулярний до площини пари і напрямлений так, щоб із кінця цього вектора сили пари намагаються обертати тіло проти ходу стрілки годинника.

Модуль моменту пари дорівнює добутку однієї із сил пари на її плече:

$$m = F \cdot h = F_1 h. \quad (1.15)$$

Плече пари (h) – довжина перпендикуляра між лініями дії сил пари.

Вектор моменту пари з урахуванням (1.9) можна визначити так

$$\vec{m} = \vec{BA} \cdot \vec{F} = \vec{BA} \cdot \vec{F}_1. \quad (1.16)$$

Теорема про суму моментів сил пари. *Векторна сума моментів сил пари відносно довільної точки дорівнює моменту пари.*

Нехай задана пара сил (рис. 1.20), візьмемо довільну точку O у просторі і знайдемо суму моментів:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}_1) = \vec{OA} \cdot \vec{F} + \vec{OB} \cdot \vec{F}_1 = (\vec{OA} - \vec{OB}) \cdot \vec{F} = \vec{BA} \cdot \vec{F} = \vec{m}. \quad (1.17)$$

Тут $\vec{F} = \vec{F}_1$ (пара сил); $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$ або $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$; $\vec{m} = \vec{BA} \cdot \vec{F}$ – момент пари (див. 1.16). Теорема доведена.

Дія пари на тверде тіло цілком визначається її моментом, який є вільним вектором.

З доведеної теореми випливають такі властивості пар.

1. Не змінюючи механічного стану твердого тіла, пару можна переміщувати як завгодно, зберігаючи вектор моменту пари (рис 1.21).

Нехай дана пара m_p (положення а) і пара m_Q (положення б).

Моменти цих пар рівні: $\vec{m}_p = \vec{m}_Q$.

Рівнодіюча кожної пари дорівнює нулю: $R_p = R_Q = 0$ (див. (1.14)) і обертальний ефект пар однаковий: сума моментів сил кожної пари

відносно будь-якої точки дорівнює моменту пари (див. (1.17)). Таким чином, пара m_P еквівалентна m_Q ($m_P = m_Q$; $R_P = R_Q = 0$).

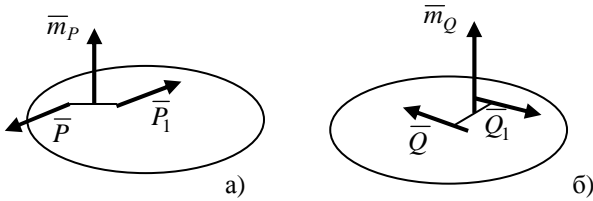


Рис. 1.21

Далі позначатимемо будь-які еквівалентні системи сил скорочено «екв»:

$$\bar{m}_P \text{ "екв" } \bar{m}_Q. \quad (1.18)$$

2. Не змінюючи механічного стану твердого тіла, можна змінювати сили й плече пари, але так, щоб її момент залишався незмінним.

Дана пара $P = P_1 = 10$ Н, яка має плече $h = 0,5$ м (рис. 1.21).

Візьмемо сили другої пари $Q = Q_1 = 2$ Н, а плече цієї пари позначимо d .

Пари m_P і m_Q будуть еквівалентними, якщо вектора моментів цих пар однакові й паралельні

$$m_P = Ph = m_Q = Qd. \quad (1.19)$$

З цієї умови знаходимо плече $d = Ph / Q = 2,5$ м.

3. Щоб задати пару, досить задати її момент, тому іноді слово «пара» замінюють словом «момент».

4. Моменти пар, що лежать в одній площині, можна розглядати як скалярні величини.

Напрямок обертання характеризується знаком моменту.

Момент пари вважають додатним, якщо пара намагається обернути тіло проти ходу стрілки годинника, і навпаки.

Пари умовно зображують так, як зображено на рис. 1.22.

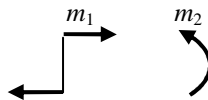


Рис. 1.22

5. Сума проєкцій сил пари на будь-яку вісь завжди дорівнює ну-

лю і тому пара сил не входить у рівняння проєкцій сил.

Дійсно, проєктуючи (1.14) на будь-яку вісь, маємо:

$$R_X = F_X - F_{1X} = 0. \quad (1.19)$$

Теорема про додавання пар. Система пар, які діють на тверде тіло еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів складових пар.

Нехай на тіло (рис 1.23, а) діє система пар із моментами $m_1, m_2, m_k, \dots, m_n$.

Не змінюючи механічного стану тіла можна вектора пар перенести в одну точку паралельно даним векторам (рис. 1.23, б).

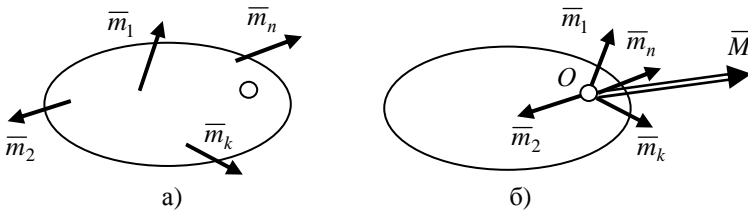


Рис. 1.23

Знаходячи суму моментів пар, одержимо, що система пар еквівалентна одній парі з моментом, який дорівнює сумі моментів пар системи:

$$\bar{M} = \sum \bar{m}_k. \quad (1.20)$$

Теорема доведена.

Момент рівнодійної пари можна визначити аналітично.

Проектуючи (1.20) на осі координат, знаходимо проєкції рівнодійного моменту:

$$M_X = \sum m_{kX}; \quad M_Y = \sum m_{kY}; \quad M_Z = \sum m_{kZ}. \quad (1.21)$$

Обчислюємо модуль рівнодійного моменту:

$$M = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}. \quad (1.22)$$

Система пар знаходиться в рівновазі, коли векторна сума моментів цих пар дорівнює нулю.

У цьому випадку момент рівнодійної пари дорівнює нулю і тому сили пари зрівноважені – мають одну лінію дії або сили пари дорівнюють нулю.

Тобто, при рівновазі системи пар із (1.20), маємо:

$$\bar{M} = \sum \bar{m}_k = 0. \quad (1.24)$$

Аналітичні умови рівноваги одержимо з (1.22) і (1.21):

$$\sum m_{kX} = 0; \quad \sum m_{kY} = 0; \quad \sum m_{kZ} = 0. \quad (1.25)$$

Отже, система пар сил врівноважується, коли суми моментів пар відносно осей координат дорівнюють нулю.

Для рівноваги плоскої системи пар необхідно й достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю.

$$\sum m_k = 0. \quad (1.26)$$

1.1.5. Довільна система сил; лема про паралельне перенесення сили; основна теорема статички; головний вектор і головний момент системи сил; умови й рівняння рівноваги вільного твердого тіла

Лема про паралельне перенесення сили.

Механічний стан твердого тіла не порушиться, якщо дану силу перенести паралельно самій собі в довільну точку тіла, додавши при цьому пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно нової точки прикладення

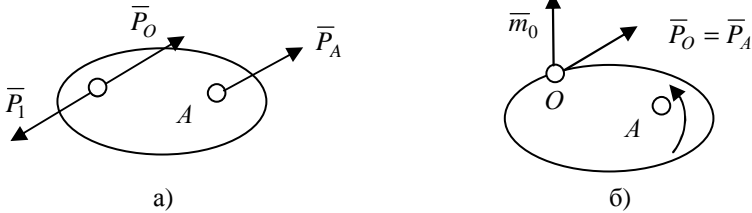


Рис. 1.24

Візьмемо тіло на яке діє сила, прикладена в точці A (рис. 1.24,а). Виберемо довільну точку O , яку назовемо центром зведення, і відповідно до аксіоми про прикладення зрівноваженої системи сил (аксіома 3) прикладемо в цій точці дві однакові сили, паралельні даній силі, причому $P_0 = -P_1 = P_A$.

Одержану систему сил, еквівалентну силі \bar{P}_A , подамо як силу $\bar{P}_O = \bar{P}_A$, перенесену паралельно самій собі в довільно вибраний центр зведення O , що є новою точкою прикладення сили, і пару з моментом (1.24,б) $\bar{m}_0 = \bar{m}_0(\bar{P}_A)$.

Лему доведено, тобто

$$(\bar{P}_A) \text{ екв. } (\bar{P}_O = \bar{P}_A; m_0 = \bar{m}_0(\bar{P}_A)). \quad (1.27)$$

Основна теорема статики

Система довільно розміщених сил еквівалентна одній силі, прикладеній у центрі зведення, і одній парі.

Сила дорівнює головному вектору системи сил, а момент пари – головному моменту системи сил відносно центра зведення.

Нехай дано систему n довільно розміщених сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$. Перенесемо паралельно всі сили у довільно вибраний центр зведення O , додавши при цьому n пар (рис. 1.25,а). Моменти пар $(\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n)$ дорівнюють моментам даних сил відносно центра зведення O .

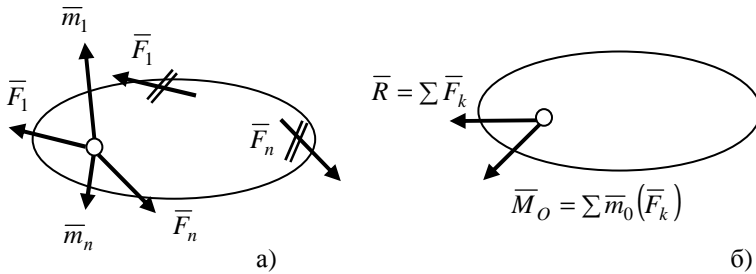


Рис. 1.25

Замість заданої системи сил, яка позначена \diagdown , утворилась система сил, які прикладені у центрі зведення і дорівнюють даним силам за модулем напрямом, і система n приєднаних пар:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1^* &= \vec{F}_1; & \vec{F}_k^* &= \vec{F}_k; & \vec{F}_n^* &= \vec{F}_n; \\ \vec{m}_1 &= \vec{m}_0(\vec{F}_1); & \vec{m}_k &= \vec{m}_0(\vec{F}_k); & \vec{m}_n &= \vec{m}_0(\vec{F}_n). \end{aligned}$$

Ця нова система сил і пар еквівалентна даній.

Нова система сил, прикладених в одній точці (система збіжних сил), еквівалентна одній силі, яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці, отже (рис. 1.25,б).

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k. \quad (1.28)$$

Сила \vec{R} зветься головним вектором системи.

Головний вектор системи довільно розміщених сил дорівнює векторній сумі усіх сил системи і прикладений у центрі зведення.

Аналітично модуль головного вектора і напрямні косинуси можна обчислити за формулами

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos(R, Ox) &= R_x / R; \cos(R, Oy) = R_y / R; \cos(R, Oz) = R_z / R \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

$$\text{де } R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (1.30)$$

Система пар еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів сил відносно центра зведення, отже

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k). \quad (1.31)$$

Цю пару з моментом \bar{M}_0 назвемо головним моментом заданої системи сил відносно центра зведення.

Головний момент системи сил дорівнює векторній сумі моментів усіх сил системи відносно центра зведення

Аналітично модуль головного моменту й його напрямні косинуси можна обчислити за формулами

$$M_0 = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} \quad (1.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(M_0, Ox) &= M_X / M_0; \cos(M_0, Oy) = M_Y / M_0; \\ \cos(M_0, Oz) &= M_Z / M_0; \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

де $M_X = \sum m_X(F_k)$; $M_Y = \sum m_Y(F_k)$; $M_Z = \sum m_Z(F_k)$ – проекції головного моменту. (1.34)

Отже, теорема доведена: будь-яка система сил еквівалентна системі сил, яка складається з сили (1.28) і пари сил (1.31):

$$(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_k, \dots, \bar{F}_n) \text{ екв. } (\bar{R} = \sum \bar{F}_k; \bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)). \quad (1.35)$$

Операція заміни системи сил головним вектором і головним моментом називається зведенням системи сил до даного центра.

Теорема про еквівалентність систем сил

Дві системи сил, які окремо діють на тверде тіло, еквівалентні, якщо векторно рівні головні вектори та головні моменти цих систем сил відносно одного центра зведення.

Нехай система сил \bar{F}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) еквівалентна головному вектору \bar{R}^F й головному моменту M_0^P , а система сил $(P_1, \dots, P_j, \dots, P_m)$ еквівалентна головному вектору R^P й головному моменту M_0^P . Відомо також, що $R^F = R^P$; $M_0^F = M_0^P$.

Отже, теорема доведена: система сил $(F_1, \dots, F_k, \dots, P_n)$ еквівалентна системі сил

$$(P_1, \dots, P_j, \dots, P_m): (F_1, \dots, F_k, \dots, P_n) \text{ екв. } (P_1, \dots, P_j, \dots, P_m).$$

Теорема Варіньона про момент рівнодійної

Момент рівнодійної системи сил відносно довільної точки дорівнює векторній сумі моментів сил системи відносно цієї самої точки.

Доведення. Нехай вектор \bar{R} є рівнодійною системи сил

$\vec{F}_i (i = 1, 2, \dots, n)$, прикладених у точці A , (рис. 1.26):

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Момент рівнодійної \vec{R} відносно точки O

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r} \cdot \vec{R} = \vec{r} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{r} \cdot \vec{F}_1 + \vec{r} \cdot \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \cdot \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i,$$

звідки

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

Теорема про зміну головного моменту при перенесенні центра зведення.

Головний момент системи сил при перенесенні центра зведення змінюється на момент головного вектора, прикладеного в старому центрі O , відносно нового центру O_1 .

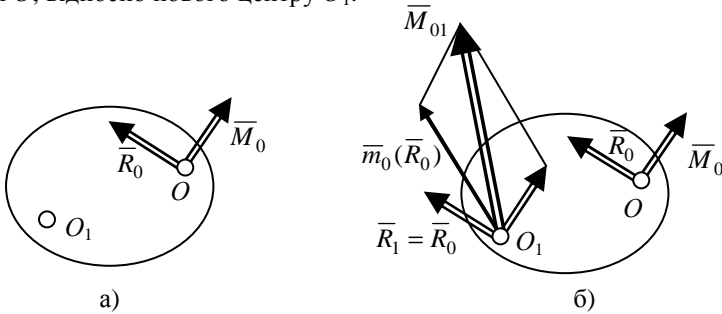


Рис. 1.26

Нехай деяка система сил (рис 1.26,а) еквівалентна головному вектору $\vec{R}_0 = \sum \vec{F}_k$ головному моменту $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k)$ (центр зведення – O).

Згідно з лемою про паралельне перенесення сили (1.27) і властивостями пар знайдемо головний вектор і головний момент відносно нового центра зведення O_1 , отже (рис 1.26,б):

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_0, \quad (1.36)$$

$$\vec{M}_{01} = \vec{M}_0 + \vec{m}_{01}(\vec{R}_0). \quad (1.37)$$

Теорема доведена (див. (1.37)).

Умови рівноваги вільного твердого тіла

Основна теорема статички (1.35) приводить до висновку, що віль-

не тверде тіло перебуватиме в рівновазі тоді, коли головний вектор і головний момент системи сил, яка діє на тіло, відносно довільного центру дорівнює нулю:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0; \quad \bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.38)$$

Це необхідні й достатні умови рівноваги системи сил, які діють на вільне тверде тіло.

Властивості головного вектора і головного моменту

1. Модуль і напрям головного вектора даної системи сил не залежить від вибору центра зведення (див. 1.28).

2. Вектор головного моменту в загальному випадку залежить від центра зведення, бо від зміни центра зведення змінюються плечі сил і їх моменти.

3. Головний вектор і рівнодіюча системи сил векторно дорівнюють одне одному, але в загальному випадку вони не еквівалентні.

4. Головний вектор і рівнодіюча еквівалентні тільки в окремому випадку, коли головний момент системи дорівнює нулю.

Випадки зведення плоскої довільної системи сил.

Розглянемо можливі випадки зведення плоскої системи довільно розміщених сил.

1. $\bar{R} \neq 0; \bar{M}_0 \neq 0$, тобто головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю. Тоді система сил еквівалентна рівнодіючій, яка за модулем дорівнює головному вектору, паралельна йому, так само напрямлена, але діє по іншій лінії дії.

Доведемо це. Нехай відомі головний вектор \bar{R}_0 і головний момент \bar{M}_0 якоїсь плоскої системи сил (рис. 1.27,а). Визначимо рівнодіючу цієї системи.

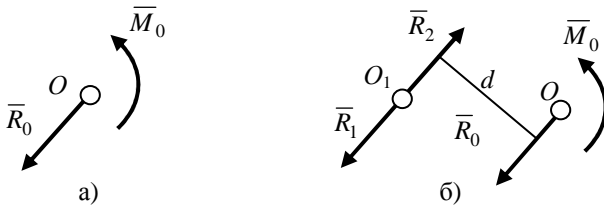


Рис. 1.27

У деякій точці O_1 прикладемо сили $\bar{R}_1 = -\bar{R}_2 = \bar{R}_0$ (рис. 1.27,б). Відстань d (плече пари \bar{R}_0, \bar{R}_1 , момент якої \bar{m}_1) знайдемо з умови $m_1 = R_0 d = M_0$. Отже, пари \bar{M}_0 і \bar{m}_1 зрівноважені тому, що моменти

цих пар рівні та напрямлені в різні боки. Умова рівноваги пар:
 $\bar{M}_0 - \bar{m}_1 = 0$.

Далі систему цих пар, як зрівноважену, відкинемо.

У результаті матимемо одну силу \bar{R}_1 , еквівалентну головному вектору \bar{R}_0 і головному моменту \bar{M}_0 системи, тобто рівнодіючу системи, причому $\bar{R}_1 = \bar{R}_0$. Точка прикладення O_1 сили R_1 знаходиться на прямій, яка паралельна лінії дії сили R_0 , на відстані d від точки O . Отже, можна вважати, що головний вектор і рівнодіюча векторно рівні між собою, але не еквівалентні.

2. $\bar{R} \neq 0; \bar{M}_0 = 0$. У цьому випадку система сил еквівалентна рівнодіючій, лінія дії якої проходить через центр зведення і збігається з головним вектором (див. 1.35).

3. $\bar{R} = 0; \bar{M}_0 \neq 0$. Система сил еквівалентна парі сил. Величина й знак цієї пари і головного моменту не залежить від центра зведення (див. 1.37).

4. $\bar{R} = 0; \bar{M}_0 = 0$. У цьому випадку система сил еквівалентна нулю, тобто перебуває у рівновазі (див. 1.38).

Рівняння рівноваги довільної системи сил.

Відповідно до (1.38) довільна система сил перебуває у рівновазі, коли головний вектор і головний момент дорівнюють нулю:
 $\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0; \quad \bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) = 0$.

Модуль головного вектора і головного моменту визначаються залежностями (1.29), (1.30), (1.32), (1.34). На підставі цих формул матимемо такі рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{kX} = 0; \quad \sum F_{kY} = 0; \quad \sum F_{kZ} = 0; \\ \sum m_X(F_k) = 0; \quad \sum m_Y(F_k) = 0; \quad \sum m_Z(F_k) = 0. \end{array} \right\} \quad (1.39)$$

Отже, довільна система сил у просторі перебуває в рівновазі лише тоді, коли суми проєкцій сил на осі координат і суми моментів сил відносно координатних осей дорівнюють нулю.

Зазначимо, що знайдені умови рівноваги системи збіжних сил, системи пар сил є окремими випадками умови рівноваги (1.39).

1.1.6. Плоска система сил; форми рівнянь рівноваги; статично означені плоскі ферми; методи визначення зусиль у стержнях простих ферм

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на осі координат дорівнювали нулю і щоб алге-

браїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювали нулю.

Отже рівняння рівноваги (1.39) у цьому випадку мають вигляд (1.40):

$$\sum F_{kX} = 0; \quad \sum F_{kY} = 0; \quad m_0(F_k) = 0. \quad (1.40)$$

Рівняння (1.40) – це так звана перша, або основна форма рівнянь рівноваги, яка виражає необхідні й достатні умови рівноваги плоскої системи сил. Замість них можна користуватися системою інших трьох рівнянь.

Друга Форма рівнянь рівноваги (рис. 1.28). Для рівноваги плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб суми моментів сил відносно будь-яких двох центрів A, B і сума проєкцій сил на вісь координат, яка не перпендикулярна AB , дорівнювали нулю:

$$m_A(F_k) = 0; \quad m_B(F_k) = 0; \quad \sum F_{kX} = 0. \quad (1.41)$$

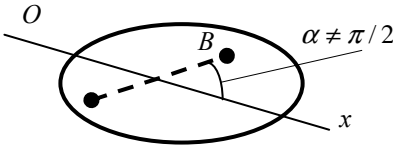


Рис. 1.28

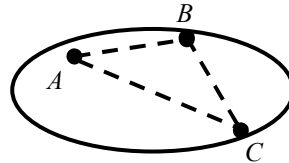


Рис. 1.29

Але треба пам'ятати, що ці умови недостатні для рівноваги, якщо центри моментів A, B лежать на одному перпендикулярі до осі Ox ; у цьому випадку система і сил може мати рівнодіючу, яка проходить через ці точки, і, отже, не бути у стані рівноваги.

Третя Форма рівнянь рівноваги (рис. 1.29). Для рівноваги плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб суми моментів сил відносно будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$m_A(F_k) = 0; \quad m_B(F_k) = 0; \quad m_C(F_k) = 0. \quad (1.42)$$

Проте ці умови недостатні для рівноваги, коли центри моментів A, B і C лежать на одній прямій; у цьому випадку система сил може мати рівнодіючу, яка проходить через ці точки, і не бути у рівновазі.

Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил є окремим випадком умов рівноваги, розглянутих у цьому параграфі. Якщо вісь Oy напрямити паралельно лініям дії системи паралельних сил, то рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил можна записати так

$$m_A(F_k) = 0; \quad \sum F_{kY} = 0. \quad (1.43)$$

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно й достатньо, щоб сума проєкцій сил на вісь координат яка паралельна лініям дії сил і сума моментів сил відносно будь якої точки площини дорівнювали нулю.

У процесі розв'язування задач треба пам'ятати, що кількість рівнянь рівноваги, складених для розв'язання (але не для перевірки розв'язку), не може бути більшою від кількості умов рівноваги що відповідають системі поданих у задачі сил. Під час розв'язування задач статички доцільно рівняння рівноваги складати так, щоб у кожному була тільки одна невідома величина. У багатьох випадках цього можна домогтися, раціонально вибравши осі координат і центри моментів.

Приклад. На рис. 1.30 схематично зображено підйомний кран. У точці D підвішений вантаж $P = 50$ кН. Вага крана $G = 30$ кН. Визначити реакції опор A, B .

Розглянемо кран як вільне тіло. Зобразимо реакцію стержня $B - R_B$ і шарніра $A - X_A, Y_A$. Отже, до крана прикладена плоска система сил. Складемо рівняння рівноваги:

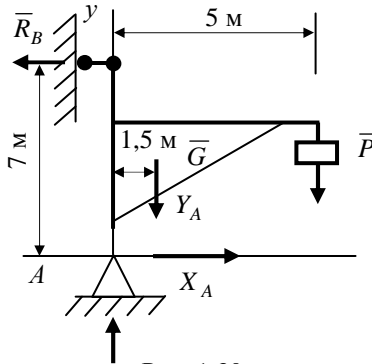


Рис. 1.30

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= X_A - R_B = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - G - P = 0; \\ \sum m_A(F_k) &= 7R_B - 5P - 1,5G = 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, дістаємо: $X_A = 42,1$ кН;
 $R_B = 42,1$ кН; $Y_A = 80$ кН.

1.1.7. Метод перерізів. Визначення внутрішніх сил

Для розрахунків деталей машин і споруд на міцність потрібно знати внутрішні сили пружності, які виникають у результаті дії при-

кладених до деталей зовнішніх сил. З теоретичної механіки вже відомий метод перерізів. Оскільки цей метод широко застосовують для визначення внутрішніх сил, розглянемо його докладніше. Нагадаємо, що всяке тіло, в тому числі деталь машини або споруди, можна вважати системою матеріальних точок.

У теоретичній механіці розглядалися незмінні системи; в опорі матеріалів розглянемо змінні (деформовані) системи матеріальних точок.

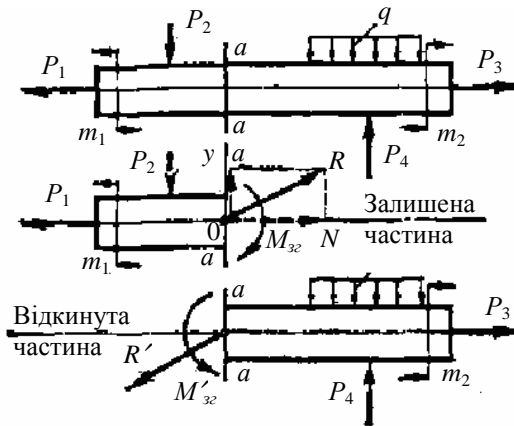


Рис. 1.31

Метод перерізів полягає в тому, що тіло уявно розрізають площиною на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання; залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених, до перерізу внутрішніх сил. Очевидно, що за третім законом Ньютона (аксіома взаємодії) внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної і відкинutoї частин тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямом. Таким чином, розглядаючи рівновагу будь-якої з двох частин розрізаного тіла, дістанемо одне й те саме значення внутрішніх сил, але зручніше розглядати ту частину тіла, для якої рівняння рівноваги будуть простіші. Згідно з прийнятим припущенням про неперервність матеріалу тіла, можна твердити, що внутрішні сили, які виникають у тілі, яось розподілені по перерізу.

Застосовуючи до залишеної частини тіла умови рівноваги, не можна знайти закон розподілу внутрішніх сил по перерізу, але можна визначити статичні еквіваленти цих сил – головний вектор та головний момент. Оскільки основним розрахунковим об'єктом в опорі матеріа-

лів є брус і здебільшого нас цікавитимуть внутрішні сили в його поперечному перерізі, то розглянемо, якими будуть статичні еквіваленти внутрішніх сил у поперечному перерізі бруса. Зробимо поперечний переріз бруса $a-a$, як на рис. 1.31, і розглянемо рівновагу його лівої частини. Якщо зовнішні сили, які діють на брус, лежать в одній площині, то в загальному випадку статичним еквівалентом внутрішніх сил, що діють у перерізі $a-a$, будуть головний вектор R , прикладений до центра ваги перерізу, і головний момент M , що зрівноважують плоску систему зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини бруса.

Розкладемо головний вектор R на складову N , напрямлену вздовж осі бруса, і складову Q , перпендикулярну до цієї осі. Ці складові головного вектора разом з головним моментом називатимемо внутрішніми силовими факторами, які діють у перерізі бруса. Складову N назвемо поздовжньою силою, складову Q – поперечною силою, пару сил M – згинаючим моментом.

Для визначення трьох внутрішніх силових факторів статика дає три рівняння рівноваги залишеної частини бруса, а саме:

$$\sum Z = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0;$$

або $N + \sum P_{iz} = 0; \quad Q + \sum P_{iy} = 0; \quad M_z + \sum M_0(P_i) = 0;$

де $\sum P_z$; $\sum P_y$ – алгебраїчні суми проєкцій на осі z і y зовнішніх сил, прикладених до розглядуваної частини бруса, а $\sum M_0(P_i)$ – алгебраїчна сума моментів цих сил відносно центра ваги перерізу.

Якщо зовнішні сили, які діють на брус, не лежать в одній площині, тобто є просторовою системою сил, то в загальному випадку в поперечному перерізі бруса виникає шість внутрішніх силових факторів (рис. 1.32), для визначення яких статика дає шість рівнянь рівноваги залишеної частини бруса, а саме:

$$N + \sum P_{iz} = 0; \quad Q_x + \sum P_{ix} = 0; \quad Q_y + \sum P_{iy} = 0;$$

$$M_{zx} + \sum M_x(P_i) = 0; \quad M_{zy} + \sum M_y(P_i) = 0; \quad M_{zz} + \sum M_z(P_i) = 0.$$

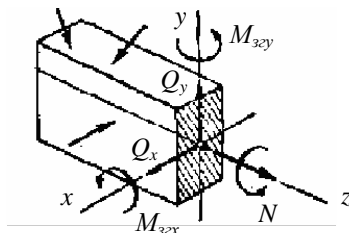


Рис. 1.32

Шість внутрішніх силових факторів, які виникають у поперечному перерізі бруса в загальному випадку, мають назви; N – поздовжня сила, Q_x, Q_y – поперечні сили, M_k – крутний момент, M_{zx}, M_{zy} – згинаючі моменти.

За різних деформацій у поперечному перерізі бруса виникають різні внутрішні силові фактори.

Розглянемо окремі випадки:

1. У перерізі виникає *лише поздовжня сила N* . У цьому випадку буває деформація *розтягу* (якщо сила N напрямлена від перерізу) або деформація *стиску* (якщо сила N напрямлена до перерізу).

2. У перерізі виникає *лише поперечна сила Q* . У цьому випадку буває деформація *зсуву*.

У перерізі виникає *лише крутний момент M_k* . Тоді буває деформація *кручення*.

У перерізі виникає *лише згинаючий момент M* . Тоді буває деформація *чистого згину*. Якщо в перерізі одночасно виникає згинаючий момент M_x і поперечна сила Q_y , то згин називають *поперечним*.

Якщо в перерізі *одночасно* виникає *кілька внутрішніх силових факторів* (наприклад, згинаючий і крутний моменти або згинаючий момент і поздовжня сила), то в цих випадках трапляється *поєднання основних деформацій*.

Для плоскої системи сил прийемо такі додатні напрями ВСФ (рис. 1.33).

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинаючих моментів будують епюри, які дають змогу визначити можливий небезпечний переріз балки, встановити значення поперечної сили і згинаючого моменту в цьому перерізі.

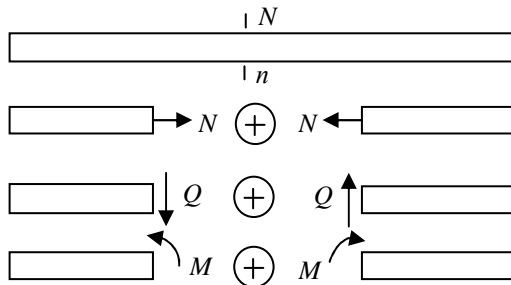


Рис. 1.33

Приклад. Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки, шарнірно закріпленої двома кінцями і навантаженої зосередженою силою P , як показано на рис. 1.34.

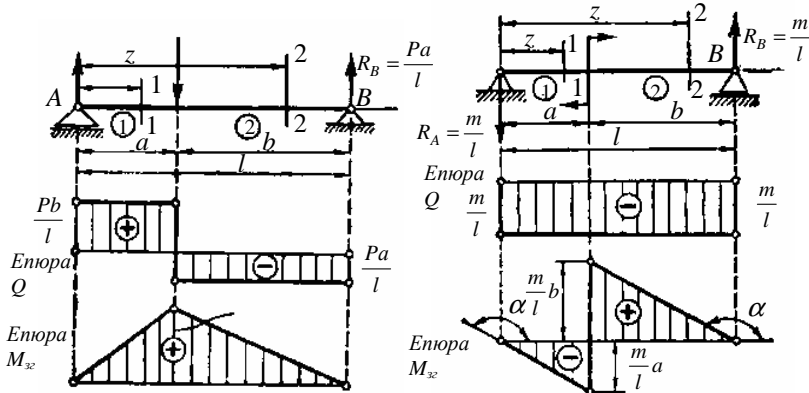


Рис. 1.34

У даному прикладі межами ділянок є точка C , до якої прикладена зосереджена сила P , а також опори A і B . Отже, ця балка складається з двох ділянок. Визначимо опорні реакції R_A і R_B , склавши рівняння моментів відносно опору A і B .

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad -Pa + R_B^e = 0, \quad \text{звідки } R_B = Pa/l; \\ \sum M_B = 0; & \quad -P^e + R_A = 0, \quad \text{отже } R_A = Pb/l. \end{aligned}$$

Найбільше значення M матиме під зосередженою силою;

$$M_{\text{згmax}} = Pab/l.$$

Цей переріз буде небезпечним.

Приклад. Побудувати епюри поперечних перерізів і згинаючих моментів для балки, шарнірно закріпленої двома кінцями і навантаженої парою сил з моментом m , як показано на рис. 1.34.

Оскільки пару сил можна зрівноважити тільки парою, то

$$R_A = R_B = \frac{m}{l}.$$

Згинаючі моменти $M = -ma/l$, $M_{\text{max}} = mb/l$.

1.1.8. Центр паралельних сил. Центр ваги

Розглянемо довільну систему паралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, прикладених до твердого тіла. Система сил зводиться до рівнодійної

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k .$$

Будемо вважати точки прикладення сил \vec{F}_i фіксованими.

Розглянемо спочатку випадок двох паралельних сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , які можуть бути напрямлені як в один, так і в протилежні боки. Для визначеності покладемо, що $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$.

Нехай дві паралельні і однаково напрямлені сили F_2 прикладені в точках A і B твердого тіла.

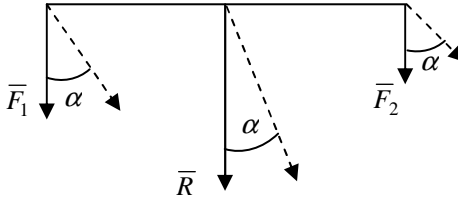


Рис. 1.35

Система двох паралельних сил, напрямлених в один бік, має рівнодійну, яка паралельна цим силам і має той самий напрям, причому її модуль дорівнює сумі модулів складових; лінія дії рівнодійної ділить відстань між точками прикладання сил внутрішнім способом на відрізки, обернено пропорційні модулям цих сил (рис. 1.35).

Отже

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} . \quad (1.45)$$

Розглянемо задачу про додавання двох паралельних сил, напрямлених в різні боки і не рівних одна одній за модулем. Рівнодійна цих сил їм паралельна і має напрям більшої складової сили, причому її модуль дорівнює різниці модулів складових; лінія дії рівнодійної ділить відстань між точками прикладання складових зовнішнім способом на відрізки обернено пропорційні модулям цих сил, тобто $R = F_1 + F_2$;

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} .$$

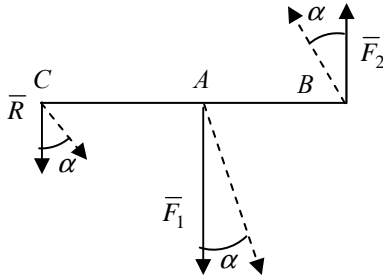


Рис. 1.36

Зазначимо, що лінія дії рівнодійної у цьому випадку розміщена з боку більшої за модулем сили (рис. 1.36). рівнодійна сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 і її точка прикладення C не змінюється якщо ці сили одночасно повернути на кут α , не змінюючи їх точок прикладення. Рівнодійна \vec{R} при цьому повернеться навколо точки C на той самий кут α .

Нехай маємо n паралельних сил. Сили будемо розглядати як прикладені вектори. Рівнодійну довільної системи паралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ можна знайти так. Спочатку додамо сили і \vec{F}_1 і \vec{F}_2 і дістанемо їх рівнодійну \vec{R}_2 . Далі додамо сили \vec{R}_2 і \vec{F}_3 ; дістанемо рівнодійну \vec{R}_3 трьох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ тощо. Зрештою дістанемо рівнодійну \vec{R}_n даної системи n паралельних сил (рис. 1.37).

$$\vec{R}_n = \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k .$$

Точка C , через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо точок їх прикладення в один і той самий бік і на один і той самий кут, називається центром паралельних сил.

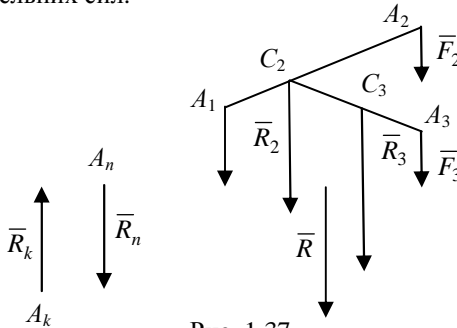


Рис. 1.37

Знайдемо положення центра паралельних сил відносно певної прямокутної системи координат (рис. 1.38). вважатимемо один з двох можливих напрямів паралельних сил додатними. Одиничний вектор цього напрямку позначимо \bar{e} . Тоді для будь-якої сили даної системи паралельних сил матимемо

$$\bar{F}_i = \bar{e}F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.47)$$

де \bar{F}_i – проекція сил на напрям вектора \bar{e} .

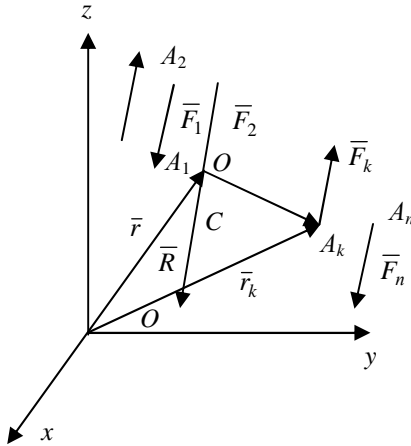


Рис. 1.38

Візьмемо центр моментів O на лінії дії рівнодійної \bar{R} .

На підставі теореми Варіньона векторна сума моментів системи паралельних відносно точки O дорівнює нулю. Отже

$$\sum_{k=1}^n (\bar{r}_k - \bar{r}) \times \bar{e}F_k = 0,$$

або

$$\left(\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k - r \sum_{k=1}^n F_k \right) \times \bar{e} = 0,$$

де \bar{r} – радіус-вектор точки O ; \bar{r}_k – радіус-вектор точки прикладання сил \bar{F}_k .

Радіус-вектор \bar{r}_C центра паралельних сил теж задовольняє рівняння (1.47). Отже,

$$\left(\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k - \bar{r}_C \sum_{k=1}^n F_k \right) \times \bar{e} = 0. \quad (1.48)$$

Виконання співвідношення (1.48) можливе лише тоді, коли

$$\sum_{k=1}^n F_k \bar{r}_k - \bar{r}_C \sum_{k=1}^n F_k = 0, \text{ звідки}$$

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k}. \quad (1.49)$$

Проектуючи рівність (1.49) на осі координат, дістанемо формули для визначення координат центра паралельних сил

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k z_k}{\sum_{k=1}^n F_k}. \quad (1.50)$$

При переносі сил уздовж лінії дії положення центра паралельних сил зміниться. Тому при введенні поняття центра паралельних сил вважають сили прикладеними в точках твердого тіла.

Для плоскої системи паралельних сил, розміщених наприклад в площині xOy , вводять поняття статичних моментів відносно осей координат Ox і Oy :

$$S_x = \sum_{i=1}^n F_i y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n F_i x_i. \quad (1.51)$$

Поняття центра паралельних сил виникає при розв'язуванні задач механіки і, зокрема, при визначенні центра ваги твердого тіла.

Центр ваги твердого тіла

Розкладемо тіло n досить малих елементарних частинок. На кожну частинку тіла, яке знаходиться поблизу земної поверхні, діє напрямлена вертикально вниз сила ваги Δp_k , $k = 1, 2, \dots, n$ (рис. 1.39).

Для тіл, розміри яких малі порівняно з радіусом Землі, сили (вага), які діють на частинки тіла, можна вважати паралельними. Сили (ваги) частинок зберігають напрям і постійну величину при будь-яких поворотах тіла. Поле ваги, в якому виконуються ці умови, називається однорідним полем ваги.

При будь-яких поворотах тіла сили $\Delta \bar{p}_k$ залишаються прикладеними в одних і тих самих точках і паралельними одна одній; змінюєть-

ся тільки їх напрямком по відношенню до тіла.

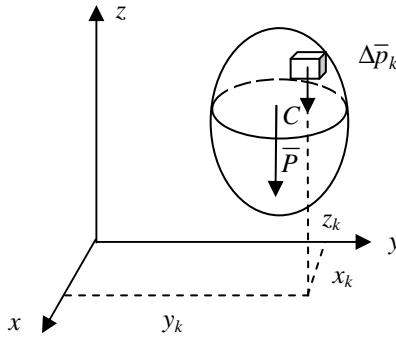


Рис. 1.39

Отже, рівнодійна \bar{P} сил ваги $\Delta\bar{p}_k$ буде при будь-яких положеннях тіла проходити через одну і ту саму незмінно зв'язану з тілом точку C , яка є центром паралельних сил ваги $\Delta\bar{p}_k$. Ця точка і називається центром ваги тіла. Таким чином, центром ваги твердого тіла називається незмінно зв'язана з цим тілом точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної сили ваги частинок цього тіла при будь-якому його положенні у просторі.

Нехай координати центра ваги k -ї частинки будуть x_k, y_k, z_k , тоді координати центра ваги неоднорідного твердого тіла наближено визначатимуться формулами

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta p_k x_k}{\sum_{k=1}^n \Delta p_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta p_k y_k}{\sum_{k=1}^n \Delta p_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta p_k z_k}{\sum_{k=1}^n \Delta p_k}. \quad (1.52)$$

Тоді значення координат центра ваги тіла дістанемо в результаті граничного переходу в рівностях (1.50) при збільшенні кількості частинок до нескінченності і зменшенні кожного з них до нуля. Тоді

$$x_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta p_k x_k}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta p_k} = \frac{\int x dp}{P};$$

$$z_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta p_k z_k}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta p_k} = \frac{\int z dp}{P} . \quad (1.53)$$

Границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta p_k$ називається вагою твердого тіла.

Відмітимо, що згідно з визначенням центра ваги, це точка геометрична; вона може лежати і не в самому тілі (наприклад, для кільця).

Центр ваги тіла можна визначити експериментально. Для цього досить підвісити тіло до нитки в деякій точці і побудувати продовження нитки в тілі, потім підвісити тіло до нитки в іншій точці і також побудувати продовження нитки в тілі. Точка перетину цих ліній визначить центр ваги тіла.

Центр ваги однорідного тіла

$$P = \gamma V ,$$

для однорідного тіла

$$dp = \gamma dV ,$$

де γ – питома вага тіла (вага одиниці об'єма); V – об'єм тіла; dV – елемент об'єму тіла.

Підставляючи ці вирази dp і P у (1.53), дістанемо

$$x_C = \frac{\int x dV}{P} ; \quad y_C = \frac{\int y dV}{P} ; \quad z_C = \frac{\int z dV}{P} . \quad (1.54)$$

Центр ваги поверхні

Припустимо, що тверде тіло являє собою однорідну тонку оболонку, а вага елемента її поверхні пропорційна його площі (рис. 1.40).

$$x_C = \frac{\int x dS}{S} ; \quad y_C = \frac{\int y dS}{S} ; \quad z_C = \frac{\int z dS}{S} . \quad (1.55)$$

Для плоскої однорідної пластини (рис. 1.41) будемо мати

$$x_C = \frac{\int x dS}{S} ; \quad y_C = \frac{\int y dS}{S} . \quad (1.56)$$

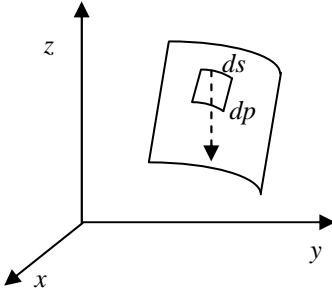


Рис. 1.40

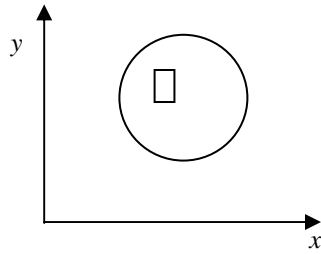


Рис. 1.41

Величина $S_y = \int_{(S)} x dS$ називається статичним моментом площі

відносно осі Oy ; відповідно $S_x = \int_{(S)} y dS$ називається статичним момен-

том площі відносно Ox .

Центр ваги лінії

Розглянемо однорідний криволінійний стержень із сталою площиною поперечного перерізу S (рис. 1.42) для елемента стержня, який заключений між двома нормальними перерізами, як циліндр з площею основи S і висотою dl , маємо

$$dv = Sdl .$$

Якщо довжина стержня AB буде l , то його об'єм дорівнює $V = SL$.

На підставі формул (1.53) дістанемо

$$x_C = \frac{\int x dL}{L}; \quad y_C = \frac{\int y dL}{L}; \quad z_C = \frac{\int z dL}{L} . \quad (1.57)$$

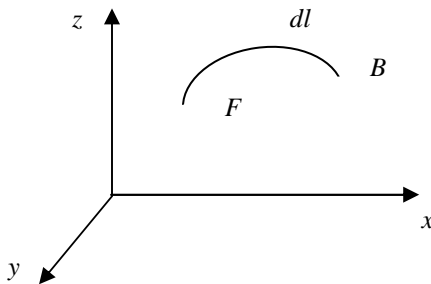


Рис. 1.42

Отже, центр ваги однорідного тіла визначається, як центр ваги відповідного об'єму, площі або лінії.

Методи визначення центрів ваги тіл

Виходячи з одержаних формул можна подати наступні конкретні способи визначення положення центрів ваги тіл.

Метод симетрії Для однорідного тіла, яке має площину симетрії, центр ваги знаходиться у площині симетрії. Аналогічно, якщо тіло має вісь або центр симетрії, то центр ваги буде знаходитися відповідно на осі симетрії або в центрі симетрії.

Метод розбивання. Якщо тіло можна розбити на скінчене число таких об'ємів, для кожного з яких положення центра ваги відомо, то координати центра ваги усього тіла можна безпосередньо обчислити за формулами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i v_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i v_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i v_i}{V}. \quad (1.58)$$

Аналогічні формули встановлені для координат центра ваги площі та лінії:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i s_i}{S}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i s_i}{S}; \quad (1.59)$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i l_i}{L}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i l_i}{L}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i l_i}{L}. \quad (1.60)$$

Приклад. Визначити координати центра ваги плоскої пластини, зображеної на рис. 1.42. Всі розміри задані в сантиметрах.

Розв'язання. Проводимо осі координат. Розбиваємо пластину на два прямокутники. Обчислюємо координати центра ваги кожного прямокутника і їх площі.

№	1	2
x	1	4
y	3	0,5
S	12	4

Площа усієї пластини

$$S = 12 \text{ см}^2 + 4 \text{ см}^2 = 16 \text{ см}^2.$$

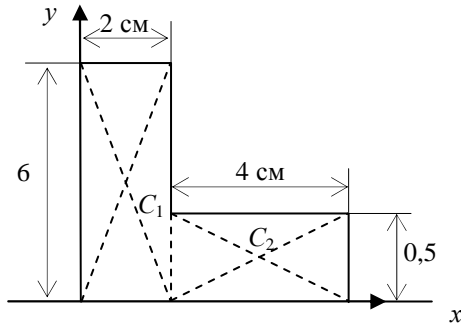


Рис. 1.42

Підставивши одержані величини в формули (1.59), одержимо

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S} = \frac{12 + 16}{16} = 1,75 \text{ см}$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S} = \frac{36 + 16}{16} \cdot 2 = 2,38 \text{ см.}$$

Метод доповнення. Цей спосіб є частинним випадком способу розбивання. Він застосовується до тіл, які мають вирізи, якщо центри ваги тіла без вирізу і вирізаної частини відомі. Наприклад, визначивши центр ваги плоскої фігури з вирізом, вважаємо розглядувану плоску фігуру суцільною, а виріз – плоскою фігурою з від'ємною площею.

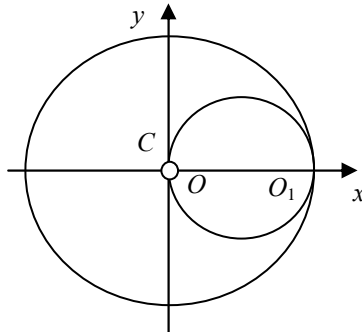


Рис. 1.43

Приклад. З круга радіуса R вирізаний дотичний до нього круг радіуса $r = R / 2$ (рис. 1.43). Визначити положення центра ваги решти площі круга.

Розв'язання. Внаслідок симетрії центр ваги даної плоскої фігури

лежить на осі симетрії Ox . Щоб визначити його координату x_C , використаємо метод від'ємних площ.

Площа цілого круга $S_1 = \pi R^2$, а координата центра ваги $x_1 = 0$.

Площа вирізаного круга $S_2 = \frac{\pi R^2}{4}$; а координата центра ваги O_1 вирізаного круга $x_2 = OO_1 = R/2$. Отже,

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S} = \frac{-\frac{R}{2} \frac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}} = -\frac{R}{6}.$$

Центр ваги площі трикутника. Розіб'ємо площу трикутника (рис. 1.44) прямими, паралельними стороні AD , на n вузьких смуг, центри ваги яких будуть, очевидно, лежати на медіані BE трикутника.

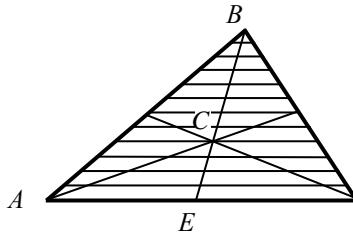


Рис. 1.44

Отже, центр ваги трикутника лежить на цій медіані. Аналогічний результат можна одержати для двох інших медіан. Звідси робимо висновок, що центр ваги площі трикутника лежить у точці перетину його медіан. При цьому $CE = 1/3BE$.

2. КІНЕМАТИКА

2.1. Кінематика точки

Рух точки відносно вибраної системи відліку вважається заданим, якщо відомий спосіб, за допомогою якого можна визначити положення точки в просторі у будь який момент часу. Використовуються три способу завдання руху:

1. Векторний спосіб застосовується, звичайно, в теоретичних дослідженнях.

2. Координатний спосіб. У цьому випадку визначені координати точки в функції часу (рис. 2.1): $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.

Проекції вектора швидкості точки на осі координат (рис. 2.1,б) дорівнюють похідним за часом від відповідних координат точки:

$$V_x = dx/dt = \dot{x}; \quad V_y = dy/dt = \dot{y}; \quad V_z = dz/dt = \dot{z}, \quad (2.1)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (2.2)$$

Вектор швидкості точки напрямлений вздовж дотичної до траєкторії.

Проекції вектора прискорення точки на осі координат (рис. 2.1,б) дорівнюють похідним за часом від відповідних проекцій швидкості точки:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}, \quad (2.3)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.4)$$

3. Натуральний спосіб. Цей спосіб використовується, коли визначена траєкторія точки

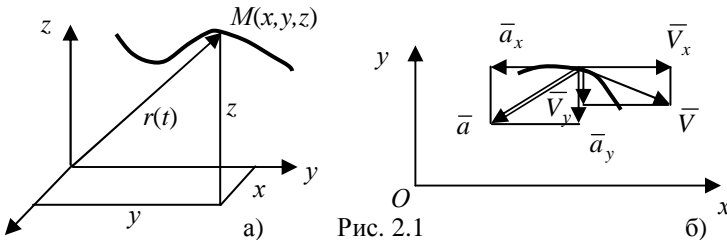


Рис. 2.1

2.2. Кінематика твєдого тіла

2.1.2. Поступальний рух твєрдого тіла

Поступальним називається рух твєрдого тіла, при якому відрізок прямої, що сполучає будь-які дві його точки, рухається паралельно

самому собі.

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії, а вектори швидкостей і вектори прискорень усіх точок тіла відповідно однакові в кожний момент часу.

Поступальний рух твердого тіла цілком характеризується рухом будь-якої однієї точки цього тіла. Кутова швидкість тіла при цьому русі дорівнює нулю.

2.2.2. Обертальний рух твердого тіла

Якщо ланка OA обертається навколо осі O , то швидкість будь-якої точки A тіла дорівнює добутку кутової швидкості ω_{OA} на відстань до осі (рис. 2.2):

$$V_A = OA \cdot \omega_{OA} . \quad (2.5)$$

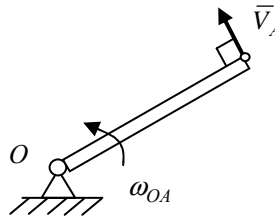


Рис. 2.2

Спрямована лінійна швидкість перпендикулярно відстані OA і напрямлена у бік обертання ланки. Кутова швидкість дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки A до відрізка OA (відстань від точки до осі)

$$\omega_{OA} = V_A / OA . \quad (2.6)$$

При обертальному русі тіла прискорення точки визначається векторною сумою:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{доц} + \vec{a}_A^{об} . \quad (2.6a)$$

Доцентрове прискорення $\vec{a}_A^{доц}$ дорівнює добутку квадрату кутової швидкості ω_{OA} на відстань до осі і завжди спрямоване вздовж радіуса до осі обертання.

Обертальне прискорення (рис. 2.3) $\vec{a}_A^{об}$ дорівнює добутку кутового прискорення ε_{OA} на відстань до осі; спрямоване воно за дотичною до траєкторії – у бік руху, якщо тіло обертається прискорено, чи в зворотну сторону, якщо тіло обертається сповільнено, тобто згідно

напряму кутового прискорення ε_{OA} .

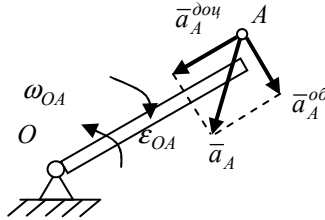


Рис. 2.3

$$a_A^{ob} = OA \cdot \varepsilon; \quad a_A^{doц} = OA \cdot \omega^2. \quad (2.7)$$

Величина прискорення точки визначається формулою

$$a_A = \sqrt{(a_A^{doц})^2 + (a_A^{ob})^2} = OA \cdot \sqrt{(\omega_{OA})^4 + (\varepsilon_{OA})^2}. \quad (2.8)$$

2.2.3. Передачі обертання

Перетворення обертальних рухів широко розповсюджене в техніці й виконується за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових, фрикційних або других передач. Якщо осі передачі паралельні чи перетинаються, то обертання можна передати за допомогою зубчастих (рис. 2.4), пасових (рис. 2.5) або фрикційних передач. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім, так і внутрішнім. При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають ведучим або провідним, а друге – веденим. Основою для кінематичного розрахунку цих передач (рис. 2.4, 2.5) є припущення, що в системі немає ковзання, зазорів між зубцями коліс, а паси, ланцюги тощо не деформуються. Тобто, швидкості на обох колісах, що сполучаються, однакові:

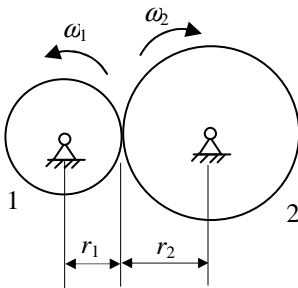


Рис. 2.4

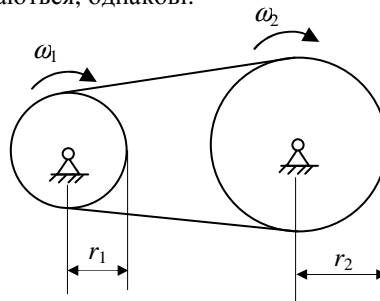


Рис. 2.5

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \text{ або } \omega_1 / \omega_2 = r_2 / r_1. \quad (2.9)$$

Отже, кутові швидкості зубчастих, фрикційних, пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс.

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передатним числом (позначається « u »).

Якщо врахувати, що число зубців пропорційно довжинам окружностей, а значить і радіусам або діаметрам, то передатне число можна визначити через відповідне відношення радіусів, діаметрів або число зубців:

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = r_2 / r_1 = d_2 / d_1 = z_2 / z_1. \quad (2.10)$$

Передатне число складного механізму (рис. 2.6):

$$u_{13} = \omega_1 / \omega_3 = u_{12} \cdot u_{23}, \quad (2.11)$$

де $u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = R_2 / r_1 = D_2 / d_1 = Z_2 / z_1$;

$u_{23} = \omega_2 / \omega_3 = R_3 / r_2 = D_3 / d_2 = Z_3 / z_2$ – передатні числа окремих передач.

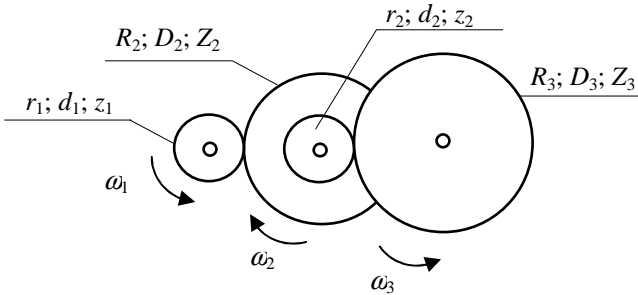


Рис. 2.6

2.2.4. Плоскопаралельний (або плоский) рух твердого тіла

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається рух, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних нерухомій площині.

При плоскому русі плоскої фігури швидкості її точок відповідають співвідношенню (рис. 2.7):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (2.12)$$

$$\text{де } \vec{V}_{BA} = \omega \cdot BA \quad (2.13)$$

– швидкість точки B в обертальному русі разом з плоскою фігурою навколо полюса A ; ця швидкість спрямована перпендикулярно відстані

AB у бік обертання фігури за напрямом ω (рис. 2.7).

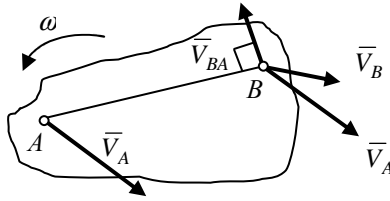


Рис. 2.7

Тобто, швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса (\vec{V}_A) й швидкості цієї точки в обертальному русі разом з площею фігурою навколо полюса (\vec{V}_{BA}).

Використовуються декілька способів вирішення векторного рівняння (2.12).

Розглянемо визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

МЦШ – це точка, пов’язана з площею фігурою, швидкість якої в даний момент руху дорівнює нулю.

2.2.5. Визначення й використання МЦШ

1. Для знаходження МЦШ треба знати тільки напрямки швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B яких-небудь двох точок фігури (або траєкторії цих точок).

МЦШ (точка P) знаходиться в точці перетину перпендикулярів, відновлених із точок A і B до швидкостей будь-яких точок (або до дотичної к траєкторії цих точок) (рис. 2.8).

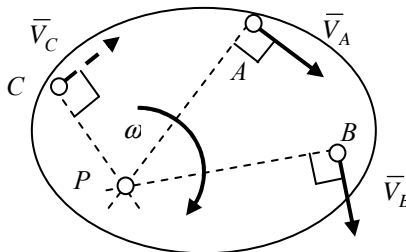


Рис. 2.8

Кутова швидкість фігури, як видно з формули (2.13), дорівнює в кожен момент часу відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані від МЦШ (рис. 2.8):

$$\omega = V_A / AP = V_B / BP. \quad (2.14)$$

Для визначення швидкості будь-якої точки тіла спочатку згідно з п. 1 знаходимо МЦШ – точку Р. Визначаємо кутову швидкість тіла (рис. 2.8, формула (2.14)) і обчислюємо швидкості точок:

$$V_A = \omega \cdot AP, \quad V_B = \omega \cdot BP, \quad V_C = \omega \cdot CP. \quad (2.15)$$

Спрямовано вектори швидкостей точок перпендикулярно до прямої, яка з'єднає точку з МЦШ, у бік обертання тіла (за дуговою стрілкою ω).

2.2.6. Особливі випадки визначення МЦШ і швидкостей точок плоскої фігури

а) Якщо плоскопаралельний рух здійснюється шляхом кочення без ковзання одного циліндричного тіла по поверхні іншого, причому друге тіло нерухоме, то точка торкання P має в даний момент часу швидкість, рівну нулю. Отже, точка P – МЦШ ($V_P = 0$) (рис. 3.9).

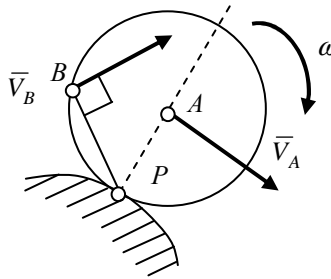


Рис. 2.9

Прикладом служить кочення колеса по рейках або по шляху.

Якщо швидкості точок А і В паралельні, причому лінія АВ не перпендикулярна до \vec{v}_A (рис. 2.10), то МЦШ лежить у нескінченності й швидкості всіх точок паралельні й рівні, тобто $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C$.

Отже, у розглянутому випадку швидкості всіх точок тіла в даний момент часу рівні один одному і по модулю і за напрямком. Такий стан руху тіла називають миттєво поступальним. Кутова швидкість тіла у цей момент часу дорівнює нулю ($\omega = 0$).

Якщо швидкості точок А і В тіла паралельні один одному і при

цьому лінія AB перпендикулярна V_A, V_B , то МЦШ визначається побудовою, яка зображена на рис. 2.11.

Справедливість побудови впливає з пропорції

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}. \quad (2.16)$$

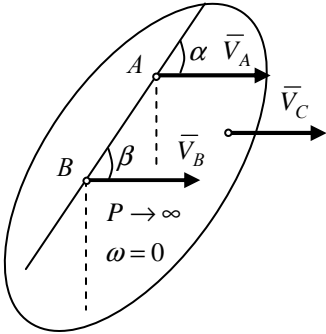


Рис. 2.10

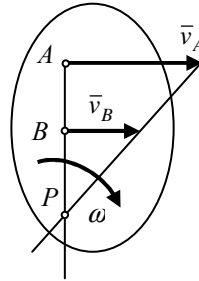


Рис. 2.11

У цьому випадку, на відміну від попереднього (пункт б), для знаходження центра P треба, крім напрямків, знати ще і модулі швидкостей V_A і V_B . Спочатку з співвідношення (2.16) визначаємо відстань AP (або $BP = AP - AB$), а потім кутову швидкість ω .

2.2.7. Визначення прискорень точок і кутових прискорень ланок

При плоскому русі тіла прискорення будь-якої точки визначається за допомогою векторного рівняння (рис. 2.12):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{доц} + \bar{a}_{BA}^{об}. \quad (2.17)$$

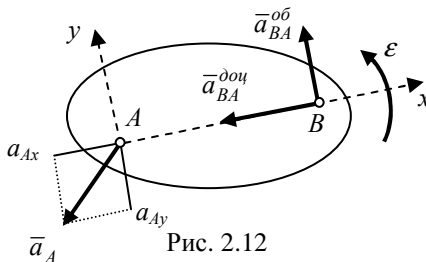


Рис. 2.12

Тобто прискорення будь-якої точки тіла дорівнює геометричній сумі прискорення полюса (A), обертального і доцентрового прискорень руху точки (B) навколо полюса (A).

Якщо траєкторією полюса A є коло, то формулу (2.17) можна записати у такому вигляді:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\text{доц}} + \bar{a}_A^{\text{об}} + \bar{a}_{BA}^{\text{доц}} + \bar{a}_{BA}^{\text{об}}. \quad (2.18)$$

Доцентрове прискорення точки напрямлене від будь-якої точки (B) до полюса(A).

Обертальне прискорення напрямлене перпендикулярно BA у бік кутового прискорення ε (рис. 2.12).

Доцентрове й обертальне прискорення точки навколо полюса визначаються формулами:

$$\bar{a}_A^{\text{доц}} = \omega^2 \cdot AB, \quad (2.19)$$

$$\bar{a}_A^{\text{об}} = \varepsilon \cdot AB. \quad (2.20)$$

При розв'язанні задач зображують всі вектори рівнянь (2.17) або (2.18) і проєктують ці рівняння на осі координат xAy . Для рис. 2.12 ці проєкції векторного рівняння (2.17) мають вигляд:

$$a_{Bx} = a_{Ax} - \bar{a}_{BA}^{\text{доц}}, \quad (2.21)$$

$$a_{By} = a_{Ay} - \bar{a}_{BA}^{\text{об}}. \quad (2.22)$$

З одержаних двох алгебраїчних рівнянь визначають будь-які дві невідомі величини – наприклад прискорення $\bar{a}_{BA}^{\text{об}}$, а потім з (2.20) кутове прискорення ε .

3. ДИНАМІКА

3.1. Динаміка матеріальної точки

Ця тема вивчає рух точки під дією прикладених сил. При цьому звичайно використовуються диференціальні рівняння руху точки, які при русі точки на площині xOy мають вигляд

$$m\ddot{x} = \sum F_{KX} , \quad (3.1)$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{KY} , \quad (3.2)$$

де m – маса точки; \ddot{x}, \ddot{y} – проекція прискоренні точки на вісь x, y ; $\sum F_{KX}, \sum F_{KY}$ – сума проєкцій сил, прикладених до точки, на вісь x, y .

При вирішенні першої задачі динаміки з диференціальних рівнянь руху точки визначають сили, які діють на точку.

При вирішенні другої задачі динаміки визначається закон руху точки при умові, що сили, які діють на точку, відомі. Якщо проінтегрувати диференціальні рівняння руху точки, знайдемо закон її руху у загальному вигляді, тому, що в розв'язку з'являються стали інтегрування. Щоб знайти закон руху точки, який відповідає умовам задачі, записують початкові умови, а потім, підставляючи початкові умови в рішення диференціальних рівнянь та в перші похідні від них, знаходять стали інтегрування.

Початкові умови – це координати точки та проєкції швидкості точки у деякий момент часу.

3.2. Динаміка механічної системи й твердого тіла

Вирішення задач динаміки механічної системи виконується різноманітними методами. В техніці звичайно використовується принцип Даламбера (метод кінетостатики): якщо до сил, які діють на точки системи, додати сили інерції, то така система сил буде відповідати рівнянням рівноваги.

Для матеріальній точці й твердого тіла, котре рухається поступально, ці рівняння мають вигляд (рис. 3.1)

$$\sum \bar{F}_K + \bar{\Phi}^{uu} = 0 , \quad (3.2)$$

або в проєкціях

$$\sum F_{KX} + \bar{\Phi}_X^{uu} = 0 ; \sum F_{KY} + \bar{\Phi}_Y^{uu} = 0 ; \sum F_{KZ} + \bar{\Phi}_Z^{uu} = 0 , \quad (3.3)$$

де $\sum \bar{F}_K$ – активні сили й реакції в'язей, $\bar{\Phi}_C^{uu} = -m\bar{a}_C$ – сила інерції точки (або тіла), котра за величиною дорівнює добутку маси m точки

(тіла) на величину прискорення a_C центра мас тіла (точки), прикладена у центрі мас тіла і напрямлена протилежно векторові прискорення a_C .

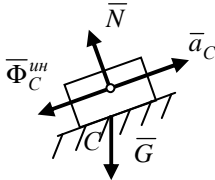


Рис. 3.1

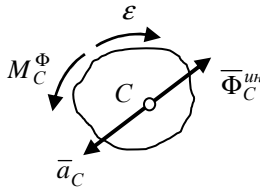


Рис. 3.2

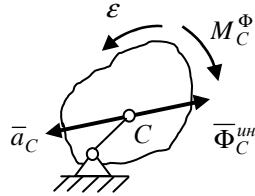


Рис. 3.3

При плоскому русі твердого тіла, яке має площу симетрії і рухається паралельно цієї площині, сили інерції приводяться (рис. 3.2) до головного вектора сил інерції $\bar{\Phi}_C^{un}$, який прикладений до центра мас, та головного моменту сил інерції M_C^Φ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_C^{un} &= -m\bar{a}_C, \\ M_C^\Phi &= -J_C \cdot \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

При обертальному русі твердого тіла (рис. 3.3, який є окремим випадком плоского руху, сили інерції знаходяться таким же чином – рівняння (3.4). Якщо центр мас C збігається з віссю обертання O , то прискорення $a_C = 0$ і $\Phi_C^{un} = 0$. В цьому випадку сили інерції зображаються тільки головним моментом сил інерції $M_C^\Phi = -J_C \cdot \varepsilon$.

Тут M_C^Φ – головний момент сил інерції, або пара сил інерції, котра напрямлена протилежно кутового прискорення ε (рис. 3.2, 3.3).

J_C – момент інерції тіла відносно осі CZ , котра розташована перпендикулярно нерухомій площині (площа рис. 3.2, 3.3), яка характеризує розподіл мас точок тіла відносно осі.

Моментом інерції тіла відносно осі (осьовим моментом інерції) називається сума добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней від осі

$$J_C = \int h^2 dm, \quad (3.5)$$

де h – відстань від осі частини тіла масою dm .

Наведемо формули для обчислення моментів інерції деяких однорідних тіл масою m .

Однорідний стержень $J_{CZ} = ml^2 / 12$; $J_{CZ_1} = ml^2 / 3$.

Циліндр з отвором $J_{CZ} = 0,5m(R^2 + r^2)$.

Кругла тонка циліндрична оболонка ($R \approx r$) $J_{CZ} = mR^2$.

Суцільний циліндр ($r = 0$) $J_{CZ} = 0,5mR^2$.

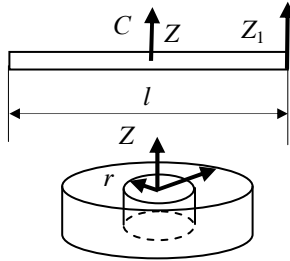


Рис. 3.4

3.3. Потужність сили

Потужність N це величина, що характеризує швидкість, з якою виконується робота

$$N = F_{\tau} V = M_z \omega, \quad (3.6)$$

де F_{τ} – проекція сили на дотичну (на швидкість), V – швидкість точки прикладення сили, M_z – момент сили відносно осі обертання, ω – кутова швидкість тіла. За одиницю потужності прийнято Вт (1 Вт = 1 Н·м/с = 1 Дж/с).

3.4. Зубчасті редуктори

Редуктор це передача, яка виконана в окремому корпусі й яка служить для зменшення кутової швидкості й збільшення крутного моменту на веденому валу. Одноступінчастий редуктор (рис. 2.4) використовують при передаточних числах $u \geq 6,3$, двохступінчастий (рис. 2.6) при $u \geq 40$. Перевагу слід надавати редукторам з меншим числом ступенів. Для великих передаточних чисел застосовують також редуктори: черв'ячні, циліндрично-черв'ячні і планетарні передачі. Передачі характеризуються кутовими швидкостями $\omega_{вч}(n_{вч})$ ведучого й $\omega_{вн}(n_{вн})$ веденого валів; потужністю $N_{вч}$ та $N_{вн}$ на цих валах, Механічним коефіцієнтом корисної дії (ККД) – η , крутними моментами

$M_{вч}$ та $M_{вн}$. Перевагу слід надавати редукторам з меншим числом ступенів. Колеса передач можуть бути з прямими, косими або шевронними зубами. Вали зубчастих передач монтують на підшипниках ковчання або ковзання.

Між цими параметрами існує такий зв'язок:

$$N_{вч} = N_{вн} / \eta ; N_i = M_i \omega_i ; \omega_{вч} = \omega_{вн} \cdot u ; \omega_i = \pi n / 30 \approx 0,1n_i . \quad (3.7)$$

Коефіцієнтом корисної дії (ККД) η називають відношення корисної роботи (або потужності) до затраченої $\eta = A_K / A_3 = N_K / N_3$.

Якщо ряд механізмів з'єднано послідовно, то загальний ККД усіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n ,$$

$\eta = \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ – ККД кожного механізму окремо.

4. ОПІР МАТЕРІАЛІВ

4.1. Початкові поняття

Опір матеріалів як наука виникла в епоху Відродження, коли розвиток техніки, торгівлі, мореплавства, військової справи вимагав наукових обґрунтувань, потрібних для будівництва великих морських суден, мостів, гідротехнічних споруд та інших складних конструкцій. Засновником цієї науки вважають італійського вченого Галілея (1564-1642). Досвід показує, що всі частини конструкцій під дією навантажень деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри, а іноді руйнуються.

Опір матеріалів – це наука про міцність і стійкість проти деформації матеріалів і елементів машин та споруд.

Міцністю називають здатність матеріалу конструкцій і їх елементів чинити опір дії зовнішніх сил не руйнуючись (далі поняття міцності буде уточнено). В опорі матеріалів розглядають методи розрахунку елементів конструкцій па міцність, жорсткість і стійкість.

Розрахунки на міцність дають змогу визначити розміри і форму деталей, що витримують задане навантаження, при найменшій витраті матеріалу.

Під жорсткістю розуміють здатність тіла або конструкції протидіяти деформації. Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розмірів конструкцій і їх елементів не перевищать допустимих норм.

Під стійкістю розуміють здатність конструкції протидіяти зусиллям, які намагаються вивести її з початкового стану рівноваги. Розрахунки на стійкість запобігають можливості раптової втрати стійкості і викривлення довгих або тонких деталей. Прикладом втрати стійкості може бути раптове викривлення довгого прямолінійного стержня від стискання вздовж осі.

На практиці здебільшого доводиться мати справу з конструкціями складної форми, але їх можна уявити складеними з окремих простих елементів, наприклад, брусів, пластин, оболонок і масивів. Основним розрахунковим елементом в опорі матеріалів є б р у с, тобто тіло, поперечні розміри якого малі порівняно з довжиною. Бруси бувають прямолінійний криволінійні, сталого і змінного перерізу. Залежно від їх призначення в конструкції бруси називають колонами, балками й стержнями.

Крім розрахунку брусів опір матеріалів займається розрахунком пластин і оболонок, тобто тіл, які мають малу товщину порівняно з

іншими розмірами (наприклад, резервуари, труби, обшивки кораблів та літаків). Тіла, в яких всі три виміри однакового порядку, називають м а с и в а м и (наприклад, фундаменти, станини верстатів). Розрахунки пластин, оболонок і масивів у цьому підручнику не розглядаються.

У результаті деформації під дією зовнішніх сил всередині тіла виникають сили пружності, які протидіють деформації і намагаються повернути частинки тіла в початкове положення.

В опорі матеріалів вивчають деформації тіл і внутрішні сили, що виникають під час деформації. Після припинення дії зовнішніх сил збуджена цими силами деформація може повністю або частково зникнути. Здатність матеріалу усувати деформацію після припинення дії зовнішніх сил називають пружністю. Деформацію, яка зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають пружною; деформацію, яка не зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають залишковою або пластичною. Здатність матеріалу до значних залишкових деформацій без руйнування називають пластичністю, а самі матеріали називають пластичними. До таких матеріалів належать мало вуглецева сталь, алюміній, мідь, латунь.

Підкреслимо, що *значні залишкові деформації* здебільшого спричинюють порушення нормальної роботи конструкції і тому їх *вважають порушенням міцності*, (як і руйнування). Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. На відміну від пластичних, крихкі матеріали руйнуються без помітних залишкових деформацій. До крихких матеріалів належать чавун, тверді сплави, скло, цегла та ін.

Наука про опір матеріалів ґрунтується на законах теоретичної механіки, в якій тіла вважають абсолютно жорсткими, тобто не здатними до деформації. Користуючись розглянутим у теоретичній механіці принципом тверднення, в опорі матеріалів для визначення реакцій зв'язку і діючих у перерізах деталей внутрішніх сил застосовуватимемо до деформованих тіл умови рівноваги статички. Проте *для розрахунків на міцність та жорсткість деякі положення* теоретичної механіки виявляються *непридатними*, зокрема:

а) зовнішні сили, які діють на тіло, не можна замінити їх рівнодіючою або еквівалентною системою сил;

б) силу не можна переносити вздовж лінії її дії;

в) пару сил не можна пересувати в площині дії пари.

Ці правила мають виняток. Так, наприклад, сили, прикладені до невеликої поверхні тіла, як і в теоретичній механіці, вважатимемо зосередженими, тобто прикладеними до однієї точки; розподілені реактивні сили, прикладені до затиснутого кінця балки, як і раніше, замі-

нюватимемо реактивною силою і реактивним моментом. Такі заміни не вносять суттєвих змін в умови деформації тіла. Це положення має назву принципу пом'якшених граничних умов або принципу Сен-Венана, за ім'ям французького вченого Сен-Венана (1797-1886).

Принцип Сен-Венана можна сформулювати так: *у точках тіла, достатньо віддалених від місць прикладання зовнішніх сил, величина внутрішніх сил дуже мало залежить від конкретного способу прикладання сил*. Надалі, вивчаючи окремі види деформацій, на підставі принципу Сен-Венана не будемо цікавитися конкретними способами прикладання зовнішніх сил і вважатимемо, що в місці їх прикладання внутрішні сили змінюються стрибкоподібно.

4.2. Основні гіпотези і припущення

Конструкційні матеріали, з яких виготовляють деталі машин і споруд, не є, точно кажучи, неперервними, однорідними в усіх точках і ізотропними (такими, що мають однакові властивості в усіх напрямках).

У процесі виробництва заготовок і виготовлення з них деталей у матеріалі виникають різні поверхневі і внутрішні дефекти, які важко врахувати, наприклад, раковини, тріщини і неоднорідності структури в литих деталях, волосовини в штампованих деталях, початкові внутрішні зусилля, спричинені нерівномірністю охолодження литих і кованих деталей, нерівномірністю висихання і неоднорідністю деревини, нерівномірністю тверднення і неоднорідністю бетону і т. д.

Оскільки закономірності виникнення зазначених явищ встановити неможливо, то в опорі матеріалів приймають ряд гіпотез і припущень, які дають змогу не розглядати ці явища. У результаті об'єктом вивчення в опорі матеріалів стає не саме реальне тіло, а його наближена модель. Експериментальна перевірка висновків, добутих на основі наведених далі гіпотез і припущень, показує, що ці висновки цілком придатні для використання в практиці інженерних розрахунків. Розглянемо основні гіпотези і припущення стосовно фізико-механічних властивостей матеріалів.

1. Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль. Згідно з цією гіпотезою, припускають, що коли немає причин для деформації тіла (навантаження, зміна температури), то в усіх його точках *внутрішні зусилля дорівнюють нулю*. Отже, сили взаємодії між частинками не навантаженого тіла до уваги не беруть.

2. Припущення про однорідність матеріалу. Фізико-механічні властивості тіла в різних точках можуть бути неоднаковими. В опорі матеріалів ці відмінності нехтують, припускаючи, що матеріал в усіх

точках тіла має *однакові властивості*.

3. Припущення про неперервність матеріалу. Згідно з цим припущенням, матеріал будь-якого тіла має *неперервну будову* і є *суцільним середовищем*. Припущення про неперервну будову матеріалу дає змогу використовувати під час розрахунків методи вищої математики (диференціальне і інтегральне числення).

4. Припущення про ізотропність матеріалу. Це припущення передбачає, що матеріал тіла має *однакові властивості* в усіх напрямках. Багато матеріалів складається з кристалів, в яких фізико-механічні властивості в різних напрямках істотно відрізняються. Проте, завдяки наявності в тілі великої кількості безладно розміщених кристалів, властивості всієї маси матеріалу в різних напрямках вирівнюються.

Припущення про ізотропність добре підтверджується практикою для більшості матеріалів і лише наближено для таких матеріалів, як камінь, пластмаси, залізобетон. Матеріали, які мають неоднакові властивості в різних напрямках, називають анізотропними, наприклад, деревина.

5. Припущення про ідеальну пружність. Це припущення передбачає, що в певних межах навантаження матеріал виявляє *ідеальну пружність*, тобто після зняття навантаження деформації повністю зникають.

Розглянемо тепер гіпотези і припущення, пов'язані з деформаціями елементів конструкцій. Зміну лінійних і кутових розмірів тіла називають відповідно лінійною і кутовою деформацією. Зміну положення (координат) точок тіла, спричинену деформацією, називають переміщенням.

1. Припущення про малість переміщень, або принцип початкових розмірів.

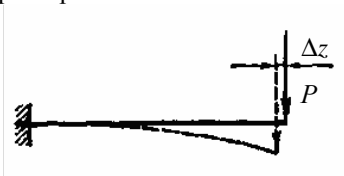


Рис. 4.1

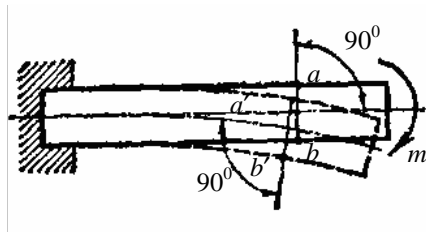


Рис. 4.2

За цим припущенням деформації тіла і пов'язані з ними переміщення точок і перерізів *дуже малі* порівняно з розмірами тіла. На підставі цього змінами в розміщенні зовнішніх сил, спричинених деформацією, нехтують. Так, наприклад, не беруть до уваги зміщення лінії

дії сили, показане на рис. 4.1.

2. Припущення про лінійну деформацію тіл. Згідно з цим припущенням, зміщення точок і перерізів пружного тіла в певних межах навантаження прямо пропорційне силам, які спричинюють ці переміщення.

3. Гіпотеза плоских перерізів, або гіпотеза Бернуллі. Згідно з цією гіпотезою, плоскі поперечні перерізи, зроблені в тілі до деформації, залишаються під час деформації *плоскими і нормальними до осі* (рис. 4.2). Цю гіпотезу вперше висловив швейцарський вчений Якоб Бернуллі (1654-1705); за нею вивчають більшість основних деформацій бруса. До основних гіпотез опору матеріалів належить також принцип незалежності дії сил, який буде сформульовано наприкінці цього розділу (аналогічний принцип розглянуто в динаміці).

4.3. Види навантажень і основних деформацій

У процесі роботи машин і споруд їх вузли і деталі сприймають і передають різні навантаження, тобто силові дії, які спричинюють зміну внутрішніх сил і деформації вузлів і деталей. Сили, що їх сприймають елементи конструкцій, бувають масові, або об'ємні (сили тяжіння, сили інерції), або поверхневі контактної взаємодії розглядуваного елемента з сусідніми елементами або прилеглим до нього середовищем (наприклад, пара, повітря, рідина).

З теоретичної механіки відомо, що поверхневі навантаження бувають зосередженими або розподіленими. Залежно від характеру дії навантаження поділяють на статичні і динамічні. Статичними називають навантаження, значення, напрям і місце прикладання яких залишаються сталими або змінюються повільно і мало. Отже, можна припустити, що при передачі статичних навантажень усі частини конструкції перебувають у рівновазі. Приклад статичного навантаження – сила тяжіння споруд.

Динамічними називають навантаження, значення яких, напрям або місце прикладання швидко змінюються з часом. До динамічних належать ударні, раптово прикладені і повторно-змінні навантаження. Ударні навантаження виникають, наприклад, під час кування металу або забивання паль; прикладом раптово прикладеного навантаження є тиск колеса, яке котиться по рейці; повторно-змінних навантажень зазнають, наприклад, деталі кривошипно-повзункового механізму парової машини. До динамічних належать також інерційні навантаження, наприклад, сили інерції в ободі обертового маховика. Треба пам'ятати, що до зовнішніх сил, які беруть до уваги при розрахунках конструкцій,

належать *не тільки* активні сили, а й реакції в'язів і сили інерції (для руху з достатньо великим прискоренням).

Перейдемо до розгляду питання про *основні деформації*. З практики відомо, що під час експлуатації елементи конструкцій зазнають таких основних деформацій:

- 1) розтяг; цієї деформації зазнають, наприклад, канати, троси, ланцюги;
- 2) стиск; на стиск працюють, наприклад, колони, цегляна кладка, пуанسونи штампів;
- 3) зсув; деформації зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань. Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають зрізом. Зріз виникає, наприклад, під час різання ножицями або штампування деталей з листового матеріалу;
- 4) кручення; на кручення працюють вали, які передають потужність під час обертального руху. Звичайно деформація кручення супроводжується й іншими деформаціями, наприклад згином;
- 5) згин; на згин працюють балки, осі, зуби зубчатих коліс та інші елементи конструкцій, Дуже часто елементи конструкцій зазнають дії навантажень, які спричинюють одночасно кілька основних деформацій.

4.4. Метод перерізів. Напруга

Для розрахунків деталей машин і споруд на міцність потрібно знати внутрішні сили пружності, які виникають у результаті дії прикладених до деталей зовнішніх сил.

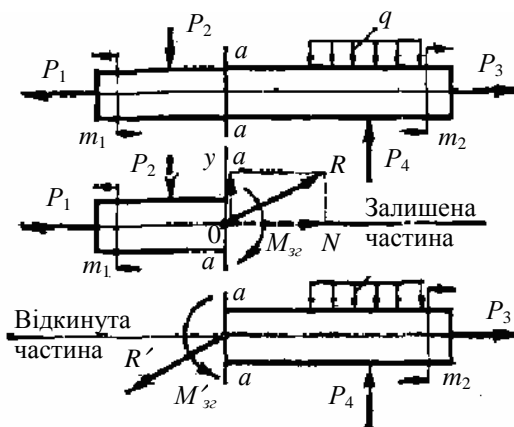


Рис. 4.3

З теоретичної механіки вже відомий метод перерізів. Оскільки цей метод широко застосовують для визначення внутрішніх сил, розглянемо його докладніше. Нагадаємо, що всяке тіло, в тому числі деталь машини або споруди, можна вважати системою матеріальних точок.

Метод перерізів полягає в тому, що тіло уявно розрізають площиною на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання; залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених, до перерізу внутрішніх сил.

Очевидно, що за третім законом Ньютона (аксіома взаємодії) внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної і відкинutoї частин тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямом. Таким чином, розглядаючи рівновагу будь-якої з двох частин розрізаного тіла, дістанемо одне й те саме значення внутрішніх сил, але зручніше розглядати ту частину тіла, для якої рівняння рівноваги будуть простіші. Згідно з прийнятим припущенням про неперервність матеріалу тіла, можна твердити, що внутрішні сили, які виникають у тілі, якимось розподілені по перерізу.

Застосовуючи до залишеної частини тіла умови рівноваги, не можна знайти закон розподілу внутрішніх сил по перерізу, але можна визначити статичні еквіваленти цих сил – головний вектор та головний момент. Оскільки основним розрахунковим об'єктом в опорі матеріалів є брус і здебільшого нас цікавитимуть внутрішні сили в його поперечному перерізі, то розглянемо, якими будуть статичні еквіваленти внутрішніх сил у поперечному перерізі бруса. Зробимо поперечний переріз бруса $a-a$, як на рис. 4.3, і розглянемо рівновагу його лівої частини. Якщо зовнішні сили, які діють на брус, лежать в одній площині, то в загальному випадку статичним еквівалентом внутрішніх сил, що діють у перерізі $a-a$, будуть головний вектор R , прикладений до центра ваги перерізу, і головний момент M , що зрівноважують плоску систему зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини бруса.

Розкладемо головний вектор R на складову N , напрямлену вздовж осі бруса, і складову Q , перпендикулярну до цієї осі. Ці складові головного вектора разом з головним моментом називатимемо внутрішніми силовими факторами, які діють у перерізі бруса. Складову N назвемо поздовжньою силою, складову Q – поперечною силою, пару сил M – згинаючим моментом.

Для визначення трьох внутрішніх силових факторів статика дає три рівняння рівноваги залишеної частини бруса, а саме:

$$N + \sum P_{iz} = 0; \quad Q + \sum P_{iy} = 0; \quad M_z + \sum M_0(P_i) = 0.$$

Якщо зовнішні сили, які діють на брус, не лежать в одній площині, тобто є просторовою системою сил, то в загальному випадку в поперечному перерізі бруса виникає *шість внутрішніх силових факторів* (рис. 4.4), для визначення яких статика дає *шість рівнянь рівноваги* залишеної частини бруса, а саме:

$$N + \sum P_{iz} = 0; \quad Q_x + \sum P_{ix} = 0; \quad Q_y + \sum P_{iy} = 0; \\ M_{zx} + \sum M_x(P_i) = 0; \quad M_{zy} + \sum M_y(P_i) = 0; \quad M_{zz} + \sum M_z(P_i) = 0.$$

Шість внутрішніх силових факторів, які виникають у поперечному перерізі бруса в загальному випадку, мають назви: N – поздовжня сила, Q_x, Q_y – поперечні сили, M_k – крутний момент, M_{zx}, M_{zy} – згинаючі моменти.

За різних деформацій у поперечному перерізі бруса виникають різні внутрішні силові фактори.

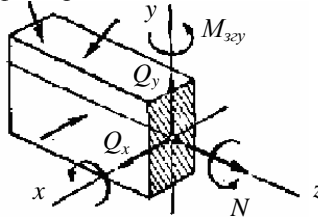


Рис. 4.4

Розглянемо окремі випадки:

1. У перерізі виникає *лише поздовжня сила* N . У цьому випадку буває деформація *розтягу* (якщо сила N напрямлена від перерізу) або деформація *стиску* (якщо сила N напрямлена до перерізу).
2. У перерізі виникає *лише поперечна сила* Q . У цьому випадку буває деформація *зсуву*.
3. У перерізі виникає *лише крутний момент* M_k . Тоді буває деформація *кручення*.
4. У перерізі виникає *лише згинаючий момент* M . Тоді буває деформація *чистого згину*. Якщо в перерізі одночасно виникає згинаючий момент M_x і поперечна сила Q_y , то згин називають *поперечним*.
5. Якщо в перерізі *одночасно виникає кілька внутрішніх силових факторів* (наприклад, згинаючий і крутний моменти або згинаючий момент і поздовжня сила), то в цих випадках трапляється поєднання основних деформацій.

Поряд з поняттям деформації одним з основних понять опору ма-

теріалів є напруга.

Напруження характеризує інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.

Розглянемо довільно навантажений брус і застосуємо до нього метод перерізів (рис. 4.5). Виділимо в перерізі нескінченно малий елемент площі ΔA (що маємо право робити, оскільки вважаємо матеріал неперервним). Через малість цього елемента можна вважати, що в його межах внутрішні сили, прикладені до різних точок, однакові за модулем і напрямом і, отже, є системою паралельних сил. Рівнодіючу цієї системи позначимо ΔR . Поділивши ΔR на елементарну площину ΔA , визначимо інтенсивність внутрішніх сил, тобто напругу p в точках елементарної площі:

$$p = \Delta R / \Delta A .$$

Отже, напруга – це внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу. Напруга – величина векторна.

Одиниця напруги: ньютон на квадратний метр = Н/м^2 = паскаль (Па).

Оскільки ця одиниця напруги дуже мала, то використовують більшу одиницю, а саме мегапаскаль (Мпа):

$$1 \text{ Мпа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2 .$$

Числові значення напруги, вираженої в Мпа і Н/мм^2 , однакові. Розкладемо вектор напруги p на дві складові: σ – перпендикулярну до площини перерізу і таку, що лежить у площині перерізу (рис. 4.5). Ці складові назвемо: σ – нормальна напруга, τ – дотична напруга.

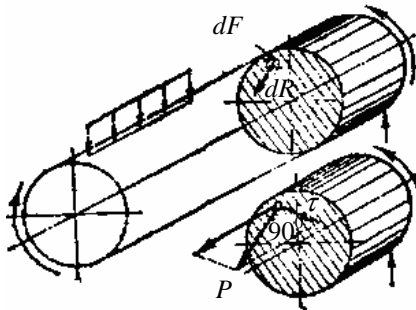


Рис. 4.5

Оскільки кут між нормальною і дотичною напругами завжди дорівнює 90° , то модуль повної напруги p визначається за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} .$$

Розкладання повної напруги на нормальну і дотичну має цілком визначений фізичний зміст.

Як побачимо далі, в поперечному перерізі бруса у випадках розтягу, стиску і чистого згину діють *тільки нормальні напруги*, а при зсуві і крученні – *тільки дотичні напруги*.

Нарешті розглянемо гіпотезу, яку називають принципом незалежності дії сил і формулюють так: *коли на тіло діє кілька навантажень, то внутрішні сили, напруги, переміщення і деформації у будь-якому місці можна визначити як суму цих величин, знайдених від кожного навантаження окремо*. Користуючись принципом незалежності дії сил, від вивчення найпростіших основних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса діють тільки нормальні або дотичні напруги, перейдемо до вивчення складніших основних деформацій, коли в поперечному перерізі діють і ті й інші навантаження, а потім розглянемо випадки поєднання основних деформацій, що іноді називають складним опором.

Зазначимо, що принцип незалежності дії сил стосується тільки конструкцій, деформації яких малі порівняно з їх розмірами і пропорційні діючим навантаженням.

4.5. Розтяг і стиск

4.5.1. Напруги і деформації розтягу і стиску

Розтягом або стиском називають таку деформацію, при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає *тільки поздовжня сила*. Бруси з прямолінійною віссю (прямі бруси), які зазнають розтягу або стиску, часто називають стержнями.

Розглянемо невагомий, затиснутий лівим кінцем прямий брус вздовж N_1 якого діють активні сили P і $2P$ (рис. 4.6). Частини бруса сталого перерізу, що містяться між поперечними площинами, в яких прикладені активні або реактивні сили, називатимемо ділянками. Застосувавши метод перерізів, визначимо поздовжні сили на ділянках. Зробимо поперечний переріз 1–1 лівої ділянки бруса.

В усіх точках бруса діятимуть внутрішні розподілені сили, рівнодіюча яких визначиться з умови рівноваги однієї з частин бруса.

Отже, для рівноваги залишеної частини бруса в перерізі 1–1 треба прикласти тільки силу, напрямлену вздовж осі, тобто поздовжню силу.

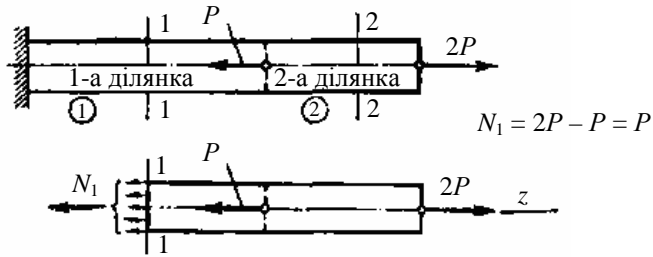


Рис. 4.6

В перерізі 2–2 на правій ділянці поздовжня сила матиме інше значення: $2P$. Таким чином, *поздовжня сила в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розміщених по один бік перерізу* (мають на увазі, що всі сили напрямлені вздовж осі бруса). Очевидно, що в межах однієї ділянки поздовжня сила матиме сталі значення.

Далі розтягуючі (направлені від перерізу) поздовжні сили вважатимемо *додатними*, а стискаючі (направлені до перерізу) – *від'ємними*.

Напруження

$$\sigma = N / A,$$

де N – поздовжня сила, а A – площа поперечного перерізу. Очевидно, що для розтягу і стиску форма перерізу на величину напруги не впливає.

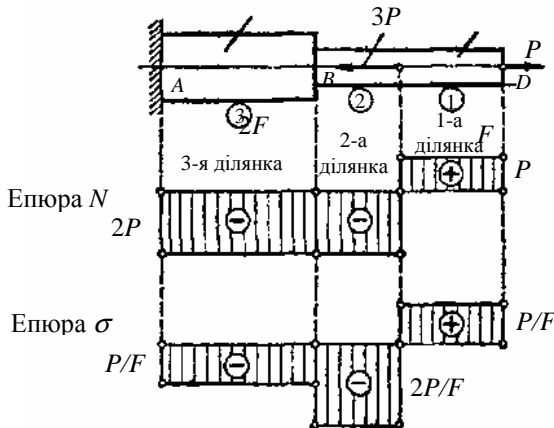


Рис. 4.7

Для наочного зображення розподілу осі бруса поздовжніх сил і нормальних напруг будують графіки, які називають епюрами, причому для нормальних напруг застосовують те саме правило знаків, що і для поздовжніх сил.

Приклад. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напруг для ступінчастого бруса, зображеного на рис. 4.7.

Перейдемо до розгляду деформацій. Уявимо прямий брус сталого поперечного перерізу P , що має довжину l , жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці розтягуючою силою P . Під дією цієї сили брус видовжиться на деяку величину Δl , яку назвемо абсолютним видовженням. Відношення абсолютного видовження до початкової довжини l назвемо відносним видовженням, і позначимо ε

$$\varepsilon = \Delta l / l .$$

Відносне видовження ε – число безрозмірне, іноді його подають у процентах:

Внаслідок деформації поперечні перерізи бруса переміщуються вздовж осі. Взаємне переміщення двох перерізів дорівнює зміні довжини частини бруса, що лежить між цими перерізами. Отже, деформація розтягу і стиску бруса характеризується абсолютним і відносним видовженням або укороченням.

4.5.2. Закон Гука для розтягу і стиску

Напруги і деформації розтягу і стиску пов'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, за ім'ям англійського фізика Роберта Гука (1635-1703), що встановив цей закон. Закон Гука для розтягу і стиску справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: *нормальна напруга прямо пропорційна відносному видовженню або укороченню*. Математично закон Гука можна записати у вигляді рівності:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon .$$

Коефіцієнт пропорційності E характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду.

Модуль пружності і напругу вимірюють в однакових одиницях: $[E] = \text{Па}$.

Якщо у формулу закону Гука підставити напруження, то дістанемо $\Delta l = Nl / EA$.

Добуток EA у знаменнику називають жорсткістю перерізу при розтягу і стиску; він характеризує одночасно фізико-механічні властивості матеріалу і геометричні розміри поперечного перерізу бруса.

Цю формулу читають так: абсолютне видовження або укорочення прямо пропорційне поздовжній силі, довжині і обернено пропорційне жорсткості перерізу бруса.

Наведені формули закону Гука стосуються лише брусів або їх ділянок сталого поперечного перерізу, виготовлених з одного матеріалу, при сталій поздовжній силі.

Для бруса, що має кілька ділянок, які відрізняються матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною поздовжньої сили, зміна довжини всього бруса дорівнює алгебраїчній сумі видовжень і укорочень окремих ділянок:

$$\Delta l = \sum (Nl / EA)$$

або

$$\Delta l = \int (N dl / EA).$$

Приклад. На сталений ступінчастий брус $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па діють сили $P = 20$ кН і $T = 30$ кН. Площі поперечних перерізів відповідно дорівнюють 400 мм^2 , 800 мм^2 . Довжини ділянок вказано на (рис. 4.8). Визначити зміну довжини бруса.

Отже, брус укоротиться на 0,15 мм.

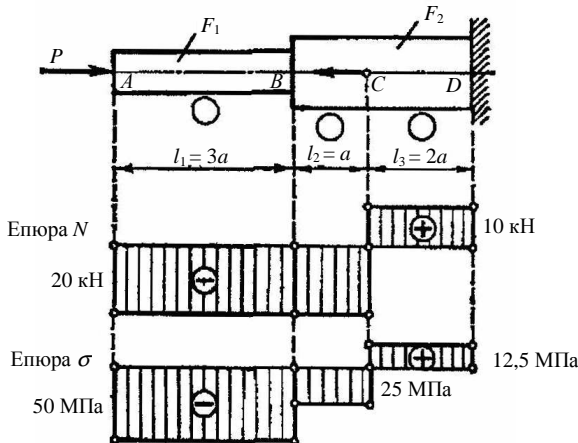


Рис. 4.8

Побудуємо епюру нормальних напруг (рис. 4.8). Враховуючи, що $a = 0,2$ см, і підставляючи у формулу числові значення, дістаємо $-0,15$ мм.

Розв'язуючи трьома різними способами, дістаємо один і той самий результат, що стверджує правильність розв'язання.

4.5.3. Поперечна деформація розтягу і стиску

Описаний раніше дослід з гумовим брусом показує, що поперечні розміри перерізу при розтягу зменшуються, а при стиску збільшуються. Це характерно для розтягу і стиску всіх матеріалів. На дослідах встановлено, що при одновісному розтягуванні або стисканні відношення відносних поперечних і поздовжніх деформацій для даного матеріалу є величина стала. Залежність між відносного поперечною ε' і відносною поздовжньою ε деформаціями вперше встановив французький вчений Пуассон (1781-1840). Ця залежність має такий вигляд:

$$|\varepsilon'| = \nu |\varepsilon|.$$

Корок – 0,00; латунь – 0,32-0,42; чавун – 0,23-0,27; свинець – 0,42; сталь – 0,24-0,30, каучук – 0,47, мідь – 0,31-0,34, парафін – 0,5.

4.5.4. Діаграма розтягу малоуглецевої сталі

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі величини E і ν , потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків проєктованих деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу.

У цьому розділі докладно розглянемо діаграму, добуту в процесі найбільш поширеного і важливого механічного випробування, а саме випробування на розтяг мало углецевої сталі (наприклад, сталі Ст 2) при статичному навантаженні.

У процесі цього випробування спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму, яка показує залежність між розтягуючою силою і абсолютним видовженням. Для вивчення механічних властивостей матеріалу незалежно від розмірів зразка застосовують діаграму в координатах «напруга – відносне видовження». Ці діаграми відрізняються одна від одної лише масштабами. Діаграму розтягу мало углецевої сталі подано на рис. 4.9. Ця діаграма має такі характерні точки. Точка A відповідає границі пропорційності. Границею пропорційності називають таку найбільшу напругу, до якої деформації зростають пропорційно навантаженню, тобто відповідно до закону Гука (для сталі Ст 3 – 200 Мпа).

Точка A практично відповідає й іншій границі, яку називають

границею пружності. Границею пружності σ_{np} називають таку найбільшу напругу, до якої деформації практично залишаються пружними. Точка C відповідає границі текучості. Границею текучості σ_T називають таку напругу, при якій у зразку виникає помітне видовження без збільшення навантаження (для сталі Ст 3 – 240 Мпа).

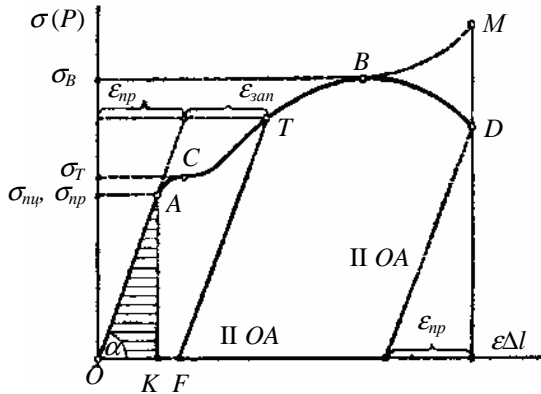


Рис. 4.9

Коли деформація досягає границі текучості, поверхня зразка стає матовою, бо на ній появляється сітка ліній Людерса-Чернова, нахилена до осі під кутом 45° .

Границя текучості – це основна механічна характеристика для оцінки міцності пластичних матеріалів.

Точка B відповідає тимчасовому опору або границі міцності.

Тимчасовим опором σ_{GM} називають умовну напругу, що дорівнює відношенню максимальної сили, яку витримує зразок, до початкової площі його поперечного перерізу (для сталі Ст 3 – 400 Мпа). Коли деформація досягає тимчасового опору, то на розтягнутому зразку утворюється місцеве звуження – шийка, тобто починається руйнування зразка. В означенні тимчасового опору йдеться про умовну напругу, оскільки в перерізах шийки напруги будуть більшими.

Границею міцності σ , називають тимчасовий опір зразка, який руйнується без утворення шийки. Границя міцності є основною механічною характеристикою для оцінки міцності крихких матеріалів.

Точка D відповідає напрузі, яка виникає у зразку в момент розриву усіх поперечних перерізів, крім перерізу шийки.

За допомогою діаграми розтягу в координатах (σ, ϵ) визначають

ся модуль пружності першого роду.

Деформація зразка за границею пружності складається з пружної і залишкової, причому пружна частина деформації підлягає закону Гука й за границею пропорційності (рис. 4.9). Якщо навантаження зняти, то зразок укоротиться відповідно до прямої TP діаграми. При повторному навантаженні того самого зразка його деформація відповідатиме діаграмі $PTBO$. Отже, *при повторному розтягуванні* зразка, раніше навантаженого більше, ніж границя пружності, механічні властивості матеріалу змінюються, а саме: *підвищується міцність* (границя пружності і пропорційності) і *зменшується, пластичність*. Це явище називають наклепом.

Дріт, який витягують волочінням, у результаті наклепу має значно більшу міцність, ніж точений зразок з того самого матеріалу.

Ступінь пластичності матеріалу можна охарактеризувати величиною (в процентах) залишкового відносного видовження δ і залишкового відносного звуження ψ шийки зразка після розриву:

$$\delta = [(l_p - l_0) / l_0] \cdot 100; \quad \psi = [(A_0 - A_u) / A_0] \cdot 100,$$

де l_0 – початкова довжина зразка; l_p – довжина зразка після розриву;

A_0 – початкова площа поперечного перерізу зразка; A_u – площа найменшого поперечного перерізу шийки зразка після розриву. Чим більші, тим пластичні ший матеріал. Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. Діаграма розтягу крихких матеріалів не має переходу текучості, в них при руйнуванні шийка не утворюється.

Діаграма стиску сталі до границі текучості збігається з діаграмою розтягу, причому результати випробування сталі на розтяг і стиск однакові. Результати випробувань на розтяг і стиск чавуну значно відрізняються; границя міцності на розтяг у 3-5 разів менша, ніж на стиск. Інакше кажучи, *чавун значно гірше працює на розтяг, ніж на стиск*.

Зазначимо, що чітко виражену площадку текучості мають лише діаграми розтягу маловуглецевої сталі і деяких сплавів кольорових металів. На рис. 4.10 показано для порівняння діаграми розтягу сталей з різним вмістом вуглецю; з рисунка видно, що із збільшенням *процентна вмісту вуглецю зростає міцність сталі і зменшується її пластичність*.

Для пластичних матеріалів, діаграми розтягу яких не мають чітко вираженої площадки текучості (середньої і високо вуглецеві, леговані сталі) або зовсім її не мають (мідь, дюралюміній), вводиться поняття умовної границі текучості – напруги, при якій відносно залишкове видовження зразка дорівнює 0,2 %.

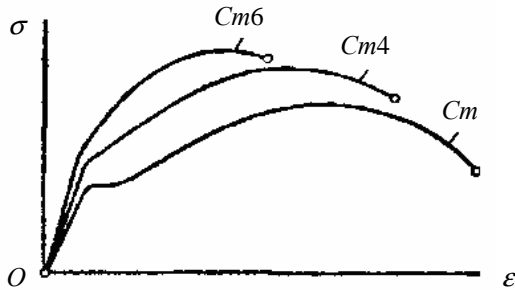


Рис. 4.10

Треба зазначити, що поділ матеріалів на пластичні і крихкі цілком умовний, оскільки залежно від характеру діючого навантаження крихкий матеріал може набути пластичних властивостей і, навпаки, пластичний матеріал набуває властивостей крихкого. Так, наприклад, деталь з пластичного матеріалу при низькій температурі або при ударному навантаженні руйнується без утворення шийки, як крихка.

4.5.5. Розрахункова формула для розтягу і стиску

За допомогою механічних випробувань встановлюють граничні напруги, при яких відбувається порушення роботи або руйнування деталей конструкцій. Граничною напругою при статичному навантаженні для *пластичних матеріалів* є *границя текучості*, для *крихких* – *границя міцності*. Міцність деталей забезпечуватиметься при умові, що напруги, які виникають в деталях у процесі експлуатації, будуть менші від граничних. Відношення граничної напруги до напруги, яка виникає у процесі роботи деталі, називають коефіцієнтом запасу міцності і позначають n :

$$n = \sigma_{cp} / \sigma_{роз}.$$

Очевидно, що малий коефіцієнт запасу міцності не забезпечить надійності конструкції, а надмірний запас міцності призведе до перевитрат матеріалу і збільшення ваги конструкції. *Переріз, для якого коефіцієнт запасу міцності найменший, називають небезпечним. Мінімально необхідний коефіцієнт запасу міцності називають допустимим* і позначають $[n]$. Допустимий коефіцієнт запасу міцності залежить від властивостей, якості і однорідності матеріалу, можливих навантажень, які діють на конструкцію, важливості конструкції і багатьох інших причин. Для *пластичних матеріалів* $[n] = 1,2-2,5$, для *крихких* $[n] = 2-5$, для *деревини* $[n] = 8-12$. Відношення граничної напруги

до допустимого коефіцієнта запасу міцності називають допустимою напругою і позначають $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \sigma_e / [n].$$

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що найбільша напруга (робоча), яка виникає у ній, не повинна перевищувати допустиму;

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Умову міцності можна записати в Іншому вигляді:

$$n \geq [n],$$

тобто розрахунковий коефіцієнт запасу міцності не повинен бути меншим від допустимого.

Її читають так: нормальна напруга в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиму.

У розрахунках конструкцій на міцність трапляються три види задач, які відрізняються формою застосування розрахункової формули:

- 1) проектний розрахунок, при якому визначають розміри небезпечного перерізу.
- 2) перевірний розрахунок, при якому визначають робочу напругу і порівнюють її з допустимою.
- 3) визначення допустимого навантаження.

Приклад. Визначити розмір квадратного перерізу дерев'яного підкосу BC конструкції, зображеної на рис. 4.11, якщо $P = 5$ кН, $[\sigma] = 6$ Мпа, $a = 1$ м. Масою частин конструкції знехтувати, кріплення у точках A, B і C вважати ідеально гладенькими шарнірами.

Розв'язання. З теоретичної механіки відомо, що коли прямолінійний стержень закріплено шарнірно двома кінцями і навантажено лише на кінцях, то його реакція напрямлена вздовж стержня. Отже, реакція K стержня BC , що підтримує брус AB , напрямлена, вздовж стержня. Очевидно, що під дією сили K' (сила стиску бруса AB на стержень BC) у поперечних перерізах виникатимуть тільки поздовжні сили $N = K'$ і він зазнаватиме деформації стиску, причому, згідно з третім законом Ньютона, $K' = K$.

Щоб визначити реакцію K , розглянемо рівновагу бруса $L5$. Оскільки реакція шарніра A нас не цікавить, то складемо одне рівняння рівноваги, а саме;

$$-P \cdot 2a + R_a \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси

$$R = 2 \cdot 5 / 0,707 = 14,2 \text{ кН.}$$

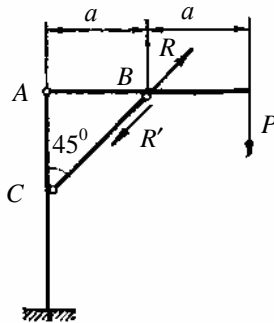


Рис. 4.11

Далі скористаємось розрахунковим рівнянням для стиску і визначимо площу A поперечного перерізу підкосу BC :

$$A = 2370 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Оскільки підкос BC має квадратний переріз, то $A = b^2$, отже $b = 48,6$ мм, або $b = 50$ мм.

4.6. Зсув (зріз)

4.6.1. Напруги деформації зсуву

Зсувом називають такий вид деформації, за якої у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише поперечна сила. Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих штаб або прутків (рис. 4.12,а). Розглянемо брус перпендикулярно до осі якого прикладемо дві однакові, але протилежно напрямлені сили P , лінії дії їх паралельні і проходять на відносно невеликій відстані одна від одної. Для визначення поперечної сили Q застосуємо метод перерізів (рис. 4.12,б).

В усіх точках поперечного перерізу діятимуть розподілені сили, рівнодіючу яких визначимо з умови рівноваги залишеної частини бруса: $P - Q = 0$, звідки визначимо поперечну силу Q :

$$Q = P.$$

Поперечна сила – це рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, що діють на зсув у поперечному перерізі. Природно вважати, що при зсуві в поперечному перерізі бруса діють тільки дотичні напруги τ . Припускаємо, що ці напруги розподілені по перерізу рівномірно і отже, їх можна обчислити за формулою $\tau = Q / A$.

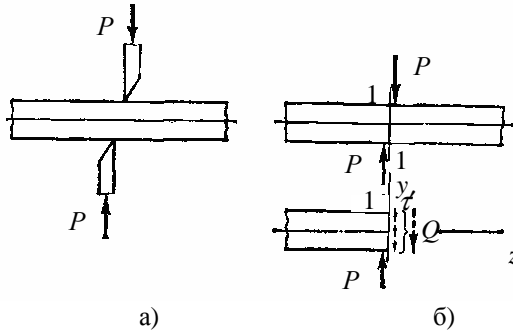


Рис. 4.12

Очевидно, що при зсуві форма перерізу на величину напруги не впливає.

Примітка. Викладений у цьому параграфі розрахунок дотичних напруг при зсуві наближений, оскільки лінії дії сил P і Q (рис. 4.12,б) напрямлені не по одній *прямій* і, точно кажучи, ці сили не утворюють рівноваженої системи, це – пара сил. Проте момент цієї пари невеликий (мале плече) і відповідними їй напругами можна знехтувати.

4.6.2. Розрахункова формула для зсуву

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що найбільша напруга (робоча напруга), яка виникає в ній, не повинна бути більшою від допустимої. Розрахункова формула для зсуву $\tau = Q/A < [\tau]$, її читають так: дотична напруга при зсуві не повинна бути більшою від допустимої.

За цією формулою роблять проектний і перевірний розрахунки і визначають допустиме навантаження.

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають, зрізом (стосовно металевих деталей) або сколюванням (стосовно неметалевих конструкцій). Допустиму напругу на зріз для пластичних матеріалів вибирають залежно від границі текучості. У машинобудуванні для штифтів, болтів, шпонок і т. п. приймають $[\tau] = (0,25 - 0,35)\sigma_T$.

4.6.3. Закон парності дотичних напруг

Закон парності дотичних напруг формують так: дотичні напруги у двох, взаємно перпендикулярних площадках, перпендикулярних до їх спільного ребра, однакові за модулем.

Всередині тіла біля якоїсь точки виріжемо елементарний паралелепіпед, що має dx, dy, dz (рис. 4.13,а). Нехай на верхній грані цього паралелепіпеда діє дотична напруга $-\tau$. Сила, що діє в цій грані, дорівнюватиме $dQ = \tau dx dy$.

Оскільки паралелепіпед перебуває всередині тіла в рівновазі, то $\sum X = 0$, отже, на нижній грані паралелепіпеда діятиме така сама сила dQ , але у протилежному напрямі. Пара сил (dQ, dQ') намагатиметься обертати паралелепіпед проти стрілки годинника (рис. 4.13,б). Оскільки паралелепіпед перебуває у рівновазі, то $\sum M = 0$, тому пара (dQ, dQ') зрівноважуватиметься якоюсь іншою парою з моментом, що дорівнює моменту першої пари. Природно вважати, що другу пару утворюють дотичні напруги, які діють на бокових (правій і лівій) гранях паралелепіпеда, причому $dQ' = \tau' dy dz$. Отже, $\tau dy dx dz = \tau' dy dz dx$ або $\tau = \tau'$.

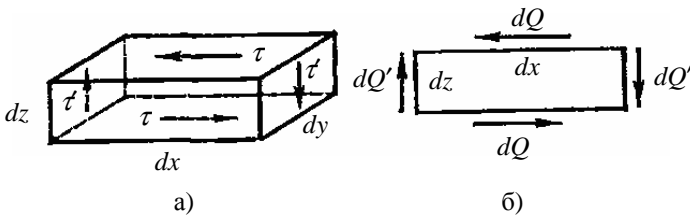


Рис. 4.13

Звернемо увагу на те, що парні дотичні напруги у двох взаємно перпендикулярних перерізах напрямлені або до лінії перерізу січних площин, або від неї.

4.6.4. Напруги у похилих перерізах під час розтягу. Головні напруги

Через деяку точку деформованого тіла можна провести безліч січних площин. Розглянемо прямий брус сталого поперечного перерізу A , що розтягується силами P (рис. 4.14,а). Розріжемо брус площиною

1–1, що проходить через точку A і утворює з поперечним перерізом кут, відкинемо верхню частину і розглянемо рівновагу нижньої. Очевидно, що рівнодіюча N внутрішніх сил, які діють у похилому перерізі, дорівнюватиме розтягуючій силі P .

Напруги P_φ будуть паралельні осі бруса (рис. 3.14,б). Якщо напруги P_φ розподілені по похилому перерізу рівномірно, то

$$P_\varphi = N / A_\varphi,$$

де A_φ – площа похилого перерізу.

Нормальні напруги у поперечному перерізі дорівнюватимуть $\sigma = N / A$.

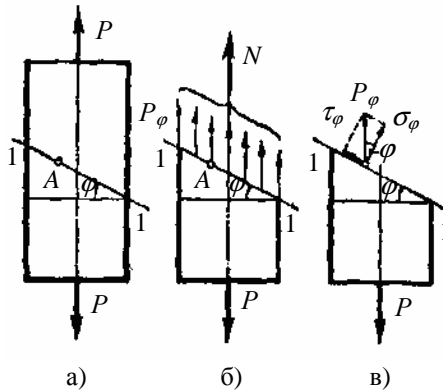


Рис. 4.14

Розкладемо повну напругу P_φ у точці похилого перерізу на нормальну і дотичну напруги (рис. 4.14,а), тоді $\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi$, $\tau_\varphi = (\sigma / 2) \sin^2 \varphi$.

Звідси випливає висновок: під час розтягу бруса у похилих перерізах виникають нормальні і дотичні напруги, рівномірно розподілені по перерізу, і відповідні цим напругам деформації розтягу і зсуву.

Розглянемо окремі випадки:

1) $\varphi = 0$; $\sigma_\varphi = \sigma_{\max}$.

Нормальні напруги мають максимальне значення в поперечному перерізі:

Дотичні напруги у поперечному перерізі дорівнюють нулю.

2) $\varphi = 45^\circ$; $\sigma_\varphi = \sigma / 2$,

$$\tau_{\varphi} = \tau_{\max}$$

Дотичні напруги досягають свого максимального значення в перерізах, нахилених до осі під кутом 45° . Ці напруги є причиною виникнення на розтягнутому зразку сітки похилих ліній Людерса-Чернова, коли деформація досягає границі текучості.

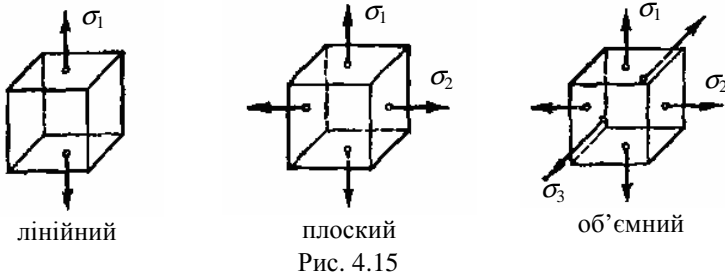
$$2) \varphi = 45^{\circ}; \sigma_{\varphi} = 0,$$

$$\tau_{\varphi} = 0.$$

У поздовжніх перерізах бруса немає ні дотичних, ні нормальних напруг (пригадаймо гіпотезу про не натискання волокон).

Із сказаного випливає, що коли йдеться про напругу у даній точці, то завжди необхідно вказувати положення січної площини, в якій ця напруга виникає. Сукупність нормальних і дотичних напруг, що виникають у безлічі площадок, які можуть проходити через дану точку, характеризує *напружений стан у даній точці*.

Площини, в яких *дотичні напруги дорівнюють нулю*, називають головними площадками, а нормальні напруги, що виникають у них, – головними напругами. Як доводить теорія пружності, у загальному випадку напруженого стану в ділянці досліджуваної точки може бути три взаємно перпендикулярні головні площадки. Залежно від кількості таких площадок розрізняють три основних види напруженого стану: лінійний (одновісний), плоский (двовісний) і об'ємний (тривісний) (рис. 4.15). Далі розглядатимемо лише перші два види напруженого стану.



Очевидно, що в розглянутому випадку одновісного розтягу головні площадки розміщені в поперечному і поздовжньому перерізах, тобто взаємно перпендикулярні. Звернемо увагу й на те, що *головні напруги* в даній точці *мають максимальне і мінімальне значення*.

4.7. Геометричні характеристики плоских перерізів

У деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Досі вивчалися деформації, у яких напруги залежали тільки від площі поперечного перерізу. Але для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати й деякі інші геометричні характеристики плоских фігур.

4.7.1. Статичний момент площі

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис. 4.16). Статичний момент площі позначимо S з індексом відповідної осі:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA.$$

У теоретичній механіці було виведено формули для визначення координат центра ваги площі фігури:

$$x_C = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i}, \quad y_C = \frac{\sum(A_i y_i)}{\sum A_i}.$$

Оскільки у цих формулах під A_i можна розуміти площу dA елементарної площадки, то в границі, коли dA прямує до нуля, вирази, які стоять у чисельниках правих частин формул, є статичними моментами площі фігури відносно осей y і x , а $\sum A_i$ – це площа A усієї фігури. Отже, $S_y = \int_A x dA = x_C A$, $S_x = \int_A y dA = x_C A$.

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця статичного моменту площі $[S] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3$.

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через центр ваги площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, дорівнює нулю.

У теоретичній механіці встановлено також, що в формулах для визначення координат центра ваги площі можна розуміти площі кінцевих частин фігури, а під x і y – координати центрів ваги цих частин (тобто застосовувати метод розбиття). Звідси випливає, що для визна-

чення статичного моменту площі складної фігури також можна застосовувати метод розбиття, тобто *визначати статичний момент* всієї фігури як *алгебраїчну суму* статичних моментів окремих її частин.

Поняття про статичний момент площі буде потрібне для визначення положення центрів ваги перерізів і для визначення дотичних напруг згину.

4.7.2. Полярний момент інерції

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площині суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса (рис. 4.17). Полярний момент інерції позначатимемо J_p .

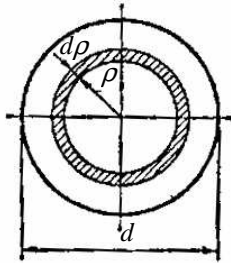


Рис. 4.16

$$J_p = \int p^2 dA.$$

Одиниця полярного моменту інерції – m^4 .

Полярний момент інерції – величина *завжди додатна і не дорівнює нулю*.

Оскільки поняття полярного моменту інерції буде потрібне для вивчення деформацій кручення круглих валів, виведемо формули полярних моментів інерції круглого суцільного і кільцевого перерізів, приймаючи як полюс центри цих фігур.

1. Круг діаметром d (рис. 4.16)

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32},$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4, \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0,1d^4.$$

2. Кільце

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,1 \cdot (D^4 - d^4),$$

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) = 0,1 \cdot (D^4 - d^4).$$

4.7.3. Осьовий момент інерції

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі (рис. 4.17). Осьовий момент інерції позначатимемо J з індексом, що відповідає осі: $J_x = \int y^2 dA$.

Очевидно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях: м^3 .

Осьовий момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю. Додамо моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x і y (рис. 4.17).

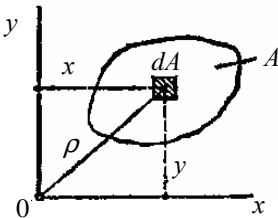


Рис. 4.17

$$\begin{aligned} J_x + J_y &= \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = \\ &= \int_A (y^2 + x^2) dA + \int_A \rho^2 dA = J_p, \\ J_x + J_y &= J_p. \end{aligned}$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат. Через те що інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, то момент інерції складної фігури, можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур, на які розбивають складну фігуру. Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину. Обчислимо осьові моменти інерції деяких простих фігур.

1. Прямокутник $J_x = bh^3 / 12$.

2. Круг відносно діаметрів x і y $J_x = J_y = J_p / 2 = \frac{\pi d^4}{64} = 0,05d^4$;

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} = 0,05d^4 .$$

3. Прямокутник $J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = bh^3 / 12$,

$$J_x = \frac{bh^3}{12} .$$

4. Круг розміром d : $J_x + J_y = \frac{\pi d^4}{32}$.

5. Кільце $J_x = J_y = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,05 \cdot (D^4 - d^4)$.

4.8. Кручення

4.8.1. Відомості про деформацію кручення циліндра

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент. Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладена пара сил. Моменти цих пар називають обертаючими (якщо брус обертається) і скручуючими (якщо брус не обертається). Згідно з ГОСТом, обертаючий момент позначають T .

Оскільки на кручення працюють вали, що звичайно мають круглий, або кільцевий переріз, то розглянемо кручення круглого циліндра (рис. 4.18). Виготовимо з гуми (для більшої наочності) прямий круговий циліндричний брус і жорстко затиснемо один його кінець; нанесемо на його поверхню сітку ліній, що складається з твірних і кіл, а потім прикладемо до вільного кінця бруса пару сил, щоб вона діяла в площині, перпендикулярній до осі, тобто піддамо брус деформації кручення.

При цьому:

1) вісь циліндра, яку називають віссю кручення, залишиться прямолінійною;

2) діаметри кіл, нанесених на поверхню циліндра до деформації, під час деформації залишаться такими самими і відстань між колами не зміниться;

3) твірні циліндра перетворюються у гвинтові лінії.

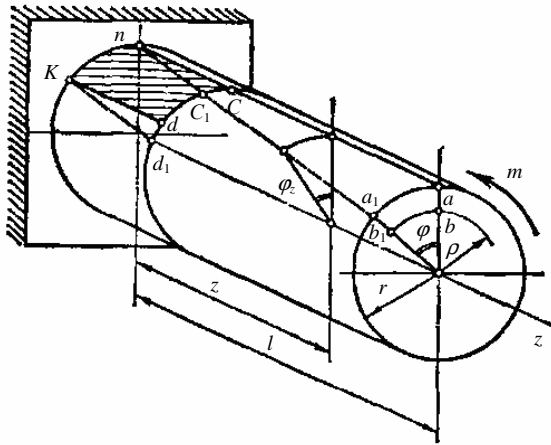


Рис. 4.18

З цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються під час деформації прямими. Оскільки в поперечних перерізах бруса немає поздовжніх сил, то відстані між перерізами не змінюються. З цього випливає, що деформація кручення круглого циліндра полягає у повертанні поперечних перерізів одного відносно одного навколо осі кручення, причому кути їх повороту прямо пропорційні відстаням від закріпленого перерізу. Кут повороту перерізу дорівнює куту закручування частини циліндра, що знаходиться між даним перерізом і закріпленням. Кут повороту кінцевого перерізу називають повним кутом закручування циліндра.

Відносним кутом закручування φ_0 називають відношення кута закручування φ до відстані z даного перерізу від закріплення.

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений будь-якою клітинкою сітки (наприклад, на рис. 4.18), бачимо, що ця клітинка при деформації перекошується. Подібне спостерігалось під час вивчення деформації зсуву. На цій підставі можна зробити висновок, що *при крученні* також виникає *деформація зсуву*, але не за рахунок поступального, а в результаті обертового руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Отже, при крученні у поперечних перерізах виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент. Крутний момент є результуючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

4.8.2. Епюри крутних моментів

Для наочного зображення розподілу крутних моментів вздовж осі бруса будують епюри крутних моментів. Крутний момент у перерізах бруса визначають за допомогою методу перерізів. Оскільки вал, який рівномірно обертається, як і нерухомий брус, перебуває у рівновазі, то очевидно, що внутрішні сили, які виникають у поперечному перерізі, повинні зрівноважувати зовнішні моменти, які діють на розглядувану частину бруса. Звідси випливає, що *крутний момент в будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.*

Епюри крутих моментів дають змогу визначати небезпечні перерізи, зокрема, якщо брус має сталий поперечний переріз, то небезпечними будуть перерізи на ділянці, де виникає найбільший крутний момент.

Крутний момент вважаємо *додатним*, якщо результуючий момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса, буде напрямлений проти стрілки годинника, коли дивиться з боку перерізу, і навпаки. Користуючись принципом пом'якшених граничних умов, вважатимемо, що у поперечному перерізі, де прикладено обертаючий або скручуючий момент, значення крутного моменту змінюються стрибкоподібно.

Приклад. Побудувати епюру крутних моментів для трансмісійного вала, зображеного на рис. 4.19. Обертаючі моменти дорівнюють: $T_1 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_2 = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_3 = 250 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_4 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Розв'язання. Розділимо вал на ділянки, як показано на рис. 4.19,а. Застосуємо метод перерізів і принцип пом'якшених граничних умов. Домовимося відкладати додатні крутні моменти вгору від осі епюри, а від'ємні – вниз. Побудуємо епюру крутних моментів (рис. 4.19,а). На першій, а також на п'ятій ділянках, крутний момент дорівнює нулю, оскільки обертаючого моменту на цих ділянках немає. Тому проводимо горизонтальну пряму по осі епюри до шківів 1, де епюра робить «стрибок», що дорівнює величині обертаючого моменту, тобто $500 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Потім проводимо горизонтальну пряму до шківів 2, де прикладено обертаючий момент, що дорівнює $150 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Тут епюра знову робить «стрибок» униз (пригадаємо правило знаків). Аналогічно будують епюри крутних моментів і на інших ділянках.

Зауважимо, що «стрибок» на епюрі крутних моментів завжди чисельно дорівнює значенню обертаючого моменту, прикладеного в розглядуваному перерізі. З епюри видно, що найбільший крутний момент буде на другій ділянці: $500 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

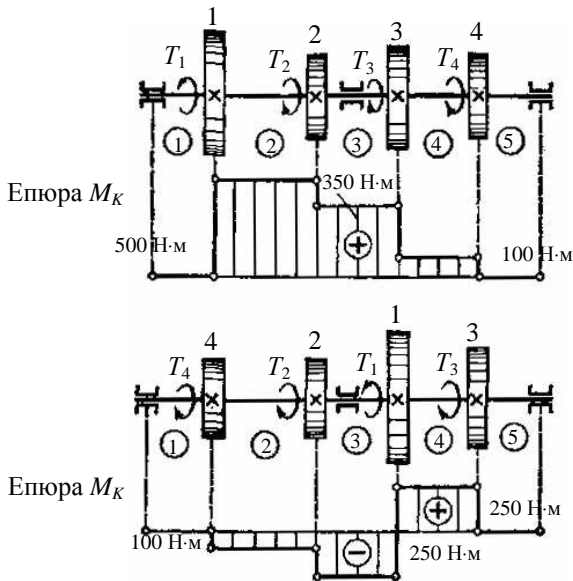


Рис. 4.19

Рациональним розміщенням шківів можна домогтися зменшення значення $M_{K \max}$. На рис. 4.19,б зображені схема розміщення шківів і відповідна їй епюра, з якої видно, що найбільше значення крутного моменту 250 Н·м, тобто в два рази менше, ніж у першому випадку. Таке розміщення шківів економічно вигідне, оскільки дає можливість передавати задані потужності за допомогою вала меншого діаметра.

Доцільнішим вважають таке розміщення шківів на валу, за якого найбільші додатні і від'ємні значення крутних моментів на ділянках будуть по можливості однаковими (див. епюра M_K на рис. 4.19,б).

4.8.3. Напруги і деформації кручення

Уявимо, що прямий круговий циліндр, який зазнає деформації кручення, складається з нескінченно великої кількості волокон, паралельних осі. Вважатимемо, що для кручення справедлива гіпотеза про не натискання волокон.

Знаючи, що під час кручення відбувається деформація зсуву, природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки дотичні напруги τ , перпендикулярні до радіуса, що сполучає ці

точки з віссю кручення. Існування нормальних напруг у поздовжньому перерізі виключається, оскільки справедлива гіпотеза про не натискання волокон; нормальні напруги у поперечному перерізі не виникають, бо немає поздовжньої сили.

Оскільки радіуси перерізу під час кручення залишаються прямими, то величина абсолютного зсуву перерізу волокон прямо пропорційна їх відстані від осі кручення

$$\varphi_0 = \frac{M_{\kappa}}{G \cdot J_{\rho}}, \text{ рад.}$$

Оскільки відносний кут закручування – величина стала для даного циліндричного бруса, то дотичні напруги при крученні прямо пропорційні відстані точок перерізу від осі кручення. Епюра розподілу напруг вздовж радіуса перерізу має вигляд трикутника (рис. 4.20). Якщо брус складається з однієї ділянки, тобто має сталий переріз і сталий по довжині крутний момент, то дотичні напруги у даному волокні будуть по всій довжині циліндра однакові.

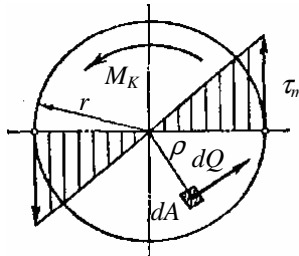


Рис. 4.20

Отже, напруги і деформації кручення круглого циліндра обчислюють за формулами

Умова міцності бруса для кручення полягає у тому, що найбільша дотична напруга, яка виникає у ньому, не повинна перевищувати допустиму.

Читається так: дотична напруга у небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиму. Допустиму напругу кручення вибирають залежно від допустимої напруги розтягу

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{G \cdot J_{\rho}}.$$

Таким чином, встановлено, що повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра

і обернено пропорційний жорсткості перерізу при крученні. Оскільки для виведення останньої формули застосовано закон Гука, то вона дійсна в межах, коли навантаження і деформація прямо пропорційні

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa} r}{J_{\rho}} = \frac{M_{\kappa}}{J_{\rho} / r} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho}}.$$

Треба звернути увагу на те, що ці формули за структурою аналогічні формулам для обчислення напруг і деформацій розтягу, стиску і застосовні лише для ділянок бруса з однакового матеріалу, що мають

сталі поперечний переріз і крутний момент, де $W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{r}$.

З епюри розподілу дотичних напруг при крученні видно, що внутрішні волокна бруса зазнають невеликих напруг, тому вали іноді роблять порожнистими, чим досягається значний вигреш в матеріалі при незначній втраті міцності. Визначимо момент опору крученню для круглого і кільцевого перерізів.

Круг діаметра d : $W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} = 0,2d^3$.

Кільце $D \times d$: $W_{\rho} = \pi \cdot (D^4 - d^4) / 16D \approx 0,2 \cdot (D^4 - d^4) / D$.

4.9. Згин

4.9.1. Чистий згин прямого бруса

Чистим згином називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки *згинаючий момент*. Деформація чистого згину буде, наприклад, тоді, коли до прямого бруса в площині, яка проходить через вісь, прикласти дві однакові за величиною і протилежні за знаком пари сил. На згин працюють балки, осі, вали й інші деталі конструкцій (означення балки відоме з теоретичної механіки). Надалі майже завжди розглядатимемо такі бруси, в яких є хоча б одна площина симетрії і з нею збігається площина дії навантажень. У цьому випадку деформація згину відбувається в площині дії зовнішніх сил і згин називають прямим, на відміну від косоного згину, який розглянуто в останньому параграфі цього розділу.

На бокову поверхню призматичного гумового (для більшої наочності) бруса прямокутного перерізу нанесемо сітку поздовжніх і поперечних прямих ліній і піддамо цей брус деформації чистого згину (рис. 4.21). У результаті побачимо, що:

а) поперечні прямі лінії під час деформації залишаться прямими, але повернуться назустріч одна одній;

- б) поздовжні прямі лінії, а також вісь бруса викривляється;
- в) перерізи бруса стануть ширшими в поперечному напрямі на вгнутому боці і звужаться на опуклому боці.

З описаних дослідів можна зробити висновок, що для чистого згину дійсна гіпотеза плоских перерізів волокна, які лежать на опуклому боці, розтягуються, а ті, що лежать на вгнутому боці – стискаються. На межі між ними лежить нейтральний шар волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини. Приймаючи дійсною гіпотезу про ненависання волокон, можна стверджувати, що при чистому згині в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу.

Викривлення волокон і осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напруг по поперечному перерізу. Лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу називають нейтральною віссю. На нейтральній осі нормальні напруги дорівнюють нулю.

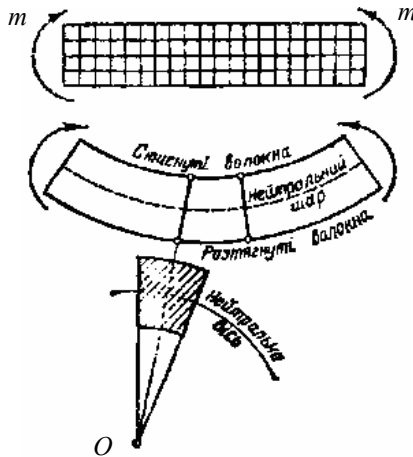


Рис. 4.21

4.9.2. Згинаючий момент і поперечна сила

Як відомо з теоретичної механіки, опорні реакції балок визначають, складаючи для всієї балки і розв'язуючи рівняння рівноваги статки, Пам'ятатимемо, що при визначенні внутрішніх сил реакції зв'язків враховують поряд з активними зовнішніми силами, які діють на балку. Для визначення внутрішніх силових факторів застосуємо метод перерізів.

Розглянемо два випадки:

1. До балки прикладено *дві однакові за величиною і протилежні за знаком пари сил* (рис. 4.21). Розглядаючи рівновагу лівої або правої частини балки від перерізу , бачимо, що в усіх поперечних перерізах виникає тільки згинаючий момент M_{z_2} , який дорівнює зовнішньому моменту. Таким чином, розглянутий випадок є випадком чистого згину.

Згинаючий момент є результуючим моментом відносно нейтральної осі внутрішніх нормальних сил, які діють у поперечному перерізі балки.

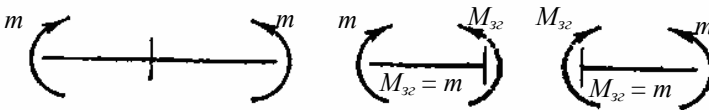


Рис. 4.22

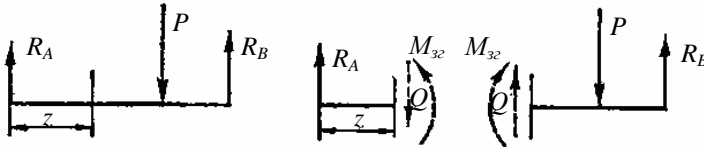


Рис. 4.23

2. До балки прикладено *активні і реактивні сили, перпендикулярні до осі* (рис. 4.23). Розглядаючи рівновагу частин балки, розміщених зліва і справа від перерізу, бачимо, що в поперечних перерізах повинні діяти згинаючий момент M і поперечна сила Q . З цього випливає, що в розглянутому випадку в точках поперечних перерізів діють не тільки нормальні напружки, які відповідають згинаючому моменту, а й дотичні напружки, які відповідають поперечній силі.

Згин, при якому в поперечному перерізі балки діють згинаючий момент і поперечна сила, називають поперечним.

Для балки, яка перебуває в рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю; отже, сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перерізу, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перерізу.

4.9.3. Диференціальні залежності для згину

Між згинаючим моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в

основі яких лежить теорема Журавського, названа так за ім'ям визначного російського інженера-мостобудівника Д.І. Журавського(1821-1891). Цю теорему формулюють так: поперечна сила дорівнює першій похідній від згинаючого моменту по абсцисі перерізу балки

Розглянемо балку, зображену на рис. 4.24. Початок координат візьмемо на лівому кінці балки, а вісь z напрямимо вправо (надалі ця обставина матиме важливе значення). На одній з ділянок балки проведемо переріз поточною координатою z і запишемо рівняння згинаючого моменту:

$$M_{z_2} = R_A z + m - P_1(z - a) + q(z - b)^2 / 2 .$$

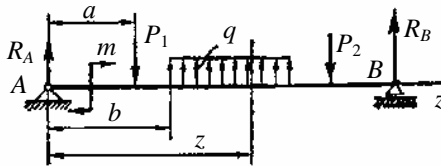


Рис. 4.24

Продиференціювавши цей вираз за координатою z , матимемо:

$$\frac{dM_{z_2}}{dz} = R_A - P_1 + q(z - b); \quad \frac{dM_{z_2}}{dz} = Q; \quad \frac{dQ}{dz} = g;$$

тобто друга похідна від згинаючого моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Як відомо з вищої математики, за законом другої похідної функції можна судити про опуклість або вгнутість кривої; відповідне правило слід використовувати для побудови епюри.

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинаючих моментів будують епюри, які дають змогу визначити можливий небезпечний переріз балки, встановити значення поперечної сили і згинаючого моменту в цьому перерізі.

4.9.4. Нормальні напруги чистого згину

Як було встановлено раніше, в поперечних перерізах балки у випадку чистого згину виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску. Щоб визначити розподіл цих напруг по поперечному перерізу, треба розглянути деформації волокон балки.

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину. Двома поперечними перерізами AB і CO виділимо елемент балки не-

скінченно малої довжини (рис. 4.25). Радіус кривизни нейтрального шару позначимо ρ .

$$\sum M_x = 0; \quad -m + \int_A y dN = 0,$$

$$M_{32} = \int_A y dN = \int_A y \sigma dA = \int_A y \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Під час згину нейтральна вісь проходить через центр ваги площі поперечного перерізу $M_{32} = EJ / \rho$,

де $J = \int_A y^2 dA$; $\sigma = Ey / \rho$; $M_{32} = const$; $J = const$;

$$\sigma = \frac{EY}{(EJ/M)} = (MY) / J$$

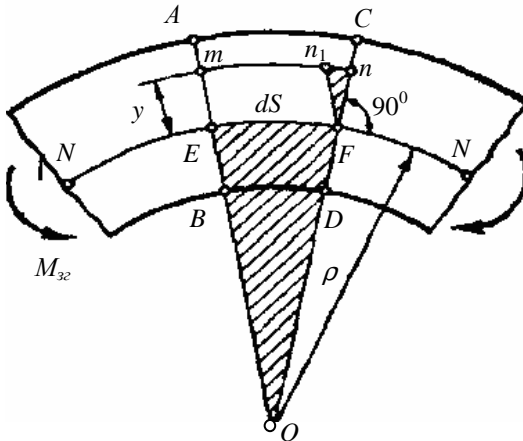


Рис. 4.25

З цієї формули видно, що нормальні напруги деформації згину розподілені по висоті перерізу нерівномірно: *максимальні напруги виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтралі осі*. По ширині перерізу нормальні напруги не змінюються. Закон розподілу нормальних напруг зображено на рис. 4.26.

Ця формула для обчислення нормальних напруг незручна, бо до неї входить радіус кривизни нейтрального шару. Щоб знайти формулу, яка зв'язує нормальні напруги і згинаючий момент, застосуємо метод перерізів і розглянемо рівновагу частини балки.

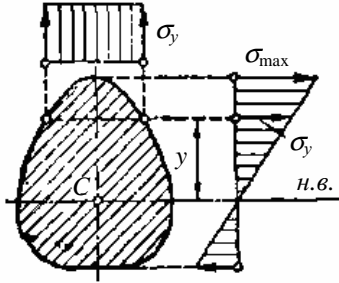


Рис. 4.26

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{32} y_{\max}}{J} = \frac{M_{32}}{J / y_{\max}} = \frac{M_{32}}{W}.$$

У випадку чистого згину балки сталого перерізу $M_{32} = \frac{EJ}{\rho}$;

$\rho = \frac{EJ}{M_{32}} = \text{const}$. Отже, зігнута вісь такої балки є дугою кола.

Значення радіуса кривизни підставимо в формулу для обчислення нормальних напруг, тоді Максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна найбільш віддалені від нейтральної осі.

Ця формула за структурою подібна до формул для обчислення напруг розтягу, стиску, зсуву і кручення.

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальна нормальна напруга в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиму.

Вважаючи, що гіпотеза про ненатискання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруги в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд.

$$\sigma = (M_{32 \max} / W) \leq [\sigma].$$

Допустиму нормальну напругу для випадку згину беруть таку, як для розтягу і стиску.

Максимальний згинаючий момент визначають з епюр згинаючих моментів або розраховують.

Визначимо моменти опору деформації згину найбільш поширених перерізів.

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 4.27):

$$W = J / y_{\max} = (bh^3 / 12)(h / 2) = bh^2 / 6.$$

Якщо балку прямокутного перерізу покласти плазом, то

$$W' = hb^2 / 6.$$

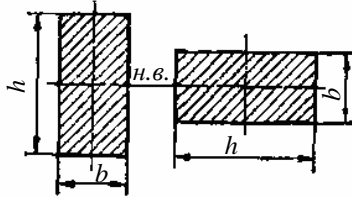


Рис. 4.27

Отже, за інших однакових умов максимальні нормальні напруги в прямокутній балці, яку покладено плазом, будуть більшими, ніж у тій самій балці, коли її найбільший габаритний розмір H вертикальний (мається на увазі, що згин відбувається у вертикальній площині).

1. Круг діаметром d :

$$W = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

2. Кільце розміром $D \times d$:

$$W = \frac{\pi d^4}{64} (D^4 - d^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}$$

Момент опору кільцевого перерізу не можна обчислювати як різницю моментів опорів великого і малого кругів. Неважко підрахувати, що при однаковій площі поперечного перерізу, тобто однаковій витраті матеріалу, момент опору кільцевого перерізу більший від моменту опору суцільного круглого перерізу.

Оскільки поблизу нейтральної осі матеріал зазнає незначного напруження, то вигідно більше матеріалу розмішувати далі від нейтральної осі. Тому в машинобудуванні рідко використовують металеві балки прямокутного перерізу, але досить широко використовують прокатні профільні балки таврового, двотаврового, кутового, швелерного й інших перерізів. Моменти інерції, моменти опору й інші відомості про прокатні фасонні профілі стандартних розмірів подано у таблицях.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад, рис. 4.28 чавун), доцільно використовувати профілі, несиметричні відносно нейтральної осі, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у несиметричного профілю під час згину виникають неоднакові напруги розтягу і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки

вигідно розміщувати так, щоб менші напруги були в зоні розтягнутих, а більші – в зоні стиснених волокон (рис. 4.16).

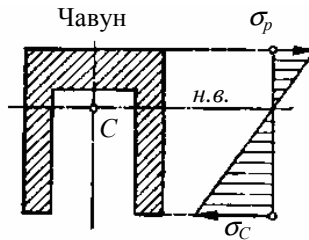


Рис. 4.28

Порівняємо щодо економічності за масою балки двотаврового, прямокутного і квадратного перерізів.

Припустимо, що з розрахункового рівняння визначено момент опору деформації згину балки:

$$W = M_{зг \max} / [\sigma] = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1200 \text{ см}^3.$$

За таблицями ГОСТу вибираємо двотавровий профіль № 45, який має площу, поперечного перерізу $A_B = 83 \text{ см}^2$.

Визначимо розміри прямокутного перерізу, прийнявши $h = 2b$:

$$W = bh^2 / 6 = b \cdot 4b^2 / 6 = 2b^3 / 3 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

За інших однакових умов маси балок будуть пропорційні площам поперечних перерізів:

$$A_{np} / A_B = 297 / 83 = 3,5.$$

Балка прямокутного перерізу в три з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності й інших однакових умовах.

Балка квадратного перерізу буде в чотири з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності і інших однакових умовах.

Приклад. Вважаючи балку двотавровою, визначити номер перерізу з розрахунку на міцність, якщо допустима напруга згину $[\sigma] = 120 \text{ Мпа}$, $P = 2000 \text{ Н}$, $q = 2000 \text{ Н/м}$, $l = 1,5 \text{ м}$ (рис. 4.29).

Розв'язання. Початок координат візьмемо на вільному кінці балки і вісь q напрямимо вліво. Для розв'язання задачі досить побудувати одну епюру згинаючих моментів. Оскільки балка має тільки одну ділянку, то $M = -Pz - qz^2 / 2$.

Епюра M – дуга параболи. Обчислимо значення M на межах діля-

нки: коли $z = 0$, то $M = 0$; коли $z = 1,5$ м, то $M = -5250$ Н·м. Максимальне значення згинаючий момент матиме в місці закріплення.

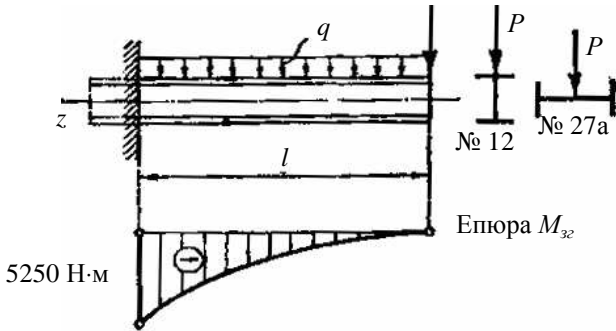


Рис. 4.29

Застосуємо розрахункове рівняння на міцність для згину:

$$W = 43,8 \text{ см}^3.$$

Знайдемо за таблицями найближче більше значення W і візьмемо двотавровий переріз № 12, для якого $W = 58,4 \text{ см}^3$. Якщо переріз балки повернути на 90° , тобто розмістити полицки вертикально, а стінку – горизонтально (рис. 4.29), то для такого випадку потрібний профіль № 27а і балка буде в три рази важча.

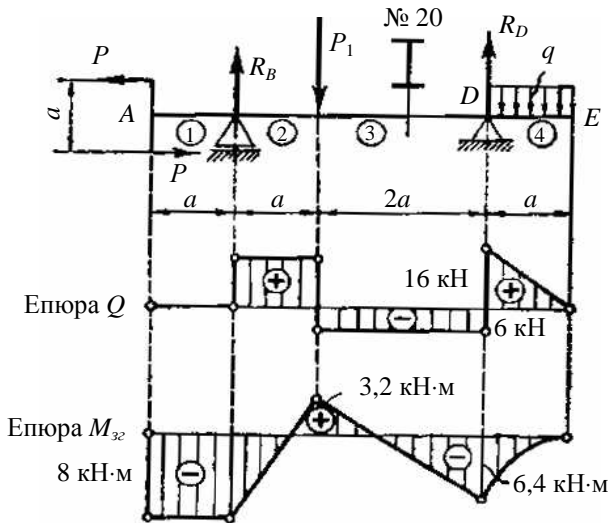


Рис. 4.30

Приклад. Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки, яку зображено на рис. 4.30, коли $P = 10$ кН, $P_1 = 20$ кН, $q = 20$ кН/м, $a = 0,8$ м, Перевірити балку на міцність, якщо її переріз – двотавр № 20, а $[\sigma] = 150$ Мпа.

Розв'язання. Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_B = 0; \quad P_a - P_1 a + R_D \cdot 3a - qa \cdot 3,5a = 0.$$

Звідси $R_D = 22$ кН; звідси $R_B = 14$ кН.

Перевіримо балку на міцність. Найбільший згинаючий момент для даної балки буде на першій ділянці.

Запишемо розрахункову формулу на міцність при згині $\sigma = M / W \leq [\sigma]$.

За таблицею знаходимо значення моменту опору для двотавра № 20: $W = 184$ см³.

Умову міцності виконано. У даному випадку можна стверджувати, що балка працює з великим недовантаженням, бо максимальна нормальна напруга при згині становить тільки 29,3 % допустимої.

Як було встановлено раніше, в поперечних перерізах балки під час деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруги, які спричинюють деформацію зсуву. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруги виникатимуть і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах підтверджується появою в дерев'яних

балках при поперечному згині поздовжніх тріщин $\tau = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b}$.

Цю формулу вивів у 1855 р. російський інженер-мостобудівник Д.І. Журавський. Така формула була потрібна в зв'язку з тим, що в минулому столітті для будівництва мостів широко використовували дерев'яні конструкції, а балки з деревини звичайно мають прямокутний переріз і погано працюють па сколювання вздовж волокон.

4.9.5. Косий згин

Раніше було розглянуто прямий згин балок, при якому всі навантаження лежали в одній площині, що проходить через одну з головних осей перерізу. За такого згину вісь деформується у площині дії навантажень.

Згин, при якому площина дії навантажень не збігається з однією із головних осей перерізу, називають косим.

Розглянемо консольну балку прямокутного перерізу, до кінця якої прикладено силу P , що утворює з віссю у кут α (рис. 4.31,а). Роз-

кладемо силу P на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу, і, користуючись принципом незалежності дії сил, зведемо косий згин до прямих згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах. Очевидно, що небезпечний переріз буде в закріпленні і максимальні згинаючі моменти дорівнюватимуть:

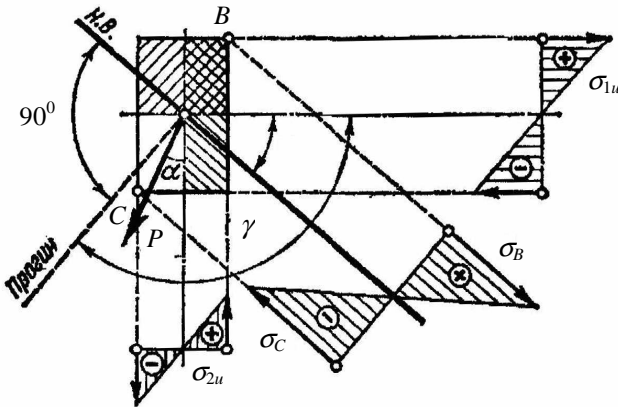
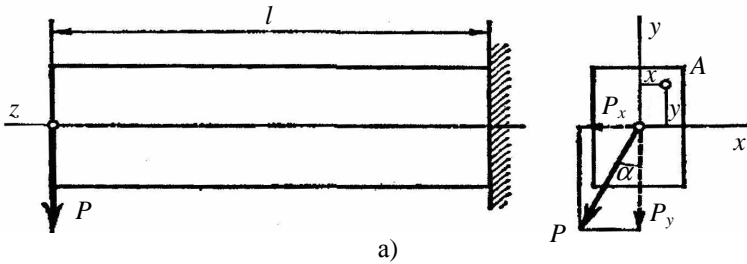
Відповідні цим згинаючим моментам нормальні напруги в якійсь точці A небезпечного перерізу обчислюють за формулами

$$\sigma_{1A} = M_{32x}y/J_x, \quad \sigma_{2A} = M_{32y}x/J_y,$$

де x, y – поточні координати точки A .

Сумарна нормальна напруга у точці A

$$\sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} = \frac{M_{32x}y}{J_x} + \frac{M_{32y}x}{J_y} = Pl \left(\frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} \right).$$



б)

Рис. 4.31

Якщо заштрихувати в різних напрямках частини перерізу, в яких діятимуть тільки напруги розтягу σ_C і σ_B побачимо, що в зоні, за-

штрихованій в клітинку, діятимуть сумарні напруги розтягу, а в незаштрихованій – сумарні напруги стиску (рис. 4.31,б). Очевидно, що максимальна напруга розтягу виникає у точці *B*, а максимальна напруга стиску – в точці *C* небезпечного перерізу. Епюри нормальних напруг показано на тому самому рисунку. Оскільки на нейтральній осі $\sigma_A = 0$, то її рівняння має вигляд

$$y \cos \alpha / J_x + x \sin \alpha / J_y = 0 .$$

де *x*, *y* – поточні координати точок нейтральної осі.

З рівняння видно, що нейтральною віссю є пряма лінія, яка проходить через початок координат, тобто через центр ваги перерізу балки.

4.9.6. Гіпотези міцності

При поєднанні основних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруги, які в кожній точці можна було додавати алгебраїчно.

Проте часто трапляються і мають велике практичне значення випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перерізах виникають нормальні і дотичні напруги, розподілені нерівномірно і за різними законами. У таких випадках дослідно визначити величини, що характеризують міцність, неможливо, тому для оцінки міцності деталі доводиться враховувати механічні характеристики даного матеріалу, добути з діаграми розтягу. Як відомо, міцність пластичних матеріалів на розтяг характеризують границею текучості, а крихких – границею міцності; ці напруги вважають граничними і залежно від них обчислюють допустимі напруги.

Гіпотези міцності – це наукові припущення про основні причини настання у матеріалі граничного напруження стану при поєднанні основних деформацій.

Напружені стани при поєднанні основних деформацій і при одновісному розтягу називатимемо рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо їх головні напруги відрізняються від граничної для даного матеріалу в однакову кількість разів. Інакше кажучи, коефіцієнти запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Еквівалентною напругою називають таку умовну напругу одновісного розтягу, яка рівнонебезпечна заданому випадку поєднання основних деформацій.

Відповідно до гіпотез міцності виводять формули для розрахунку еквівалентної напруги, яку потім зіставляють з допустимою напругою

на розтяг.

Сформулюємо і охарактеризуємо деякі гіпотези міцності і наведемо відповідні формули для обчислення еквівалентних напруг.

Першу теорію міцності, в основі якої лежить гіпотеза найбільших нормальних напруг, і другу теорію міцності, в основі якої лежить гіпотеза найбільших лінійних деформацій, тепер не застосовують, тому їх не розглядатимемо.

Перейдемо до розгляду використовуваних тепер теорій міцності.

1. Гіпотеза найбільших дотичних напруг (третя теорія міцності). Згідно з цією гіпотезою, яку запропоновано в кінці XVIII ст., небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільші дотичні напруги досягають граничної величини.

Було встановлено, що під час одновісного розтягу бруса максимальна дотична напруга в похилій площині дорівнює половині максимальної напруги. Звідси випливає, що гранична дотична напруга дорівнює половині граничної нормальної. У випадку плоского напруженого стану максимальна дотична напруга дорівнює піврізниці головних напруг:

$$\begin{aligned}\tau_{zp} &= \sigma_{zp} / 2 . \\ \tau_{\max} &= (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2 . \\ \sigma_{екв.} &= \sqrt{\sigma^2 - 4\tau^2} = \sqrt{(M_{32} / W)^2 + 4(M_K - W_p)^2} = \\ &= \sqrt{(M_{32} / W)^2 + 4[M_K / (W_p)]^2} = \sqrt{(M_{32}^2 + M_K^2)} \cdot W .\end{aligned}$$

Вираз, що стоїть у чисельнику, назвемо еквівалентним моментом:

$$\sigma_{екв.} = M_{екв.} / W .$$

За цією формулою круглі вали розраховують як на згин але не за згинаючим, а за еквівалентним моментом.

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{екв.} = \sqrt{\sigma^2 - 3\tau^2} = \sqrt{(M_{32} / W)^2 + 3[M_K / (2W)]^2} = \sqrt{(M_{32}^2 + 0,75M_K^2)} / W .$$

4.10. Міцність при динамічних навантаженнях

4.10.1. Відомості про втомленість матеріалів

У попередніх розділах розглядалися розрахунки на міцність при статичному навантаженні елементів конструкцій. Проте багато деталей машин працює у таких умовах, коли напруги, які виникають у них, періодично змінюються за величиною або за величиною і знаком. Опір конструкцій таких навантажень істотно відрізняється від їх опору дії

статичного навантаження.

До деталей, які зазнають змінних навантажень, належать, наприклад, обертові осі, вали, штоки поршневих машин тощо. Шток парової машини зазнає змінних навантажень, причому знак напруг у штоці змінюється залежно від напрямку руху поршня (розтяг – стиск); під час обертання осі вагона одні і ті самі волокна бувають то в зоні розтягу, то – стиску.

Досліди і аналіз поломок різних деталей машин показує, що матеріали (у тому числі метали), які тривалий час зазнавали дії змінних навантажень, можуть руйнуватися при нижчих напругах, ніж границя міцності і навіть границя текучості.

Руйнування при цьому відбувається тому, що після певного числа змін навантаження у розглядуваній деталі виникає мікротріщина, яка поступово збільшується, і врешті-решт деталь зруйнується, не виявивши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли матеріалу деталі властива висока пластичність.

Руйнування матеріалу, спричинене багаторазовою дією змінних напруг, називають втомленістю.

Виникнення мікротріщин здебільшого є результатом неоднорідності будови матеріалів, наявності слідів механічної обробки і пошкоджень поверхні деталі (волосовини, раковини, газові і шлакові включення, подряпини, сліди різця або шліфувального каменя тощо), а також результатом концентрації напруг.

Здатність матеріалів протистояти втомленості називають опором втомленості. Вивчення в опорі матеріалів питань втомленості має дуже велике значення, оскільки такі важливі деталі, як колінчасті вали, гребні гвинти, поршневі пальці, клапанні пружини, шатуни двигунів, осі залізничних вагонів і багато інших, виходять з ладу переважно внаслідок руйнувань від втомленості.

Час однієї зміни напруг називають періодом. Циклом напруг називають сукупність усіх значень напруг σ (або τ) за час одного періоду T (рис. 4.32).

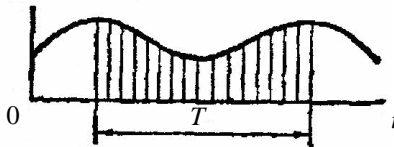


Рис. 4.32

Цикл змінних напруг (рис. 4.33,а) характеризують такими параметрами:

- 1) максимальною напругою;
- 2) мінімальною напругою;
- 3) середньою напругою;
- 4) амплітудою циклу;
- 5) коефіцієнтом асиметрії циклу.

Зазначимо, що цикли, які мають однаковий коефіцієнт асиметрії, називають подібними.

Цикл напруг, який зображено на рис. 4.33 є прикладом асиметричного циклу.

На рис. 4.33,в показано від-нульовий цикл зміни напруг.

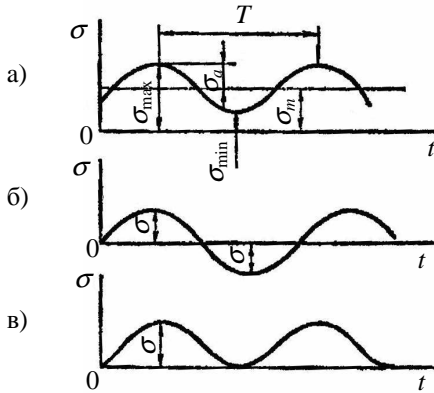


Рис. 4.33

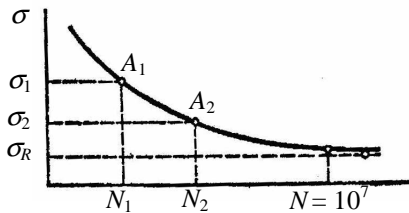


Рис. 4.34

Практика показує, що сталний зразок, який витримав 10^7 циклів (це число – називають базою випробувань), може витримати і необмежене число циклів. Експериментально встановлено, що при будь-якому асиметричному циклі (наприклад, віднульовому) границя витривалості для того самого матеріалу буде вища, ніж при симетричному циклі. Це означає, що симетричний цикл найбільш небезпечний.

Для кольорових металів границю витривалості визначають, як правило, при базі випробувань 10^7 або 10^8 .

Границя витривалості значною мірою залежить від виду деформації. Випробування на витривалість проти розтягу – стиску і кручення проводять рідше, оскільки вони вимагають складнішого обладнання, ніж у випадку згину. Тому границі витривалості при розтягу і крученні визначають з емпіричних формул за відомою границею витривалості при симетричному циклі згину.

Тепер для багатьох матеріалів границі витривалості визначені і наводяться у довідниках.

Концентрація напруг

Теоретичними і експериментальними дослідженнями встановлено, що напруги розподілені рівномірно по площі поперечного перерізу розтягнутого або стиснутого бруса тільки тоді, коли поперечні перерізи або сталі вздовж бруса, або змінюються дуже повільно.

Різкі зміни форми або площі поперечного перерізу деталей (наявність отворів, виточок, викружок, галтелей, канавок, надрізів тощо) призводять до нерівномірного розподілу напруг, спричиняють концентрацію напруг. Причину, яка зумовлює концентрацію напруг (отвір, виточка), називають концентратором напруг.

Розглянемо сталюну штабу, яку розтягує сила P (рис. 4.35). У поперечному перерві P штаби діє поздовжня сила $N = P$.

Нормальна напруга, тобто обчислена з припущенням, що концентрації напруг немає, дорівнює

$$\sigma = \frac{P}{A}.$$

Для компенсації послаблення перерізу за рахунок отвору збільшимо ширину штаби, як показано на рис. 4.35, щоб площі поперечного перерізу, проведеного через вісь отвору, дорівнювала A . На цьому самому рисунку подано графік розподілу біля отвору.

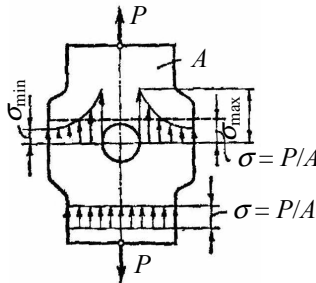


Рис. 4.35

Концентрація напруг має місцевий характер, оскільки з віддаленням від концентратора як вздовж деталі, так і поперек, напруги дуже швидко спадають, наближаючись до своїх номінальних значень. Будь-яка зміна розмірів поперечного перерву (отвір, галтель тощо) впливає на напруги в перервах прямого бруса збільшуються або зменшуються від зміни розмірів і форми перерізу. Кількісно концентрацію напруг характеризує теоретичний коефіцієнт концентрації напруг, який дорівнює відношенню найбільшої місцевої напруги біля концентратора напруг до номінальної напруги.

Концентрація напруг істотно залежить від виду і розмірів концентратора. Докладні відомості про теоретичні коефіцієнти концентрації напруг наведено в довідниках про розрахунки на міцність.

Концентрація напруг по-різному впливає на міцність пластичних і крихких матеріалів. Велике значення при цьому має і характер навантаження. Якщо взяти пластичний матеріал, навантажений статично, то із збільшенням навантаження зростання найбільших місцевих напруг припиняється при досягненні границі текучості внаслідок місцевої текучості матеріалу, а в решті поперечного перерізу напруги зростатимуть. Отже, пластичність матеріалу сприяє вирівнюванню напруг. Коли напруги досягнуть границі текучості по всьому перерізу, то їх розподіл можна вважати рівномірним. Звідси можна зробити висновок про те, що при статичному навантаженні пластичні матеріали малочутливі до концентрації напруг. Вплив концентрації напруг не враховують у випадку статичного навантаження при розрахунках на міцність заклепочних і різбових з'єднань та інших подібних деталей, виготовлених з пластичних матеріалів.

При навантаженнях, які швидко змінюються з часом, напруги не встигають вирівнюватись, тому концентрацію напруг треба враховувати.

У розрахунках на міцність деталей з крихких матеріалів концентрацію напруг треба враховувати і при статичному навантаженні, оскільки нерівномірність розподілу напруг внаслідок їх концентрації зберігається на всіх стадіях навантаження (пригадаємо відсутність ділянок текучості в діаграмах розтягу крихких матеріалів).

Теоретичний коефіцієнт концентрації відбиває вплив, концентратора напруг в умовах, далеких від руйнування деталі.

Міцність при змінних навантаженнях характеризують границею витривалості, тому дійсну оцінку впливу концентратора можна дістати, порівнюючи границі витривалості, визначені з дослідів над гладенькими зразками і над зразками з досліджуванним концентратом при симетричному циклі.

Відношення цих величин називають ефективним (тобто дійсним) коефіцієнтом концентрації напруги K_T .

З дослідів встановлено, що границя витривалості залежить від абсолютних розмірів поперечного перерізу зразка: із збільшенням розмірів перерізу границя витривалості зменшується. Ця закономірність дістала назву масштабного фактора; вона пояснюється тим, що із збільшенням об'єму матеріалу збільшується імовірність неоднорідності його структури (шлакові і газові включення тощо), а це призводить до виникнення осередків концентрації напруг.

На границю витривалості впливають шорсткість і стан поверхні деталі; із збільшенням шорсткості поверхні границя витривалості знижується. Це пояснюється тим, що після виготовлення деталі на її поверхні є риси, подряпини тощо, біля яких спостерігається концентрація напруг.

4.10.2. Задачі динаміки в опорі матеріалів

Розглянемо задачі динаміки, які розв'язують за допомогою опору матеріалів. До них належать розрахунки, пов'язані з силами інерції, розрахунки на ударні навантаження і на коливання конструкцій (останні вивчають у докладніших курсах).

У розрахунках, пов'язаних з силами інерції, використовують відомий з теоретичної механіки принцип д'Аламбера (метод кінестатики), за яким, прикладаючи до рухомої матеріальної точки або рухомого тіла крім активних і реактивних сил ще і сили інерції, розв'язують задачу динаміки методами статички. Пригадаємо, що сила інерції матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно прискоренню.

Розглянемо два приклади розрахунків, пов'язаних з силами інерції.

Приклад. Визначити потрібну площу поперечного перерізу троса, який піднімає вантаж $G = 20$ кН (рис. 4.36,а) з прискоренням $a = 5$ м/с², якщо допустима напруга для троса $[\sigma] = 75$ Мпа; масу троса не враховувати.

Розв'язання. Приклавши до вантажу силу інерції $P^{in} = -ma$, можемо за принципом д'Аламбера розглядати систему вантаж – трос як таку, що перебуває в рівновазі. Застосовуючи метод перерізів, уявно відкинемо верхню частину троса і замінимо її дію поздовжньою силою N , яка виникає у поперечному перерізі троса (рис. 4.36).

Складемо рівняння рівноваги для залишеної частини:

$$N = G + F^{in} = G + \frac{G}{R} a = G \left(1 + \frac{a}{R} \right).$$

Запишемо умову міцності для троса: Обчислимо потрібну площу поперечного перерізу троса:

$$\sum Z = 0; \quad N - G - F^{in} = 0.$$

Обчислимо потрібну площу поперечного перерізу троса:

$$A > N / [\sigma] = G(1 + a / g) / [\sigma] = 20 \cdot 10^8 (1 + 5 / 9,81) / (75 \cdot 10^6) = 400 \text{ мм}^2.$$

Обчислимо діаметр троса $d = \sqrt{4A / \pi} = 23 \text{ мм}$.

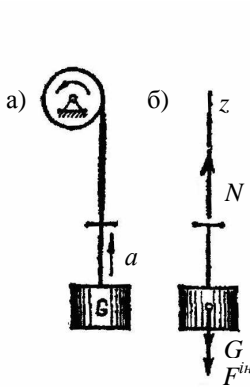


Рис. 4.36

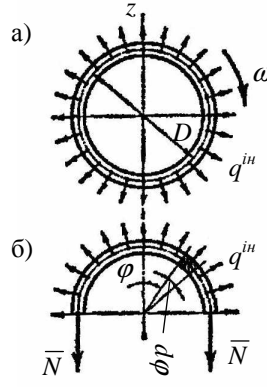


Рис. 4.37

Приклад. Визначити динамічні напруги у поперечному перерізі тонкостінного кільця, яке рівномірно обертається у своїй площині з кутовою швидкістю ω (рис. 4.37,б). Знайти найбільше допустиме значення швидкості « v » будь-якої точки кільця, якщо його густина $\rho = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$, $[\sigma] = 160 \text{ Мпа}$.

За принципом д'Аламбера прикладемо до кожного елемента кільця відцентрову силу інерції. Ці сили розподілені рівномірно по колу кільця і напрямлені по радіусу від центра. На одиницю довжини кола кільця припадає сила інерції

$$q^{in} = m_i a_n, \quad q^{in} = \rho A v^2 / (D/2),$$

де $m_i = \rho A$; $a_n = v^2 / R = \omega^2 R$,

$$dF^{in} = \left(\rho A v^2 / (D/2) \right) d\varphi; \quad dF_n^{in} = q^{in} (D/2) d\varphi,$$

$$2N = \rho A v^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 2\rho A v^2, \quad 2N = \rho A v^2.$$

Визначимо внутрішні сили, які виникають у поперечних перерізах кільця. Для цього розріжемо його по горизонтальному діаметру і розглянемо рівновагу залишеної частини (рис. 4.37).

Оскільки кільце тонке, то можна припустити, що нормальні напруги розподілені по його поперечному перерізу рівномірно, отже, кільце працює на розтяг.

Визначимо поздовжні сили N , які виникають у поперечних перерізах. Для цього спроекуємо всі сили, які діють на залишене півкільце, на вісь G . Обчислимо нормальну напругу в поперечному перерізі кільця:

$$\sigma = N / A = \rho A v^2 / A = \rho v^2.$$

Зазначимо, що напруги не залежать від площі поперечного перерізу кільця і пропорційні квадрату лінійної швидкості. Запишемо умову міцності:

$$\sigma = \rho v^2 \leq [\sigma_p],$$

звідси визначимо допустиму лінійну швидкість:

$$[v] = \sqrt{[\sigma_p] / \rho} = \sqrt{160 \cdot 10^6 / (0,8 \cdot 10^4)} = 140 \text{ м/с.}$$

Робота ряду машин (кування, забивання паль) пов'язана з ударними навантаженнями. Іноді ударні навантаження є наслідками конструктивних факторів (зазори в місцях з'єднання деталей тощо).

Наближений розрахунок на дію ударного навантаження при осьовому ударі роблять з такими припущеннями:

1. Під час удару виникають тільки пружні деформації, тобто після припинення дії ударного навантаження тіло повертає свої початкові форму і розміри.

2. Для ударного навантаження матеріалу розрахованого елемента конструкції дійсний закон Гука.

3. Удар вважають абсолютно непружним, тобто ударний вантаж після удару не відскакує від пружної системи, а продовжує в процесі її деформації рухатися разом з нею.

4. Маса пружної системи, яка приймає удар, мала порівняно з масою ударного тіла, і тому масою пружної системи можна нехтувати.

5. Робота падаючого (ударного) тіла повністю переходить у потенціальну енергію деформації елемента конструкції, який сприймає дію удару.

Приклад. Вантаж G падає з висоти h на диск, який закріплений

на кінці стержня, довжиною l . Виконати розрахунок стержня.

Робота, яку виконує вантаж, дорівнює потенціальній енергії деформації стержня:

$$G(h + dl) = (dl)^2 EA / 2l, \text{ тому що}$$

$$U = 1/2(N \cdot dl) = N^2 l / (2EA) = (dl)^2 EA / (2l).$$

Перепишемо цей вираз $(dl)^2 - 2Gl / (EA)(dl) - 2Ghl / (EA) = 0$.

Статичне подовження стержня $dl_{CT} = Gl / (EA)$.

Розв'язуючи рівняння, знаходимо динамічне подовження

$$dl = dl_{CT} + \sqrt{\left((dl_{CT})^2 + 2(dl_{CT})h\right)}.$$

Другий, від'ємний корінь не враховуємо.

Останній вираз запишемо так: $dl = dl_{CT} + \left(1 + \sqrt{1 + 2h / (dl_{CT})}\right)$.

Введемо так званий динамічний коефіцієнт

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + 2h / (dl_{CT})}.$$

Тоді

$$dl = K_D dl_{CT}.$$

Тобто, переміщення, які виникають від дії ударного навантаження, дорівнює добутку динамічного коефіцієнту на переміщення від статично прикладеного навантаження. Згідно з лінійною залежністю між силами й переміщеннями можна записати:

$$\sigma_{дин} = K_D \sigma_{стат}.$$

Отже, визначення переміщень і напруг при динамічних навантаженнях зводиться до визначення переміщень і напруг при статичних навантаженнях і обчислення динамічного коефіцієнта. Якщо $h = 0$, тоді $K_D = 1$; $dl = 2dl_{CT}$ і $\sigma_{дин} = \sigma_{стат}$, тобто переміщення і напруги внаслідок дії миттєво прикладеної сили в два рази більше, ніж при статичній дії тієї самої сили. З наведених формул видно, що динамічний коефіцієнт K_D зменшується, коли збільшується dl_{CT} , тобто із зменшенням жорсткості пружної конструкції. Тому для пом'якшення ударів широко застосовують пружини й ресори.

4.11. Стійкість стиснених стержнів

4.11.1. Подовжній згин

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що під час деформації конструкції між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка фо-

рма рівноваги, тобто така, при якій малим збурюючим діям відповідають малі відхилення статично навантаженої конструкції від початкової форми. Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають критичними, а відповідні стани – критичними станами. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, пластинок і оболонок. Явища втрати стійкості різноманітні. Найважливіші такі випадки прояву нестійкості: 1) виникнення якісно нових форм рівноваги; 2) зникнення стійких форм рівноваги.

Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного стержня. При невеликих значеннях стискаючої сили прямолінійна форма – єдина і притому стійка форма рівноваги; малим збудженням цієї форми, які виникають, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини. При критичному значенні стискаючої сил $P_{кр}$ прямолінійна форма стає нестійкою і після малих збурень стержень набирає нової (стійкої) форми рівноваги, якій відповідає зігнута вісь.

Критичною силою називається найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою. Згин, пов'язаний з втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається поздовжнім згином.

Розглянемо тонкий сталевий стержень, довжина якого значно більша за поперечні розміри, що стискається силою P , трохи більшою за $P_{кр}$ (рис. 4.38). Застосовуючи метод перерізів, упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стержня виникають два внутрішні силові фактори – поздовжня сила $N = P$ і згинаючий момент $M_{зг}$. Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину. Якщо стискаючі сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруги згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції. Тому критичний стан, який безпосередньо передують руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку з цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила P , яка діє на стержень, була менша за критичну $P_{кр}$. Позначимо допустиму стискаючу силу $[P]$, тоді $[P] = P_{кр} / [n_{СТ}]$, де $[n_{СТ}]$ – допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

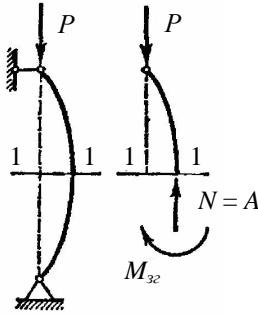


Рис. 4.38

Очевидно, що стійкість стержня достатня, якщо $[n_{CT}] > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Звичайно, для сталей $[n_{CT}] = 1,8 - 3$; для чавунів $[n_{CT}] = 5 - 5,5$; для дерева $[n_{CT}] = 2,8 - 3,2$.

4.11.2. Формула Ейлера

Для розрахунків стиснених стержнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили $P_{кр}$.

Л. Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили. Наведемо формулу Ейлера без виведення;

$$P_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / l_{3\epsilon}^2.$$

Тут E – модуль пружності першого роду; J_{\min} – найменший з осьових моментів інерції перерізу, оскільки стержень викривлюється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитись, стискаючи поздовжньою силою слюсарну лінійку; $l_{3\epsilon}$ – зведена довжина, стержня: $l_{3\epsilon} = \mu l$, де l – довжина стержня, а μ – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стержня; його інакше називають коефіцієнтом кріплення.

На рис. 4.39 зображено способи кріплення кінці стержня, які найчастіше застосовують, і наведено значення P : 1) обидва кінці стержня закріплені шарнірно і можуть зближуватися (а); 2) нижній кінець жорстко закріплений, верхній вільний (б); 3) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися (б); 4) нижній кінець закріплений жорстко, верхній – шарнірно, кінці можуть зближуватися (г); 5) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення (д).

Зазначимо, що чим менше μ , тим більша критична сила, а отже, і допустиме стискаюче навантаження. Наприклад, стискаюче навантаження стержня, жорстко закріпленого обома кінцями ($\mu = 0,5$), може бути в 16 раз більше від навантаження стержня, закріпленого одним кінцем ($\mu = 2$). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити обидва кінці стержня.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний; доти, поки напруга не перевищує границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися не завжди. Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичну напругу $\sigma_{кр}$, тобто напругу, яка виникає в поперечному перерізі A стержня під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / A = \pi^2 EJ_{\min} / [(\mu l)^2 A].$$

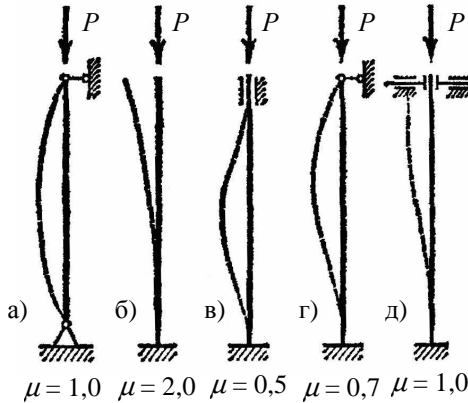


Рис. 4.39

Введемо поняття найменшого радіуса інерції поперечного перерізу стержня J_{\min}

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / A}.$$

Перепишемо формулу для $\sigma_{кр}$ так: $\sigma_{кр} = \pi^2 E / (\mu l / J_{\min})^2$.

Вираз $\lambda = \mu l / i_{\min}$ називають гнучкістю стержня.

Це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стержня і способу закріплення його кінців. Остаточню $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$.

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли вико-

нується умова $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{нц}$, де $\sigma_{нц}$ – границя пропорційності матеріалу стержня. Отже, $\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{нц}}$.

Величину, яка стоїть у правій частині нерівності, називають граничною гнучкістю і позначають $\lambda_{сп}$.

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стержня і стала для даного матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді $\lambda \geq \lambda_{сп}$, тобто формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Розрахунок стиснених стержнів на стійкість можна звести за формою до розрахунку на простий стиск. Розраховуючи будівельні конструкції, часто застосовують таку формулу:

$$\sigma = N / \varphi A \leq [\sigma].$$

Тут $[\sigma]$ – основна допустима напруга на стиск, а φ – коефіцієнт поздовжнього згину. Величина φ залежить від гнучкості стержня, його матеріалу; її визначають для сталей з таблиць.

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стержнів на стиск є кільцеві і коробочні тонкостінні перерізи. Доведено, що заміна стиснених стержнів у вигляді кутиків і двотаврів трубчастими стержнями дає економію матеріалу до 20-40 %.

Приклад. Перевірити на стійкість стояк, зображений на рис. 4.40, якщо $l = 3$ м, $[n] = 2$, матеріал стояка Ст 3, $P = 65$ кН, $d = 60$ мм.

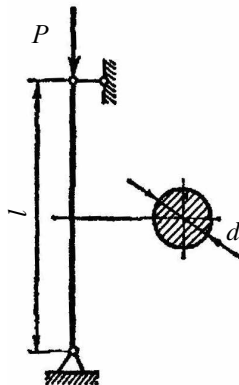


Рис. 4.40

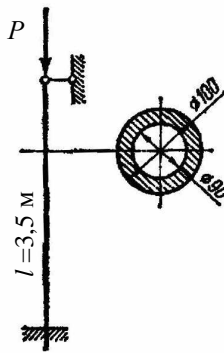


Рис. 4.41

Розв'язання. Для заданого закріплення кінців стояка $\mu = 1$.

Перевіримо застосовність формули Ейлера. Для круга визначимо гнучкість стояка: $\lambda = 200 > 100$, отже, формула Ейлера застосовна. Обчислимо критичну силу:

$$P_{кр} = 143 \text{ кН.}$$

Визначимо коефіцієнт запасу стійкості: $n = 2,2 > 2$, отже, стійкість стояка достатня.

Приклад. Знайти критичну силу P і допустиме навантаження $[P]$ для стояка кільцевого перерізу з сталі Ст 3 (рис. 4.41) якщо допустима напруга на стиск $[\sigma_C] = 140$ Мпа. Визначити, з яким коефіцієнтом запасу стійкості « n » працюватиме стояк під навантаженням, яке дорівнює допустимому.

Розв'язання. Обчислимо момент інерції кільцевого перерізу $J_{\min} = 169 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

Площа поперечного перерізу стояка $A = 14,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Знаходимо радіус інерції перерізу: $i_{\min} = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Для заданого способу кріплення кінців стояка коефіцієнт зведення довжини $\mu = 0,7$.

Визначаємо гнучкість стояка: $\lambda = \mu l / i = 72,5 < 100$, отже, формула Ейлера незастосовна. Обчислимо критичну напругу за формулою Ясинського. З довідкових таблиць знаходимо: $a = 310$ Мпа, $b = 1,14$ Мпа. Тоді $\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 72,5 = 227$ Мпа.

Визначимо критичну силу:

$$P_{кр} = 227 \cdot 10^{-4} \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} = 340 \cdot 10^3 \text{ Н} = 340 \text{ кН.}$$

Допустиме навантаження $[P]$ визначимо за допомогою коефіцієнта поздовжнього згину φ за формулою

$$[P] = \varphi [\sigma_{ск}] A.$$

Для сталі Ст 3, коли $\lambda = 72,5$, то $\varphi = 0,795$; тоді $[P] = 0,795 \cdot 140 \cdot 10^6 = 14,9 \cdot 10^4 = 166 \text{ кН}$.

Коефіцієнт запасу стійкості n , визначаємо з співвідношення

$$n_{кр} = P_{кр} / [P] = 340 / 166 = 2,05.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аркуша А.Н. Руководство к решению задач по теоретической механике / А.Н. Аркуша. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1985. – 240 с.
3. Гринева Е.В. Теоретическая механика в строительном ВУЗе. Статика / Е.В. Гринева, А.П. Ковревский, В.А. Пушня. – Х., 1998.
4. Сафонова Г.Г. Техническая механика / Г.Г. Сафонова, Т.Ю. Артюховская, Д.А. Ермаков. – М.: ИНФРА-М, 2011.
5. Ицкович Г.М. Сопrotивление материалов / Г.М. Ицкович. – М.: Высшая школа, 1982.
6. Павловский М.А. Теоретическая механика / М.А. Павловский. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
7. Ольховская В.П. Техническая механика / В.П. Ольховская. – М.: Форум, 2011.
8. Портаев Л.П. Техническая механика / Л.П. Портаев, А.А. Петраков, В.Л. Портаев. – М.: Высшая школа, 1987.
9. Пушня В.О. Конспект лекцій з курсу теоретична механіка (Розділ «Статика») / В.О. Пушня. – Х.: ХДТУБА, 2000.
10. Пушня В.О. Теоретична механіка. Кінематика / В.О. Пушня. – Х.: АКТА, 1998.
11. Сетков В.И. Сборник задач по технической механике / В.И. Сетков. – М.: Издательский центр «Академия», 2010.
12. Шпачук В.П. Методичны вказівки до самостійної роботи з курсу «Технічна механіка» / В.П. Шпачук, В.Ф. Жуков, В.О. Пушня. – Х.: ХНАМГ, 2007.

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Теоретична механіка	5
1.1. Статика	5
1.1.1. Основні поняття й аксіоми статички, в'язі та їх реакції	5
1.1.2. Система збіжних сил, рівнодійна та умови рівноваги системи збіжних сил	10
1.1.3. Момент сили відносно точки у просторі, момент сили для плоскої системи сил, момент сили відносно осі у просторі	13
1.1.4. Пара сил, момент пари, теорема про суму моментів сил пари, властивості пар, теорема про додавання пар, рівновага системи пар сил	15
1.1.5. Довільна система сил; лема про паралельне перенесення сили; основна теорема статички; головний вектор і головний момент системи сил; умови й рівняння рівноваги вільного твердого тіла	19
1.1.6. Плоска система сил; форми рівнянь рівноваги; статично означені плоскі ферми; методи визначення зусиль у стержнях простих ферм	24
1.1.7. Метод перерізів. Визначення внутрішніх сил	26
1.1.8. Центр паралельних сил. Центр ваги	31
2. Кінематика	41
2.1. Кінематика точки	41
2.2. Кінематика твєдого тіла	41
2.2.1. Поступальний рух твердого тіла	41
2.2.2. Обертальний рух твердого тіла	42
2.2.3. Передачі обертання	43
2.2.4. Плоскопаралельний (або плоский) рух	44
2.2.5. Визначення й використання МЦШ	45
2.2.6. Особливі випадки визначення МЦШ і швидкостей точок плоскої фігури	46
2.2.7. Визначення прискорень точок і куткових прискорень ланок	47
3. Динаміка	49
3.1. Динаміка матеріальної точки	49
3.2. Динаміка механічної системи й твердого тіла	49
3.3. Потужність сили	51

3.4. Зубчасті редуктори	51
4. Опір матеріалів	53
4.1. Початкові поняття	53
4.2. Основні гіпотези і припущення	55
4.3. Види навантажень і основних деформацій	57
4.4. Метод перерізів. Напряга	58
4.5. Розтяг і стиск	62
4.5.1. Напряги і деформації розтягу і стиску	62
4.5.2. Закон Гука для розтягу і стиску	64
4.5.3. Поперечна деформація розтягу і стиску	66
4.5.4. Діаграма розтягу маловуглецевої сталі	66
4.5.5. Розрахункова формула для розтягу і стиску	69
4.6. Зсув (Зріз)	71
4.6.1. Напряги деформації зсуву	71
4.6.2. Розрахункова формула для зсуву	72
4.6.3. Закон парності дотичних напруг	73
4.6.4. Напряги у похилих перерізах під час розтягу. Головні напруги	73
4.7. Геометричні характеристики плоских перерізів	76
4.7.1. Статичний момент площі	76
4.7.2. Полярний момент інерції	77
4.7.3. Осьовий момент інерції	78
4.8. Кручення	79
4.8.1. Відомості про деформацію кручення циліндра	79
4.8.2. Епюри крутних моментів	81
4.8.3. Напряги і деформації кручення	82
4.9. Згин	84
4.9.1. Чистий згин прямого бруса	84
4.9.2. Згинаючий момент і поперечна сила	85
4.9.3. Диференціальні залежності для згину	86
4.9.4. Нормальні напруги чистого згину	87
4.9.5. Косий згин	93
4.9.6. Гіпотези міцності	95
4.10. Міцність при динамічних навантаженнях	96
4.10.1. Відомості про втомленість матеріалів	96
4.10.2. Задачі динаміки в опорі матеріалів	101
4.11. Стійкість стиснених стержнів	104
4.11.1. Поздовжній згин	104
4.11.2. Формула Ейлера	106
Список літератури	110

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович
ПУШНЯ Валентин Олександрович

Конспект лекцій
з курсу

«Технічна механіка»

*(для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів
напряму підготовки 6.070101 – «Транспортні технології
(за видами транспорту)»)*

За авторською редакцією

Комп'ютерний набір та верстання О. В. Мамаєва

План 2011, поз. 117Л

Підп. до друку 25.04.12

Формат 60x84/16

Друк на ризографі

Ум. друк. арк. 6,6

Тираж 50 пр.

Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4064 від 12.05.2011