МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять і самостійної роботи з курсу

«*ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ*»

(*для студентів 3 курсу заочної форми навчання ФПО та ЗН*
галузі знань 0305 — «Економіка і підприємництво»
напрямів підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»,
6.030509 «Облік і аудит»)

Харків ХНАМГ 2012

Методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи з курсу «Економіко-математичне моделювання» (для студ. 3 курсу заочної форми навчання ФПО та ЗН галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво» напрямів підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік і аудит») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: О. О. Воронков; - Х.: ХНАМГ, 2012. - 78 с.

Укладач: О. О. Воронков

Рекомендовано кафедрою економіки підприємств міського господарства, протокол № 12 від 07.06.12 р.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні вказівки спрямовані на допомогу студентам оволодіти практичними навичками з побудови математичних моделей економічних задач оптимального вибору і застосування оптимізаційних методів для їх розв’язання.

Дисципліна «Економіко-математичне моделювання» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки бакалаврів за напрямом 0305 «Економіка і підприємництво». Відповідно до навчального плану її вивчають у 5 семестрі 3 курсу. Обсяг практичних занять становить 6 аудиторних годин (3 практичних заняття). Обсяг самостійної роботи становить 164 години. Вивчення дисципліни «Економіко-математичне моделювання» спрямоване на підготовку висококваліфікованих фахівців, що володіють методами математичного моделювання та оптимізації і здатні приймати рішення, підкріплені математичними розрахунками.

Відповідно до робочої програми курсу «Економіко-математичне моделювання» у методичних вказівках до практичних занять розглянуто найважливіші теми змістового модуля 1 «Оптимізаційні економіко-математичні моделі», зокрема економічна та математична постановка оптимізаційних задач, вибір критерію оптимізації та обмежень задачі, геометрична інтерпретація множини допустимих рішень і цільової функції, змістового модуля 2 «Аналіз та управління ризиком в економіці», зокрема прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику, а також змістового модуля 3 «Економетричні моделі», зокрема побудова загальної лінійної моделі. Знання й навички, що отримані при вивченні цих тем, є основою для вивчення наступних складніших тем курсу, та найчастіше застосовуються у практичній діяльності.

У методичних вказівках до самостійної роботи для кожної теми зазначено обсяг витрат часу на вивчення, що відповідає програмі курсу. Наприкінці методичних вказівок наведено список основних і додаткових підручників, які рекомендується використовувати. Кожна тема супроводжується посиланнями на відповідні їй сторінки підручників. Після вивчення теоретичного матеріалу треба дати відповіді на контрольні запитання з теми, а також вирішити задачі, пропоновані для самостійного розв'язання. Для полегшення роботи перед задачами для самостійного розв'язання наведене розв'язання аналогічних прикладів.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Практичне заняття 1
ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ

Мета — сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Задача 1.1

Виконати замовлення з виробництва 32 виробів $В_1$ і 4 виробів $В_2$ взялися бригади $Б_1$ і $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ з виробництва виробів $В_1$ та $В_2$ становить відповідно 4 та 2 вироби на годину, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 год. Продуктивність бригади $Б_2$ – відповідно 1 та 3 вироби на годину, а її фонд робочого часу – 4 год. Витрати, що пов'язані з виробництвом одиниці виробу, для бригади $Б_1$ дорівнюють відповідно 9 та 20 грн., для бригади $Б_2$ – 15 та 30 грн.

Складіть математичну модель задачі, що дозволяє знайти оптимальний обсяг випуску виробів, який забезпечує мінімальні витрати на виконання замовлення.

Розв'язання

Задамося змінними задачі

Шуканими величинами у задачі є обсяги випуску виробів. Вироби $В_1$ випускатимуться двома бригадами $Б_1$ та $Б_2$. Тому необхідно розрізняти кількість виробів $В_1$, що вироблені бригадою $Б_1$, і кількість виробів $В_1$, що вироблені бригадою $Б_2$. Аналогічно, обсяги випуску виробів $В_2$ бригадою $Б_1$ та бригадою $Б_2$ так само є різними величинами. Внаслідок цього в цій задачі 4 змінні. Для зручності сприйняття будемо використати двохіндексну форму запису x_{ij} – кількість виробів $В_j$ (j=1,2), що виготовляються бригадою $Б_i$ (i=1,2), а саме,

x_{11} - кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];

x_{12} - кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];

x_{21} - кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.];

x_{22} - кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.].

Цільова функція

Метою розв'язання задачі є виконання плану з *мінімальними витратами*, тобто критерієм ефективності розв'язку є показник витрат на виконання усього замовлення. Тому цільову функцію треба представити формулою розрахунку цих витрат. Витрати кожної бригади на виробництво одного виробу $В_1$ та $В_2$ відомі з умови. Отже, цільова функція має вигляд

$$L(X)= 9x_{11}+20x_{12}+15x_{21}+30x_{22}\rightarrow\min, \left[\frac{грн.}{шт} * шт = грн.\right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва виробів бригадами обмежуються наступними умовами:

- загальна кількість виробів $В_1$, що вироблені обома бригадами, повинна

дорівнювати 32 шт., а загальна кількість виробів $В_2$ - 4 шт.;

- час, відпущений на роботу над цим замовленням, становить для бригади $Б_1$ - 9,5 год., а для бригади $Б_2$ - 4 год.;
- обсяги виробництва виробів не можуть бути від'ємними величинами.

Отже всі обмеження задачі розділимо на три групи, зумовлені:

1) величиною замовлення на виробництво виробів;
2) фондами часу, виділеними бригадам;
3) невід'ємністю обсягів виробництва.

Для зручності складання обмежень запишемо вихідні дані у вигляді табл. 1.1.

Таблиця 1.1 - Вихідні дані

Бригада	**Продуктивність бригад,**		**Фонд робочого часу, год.**
	$В_1$	**$В_2$**	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Замовлення, шт	32	4	

Обмеження за замовленням виробів мають наступну змістову форму запису

$$\begin{bmatrix} \textit{кількість виробів } B_1 \\ \textit{виготовлених бригадами } Б_1 \textit{ і } Б_2 \end{bmatrix} = [32 \textit{ шт.}]$$

та

$$\begin{bmatrix} \textit{кількість виробів } B_2 \\ \textit{виготовлених бригадами } Б_1 \textit{ і } Б_2 \end{bmatrix} = [4 \textit{ шт.}].$$

Математична форма запису має вигляд

$$x_{11} + x_{21}=32 \text{ [шт.]}$$

і

$$x_{12}+x_{22}=4 \text{ [шт.]}.$$

Обмеження за фондами часу має змістову форму

$$\begin{bmatrix} \textit{загальний час, витрачений бригадою } Б_1 \\ \textit{на виготовлення виробів } B_1 \textit{ і } B_2 \end{bmatrix} \le [9{,}5 \textit{ год.}]$$

та

$$\begin{bmatrix} \textit{загальний час, витрачений бригадою } Б_2 \\ \textit{на виготовлення виробів } B_1 \textit{ і } B_2 \end{bmatrix} \le [4 \textit{ год.}].$$

Проблема полягає в тому, що в умові задачі безпосередньо не заданий час, що витрачають бригади на виробництво одного виробу $В_1$ або $В_2$, тобто не задана трудомісткість виробництва. Але є інформація про продуктивність кожної з бригад, тобто про кількість вироблених виробів за 1 годину. Трудомісткість Тр та продуктивність Пр є зворотними величинами, тобто

$$Тр = \frac{1}{Пр}\left[\frac{год.}{шт.}\right].$$

Тому за даними табл. 1.1 дістаємо наступну інформацію:

— $\frac{1}{4}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $В_1$;

— $\frac{1}{2}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $В_2$;

— $\frac{1}{1}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_1$;

— $\frac{1}{3}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_2$.

Запишемо обмеження за фондами часу в математичному вигляді

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad \left[\frac{год.}{шт.} шт.\right] \le [год.]$$

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4 \quad \left[\frac{год.}{шт.} шт.\right] \le [год.].$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається виразом

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1{,}2;\ j = 1{,}2).$$

Отже, математична модель цієї задачі має вигляд

$$L = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min \quad [грн.]$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 \quad [шт.] \\ x_{12} + x_{22} = 4 \quad [шт.] \\ \frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad [год.] \\ \frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4 \quad [год.] \\ x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1{,}2};\ j = \overline{1{,}2} \quad [шт.] \end{cases}$$

Задача 1.2

Для пошиття одного виробу потрібно викроїти з тканини 6 деталей. На швейній фабриці розроблені два варіанти розкрою тканини. У табл. 1.2 наведені характеристики варіантів розкрою 10 м тканини та комплектність, тобто кількість деталей певного виду, що необхідні для пошиття одного виробу. Щомісячний запас тканини для пошиття виробів певного типу становить 405 $м^2$. У найближчий місяць планується зшити 90 виробів.

Треба побудувати математичну модель задачі, що дозволяє в найближчий місяць виконати план з пошиття з мінімальною кількістю відходів.

Таблиця 1.2 - Характеристика варіантів розкрою відрізів тканини по 10 м

Варіант розкрою	**Кількість деталей, шт. /відріз**						**Відходи, $м^2$/відріз**
	1	2	3	4	5	6	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектність, шт. /виріб	1	2	2	2	2	2	

Розв'язання

Змінні задачі

У цій задачі шукані величини явно не вказані, але звісно, що повинен бути виконаний щомісячний план з пошиття 90 виробів. Для пошиття 90 виробів на місяць потрібно розкроїти строго певну кількість деталей. Крій проводиться з відрізів тканини по 10 м за двома різними способами, які дозволяють одержати різну кількість деталей. Оскільки заздалегідь невідомо, скільки тканини буде розкроюватися за першим способом і скільки – за другим, то як шукані величини можна задати кількість відрізів тканини по 10 м , що розкроєні за кожним із способів:

x_1 - кількість відрізів тканини по 10 $м^2$, що розкроєні за першим способом протягом місяця, [відріз./міс.];

x_2 - кількість відрізів тканини по 10 $м^2$, що розкроєні за другим способом протягом місяця, [відріз./міс].

Цільова функція

Метою розв'язання задачі є виконання плану за мінімальну кількість відходів. Оскільки кількість виробів строго заплановано (90 шт. /міс.), то цей параметр не описує цільової функції, а належить до обмеження, невиконання якого означає, що задачу не розв’язано. А критерієм ефективності виконання плану служить параметр "кількість відходів", який необхідно звести до мінімуму. Оскільки при розкрої одного відрізу (10 $м^2$) тканини за 1-м варіантом виходить 0,5 $м^2$ відходів, а за 2-м варіантом - 0,35 $м^2$, то загальна кількість відходів при крої (цільова функція) має вигляд

$$L = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min ,$$

$$\left[\frac{м^2 відх}{відріз} * \frac{відріз}{міс.} = \frac{м^2 відх}{міс.} \right].$$

Обмеження

Кількість розкроїв тканини за різними способами обмежується наступними умовами:

- повинен бути виконаний план з пошиття виробів, інакше кажучи, загальна кількість деталей, що викроєні, повинна бути такою, щоб з них можна було пошити 90 виробів на місяць, а саме: деталей 1-го виду повинно бути як мінімум 90 та деталей інших видів - як мінімум по 180;
- витрата тканини не повинна перевищувати її місячного запасу на складі;
- кількість відрізів розкраюваної тканини не може бути від’ємною.

Обмеження за планом пошиття пальто мають наступну змістову форму запису

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 1, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \geq [90\ \textit{шт.}]$$

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 2, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \geq [180\ \textit{шт.}]$$

…….....

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 6, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \geq [180\ \textit{шт.}]$$

Математично ці обмеження записуються у наступному вигляді:

$$60x_1 + 80x_2 \geq 90;$$
$$35x_2 \geq 180;$$
$$90x_1 + 20x_2 \geq 180;$$
$$40x_1 + 78x_2 \geq 180;$$
$$70x_1 + 15x_2 \geq 180;$$
$$90x_1 \geq 180;$$
$$\left[\frac{\textit{шт.}}{\textit{відріз}} * \frac{\textit{відріз}}{\textit{міс.}}\right] \geq \left[\frac{\textit{шт.}}{\textit{міс.}}\right].$$

Обмеження за витратами тканини має такі форми запису:

змістову

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість тканини}, \\ \textit{що розкрієна за місяць} \end{bmatrix} \leq [405\ \textit{м}^2]$$

і математичну

$$x_1 + x_2 \leq \frac{405}{10},$$
$$\left[\frac{\textit{відріз}}{\textit{міс.}}\right] \leq \left[\frac{\textit{м}^2 * \textit{відріз}}{\textit{міс.} * \textit{м}^2}\right].$$

Невід'ємність кількості розкроєних відрізів задається у вигляді виразу

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Отже, математична модель задачі має вигляд

$$L = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min \quad [\textit{м}_2\textit{відх.} / \textit{міс.}];$$
$$60x_1 + 80x_2 \geq 90 \quad [\textit{шт.} / \textit{міс.}];$$
$$35x_2 \geq 180 \quad [\textit{шт.} / \textit{міс.}];$$
$$90x_1 + 20x_2 \geq 180 \quad [\textit{шт.} / \textit{міс.}];$$
$$40x_1 + 78x_2 \geq 180 \quad [\textit{шт.} / \textit{міс.}];$$
$$70x_1 + 15x_2 \geq 180 \quad [\textit{шт.} / \textit{міс.}];$$
$$90x_1 \geq 180 \quad [\textit{шт.} / \textit{міс.}];$$
$$x_1 + x_2 \leq 40{,}5 \quad [\textit{відріз} / \textit{міс.}];$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad [\textit{відріз} / \textit{міс.}].$$

Практичне заняття 2
ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – засвоєння студентами основних понять та визначень дисципліни шляхом ілюстрації змісту оптимізації.

Вихідні дані: математична модель задачі лінійного програмування.

Графічний метод є досить простим та наочним для розв'язання задач лінійного програмування (ЛП) із двома змінними. Він заснований на геометричному поданні припустимих розв’язків та цільової функції задачі.

Кожна з нерівностей задачі ЛП визначає на координатній площині (x_1,x_2) певну напівплощину, а система нерівностей у цілому – перетинання відповідних напівплощин. Множину точок перетинання цих напівплощин називають областю припустимих розв’язків (ОПР). ОПР завжди є опуклою фігурою, тобто такою, що має наступну властивість: якщо дві точки А та В належать цій фігурі, то й весь відрізок АВ належить їй. ОПР графічно можна представити опуклим багатокутником, необмеженою опуклою багатокутною областю, відрізком, променем, однією точкою. У випадку несумісності системи обмежень задачі ОПР є порожньою множиною. Все це належить і до випадку, коли система обмежень включає рівності, оскільки будь-яку рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

можна подати у вигляді системи двох нерівностей

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i \end{cases}.$$

Цільова функція $L=c_1x_1 + c_2x_2$ за її фіксоване значення визначає на площині пряму лінію $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Змінюючи значення L, ми одержимо сімейство паралельних прямих, називаних лініями рівня. Це пов'язане з тим, що зміна значення L спричинить зміну лише довжини відрізка, що відсікає лінією рівня на осі x_2 (початкова ордината), а кутовий коефіцієнт прямої $tg\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$ залишиться постійним. Тому для розв’язання досить побудувати одну з ліній рівня, довільно вибравши значення L.

Вектор $C = (c_1;c_2)$ з координатами з коефіцієнтів цільової функції при x_1 та x_2 перпендикулярний до кожної з ліній рівня. Напрямок вектору С збігається з напрямком зростання цільової функції, що є важливим моментом для розв'язання задач. Напрямок убування цільової функції протилежний напрямку вектору С.

Сутність графічного методу полягає в наступному. За напрямком (або проти напрямку) вектора С в ОПР шукають оптимальну точку $X^* = (x_1^*; x^*_2)$. Оптимальною вважають точку, через яку проходить лінія рівня L_{max} (L_{min}), що відповідає найбільшому (найменшому) значенню функції L(x). Оптимальний розв'язок завжди знаходиться на границі ОПР, зокрема, в останній вершині

багатокутника ОПР, через яку пройде цільова пряма, або на всій його стороні.

При пошуку оптимального розв'язку задач ЛП можливі наступні ситуації:

- існує єдиний розв'язок задачі;
- існує нескінченна множина розв'язків (альтернативний оптимум);
- цільова функція є необмеженою;
- область припустимих розв’язків - єдина точка;
- задача не має розв’язку.

Вказівки до виконання завдання

I. У обмеженнях задачі змініть знаки нерівностей на знаки точних рівностей та побудуйте відповідні прямі.

II. Знайдіть та заштрихуйте напівплощини, дозволені кожним з обмежень-нерівностей задачі. Для цього підставте до конкретної нерівності координати будь-якої точки [наприклад, (0;0)] та перевірте істинність отриманої нерівності.

Якщо нерівність істинна, то треба заштрихувати напівплощину, що містить дану точку; інакше (якщо нерівність помилкова) треба заштрихувати напівплощину, що не містить дану точку.

Оскільки x_1 та x_2 повинні бути невід’ємними, то їх припустимі значення завжди знаходитимуться вище за вісь x_1 та правіше за вісь x_2, тобто у I-му квадранті.

Обмеження-рівності дозволяють тільки ті точки, що лежать на відповідній прямій, тому виділіть на графіку такі прямі.

III. Визначіть ОПР як частину площини, що належить одночасно всім дозволеним областям, та виділіть її. При відсутності ОПР задача не має розв’язків. Зробіть про це відповідний висновок.

IV. Якщо ОПР – не порожня множина, то побудуйте цільову пряму, тобто кожну з ліній рівня функції $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, де L – довільне число, наприклад, кратне c_1 та c_2, тобто зручне для проведення розрахунків. Спосіб побудови аналогічний побудові прямих обмежень.

V. Побудуйте вектор $C = (c_1, c_2)$, що починається у точці (0;0) та закінчується у точці (c_1, c_2). Якщо цільова пряма та вектор C побудовані правильно, то вони будуть перпендикулярні.

VI. При пошуку максимуму цільової функції пересувайте цільову пряму у напрямку вектору C, при пошуку мінімуму цільової функції - проти напрямку вектору C. Остання за ходом руху вершина ОПР буде точкою max або min цільової функції. Якщо такої точки (або точок) не існує, то зробіть висновок про необмеженість цільової функції на множині планів зверху (при пошуку max) або знизу (при пошуку min).

VII. Визначіть координати точки max (min) цільової функції $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ та обчисліть значення цільової функції $L(X^*)$. Для обчислення координат оптимальної точки X* вирішіть систему рівнянь прямих, на перетинанні яких знаходиться X*.

Задача 2.1

Знайдемо оптимальний розв’язок задачі, математична модель якої має вигляд

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Побудуємо прямі обмежень, для чого обчислимо координати точок перетинання цих прямих з осями координат (рис. 2.1).

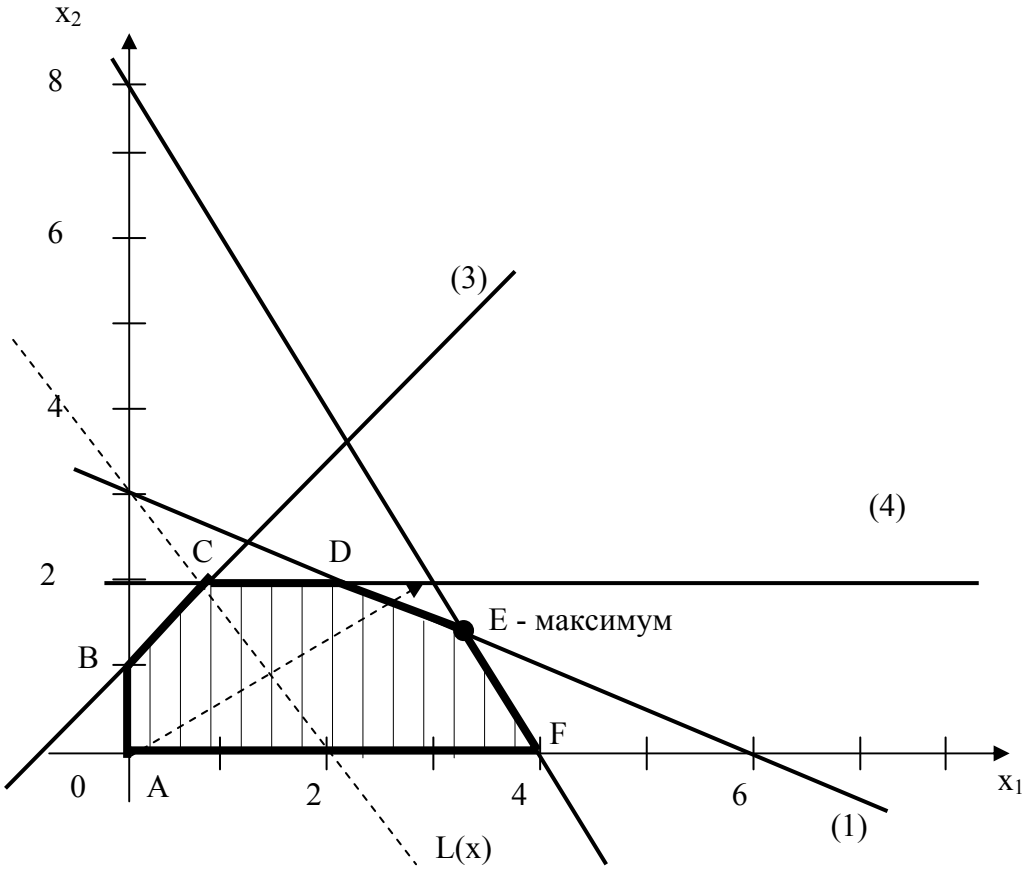

Рис. 2.1 – Графічне розв’язання задачі

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (3) \\ x_2 = 2 & (4). \end{cases}$$

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Пряма (4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі x_1.

Визначимо ОПР. Наприклад, підставимо точку (0;0) у вихідне обмеження

(3), дістанемо 0 < 1, що є істинною нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, яка містить точку (0;0), тобто розташовану правіше та нижче за пряму (3). Аналогічно визначимо припустимі напівплощини для інших обмежень та вкажемо їх стрілками біля відповідних прямих обмежень. Загальною областю, дозволеною всіма обмеженнями, тобто ОПР, є багатокутник ABCDEF.

Цільову пряму можна побудувати за рівнянням

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Побудуємо вектор C з точки (0;0) у точку (3;2). Точка E - це остання вершина багатокутнику припустимих рішень ABCDEF, крізь яку проходить цільова пряма, що рухається за напрямком вектору C. Тому E - це точка максимуму цільової функції. Визначимо координати точки E з системи рівнянь прямих обмежень (1) та (2):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$E = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right).$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює $L^* = 3 * \frac{10}{3} + 2 * \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$.

Задача 2.2

$$L = -2x_1 - x_2 \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \quad (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \quad (2) \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \quad (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \quad (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.2).

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \ (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \ (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

$$(4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Цільову пряму побудуємо за рівнянням

$$-2x_1 - x_2 = -4,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Визначимо ОПР. Обмеження-рівність (4) припускає тільки точки, що лежать на прямій (4). Підставимо точку (0;0) до обмеження (3), одержимо 0≥9, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0;0), тобто розташовану вище за пряму (3). Аналогічно визначимо та вкажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз напівплощин, припустимих іншими обмеженнями-нерівностями, дозволяє визначити, що ОПР - це відрізок АВ.

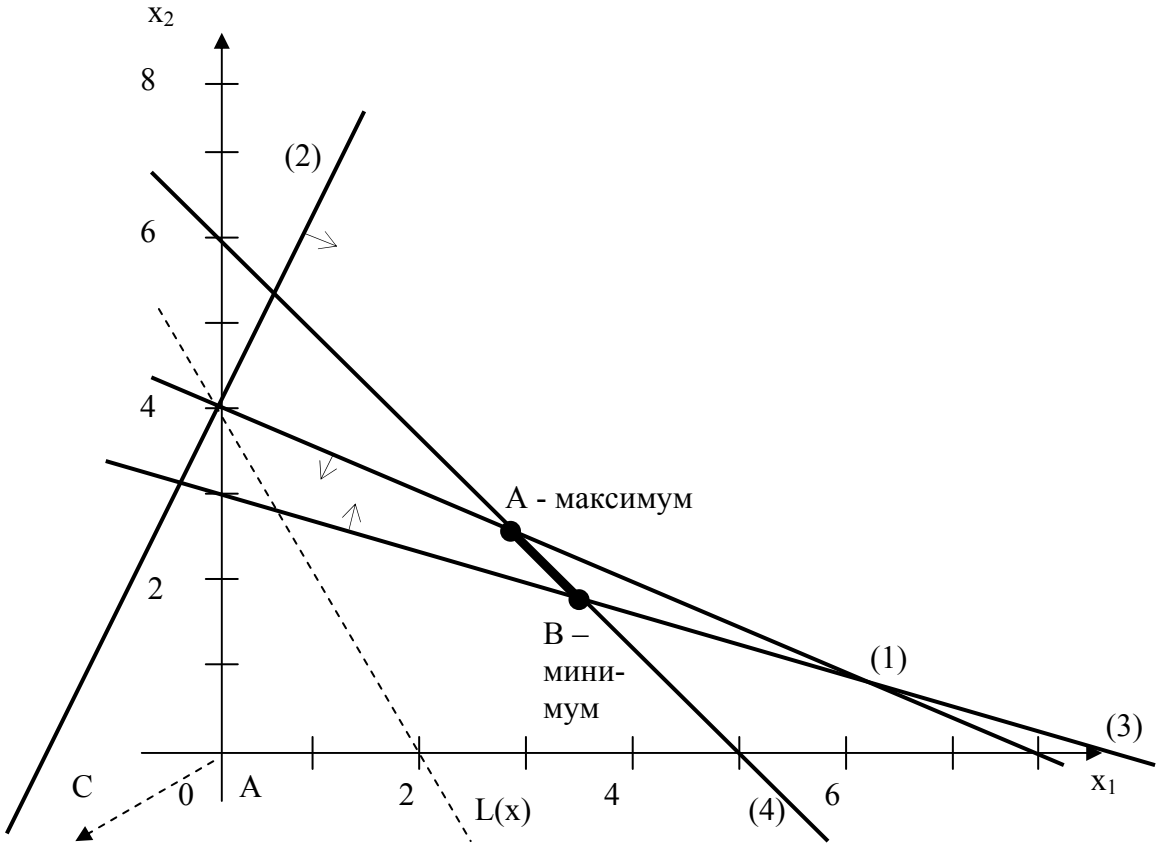

Рис 2.2 – Геометричне розв’язання задачі

Побудуємо вектор С з точки (0;0) у точку (-2;-1). Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектору С. Точка В - це остання точка відрізка АВ, через яку проходить цільова пряма, тобто В - точка мінімуму цільової функції.

Визначимо координати точки В з системи рівнянь прямих обмежень (3) та (4):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3{,}46 \\ x_2 \approx 1{,}85 \end{cases}.$$

Мінімальне значення цільової функції дорівнює

L (3,46; 1,85)= -2 * 3,46 -1 * 1,85 = -8,77.

При пошуку точки максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектору С. Останньою точкою відрізка АВ, а виходить і

точкою максимуму, буде А. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (4):

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2{,}86 \\ x_2 \approx 2{,}57 \end{cases}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює

L (2,86; 2,57)= -2 * 2,86 -1 * 2,57 = -8,29.

Отже, В(3,46; 1,85) - точка мінімуму, L_{min}= -8,77; А(2,86; 2,57`) - точка максимуму, L_{max}= -8,29.

Задача 2.3

Розв'язати за графічним методом задачу:

$$L = x_1 - 3x_2 \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \quad (1) \\ x_1 + x_2 \geq 5 \quad (2) \\ x_1 \leq 4 \quad (3) \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \quad (4) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.3)

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \ (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \ (4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Пряма (3) проходить через точку x_1 = 4 паралельно осі x_2. Цільову пряму побудуємо за рівнянням

$$x_1 - 3x_2 = -3,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Визначимо ОПР. Підставимо точку (0;0) до обмеження (2), дістанемо 0≥5, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0;0), тобто розташовану правіше й вище за пряму (2).

Аналогічно визначимо та вкажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз припустимих напівплощин дозволяє визначити, що ОПР - це незамкнута область, обмежена прямими (2), (3), (4) та віссю x_2.

Побудуємо вектор С з точки (0;0) у точку (1;-3). Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектору С. Оскільки в цьому напрямку ОПР не обмежена, неможливо в цьому напрямку знайти останню точку ОПР. Звідси випливає, що цільова функція не обмежена на множині планів знизу (оскільки йде пошук мінімуму).

При пошуку максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектору С до перетинання з вершиною А - останньою точкою ОПР у цьому напрямку. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (2) та (4):

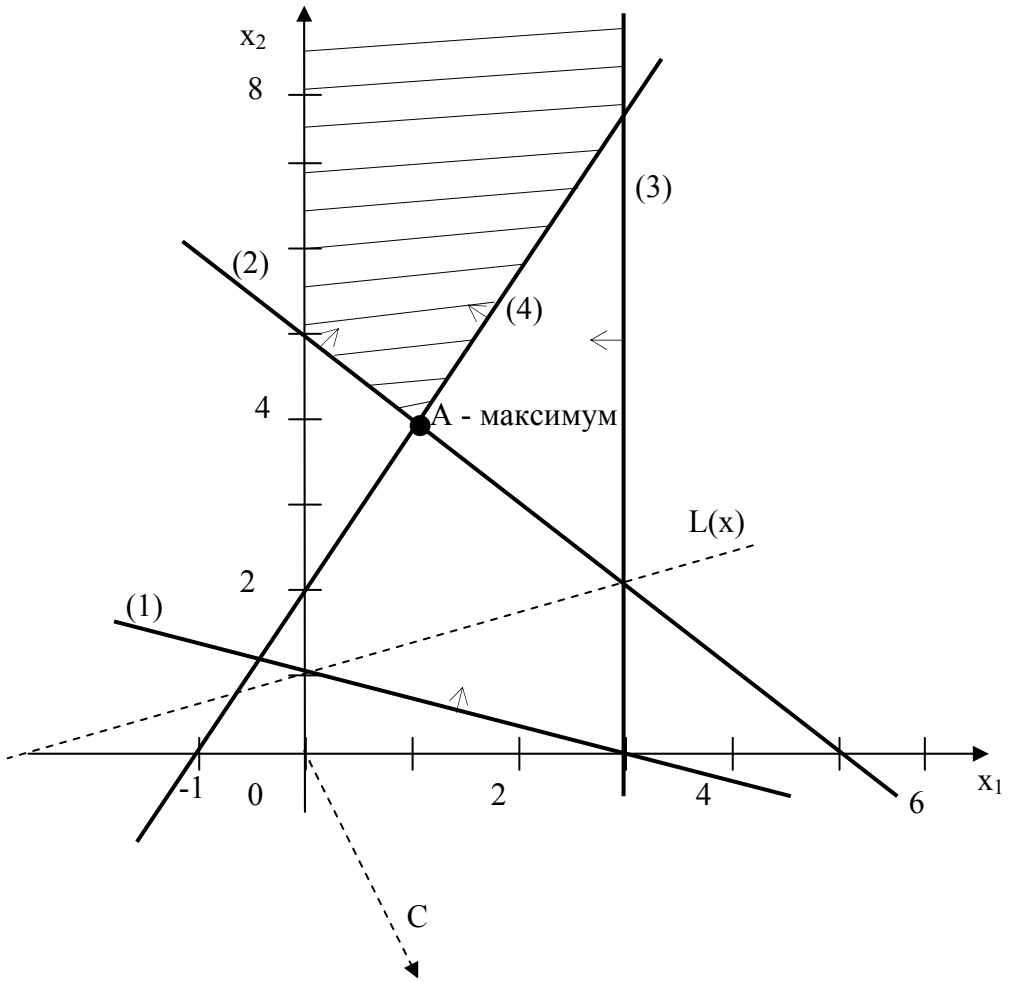

Рис 2.3 – Геометричне розв’язання задачі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

L(1; 4)=1*1-3*4 = -11.

Отже, у цій задачі цільова функція не обмежена на множині планів знизу, а A(1;4) є точкою максимуму цільової функції, L_{max} = -11.

Практичне заняття 3
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ

Мета — сформувати комплексну систему знань і практичних навичок щодо обґрунтування господарських рішень із різним ступенем невизначеності та ризику.

Вказівки до виконання завдання

Зазначимо, що для вибору оптимальної стратегії в ситуації невизначеності використовують кілька критеріїв: Вальда, максімакса, Гурвіца, Севіджа. Розпочати вирішення з розгляду особливостей побудови статичної

ігрової моделі, яка використовується для прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. У загальному вигляді модель задається у вигляді матриці, рядки якої — це можливі альтернативні рішення, а стовпчики — стани системи (середовища). Далі треба дослідити й визначити змістову характеристику кожного з критеріїв, звернувши увагу на особливості їх використання.

Задача 3.1

Пекарня випікає хліб на продаж до магазинів. Собівартість однієї булки становить 0,60 грн. Її продають за 1,4 грн.

Попит на добу, од.	10	12	14	16	18
Частота	5	10	15	15	5

Якщо булку виготовлено, але не продано, то додаткові збитки становлять 0,40 грн. за одиницю. Зробити висновок, скільки випікати продукції за кожним правилом.

Розв'язання

Для кожного з можливих значень існує найкраща альтернатива з погляду імовірних прибутків (табл. 3.1). Відхилення від цих альтернатив призводить до зменшення прибутків через підвищення пропозицій над попитом або неповного задоволення попиту.

Підприємству треба визначити, яку кількість продукції треба випустити, щоб отримати найбільший прибуток. Рішення залежить від ситуації на ринку, тобто від конкретної кількості споживачів. Конкретна кількість споживачів наперед невідома й може бути одним з п'яти варіантів: S_1,S_2, S_3, S_4, S_5. Є можливими п'ять варіантів випуску продукції підприємством: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Кожній парі, що залежить від стану середовища — S_j та варіанта рішення - A_i, відповідає значення функціонала оцінювання — $V(A_i,S_j)$, що характеризує результат дій (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 - Прибуток від реалізації (матриця прибутків), тис. грн.

Варіанти рішень, A_i	**Можливий попит, S_j**				
	10	12	14	16	18
10	(1,4-0,6)*10 = 8,0	(1,4-0,6)*10 = 8,0	8,0	8,0	8,0
12	1,4*10 -0,6 * *12 - 2*0,4=6	(1,4-0,6)*12 = 9,6	9,6	9,6	9,6
14	1,4*10 -0,6 * *14 - 4*0,4=4	1,4*12 -0,6 * *14 - 2*0,4= =7,6	(1,4-0,6)*14 = 11,2	11,2	11,2
16	1,4*10 -0,6 * *16 - 6*0,4=2	1,4*12 -0,6 * *16 - 4*0,4= =5,6	1,4*14 -0,6 * *16 - 2*0,4= =9,2	(1,4-0,6)*16 = 12,8	12,8
18	1,4*10 -0,6 * *18 - 8*0,4=0	1,4*12 -0,6 * *18 - 6*0,4= =3,6	1,4*14 -0,6 * *18 - 4*0,4= =7,2	1,4*16 -0,6 * *18 - 2*0,4= =10,8	(1,4-0,6)*18 = 14,4
Імовірність	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Потрібно знайти оптимальну альтернативу випуску продукції з погляду максимізації прибутку за допомогою критеріїв Байєса за умов відомих імовірностей станів, Вальда та Севіджа за умов повної невизначеності.

Оптимальну альтернативу за критерієм Байєса можна обчислити за такими формулами:

$$\text{для } F^{+} \quad A_i^{*} = \max_i \left\{ V(A_i, S_j) \cdot P_j \right\};$$

$$\text{для } F^{-} \quad A_i^{*} = \min_i \left\{ V(A_i, S_j) \cdot P_j \right\}.$$

Ми знаходимо оптимальну альтернативу випуску продукції з погляду максимізації прибутків, тобто функціонал оцінювання має позитивну компоненту F^{+}, тому використовуватимемо відповідні формули (розрахунки наведено в табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Вибір оптимального випуску за критерієм Байєса

Варіанти рішень, A_i	**Можливий попит, S_j**					$A_i^{*} = \max_i \left\{ V(A_i, S_j) \cdot P_j \right\}$
	10	12	14	16	18	
10	8	8	8	8	8	8
12	6	9,6	9,6	9,6	9,6	6 0,1+9,6 0,2+9,6 0,3+9,6 0,3+9,6 0,1 = =9,24
14	4	7,6	11,2	11,2	11,2	4 0,1+7,6 0,2+11,2 0,3+11,2 0,3+11,2 * *0,1 =**9,76**
16	2	5,6	9,2	12,8	12,8	2 0,1+5,6 0,2+9,2 0,3+12,8 0,3+12,8 * *0,1 =9,2
18	0	3,6	7,2	10,8	14,4	0 0,1+3,6 0,2+7,2 0,3+10,8 0,3+14,4 * *0,1 =7,56
Імовірність	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	

За критерієм Байєса оптимальним буде альтернативне рішення A_3, оскільки воно передбачає максимальний очікуваний прибуток, що дорівнює 9,76 тис. грн.

Критерій Вальда вважається найобережнішим з критеріїв. Оптимальне альтернативне рішення за критерієм Вальда визначається так:

$$\text{для } F^{+} \quad A_i^{*} = \max_i \min_j \left\{ V(A_i, S_j) \right\};$$

$$\text{для } F^{-} \quad A_i^{*} = \min_i \max_j \left\{ V(A_i, S_j) \right\}.$$

Розрахунки за критерієм Вальда наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Вибір оптимального випуску за критерієм Вальда

Варіанти рішень, A_i	**Можливий попит, S_j**					$\min_j \{V(A_i S_j)\}$
	10	12	14	16	18	
10	8	8	8	8	8	8
12	6	9,6	9,6	9,6	9,6	6
14	4	7,6	11,2	11,2	11,2	4
16	2	5,6	9,2	12,8	12,8	2
18	0	3,6	7,2	10,8	14,4	0

За критерієм Вальда оптимальним буде альтернативне рішення A_1.

Щоб застосувати критерій Севіджа, потрібно побудувати матрицю ризику як лінійне перетворення функціонала оцінювання.

Для побудови матриці ризику використовують такі формули:

для F^+ $$R_{ij} = \max_i \{V(A_i, S_j)\} - V(A_i, S_j);$$

для F^- $$R_{ij}^* = V(A_i S_j) - \min_i \{V(A_i, S_j)\}.$$

Результати формування матриці ризику наведено в табл. 3.4.

Таблиця 3.4 – Матриця ризику, тис. грн.

Варіанти рішень, A_i	**Матриця прибутків**					**Матриця ризику**				
	10	12	14	16	18	10	12	14	16	18
10	8	8	8	8	8	8-8=0	9,6--8=1,6	11,2--8=3,2	12,8--8=4,8	14,4--8=6,4
12	6	9,6	9,6	9,6	9,6	8-6=2	0	1,6	3,2	4,8
14	4	7,6	11,2	11,2	11,2	8-4=4	2	0	1,6	3,2
16	2	5,6	9,2	12,8	12,8	8-2=6	4	2	0	1,6
18	0	3,6	7,2	10,8	14,4	8-0=8	6	4	2	0

Для застосування критерію Севіджа до матриці ризику використовують формулу

$$A_i^* = \min_i \max_j \{R_{ij}\}.$$

Розрахунки результатів за критерієм Севіджа наведено в табл. 3.5.

Таблиця 3.5 – Вибір оптимального випуску за критерієм Севіджа

Варіанти рішень, A_i	**Можливий попит, S_j**					**$\max_j \{R_{ij}\}$**	**$\min_i \max_j \{R_{ij}\}$**
	10	12	14	16	18		
10	0	1,6	3,2	4,8	6,4	6,4	
12	2	0	1,6	3,2	4,8	4,8	
14	4	2	0	1,6	3,2	4	A_3
16	6	4	2	0	1,6	6	
18	8	6	4	2	0	8	

За критерієм Севіджа оптимальним буде альтернативне рішення A_3, оскільки його реалізація передбачає мінімальні втрати.

Практичне заняття 4
ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ

Мета – оволодіння основними етапами економетричного моделювання та визначення параметрів моделі за методом найменших квадратів.

Вказівки до виконання завдання

Щоб знайти пояснену частину, тобто величину $M_x(Y)$, якщо визначено характер експериментальних даних та виділено певний набір пояснюючих змінних, потрібно знати умовні розподіли випадкової величини Y. На практиці це майже ніколи не має місця, тому точне визначення поясненої частини є неможливим. У таких випадках застосовують стандартну процедуру згладжування експериментальних даних. Ця процедура полягає у двох етапах:

- визначають параметричне сімейство, до якого належить шукана функція $M_x(Y)$ (її розглядають як залежність від значень пояснюючих змінних X). Це сімейство може бути множиною лінійних функцій, степеневих функцій та ін.;
- визначають оцінки параметрів цієї функції за допомогою одного з методів математичної статистики.

У переважній більшості випадків економетричні моделі обирають лінійними. Окрім відносної простоти лінійної моделі, для такого вибору є дві істотні причини. Перша причина: якщо випадкова величина (X, Y) має спільний нормальний розподіл, тоді, як відомо, рівняння регресії є лінійними. Припущення про нормальний розподіл можна обґрунтувати за допомогою граничних теорем теорії імовірностей. Друга причина, за якою лінійна регресійна модель є переважнішою за інші, - це менший ризик істотної помилки прогнозу.

Лінійна регресія збігається до знаходження рівняння виду

$$\hat{y}_x = a + bx \text{ або } y = a + bx + \varepsilon .$$

Рівняння виду $\hat{y}_x = a + bx$ дозволяє за заданим значенням фактору x знаходити теоретичні значення результативної ознаки, підставляючи до нього фактичні значення фактору x.

Побудова лінійної регресії збігається до оцінки її параметрів – a та b. Класичний підхід до оцінювання цих параметрів лінійної регресії ґрунтується на методі найменших квадратів (МНК). МНК відповідно до теореми Гауса-Маркова дає найкращі оцінки цих параметрів.

МНК дозволяє дістати такі оцінки параметрів a та b, за яких сума квадратів відхилень фактичних значень результативної ознаки y від теоретичних $\hat{y}_x$ є мінімальною:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_{xi}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 \to \min .$$

Тобто з усієї множини ліній лінія регресії на графіку обирається так, щоб сума квадратів відстаней між статистичними точками та цією лінією була б мінімальною.

Задача 4.1

За даними проведеного опитування восьми груп сімей відомі дані зв'язку витрат населення на продукти харчування з рівнем доходів сім'ї. Дані наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані

Витрати на продукти харчування, y, тис. грн.	0,9	1,2	1,8	2,2	2,6	2,9	3,3	3,8
Доходи сім'ї, x, тис. грн.	1,2	3,1	5,3	7,4	9,6	11,8	14,5	18,7

Припустимо, що зв'язок між доходами сім'ї та витратами на продукти харчування є лінійним. Для підтвердження цього припущення побудуємо поле кореляції, наведене на рис. 4.1.

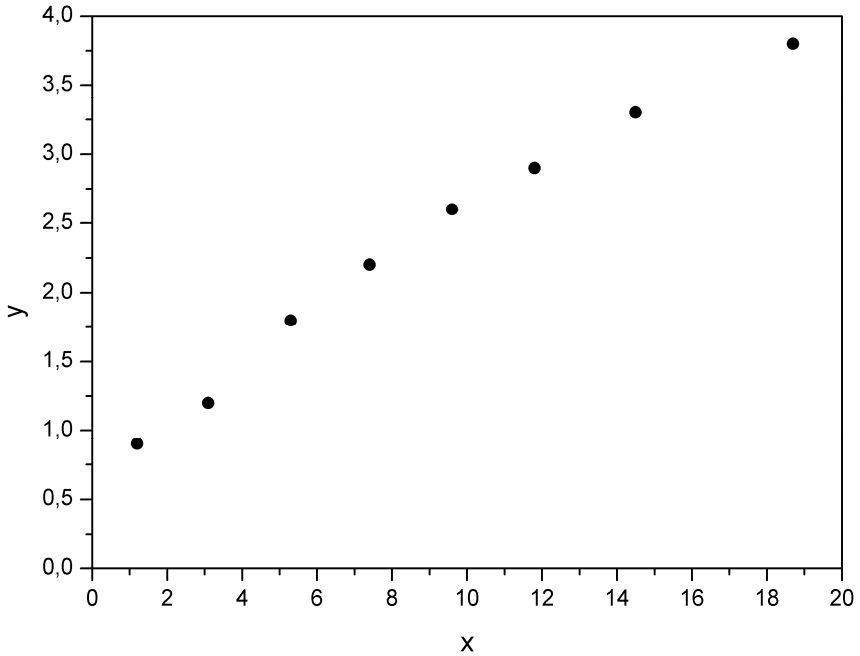

Рис. 4.1 – Поле кореляції

З графіка видно, що точки вибудовуються в певну пряму лінію.

Для зручності подальших обчислень складемо таблицю 4.2.

Розрахуємо параметри лінійного рівняння парної регресії $\hat{y}_x = a + b \cdot x$. Для цього скористаємося формулами:

$$b = \frac{\operatorname{cov}(x,\, y)}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{26{,}09 - 8{,}95 \cdot 2{,}34}{30{,}56} = 0{,}168;$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 2{,}34 - 0{,}168 \cdot 8{,}95 = 0{,}836.$$

Таблиця 4.2 – Проміжкові розрахунки

	x	y	$x \cdot y$	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y - \hat{y}_x$	$\left(y - \hat{y}_x\right)^2$	A_i, %
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1,2	0,9	1,08	1,44	0,81	1,038	–0,138	0,0190	15,33
2	3,1	1,2	3,72	9,61	1,44	1,357	–0,157	0,0246	13,08
3	5,3	1,8	9,54	28,09	3,24	1,726	0,074	0,0055	4,11
4	7,4	2,2	16,28	54,76	4,84	2,079	0,121	0,0146	5,50
5	9,6	2,6	24,96	92,16	6,76	2,449	0,151	0,0228	5,81
6	11,8	2,9	34,22	139,24	8,41	2,818	0,082	0,0067	2,83
7	14,5	3,3	47,85	210,25	10,89	3,272	0,028	0,0008	0,85
8	18,7	3,8	71,06	349,69	14,44	3,978	–0,178	0,0317	4,68
Разом	71,6	18,7	208,71	885,24	50,83	18,717	–0,017	0,1257	52,19
Середнє значення	8,95	2,34	26,09	110,66	6,35	2,34	–	0,0157	6,52
σ	5,53	0,935	–	–	–	–	–	–	–
σ^2	30,56	0,874	–	–	–	–	–	–	–

Дістали рівняння: $\hat{y}_x = 0,836 + 0,168 \cdot x$. Тобто із збільшенням доходу сім'ї на 1000 грн. витрати на харчування збільшуються на 168 грн.

Як було зазначено вище, рівняння лінійної регресії завжди доповнюється показником тісноти зв'язку – лінійним коефіцієнтом кореляції r_{xy}:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,168 \cdot \frac{5,53}{0,935} = 0,994 \cdot$$

Наближеність коефіцієнта кореляції до 1 вказує на тісний лінійний зв'язок між ознаками.

Коефіцієнт детермінації $r_{xy}^2 = 0,987$ показує, що рівняння регресії пояснює 98,7% дисперсії результативної ознаки, а на долю інших факторів припадає лише 1,3%.

Оцінимо якість рівняння регресії в цілому за допомогою F-критерію Фішера. Розрахуємо фактичне значення F-критерію:

$$F = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n-2) = \frac{0,987}{1 - 0,987} \cdot 6 = 455,54 .$$

Табличне значення ($k_1 = 1$, $k_2 = n - 2 = 6$, $\alpha = 0,05$): $F_{\text{табл}} = 5,99$. Оскільки $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, визнаємо статистичну значущість рівняння в цілому.

Для оцінки статистичної значущості коефіцієнтів регресії та кореляції розрахуємо t-критерій Стьюдента й довірчі інтервали кожного з показників. Розрахуємо випадкові помилки параметрів лінійної регресії та коефіцієнту кореляції $\left(S_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum \left(y - \hat{y}_x\right)^2}{n-2} = \frac{0,1257}{8-2} = 0,021 \right)$:

$$m_b = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0,021}}{5,53 \cdot \sqrt{8}} = 0,0093 ,$$

$$m_a = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{\sigma_x \cdot n} = \frac{\sqrt{0,021 \cdot 885,24}}{5,53 \cdot 8} = 0,0975,$$

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,987}{6}} = 0,0465.$$

Фактичні значення t-статистик: $t_b = \frac{0,168}{0,0093} = 18,065$, $t_a = \frac{0,836}{0,0975} = 8,574$, $t_r = \frac{0,994}{0,0465} = 21,376$. Табличне значення t-критерію Стьюдента при $\alpha = 0,05$ та кількості ступенів свободи $\nu = n - 2 = 6$ дорівнює $t_{\text{табл}} = 2,447$. Оскільки $t_b > t_{\text{табл}}$, $t_a > t_{\text{табл}}$ та $t_r > t_{\text{табл}}$, визнаємо статистичну значущість параметрів регресії та показника тісноти зв'язку. Розрахуємо довірчі інтервали для параметрів регресії a та b: $a \pm t \cdot m_a$; $b \pm t \cdot m_b$. Отримаємо, що $a \in [0,597;\ \ 1,075]$; $b \in [0,145;\ \ 0,191]$.

Середня помилка апроксимації (знаходимо за допомогою стовпця 10 таблиці 4.2 за формулою $A_i = \left| \frac{y_i - \hat{y}_{x_i}}{y_i} \right| \cdot 100\%$) $\overline{A} = 6,52\%$ говорить про гарну якість рівняння регресії, тобто свідчить про гарний підбор моделі до вихідних даних.

Визначимо прогнозне значення результативного фактору $\hat{y}_p$ при значенні ознаки-фактору, що складає 110% від середнього рівня $x_p = 1,1 \cdot \overline{x} = 1,1 \cdot 8,95 = 9,845$, тобто визначимо витрати на харчування, якщо доходи сім'ї складуть 9,85 тис. грн.

$$\hat{y}_p = 0,836 + 0,168 \cdot 9,845 = 2,490 \text{ (тис.грн.)}$$

Отже, якщо доходи сім'ї складуть 9,845 тис. грн., витрати на харчування будуть 2,490 тис.грн.

Визначимо довірчий інтервал прогнозу. Помилка прогнозу

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_p - \overline{x}\right)^2}{n \cdot \sigma_x^2}} = \sqrt{0,021 \cdot \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{\left(9,845 - 8,95\right)^2}{8 \cdot 30,56}\right)} = 0,154,$$

а довірчий інтервал ($\hat{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p} \le \hat{y}_p \le \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p}$):

$$2,113 < \hat{y}_p < 2,867.$$

Отже, прогноз є статистично надійним.

На одному графіку побудуємо вихідні дані та лінію регресії (рис. 4.2):

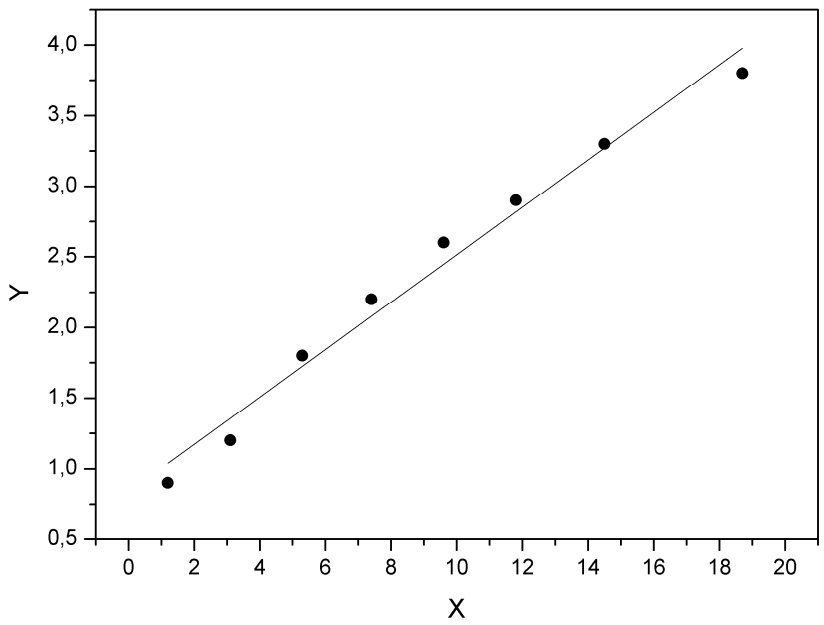

Рис. 4.2 – Лінія регресії

Задача 4.2

Нехай є наступні дані (умовні) про змінний видобуток вугілля на одного робітника y (т), потужності шару x_1 (м) та рівні механізації робіт x_2 (%), що характеризують процес видобутку вугілля у 10 шахтах.

Таблиця 4.3 – Вихідні дані

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
x_2	5	8	8	5	7	8	6	4	5	7
y	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Припустимо, що між змінними y, x_1, x_2 існує лінійна кореляційна залежність та знайдемо рівняння регресії y на x_1 та x_2.

Для зручності подальших обчислень складаємо таблицю ($\varepsilon = y - \hat{y}_x$) (табл. 4.4).

Для визначення параметрів рівняння регресії в цьому випадку необхідно розв'язати наступну систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} 10a + 94b_1 + 63b_2 = 68, \\ 94a + 908b_1 + 603b_2 = 664, \\ 63a + 603b_1 + 417b_2 = 445. \end{cases}$$

Звідки отримаємо, що $a = -3,54$, $b_1 = 0,854$, $b_2 = 0,367$. Тобто рівняння множинної регресії має вигляд:

$$\hat{y}_x = -3,54 + 0,854 \cdot x_1 + 0,367 \cdot x_2.$$

Таблиця 4.4 - Проміжкові розрахунки

№	x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	y^2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot y$	$x_2 \cdot y$	$\hat{y}_x$	ε^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	8	5	5	64	25	25	40	40	25	5,13	0,016
2	11	8	10	121	64	100	88	110	80	8,79	1,464
3	12	8	10	144	64	100	96	120	80	9,64	0,127
4	9	5	7	81	25	49	45	63	35	5,98	1,038
5	8	7	5	64	49	25	56	40	35	5,86	0,741
6	8	8	6	64	64	36	64	48	48	6,23	0,052
7	9	6	6	81	36	36	54	54	36	6,35	0,121
8	9	4	5	81	16	25	36	45	20	5,61	0,377
9	8	5	6	64	25	36	40	48	30	5,13	0,762
10	12	7	8	144	49	64	84	96	56	9,28	1,631
Сума	94	63	68	908	417	496	603	664	445	68	6,329
Середнє значення	9,4	6,3	6,8	90,8	41,7	49,6	60,3	66,4	44,5	–	–
σ^2	2,44	2,01	3,36	–	–	–	–	–	–	–	–
σ	1,56	1,42	1,83	–	–	–	–	–	–	–	–

Воно показує, що при збільшенні тільки потужності шару x_1 (при незмінному x_2) на 1 м здобування вугілля на одного робітника y зросте у середньому на 0,854 т, а при збільшенні тільки рівня механізації робіт x_2 (при незмінному x_1) на 1% – у середньому на 0,367 т.

Знайдемо рівняння множинної регресії у стандартизованому масштабі:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \varepsilon,$$

при цьому визначимо стандартизовані коефіцієнти регресії:

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 0,854 \cdot \frac{1,56}{1,83} = 0,728,$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = 0,367 \cdot \frac{1,42}{1,83} = 0,285.$$

Отже отримали рівняння

$$\hat{t}_y = 0,728 \cdot t_{x_1} + 0,285 \cdot t_{x_2}.$$

Стандартизовані коефіцієнти регресії можна порівнювати між собою. Отже можна побачити, що потужність шару впливає на змінний видобуток вугілля більше за рівень механізації робіт.

Порівнювати вплив факторів на результат можна так само за допомогою середніх коефіцієнтів еластичності:

$$\bar{Э}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}},$$

або

$$\bar{Э}_1 = 0,854 \cdot \frac{9,4}{6,8} = 1,18, \quad \bar{Э}_2 = 0,367 \cdot \frac{6,3}{6,8} = 0,34.$$

Отже, збільшення тільки потужності шару (від свого середнього значення) або тільки рівня механізації робіт на 1% збільшує в середньому змінний видобуток вугілля на 1,18% або 0,34% відповідно. Це підтверджує, що вплив на результат y фактору x_1 є більшим за фактор x_2.

Задача 4.3

Оцінимо якість рівняння, що отримане у попередній задачі. Спочатку визначимо парні коефіцієнти кореляції:

$$r_{yx_1} = \frac{\overline{y \cdot x_1} - \overline{y} \cdot \overline{x}_1}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{66,4 - 6,8 \cdot 9,4}{1,83 \cdot 1,56} = 0,869;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\overline{y \cdot x_2} - \overline{y} \cdot \overline{x}_2}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{44,5 - 6,8 \cdot 6,3}{1,83 \cdot 1,42} = 0,639;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{60,3 - 9,4 \cdot 6,3}{1,56 \cdot 1,42} = 0,488.$$

Їх значення вказують на досить тісний зв'язок змінного видобутку вугілля на одного робітника y з потужністю шару x_1 та на помірний зв'язок з рівнем механізації робіт x_2. У той же час міжфакторний зв'язок $r_{x_1x_2}$ не дуже сильний ($r_{x_1x_2} = 0,49 < 0,7$). Це показує, що обидва фактори є інформативними, тобто необхідно включити до моделі x_1 та x_2.

Визначимо сукупний коефіцієнт кореляції $R_{yx_1x_2}$. Для цього спочатку знайдемо визначник матриці парних коефіцієнтів кореляції

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & 0,87 & 0,64 \\ 0,87 & 1 & 0,49 \\ 0,64 & 0,49 & 1 \end{vmatrix} = 0,139064$$

та визначник матриці міжфакторної кореляції:

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0,49 \\ 0,49 & 1 \end{vmatrix} = 0,7599.$$

Тоді коефіцієнт множинної кореляції визначимо за формулою:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}} = \sqrt{1 - \frac{0,139064}{0,7599}} = 0,904.$$

Можна сказати, що 81,7% (коефіцієнт детермінації $R^2_{yx_1x_2} = 0,817$) варіації результативної ознаки пояснюється варіацією представлених у рівнянні ознак-факторів, що вказує на досить тісний зв'язок ознак з результатом.

Приблизно той самий результат (розходження пов'язані з помилками округлень) дістанемо для коефіцієнта множинної регресії, якщо скористаємося формулами:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{\text{ост}}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{0,6329}{3,36}} = 0,901;$$

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}} = \sqrt{0,728 \cdot 0,87 + 0,285 \cdot 0,64} = 0,903.$$

Скорегований коефіцієнт множинної детермінації

$$\bar{R} = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - \left(1 - 0,817\right) \cdot \frac{10-1}{10-2-1} = 0,765$$

вказує на помірний зв'язок між результатом та ознаками. Це зумовлено малою кількістю спостережень.

Визначимо часткові коефіцієнти кореляції за формулами:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1x_2}}{1 - r^2_{yx_2}}} = \sqrt{1 - \frac{1 - 0,817}{1 - 0,408}} = 0,831;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1x_2}}{1 - r^2_{yx_1}}} = \sqrt{1 - \frac{1 - 0,817}{1 - 0,755}} = 0,503.$$

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}} = \frac{0,869 - 0,639 \cdot 0,488}{\sqrt{\left(1 - 0,489^2\right)\left(1 - 0,639^2\right)}} = 0,830;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_1}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}} = \frac{0,639 - 0,869 \cdot 0,488}{\sqrt{\left(1 - 0,488^2\right)\left(1 - 0,869^2\right)}} = 0,498.$$

Звідси можна зробити висновок, що фактор x_1 надає сильніший вплив на результат, ніж фактор x_2.

Оцінимо надійність рівняння регресії в цілому та показника зв'язку за допомогою F-критерію Фішера. Фактичне значення F-критерію:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,817}{1 - 0,817} \cdot \frac{10-2-1}{2} = 15,63.$$

Табличне значення F-критерію за п'ятивідсотковий рівень значущості ($\alpha = 0,05$, $k_1 = 2$, $k_2 = 10 - 2 - 1 = 7$): $F_{\text{табл}} = 4,74$. Оскільки $F_{\text{факт}} = 15,63 > F_{\text{табл}} = 4,10$, то рівняння визнається статистично значущим.

Оцінимо доцільність включення фактору x_1 після фактору x_2 та x_2 після x_1 за допомогою частки F-критерію Фішера:

$$F_{x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - r^2_{yx_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \left(n - 3\right) = \frac{0,817 - 0,408}{1 - 0,817} \cdot 7 = 15,65;$$

$$F_{x_2} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - r^2_{yx_1}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \left(n - 3\right) = \frac{0,817 - 0,755}{1 - 0,817} \cdot 7 = 2,37.$$

Табличне значення частки F-критерію за п'ятивідсотковий рівень значущості ($\alpha = 0,05$, $k_1 = 1$, $k_2 = 10 - 2 - 1 = 7$): $F_{\text{табл}} = 5,59$. Оскільки

$F_{x_1} = 15,65 > F_{\text{табл}} = 5,59$, а $F_{x_2} = 2,37 < F_{\text{табл}} = 5,59$, то включення фактору x_1 до моделі статистично виправдане, коефіцієнт чистої регресії b_1 є статистично значущим, а додаткове включення фактору x_2, після того, як уже введений фактор x_1, є недоцільним.

Рівняння регресії, що включає тільки один значущий аргумент x_2:

$$\hat{y} = -2,754 + 1,016x_1.$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ЗМ 1.1. Сутність і задачі економіко-математичного моделювання. Оптимізаційні моделі

Тема 1. КОНЦЕПТУАЛЬНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ (2 години)

Економічні моделі. Поняття економічної моделі

Принципи моделювання

Класифікація моделей

Якість моделі

Прийняття рішень (вибір)

Методи прийняття рішень

Література: [1] с. 7-16; [3] с. 4-11; [4] с. 21-33.

Контрольні запитання

1. Чому необхідне використання математики в економіці?
2. Дайте визначення поняттю «модель».
3. Поясніть, що таке моделювання?
4. Поясніть, що таке математична модель?
5. Як будують математичну модель економічного явища або об'єкта? Наведіть приклад побудови й уточнення моделі.
6. Перелічіть і поясніть основні принципи моделювання.
7. Який зв'язок між моделлю і ціллю системи?
8. У чому відмінність статичних моделей від динамічних?
9. Що таке прагматична модель? Наведіть кілька прикладів практичного застосування таких моделей.
10. Дайте визначення ідеальним моделям. Наведіть приклади таких моделей.
11. Перелічіть та охарактеризуйте основні властивості якості моделі.
12. Що таке «адекватна модель»?
13. Дайте визначення поняттям «рішення» і «прийняття рішення».
14. Сформулюйте послідовність процедур, які необхідно виконати для прийняття рішення. Чи можна змінити цю послідовність? Які з процедур можуть виконуватися паралельно?
15. Охарактеризуйте дві частини теорії прийняття рішень і перелічіть

основні завдання, які вони вирішують.

16.Сформулюйте основні постулати теорії прийняття оптимальних рішень.

17.Дайте характеристику основним видам невизначеностей, що виникають у процесі прийняття рішень.

18.Охарактеризуйте основні напрями психологічної теорії прийняття рішень.

19.Перелічіть основні методи прийняття рішень та сформулюйте ситуації, у яких ці методи можуть бути реалізованими.

Тема 2. ПОНЯТТЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ І ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ. КЛАСИФІКАЦІЯ (2 години)

Література: [1] с. 18-28; [2] с. 7-14; [4] с. 21-33.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте особливості оптимізаційних задач.
2. Які загальні етапи розв'язання оптимізаційних задач прийнято виділяти?
3. Чому до оптимізаційних задач не застосовують класичні методи пошуку умовного екстремуму функції?
4. Що являє собою цільова функція оптимізаційної задачі? Яке її призначення?
5. Дайте визначення понять: план, припустимий план, оптимальний план, розв'язок оптимізаційної задачі.
6. На чому заснована класифікація моделей і методів математичного програмування з розв'язання оптимізаційних задач? Які класи моделей і методів виділяють у математичному програмуванні?
7. Поясніть, що є множиною можливих розв'язків задачі математичного програмування?
8. Поясніть, яку область можливих розв'язків задачі математичного програмування називають областю припустимих планів.

Тема 3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (12 годин)

Загальна форма задачі лінійного програмування (ЗЗЛП)

Основні властивості ЗЗЛП та її перша геометрична інтерпретація

Канонічна форма задачі лінійного програмування (КЗЛП)

Симплекс-метод

Література: [1] с. 29-44; [2] с. 18-69; [3] с. 29-55 [4] с. 95-126.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
2. Дайте визначення для наступних понять: план, припустимий план, оптимальний план, розв'язок задачі.
3. Поясніть, чим відрізняється загальна задача лінійного програмування від канонічної?
4. Чи завжди загальну задачу лінійного програмування можна привести до канонічного виду?

5. Яку точка опуклої множини називають кутовою?
6. У чому полягає перша геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування?
7. Який план ЗЛП називають базисним?
8. Як пов'язані базисні плани й кутові точки області визначення задачі лінійного програмування?
9. Який план задачі лінійного програмування називають виродженим?
10. Сформулюйте критерій оптимальності припустимого базисного плану, застосовуваний у симплекс-методі.
11. Сформулюйте основні етапи стандартної ітерації симплекс-методу.
12. Для чого застосовують перетворення Жордана-Гауса?
13. Який елемент симплекс-таблиці називають ведучим?
14. За яки умови роблять висновок про необмеженість цільової функції в розв'язуваній задачі?
15. Чи можна заздалегідь точно визначити кількість ітерацій, що необхідна для розв'язання задачі за симплекс-методом? Чи можна знайти верхню границю для даної величини?
16. Яку задачу називають виродженою? За якими ознаками можна впізнати, що поточний план є виродженим?
17. Поясніть, в чому полягає основна ідея методу збурювань?
18. Для чого призначений метод мінімізації нев'язань? Поясніть сутність цього методу.

Приклад 3.1. На підприємстві є можливість випускати чотири види продукції $П_j$. При її виготовленні використовуються ресурси P_1, P_2 і P_3. Розміри припустимих витрат ресурсів обмежені відповідно величинами 34, 16 і 22 одиниць. Видаток ресурсу P_i ($i=\overline{1,3}$) на одиницю продукції $П_j$ ($j=\overline{1,4}$) заданий матрицею

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Планова ціна одиниці продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ відповідно дорівнює 18, 14, 15, 10 грош.од., а оптова ціна – 25, 17, 19, 12 грош.од. Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє знайти збалансований за ресурсами план випуску продукції, що забезпечує підприємству максимальний прибуток. Симплексним методом знайти оптимальний план випуску продукції за видами, дати змістовну відповідь, розкривши економічний зміст усіх змінних, які беруть участь у розв'язанні задачі.

Розв'язання

Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 кількість одиниць продукції відповідно $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, запланованої до випуску. Прибуток підприємства є різницею між його

доходом і витратами. Визначимо величину прибутку для кожного виробу:

для $П_1$ 25-18=7 грош. од.,
для $П_2$ 17-14=3 грош. од.,
для $П_3$ 19-15=4 грош. од.,
для $П_4$ 12-10=2 грош. од.

Тоді цільова функція виразиться в такий спосіб:

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max.$$

Складемо обмеження, обумовлені видатком ресурсів:

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4\leq 34,$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4\leq 16,$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4\leq 22.$$

За змістом задачі змінні x_1, x_2, x_3, x_4 не можуть виражатися невід'ємними числами. Введемо обмеження

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0.$$

Таким чином, модель задачі формулюється так:

Знайти такі x_1, x_2, x_3, x_4, які перетворюють у максимум цільову функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max.$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4\leq 34,$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4\leq 16,$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4\leq 22,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0.$$

Перш ніж вирішувати задачу лінійного програмування симплексним методом, її модель приводять до канонічної форми. Основною ознакою канонічної форми є запис обмежень задачі у вигляді рівностей. Щоб перетворити нерівності в еквівалентні рівняння, введемо в ліві частини нерівностей додаткові (балансові) невід'ємні змінні x_5, x_6, x_7, які за змістом є різницями між правими й лівими частинами нерівностей. У результаті модель буде записана у вигляді:

знайти такі x_j, які перетворюють на максимум функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max.$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4+ x_5\leq 34,$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4+ x_6\leq 16,$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4+ x_7\leq 22,$$
$$x_j\geq 0.$$

Відзначимо також, що додаткові змінні x_5, x_6, x_7 мають цілком певний економічний зміст – це не використовувана при даному плані виробництва кількість сировини того або іншого виду (можливі залишки ресурсів P_1, P_2, P_3), їх ще називають резервами.

Аналізуючи канонічну модель, зазначимо, що кожна змінна x_5, x_6, x_7 входить тільки в одне з рівнянь системи. Ця обставина свідчить про те, що змінні x_5, x_6, x_7, є базисними, а інші x_1, x_2, x_3, x_4 – вільними.

Складемо симплекс-таблицю, що відповідає початковому опорному плану

x= (0, 0, 0, 0, 34, 16, 22)

при якому цільова функція L = 0.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	34	2	4	1	5	1	0	0
A_6	0	16	4	1	4	1	0	1	0
A_7	0	22	2	3	1	2	0	0	1
L_j		0	0	0	0	0	0	0	0
Δ_j			-7	-3	-4	-2	0	0	0

Оскільки в рядку Δ_j є від'ємні елементи, план не є оптимальним. Перш ніж перейти до нового опорного плану, визначимо, який вектор треба вводити до базису в першу чергу. Для цього визначимо добутки $\Delta_j*\Theta_j$ і виберемо найбільший за абсолютною величиною.

Θ_1 = min(34/2, 16/4, 22/2) = 4

Θ_2 = min(34/4, 16/1, 22/3) = 7,33

Θ_3 = min(34/1, 16/4, 22/1) = 4

Θ_4 = min(34/5, 16/1, 22/2) = 6,8

$\Delta_1*\Theta_1$ = -7*4 = -28, $\Delta_2*\Theta_2$ = -3*7,33 = -22,

$\Delta_3*\Theta_3$ = -4*4 = -16, $\Delta_4*\Theta_4$ = -2*6,8 = -13,6.

Найбільшим за абсолютною величиною є $\Delta_1*\Theta_1$ = -28. Будемо вводити до базису вектор A_1, і виводити з базису вектор A_6.

Складемо нову симплекс-таблицю

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	7	4	1	0,25	1	0,25	0	0,25	0
A_5	0	26	0	3,50	-1	4,50	1	-0,50	0
A_7	0	14	0	2,50	-1	1,50	0	-0,50	1
L_j		28	7	1,75	7	1,75	0	1,75	0
Δ_j			0	-1,25	3	-0,25	0	1,75	0

Отриманий новий опорний план x= (4; 0; 0; 0; 26; 0; 14), при якому цільова функція L = 28, тобто стала більше.

Перевірка плану на оптимальність показує, що в рядку Δ_j є від'ємні елементи, тобто цей план також не є оптимальним. Визначимо, який вектор треба вводити до базису для переходу до нового опорного плану. Знайдемо добутки $\Delta_j*\Theta_j$:

Θ_2 = min(4*4, 26*2/7, 14*2/5) = 5,6

Θ_4 = min(4*4, 26*4/18, 14*4/6) = 5,78;

$\Delta_2*\Theta_2$ = -1,25*5,6 = -7, $\Delta_4*\Theta_4$ = -1/4*5,78 = -1,445. Будемо вводити до базису вектор A_2, а виводити з базису вектор A_7.

Складемо нову симплекс-таблицю

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Отримано новий план x= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L = 35.

Перевірка отриманого плану на оптимальність показує, що всі $\Delta_j \geq 0$, отже план є оптимальним. Відповідно до цього плану треба виготовити 2,6 од. продукції $П_1$ і 5,6 од. продукції $П_2$; продукцію $П_3$ і $П_4$ виготовляти не слід. При цьому підприємство дістане максимальний прибуток в розмірі 35 грош. од. Залишаться невикористаними 6,4 од. ресурсу P_1, а ресурси P_2 і P_3 будуть витрачені повністю.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. Для збереження здоров'я і працездатності людина повинна у добу споживати не менше 20 умовн.од. білків, не менше 40 умовн. од. жирів і не менше 88 умовн. од. вуглеводів. Для простоти припустимо, що є всього два види продуктів $П_1$ і $П_2$, вартість одиниці кожного з них дорівнює відповідно 6 і 10 грош. одиниць. Вміст названих живильних речовин у різних продуктах харчування не однаковий. Припустимо, що в одиниці продукту $П_1$ міститься 4 умовн. од. білків, 4 умовн. од. жирів і 4 умовн. од вуглеводів, а в одиниці продукту $П_2$ відповідно 1, 3 і 15 умовн. од. тих же живильних речовин. Потрібно скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє сформувати з продуктів $П_1$ і $П_2$ добову дієту, що, з однієї сторони, містила б білків, жирів і вуглеводів не менш науково обґрунтованих норм і разом з тим вимагала б мінімальних витрат. Вирішити задачу графічним способом. (Відповідь: $x_1 = 7$, $x_2=4$).

Задача 3.2. Для виробництва трьох видів продуктів $П_1$, $П_2$, $П_3$ використовуються чотири види ресурсів P_1, P_2, P_3, P_4. Добовий видаток ресурсів на 1 одиницю кожного продукту та їх денний запас наведені в таблиці.

Ресурси	**Витрата ресурсу на 1 одиницю продукту**			**Запас, од.**
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	
P_1	1	1,25	0,8	2500
P_2	0,4	0,25	0,5	1000
P_3	1	1,6	1,5	4000
P_4	0,4	0	0	800

Ціна 1 од. продукту $П_1$ становить 58 грош.од., продукту $П_2$ - 40 грош.од.,

продукту $П_3$ - 60 грош.од. Яку кількість продуктів кожного виду необхідно виробляти, щоб дохід від реалізації був максимальним?
(Відповідь: x = (2000; 211,8; 294; 0; 0; 1220; 0), L*=142117,6).

Задача 3.3. За графічним методом визначити оптимальні плани наступних задач лінійного програмування:

а).

$$\min(\max)(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

б).

$$x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в).

$$\min(\max)(x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

г).

$$\min(\max)(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Тема 4. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ І ДВОЇСТІ ОЦІНКИ В АНАЛІЗІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ (12 годин)

Пряма і двоїста задачі як пара сполучених задач ЛП

Основні теореми двоїстості, їх економічний зміст

Двоїсті оцінки і дефіцитність ресурсів

Література: [1] с. 45-50; [2] с. 72-75, 90-105; [3] с. 88-99; [4] с. 141-161.

Контрольні запитання

1. Поясніть сутність подвійності в лінійному програмуванні.
2. Складіть просту економіко-математичну модель і запишіть до неї двоїсту. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.
3. Скільки змінних і обмежень має двоїста задача стосовно прямої задачі?
4. Поясніть економічний зміст першої теореми подвійності.
5. Поясніть економічний зміст другої теореми подвійності.
6. У чому полягає економічний зміст третьої теореми подвійності?
7. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.
8. Як на підставі оптимального розв'язку прямої задачі одержати оптимальний розв'язок двоїстої задачі?

Приклад 4.1. Використовуючи розв'язання прикладу 3.1 і відповідність між двоїстими змінними, знайти компоненти оптимального плану двоїстої задачі – двоїсті оцінки u_i.

Розв'язання

Для складання двоїстої задачі скористуємося умовою прямої задачі та властивостями пари сполучених задач.

Пряма задача була сформульована в такий спосіб: знайти такі x_j, які перетворюють на максимум функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4+ x_5\leq 34$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4+ x_6\leq 16$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4+ x_7\leq 22$$
$$x_j\geq 0.$$

Двоїста задача формулюється в такий спосіб: знайти такі u_1, u_2, u_3, які перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L' = 34u_1+16u_2+22u_3 \to \min$$

і задовольняють обмеженням

$$2u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 7,$$
$$4u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 3,$$
$$u_1 + 4u_2 + u_3 \geq 4,$$
$$5u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 2,$$
$$u_i \geq 0 \ (i = 1,3).$$

З теорем двоїстості виходить, що якщо розв’язано одну з пари двоїстих задач, то одночасно знайдений і розв'язок іншої задачі. Компоненти оптимального плану цієї задачі перебувають у рядку цільової функції останньої симплекс-таблиці розв’язаної задачі. Визначити їх можна, використовуючи відповідність між змінними двоїстих задач. Щоб установити цю відповідність, перетворимо обмеження двоїстої задачі в еквівалентні рівняння, віднімаючи з лівих частин додаткові невід’ємні змінні. Отримаємо:

$$2u_1 + 4u_2 + 2u_3 – u_4 = 7,$$
$$4u_1 + u_2 + 3u_3 – u_5 = 3,$$
$$u_1 + 4u_2 + u_3 - u_6 = 4,$$
$$5u_1 + u_2 + 2u_3 – u_7 = 2,$$
$$u_i \geq 0 \ (i = 1,7).$$

У цьому запису змінні u_4, u_5, u_6, і u_7 є базисними, а u_1, u_2, u_3 – вільними. У прямій задачі змінні x_1, x_2, x_3 і x_4 є вільними , а x_5, x_6, x_7 - базисними. Відповідність встановлюють, зіставляючи базисним змінним однієї задачі вільні змінні іншої і навпаки.

$$\overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4}^{\text{вільні}} \qquad\qquad \overbrace{x_5 \quad x_6 \quad x_7}^{\text{базисні}}$$
$$\Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow$$
$$\underset{\text{базисні}}{u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7} \qquad\qquad \underset{\text{вільні}}{u_1 \quad u_2 \quad u_3}$$

Як бачимо, змінна u_1 зв'язана із змінною x_5 (тому їх називають двоїстими змінними), в останній симплексній таблиці, що містить оптимальний план, x_5 перебуває в базисі, значить двоїста їй змінна u_1 на цьому етапі розрахунків є

вільною і як вільна змінна дорівнює нулю (у будь-якій двоїстій парі завжди одна змінна базисна, а інша – вільна). Отже, u_1 =0. Далі, u_2 відповідає x_6 . Остання симплекс-таблиця має вигляд

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Оптимальний план x= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L = 35.

У цій симплекс-таблиці в стовпці вектора A_6 у рядку L_6 перебуває елемент 1,5, отже u_2= 1,5. У такий же спосіб можна визначити, що u_3= 0,5.
З теорем подвійності також виходить, що значення цільових функцій розв'язаних двоїстих задач рівні між собою, тому L' = 35.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1. Використовуючи розв'язання задачі 3.1 і відповідність між двоїстими змінними, знайти компоненти оптимального плану двоїстої задачі – двоїсті оцінки u_i. (Відповідь: u*=(11,8; 101,18; 0; 14,4)).

Задача 4.2. Для виготовлення виробів A, B, C підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A, B і C, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини			Запас сировини
	A	B	C	
S_1	18	15	12	360
S_2	6	4	8	192
S_3	5	3	3	180
Ціна одного виробу, грн.	9	10	16	

Скласти план виготовлення виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною. Скласти двоїсту задачу й знайти її оптимальний план. (Відповідь: x*=(0; 8; 20; 0; 0; 96), L*=400 грн. u*=(0,22; 1,67; 0)).

Тема 5. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ (10 годин)

Аналіз розв’язків лінійних економіко-математичних моделей

Аналіз параметричної стійкості розв’язків ЗЛП

Оцінка рентабельності виробленої продукції

Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів

Література: [1] с. 51-58; [2] с. 72-75, 90-105; [3] с. 101-116; [4] с. 171-190.

Контрольні запитання

1. У чому полягає економічна інтерпретація прямої й двоїстої задач лінійного програмування?
2. Як визначити, чи є ресурс дефіцитним?
3. Як визначити, що продукція є рентабельною або нерентабельною?
4. У чому полягає економічний зміст змінних двоїстої задачі?
5. Який зміст вкладають у поняття «параметрична стійкість»?
6. Сформулюйте умови для припустимих змін цільової функції задачі, при яких її оптимальний план залишається незмінним.
7. Як визначити статус ресурсів прямої задачі?
8. Як визначити інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів?
9. Як визначити оптимальний план виробництва продукції й зміну доходу підприємства при збільшенні або зменшенні обсягу ресурсів?
10. Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції?

Приклад 5.1. Зробимо аналіз оптимальних планів задачі, отриманих у прикладі 4.1. Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план, має вигляд:

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		B_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Оптимальний план x*= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L* = 35.

Оптимальний план двоїстої задачі u*=(0; 1,5; 0,5).

Розв'язання

З останньої симплекс-таблиці прямої задачі маємо:

x* = (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), max L = 35;

u*=(0; 1,5; 0,5)

min L' = 35 = max L.

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво тільки двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ у кількості відповідно 2,6 і 5,6 од. Випуск продукції $П_3$ і $П_4$ не передбачається ($x_3 = x_4 = 0$). Додаткові змінні x_5, x_6, x_7 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно P_1, P_2 і P_3. Оскільки x_5 = 6,4, перший ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а другий і третій ресурси - повністю ($x_6 = x_7 = 0$). При такому оптимальному плані виробництва продукції і використанні ресурсів підприємство отримує найбільший прибуток у розмірі 35 грош. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, використовуваних у виробництві. Так, u_2= 1,5 і u_3 = 0,5 відмінні від нуля, а

ресурси P_2 і P_3 використовуються цілком. Двоїста оцінка $u_1 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість всіх ресурсів, використовуваних на підприємстві: min L' = 35 грош. од.

Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший - підстановкою x* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як строга рівність, то відповідний ресурс є дефіцитним, у противному разі - недефіцитним.

2*2,6+4*5,6+1*0+5*0 = 27,6 <34 (ресурс 1 недефіцитний);
4*2,6+1*5,6+4*0+1*0 = 16 (ресурс 2 дефіцитний);
2*2,6+3*5,6+1*0+2*0 = 22 (ресурс 3 дефіцитний).

Другий спосіб - за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс є дефіцитним, а якщо відмінна від нуля - ресурс недефіцитний.

Третій спосіб - за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $u_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів і-го ресурсу приводить до відповідної зміни прибутку підприємства, тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $u_i = 0$, то й ресурс недефіцитний. Так,

u_1=0 (ресурс 1 недефіцитний);
u_2 = 1,5 (ресурс 2 дефіцитний);
u_3 = 0,5 (ресурс 3 дефіцитний).

Таким чином, якщо запас другого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю (b_2 = 16 + 1 = 17), то цільова функція max L збільшиться при інших незмінних умовах на u_2 = 1,5 грош. од. і буде дорівнювати max L = 36,5 грош.од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться прибуток підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпця «A_6» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці u_2 = 1,5. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_1 збільшиться на 0,3, змінної x_2 - зменшиться на 0,2, а витрати сировини P_2 зростуть на 0,2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

x* = (2,9; 5,4; 0; 0; 6,6; 0; 0).

Таким чином, збільшення запасу другого дефіцитного ресурсу при інших незмінних умовах спричинить зростання випуску продукції $П_1$ і зниження виробництва продукції $П_2$, а обсяг використання ресурсу P_1 збільшиться. При такому плані виробництва максимальний прибуток підприємства буде

max L= 7*2,9 + 3*5,4 + 4*0 + 2*0 = 36,5,

тобто зросте на u_2 = 1,5.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу P_3, при інших незмінних умовах, збільшити на одну умовну одиницю (b_3 = 22 + 1 = 23). Аналогічно міркуючи, скористаємося елементами стовпчика «A_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці u_3 = 0,5. Запишемо новий оптимальний план:

x* = (2,5; 6; 0; 0; 5; 0; 0),

$$\max L^* = 7*2,5 + 3*6 + 4*0 + 2*0 = 35,5.$$

Таким чином, прибуток підприємства збільшиться на 0,5 грошових одиниць за рахунок збільшення виробництва продукції $П_2$ на 0,4 одиниці й зменшення випуску продукції $П_1$ на 0,1 одиниці. При цьому обсяг використання ресурсу P_1 зменшиться на 1,4 од.

У результаті проведеного аналізу виникає питання, чи будуть зберігатися встановлені співвідношення, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а, наприклад, на 10 од.? Щоб однозначно відповісти на це запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки u_i, залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу P_2 позначимо Δb_2. Тоді якщо $b'_2 = b_2 + +\Delta b_2$, то новий оптимальний план

$$x^* = (2,6+0,3\Delta b_2;\ 5,6-0,2\Delta b_2;\ 0;\ 0;\ 6,4+0,2\Delta b_2;\ 0;\ 0).$$

Єдина вимога, яку можна висунути до нових оптимальних значень, - це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 2,6+0,3\Delta b_2 \ge 0 \\ 5,6-0,2\Delta b_2 \ge 0 \\ 6,4+0,2\Delta b_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_2 \ge -8,67 \\ \Delta b_2 \le 28 \\ \Delta b_2 \ge -32 \end{cases}$$

$$-8,67 \le \Delta b_2 \le 28.$$

Це означає, що коли запас ресурсу P_2 збільшиться на 28 од. або зменшиться на 8,67 од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу P_2 залишиться
$u_2 = 1,5$. Таким чином, запас ресурсу P_2 може змінюватися в межах

$$16-8,67 \le b_2+\Delta b_2 \le 16 + 28,$$

$$7,33 \le b_2 \le 44.$$

Відповідно до цього максимально можливий прибуток підприємства буде перебувати в межах

$$35-8,67*0,3 \le L_{max} \le 35 + 28*0,2,$$

$$32,4 \le L_{max} \le 40,6.$$

Аналогічно розраховують інтервал стійкості двоїстої оцінки $u_3 = 1,5$ дефіцитного ресурсу P_3:

$$\begin{cases} 2,6-0,1\Delta b_3 \ge 0 \\ 5,6+0,4\Delta b_3 \ge 0 \\ 6,4-1,4\Delta b_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \le 26 \\ \Delta b_3 \ge -14 \\ \Delta b_3 \le 4,57 \end{cases}$$

$$-14 \le \Delta b_3 \le 4,57.$$

$$8 \le b_3 \le 26,57.$$

Таким чином, якщо запас ресурсу P_3 збільшиться на 4,57 од. або зменшиться на 14 од., то двоїста оцінка $u_3 = 1,5$ цього ресурсу залишиться оптимальною.

Зазначимо, що вказані інтервали стосуються тільки випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто при інших незмінних умовах. У випадку одночасної зміни обсягів всіх або декількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

Оцінку рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконують шляхом аналізу двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі, що характеризують кожен вид продукції.

Підставимо u* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як строга рівність, то продукція рентабельна:

$2*0 + 4*1,5 + 2*0,5 = 7$ (продукція $П_1$ рентабельна);

$4*0 + 1*1,5 + 3*0,5 = 3$ (продукція $П_2$ рентабельна);

$1*0 + 4*1,5 + 1*0,5 = 6,5 > 4$ (продукція $П_3$ нерентабельна);

$5*0 + 1,5 + 2*0,5 = 2,5 > 2$ (продукція $П_4$ нерентабельна).

Аналогічні результати можна отримати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $u_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розташовуються в індексному рядку останньої симплекс-таблиці в стовпцях «A_1»-«A_4». Їхні оптимальні значення $u_4 = 0$; $u_5 = 0$; $u_6 = 2,5$; $u_7 = 0,5$. Тому продукція $П_3$ і $П_4$ нерентабельна, а продукція $П_1$ і $П_2$ - рентабельна.

Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися або зменшуватися). Тому завжди цікаво знати, в межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається той же самий:

$$x^* = (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0).$$

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємося тим, що при цьому симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів індексного рядка. Нові оцінки $(L_i - C_i)$ повинні задовольняти умові оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта c_3 позначимо Δc_3. Оскільки x_3 - небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка L_3-c_3:

$(L_3 - c_3) = 3 * (-0,4) + 7 * 1,1 + 0 * 0,4 - (4 + \Delta c_3) = 2,5 - \Delta c_3$.

За умови $L_3 - c_3 \geq 0$ одержимо нерівність $2,5 - \Delta c_3 \geq 0$, тобто $\Delta c_3 \leq 2,5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції $П_3$, при інших незмінних умовах, зросте не більше ніж на 2,5 грош. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві залишиться $x^* = (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0)$. Тільки максимальний прибуток зміниться на max $\Delta L = \Delta c_3 x_3$.

Аналогічно розраховуємо інтервал зміни коефіцієнта Δc_4:

$$(L_4 - c_4) = 3 * 0,6 + 7 * 0,1 + 0 * 2,4 - (2 + \Delta c_4) = 0,5 - \Delta c_4;$$

$$\Delta c_4 \leq 0,5.$$

З ростом ціни одиниці продукції $П_4$ на 0,5 грош. од., при інших незмінних умовах, оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а max

$\Delta L = \Delta c_4 x_4$.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1. Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат всіх ресурсів на одиницю продукції і запаси ресурсів наведені в таблиці:

Ресурс	**Норма витрат на одиницю продукції**			**Запас ресурсу**
	А	**В**	**С**	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: А - 9 грош.од., В – 10 грош.од. і С - 16 грош.од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиця даної задачі має вигляд:

Базис	$Cj_{баз}$	C_j	***9***	***10***	***16***	***0***	***0***	***0***
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
A_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
A_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
	Lj	400	14	10	16	2/9	5/3	0
	Δj		0	0	10	2/9	*5/3*	*0*

Записати математичні моделі прямої і двоїстої задач; записати оптимальні плани прямої і двоїстої задач, виконати їх економічний аналіз; визначити статус ресурсів, використовуваних для виробництва продукції, і рентабельність кожного виду продукції; обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів; розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

Задача 5.2. Підприємство виготовляє продукцію А, В і С, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат всіх ресурсів на одиницю продукції і обсяги ресурсів на підприємстві наведені в таблиці:

Ресурс	**Норма витрат на одиницю продукції**			**Запас ресурсу**
	А	В	С	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: А - 10 грош.од.,

В – 14 грош.од. і С - 12 грош.од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план, має вигляд:

Базис	$Cj_{баз}$	***Cj***	***10***	***14***	***12***	***0***	***0***	***0***
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
A_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
A_3	12	16	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4
	Lj	1340	97/4	14	12	23/4	0	5/4
	Δj		57/4	0	0	23/4	*0*	*5/4*

Записати математичні моделі прямої і двоїстої задач; записати оптимальні плани прямої і двоїстої задач, виконати їхній економічний аналіз; визначити статус ресурсів, використовуваних для виробництва продукції, і рентабельність кожного виду продукції; обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів; розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

Задача 5.3. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів А, В, С і D, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції і запаси ресурсів на підприємстві приведені в таблиці:

Ресурс	**Норма витрат на одиницю продукції**				**Запас ресурсу**
	A	**B**	**C**	**D**	
1	2	1	1	1	280
2	1	—	1	1	80
3	1	5	1	—	250

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: А – 4 грош.од., В – 3 грош.од., С - 6 грош.од., D - 7 грош.од. Визначити план виробництва продукції, що максимізує дохід підприємства.

Остання симплекс-таблиця має вигляд:

Базис	$Cj_{баз}$	***Cj***	***4***	***3***	***6***	***7***	***0***	***0***	***0***
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	150	4/5	0	-1/5	0	1	-1	-1/5
A_4	7	80	1	0	1	1	0	1	0
A_2	3	50	1/5	1	1/5	0	0	0	1/5
	Lj	710	38/5	3	38/5	7	0	7	3/5
	Δj		18/5	0	8/5	0	*0*	*7*	*3/5*

Записати математичні моделі прямої і двоїстої задач; записати оптимальні плани прямої і двоїстої задач, виконати їхній економічний аналіз; визначити статус ресурсів, використовуваних для виробництва продукції, і рентабельність кожного виду продукції; обчислити інтервали стійкості двоїстих

оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів; розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

Тема 6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА (10 годин)

Транспортна задача в матричній постановці та її властивості

Методи побудови опорного плану

Метод потенціалів

Випадок виродження

Транспортна задача за критерієм часу

Література: [1] с. 59-70; [2] с. 118-138; [3] с. 134-169; [4] с. 193-216.

Контрольні запитання

1. Які специфічні властивості дозволяють виділити транспортні задачі в окремий клас з множини задач лінійного програмування?
2. Опишіть методи побудови припустимого плану транспортної задачі.
3. Скільки ненульових елементів повинен містити невироджений базисний план транспортної задачі?
4. Сформулюйте критерій оптимальності для припустимого плану транспортної задачі.
5. Поясніть, на чому заснований метод потенціалів?
6. З чого випливає критерій оптимальності припустимого плану транспортної задачі?
7. Перелічіть основні етапи методу потенціалів.
8. Які умови повинні бути дотримані при побудові ланцюжка перетворення плану за методом потенціалів?
9. Як подолати виникнення ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?

Приклад 6.1. На ділянках $У_1$, $У_2$, $У_3$ площею 300, 500 і 400 га відповідно можуть вирощуватися сільськогосподарські культури $К_1$, $К_2$, $К_3$ і $К_4$. Планове завдання передбачає збір цих культур у кількостях відповідно по 6000, 1500, 225 і 1250 тонн. Матриця

$$\begin{bmatrix} 20 & 50 & 24 & 10 \\ 25 & 40 & 10 & 20 \\ 30 & 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}$$

характеризує прибуток у грош.од. від реалізації 1 тонни при вирощуванні на ділянці $У_i$ (i=1,3) культури $К_j$ (j=1,4). Урожайність різних культур не залежить від ділянки посіву й становить 20, 30, 15 і 50 ц/га. Скласти економіко-математичну модель задачі, користуючись якою можна знайти план посіву сільськогосподарських культур, який максимізує прибуток. Методом потенціалів знайти такий розподіл культур $К_1$, $К_2$, $К_3$ і $К_4$ за ділянками $У_1$, $У_2$ і $У_3$, при якому прибуток досягає найбільшого значення. Знайти оптимальний розподіл культур за ділянками при додатковій умові, що в майбутньому році використання ділянки $У_3$ під культуру $К_1$ агрономічною службою не рекомендовано. Встановити, на скільки зміниться величина максимального

прибутку при дотриманні додаткового обмеження.

Розв'язання

Позначимо x_{ij} площу (у га), що передбачається зайняти на ділянці $У_i$ (i=1,3) культурою $К_j$ (j=1,4). З урахуванням урожайності культур для виконання планового завдання під культуру $К_1$ треба відвести 6000/20=300 га, під культура $К_2$ – 15000/30=500 га, під культуру $К_3$ – 2250/15=150 га й під культуру $К_4$ – 12500/50=250 га. Усього буде потрібно 300+500+150+250=1200 га. Загальна посівна площа також становить 300+500+400=1200 га.

Умови повного використання наявних посівних площ на всіх ділянках занесемо в таблицю:

Площа ділянки $У_i$	**Площа, займана під культуру $К_j$**			
	$К_1$ (300)	**$К_2$ (500)**	**$К_3$ (150)**	**$К_4$ (250)**
$У_1$ (300)	20 x_{11}	50 x_{12}	24 x_{13}	10 x_{14}
$У_2$ (500)	25 x_{21}	40 x_{22}	10 x_{23}	20 x_{24}
$У_3$ (400)	30 x_{31}	15 x_{32}	20 x_{33}	15 x_{34}

Отримаємо обмеження з використання посівних площ:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=500,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=400$$

та умови повної зайнятості площ відповідними культурами

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=300,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=500,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=150,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=250,$$

умови невід’ємності змінних

$$x_{ij} \geq 0, \ (i=1,3; \ j=1,4).$$

Цільова функція задачі має вигляд

$$L = 20x_{11}+50x_{12}+24x_{13}+10x_{14}+25x_{21}+40x_{22}+$$
$$+10x_{23}+20x_{24}+30x_{31}+15x_{32}+20x_{33}+15x_{34} \rightarrow \max.$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження розв'язання системи лінійних рівнянь, яке доставляє максимум цільової функції.

Аналізуючи систему рівнянь, зазначимо, що вона має всі особливості транспортної задачі. Отже її можна розв’язати, наприклад, методом потенціалів. Оскільки в розглянутому випадку має місце задача максимізації, ознакою оптимального плану буде відсутність у заключній таблиці вільних кліток з додатними оцінками.

Побудуємо початковий опорний план за методом найбільшого елемента

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20	50 300	24	10
$У_2$ (500)	25 300 -	40 200	10	20 +
$У_3$ (400)	30 0 +	15	20 150	15 250 -¢

Для дослідження плану на оптимальність треба знайти оцінки вільних кліток. Для цього слід знайти потенціали U_i і V_j, які визначаються в результаті вирішення системи рівнянь, складених по зайнятих клітках:

$$U_1 + V_2 = 50,$$
$$U_2 + V_1 = 25,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_3 = 20,$$
$$U_3 + V_4 = 15.$$

Отримаємо:

$V_1=30$

$U_1 =5$ $V_2 =45$

$U_2 =-5$ $V_3 =20$

$U_3 =0$ $V_4 =15$

Тепер знайдемо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = з_{11} – (U_1 + V_1) = 20-(5+30) = -15,$$
$$\Delta_{13} = з_{13} – (U_1 + V_3) = 24-(5+20) = -1,$$
$$\Delta_{14} = з_{14} – (U_1 + V_4) = 10-(5+15) = -10,$$
$$\Delta_{23} = з_{23} – (U_2 + V_3) = 10-(-5+20) = -5,$$
$$\Delta_{24} = з_{24} – (U_2 + V_4) = 20-(-5+15) = 10,$$
$$\Delta_{32} = з_{32} – (U_3 + V_2) = 15-(0+45) = -30.$$

Оскільки серед оцінок є додатна (Δ_{24} = 10), план не оптимальний і його можна поліпшити, займаючи клітку ($У_2$,$К_4$). Щоб визначити, яку площу x_{24} треба відвести в новому опорному плані на ділянці $У_2$ під культуру $К_4$, побудуємо замкнутий контур для клітки ($У_2$,$К_4$) і визначимо $\lambda=\min(x_{ij})=\min(300, 250)=250$.

Додаючи λ в «додатних» клітках і віднімаючи у «від'ємних», отримуємо новий опорний план:

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20	50 300	24	10
$У_2$ (500)	25 50	40 200	10	20 250
$У_3$ (400)	30 250	15	20 150	15

Перевіримо план на оптимальність. Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_2 = 50,$$

$$U_2 + V_1 = 25,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_2 + V_4 = 20,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_3 = 20.$$

Звідки отримаємо:

$V_1=25$

$U_1 =10$ $V_2 =40$

$U_2 =0$ $V_3 =15$

$U_3 =5$ $V_4 =20.$

Визначимо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = з_{11} – (U_1 + V_1) = 20-(10+25) = -15$$
$$\Delta_{13} = з_{13} – (U_1 + V_3) = 24-(10+15) = -1$$
$$\Delta_{14} = з_{14} – (U_1 + V_4) = 10-(10+20) = -20$$
$$\Delta_{23} = з_{23} – (U_2 + V_3) = 10-(0+15) = -5$$
$$\Delta_{32} = з_{32} – (U_3 + V_2) = 15-(5+40) = -30$$
$$\Delta_{34} = з_{34} – (U_3 + V_4) = 15-(5+20) = -10.$$

Оцінки всіх вільних кліток від'ємні, отже отриманий план оптимальний. Розмір прибутку при реалізації оптимального плану посіву складе

$$L = 50*30*300+25*20*50+40*30*200+20*50*250+$$
$$+30*20*250+20*15*150 =1160000грн.$$

Щоб визначити оптимальний план посіву без використання ділянки $У_1$ під культуру $К_2$, звільнимо клітку ($У_1$, $К_2$). Для цього умовно занизимо показник критерію оптимальності в цій клітці, наприклад, до значення мінус 100 (від'ємний прибуток), щоб цю клітку займати було невигідно. Замість культури $К_2$ на ділянці $У_1$ розмістимо культури $К_3$ і $К_4$, а під $К_2$ відведемо ділянку $У_2$, а на ділянці $У_3$ залишаться культури $К_1$ і $К_3$.

Площа ділянки $У_i$	**Площа, займана під культуру $К_j$**			
	$К_1$ (300)	**$К_2$ (500)**	**$К_3$ (150)**	**$К_4$ (250)**
$У_1$ (300)	20	-100	24 50 +	10 250 --
$У_2$ (500)	25	40 500	10	20
$У_3$ (400)	30 300	15 0	20 100 --	15 +

Перевіримо оптимальність отриманого плану. Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_3 = 24,$$
$$U_1 + V_4 = 10,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_3 = 20,$$

$$U_3 + V_2 = 15.$$

Звідки отримаємо:

$$V_1=30$$

$$U_1 =4 \qquad V_2 =15$$

$$U_2 =25 \qquad V_3 =20$$

$$U_3 =0 \qquad V_4 =6.$$

Визначимо оцінки вільних кліток

$$\Delta_{11} = з_{11} – (U_1 + V_1) = 20-(4+30) = -14,$$
$$\Delta_{12} = з_{12} – (U_1 + V_2) = -100-(4+25) = -129,$$
$$\Delta_{21} = з_{21} – (U_2 + V_1) = 25-(25+30) = -30,$$
$$\Delta_{23} = з_{23} – (U_2 + V_3) = 10-(25+20) = -35,$$
$$\Delta_{24} = з_{24} – (U_2 + V_4) = 20-(25+6) = -11,$$
$$\Delta_{34} = з_{34} – (U_3 + V_4) = 15-(0+6) = 9.$$

План не оптимальний, оскільки оцінка вільної клітки ($У_3$, $К_4$) додатна $\Delta_{34}= 9$.

Поліпшимо його, помістивши в клітку ($У_3$, $К_4$) ненульову компоненту і визначимо $\lambda=\min(x_{ij})=\min(100, 250)=100$. Отримаємо новий план і визначимо його оптимальність.

Площа ділянки $У_i$	**Площа, займана під культуру $К_i$**			
	$К_1$ (300)	**$К_2$ (500)**	**$К_3$ (150)**	**$К_4$ (250)**
$У_1$ (300)	20	-100	24 150+	10 150-
$У_2$ (500)	25	40 500	10	20
$У_3$ (400)	30 300	15 0	20	15 100

Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_3 = 24,$$
$$U_1 + V_4 = 10,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_2 = 15,$$
$$U_3 + V_4 = 15.$$

Звідки отримаємо:

$$V_1=25$$

$$U_1 =0 \qquad V_2 =10$$

$$U_2 =30 \qquad V_3 =24$$

$$U_3 =5 \qquad V_4 =10.$$

Визначимо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = з_{11} – (U_1 + V_1) = 20-(0+25) = -5,$$

$\Delta_{12} = з_{12} – (U_1 + V_2) = -100-(0+10) = -110,$
$\Delta_{21} = з_{21} – (U_2 + V_1) = 25-(30+25) = -30,$
$\Delta_{23} = з_{23} – (U_2 + V_3) = 10-(30+24) = -44,$
$\Delta_{24} = з_{24} – (U_2 + V_4) = 20-(30+10) = -20,$
$\Delta_{33} = з_{33} – (U_3 + V_3) = 20-(5+24) = -9.$

Оскільки всі оцінки вільних кліток від'ємні, план є оптимальним. Відповідно до цього плану на ділянці $У_1$ треба 150 га відвести під культуру $К_3$ і 150 га під культуру $К_4$; ділянка $У_2$ повністю зайнята культурою $К_2$, а на ділянці $У_3$ на 300 га розмістити культуру $К_1$ і на 100 га культуру $К_4$. При цьому максимальний прибуток становитиме

L = 24*15*150+10*50*150+40*30*500+30*20*300+15*50*100 =984000грн.

Додаткове обмеження на посів культури $К_2$ скоротило прибуток на

1160000-984000 = 176000 грн.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. На ділянках $В_1$, $В_2$, $В_3$ і $В_4$ при спорудженні метрополітену необхідно виконати грабарства в обсягах відповідно 5, 8, 10 і 2 тис. $м^3$ з використанням взаємозамінних механізмів $М_1$, $М_2$ і $М_3$. Ресурси часу роботи механізмів відповідно дорівнюють 170, 210 і 120 годин, а їхня продуктивність залежно від гірничо-геологічних умов на ділянках і конструкції механізмів виражається величинами 50, 35 і 20 $м^3$/год відповідно. Собівартість робіт у грош. од. /$м^3$ механізмів на ділянках наведена у матриці

$$\begin{bmatrix} 1{,}8 & 0{,}7 & 2{,}1 & 1{,}9 \\ 0{,}8 & 1{,}1 & 2{,}3 & 0{,}7 \\ 1{,}5 & 2{,}8 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє знайти план розподілу механізмів за ділянками робіт, при якому загальна вартість робіт буде найменшою. За методом потенціалів знайти такий розподіл механізмів за ділянками, при якому сумарна вартість виконаних робіт буде мінімальною. Знайти оптимальний розподіл механізмів по дільницях робіт при додатковій умові, що на пусковій ділянці $В_3$ грабарства повинні бути виконані в повному обсязі. Встановити, наскільки зміниться вартість робіт при виконанні цієї вимоги.

Задача 6.2. Передбачено штрафи за недопоставку одиниці продукції споживачам $В_1$, $В_2$, $В_3$ у розмірі відповідно 5, 3 і 2 грош.од. Визначити оптимальний план ТЗ:

$$\begin{matrix} a_i = (10; 80; 15) \\ b_j = (75; 20; 50) \end{matrix}; \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.3. Розв'язати транспортну задачу

$$\begin{matrix} a_i = (80; 40; 60; 40) \\ b_j = (70; 60; 80) \end{matrix}; \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

якщо вартість збереження одиниці продукції, що не вивезена, у постачальників A_1, A_2, A_3, A_4 дорівнює відповідно 5, 4, 2 і 3 грош.од.

Задача 6.4. Розв'язати транспортну задачу:

$$\begin{matrix} a_i = (75; 40; 35; 40) \\ b_j = (20; 60; 140) \end{matrix}; \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

якщо штрафи за недопоставку продукції споживачам B_1, B_2, B_3 складають відповідно 6, 4 і 8 грош.од.

Тема 7. ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ І АНАЛІЗУ (8 годин)

Типи задач дискретного програмування

Метод Гоморі

Метод віток і границь

Література: [1] с. 71-78; [2] с. 152-171; [3] 175-186; 214-221; [4] с. 397-417, 422-428, 432-437.

Контрольні запитання

1. Які основні проблеми виникають при розв'язанні дискретних задач?
2. Сформулюйте задачу про ранець.
3. Які економіко-математичні моделі можна звести до задачі про комівояжера?
4. Наведіть приклади моделей з розривними цільовими функціями.
5. Який принцип використовують для побудови правильного відсікання в методі Гоморі?
6. Яку роль відіграє алгоритм двоїстого симплекс-методу при розв'язанні цілочислової лінійної задачі за методом Гоморі?
7. Перелічіть принципові ідеї, що лежать в основі методу віток і границь.
8. Як провадиться побудова відсікання при розв'язанні цілочислової лінійної задачі за методом віток і границь?
9. Опишіть схему розв'язання цілочислової задачі лінійного програмування за методом віток і границь.
10. За рахунок яких перетворень вдається побудувати сполучений базис при додаванні відсікаючого обмеження?

Приклад 7.1. На придбання обладнання для нової виробничої ділянки виділено 15 грош. од. Підприємство може замовити машини типу А вартістю 3 грош. од., що випускають 1 од. продукції за зміну; і машини типу В вартістю 2 грош. од., що забезпечують випуск 2 од. продукції за зміну. Причому число

придбаних машин В не повинне перевищувати 5 штук. Потрібно скласти економіко-математичну модель, користуючись якою, можна знайти план придбання машин, що враховує можливості підприємства й забезпечує найвищу продуктивність нової ділянки. Користуючись одним з методів цілочислового програмування, знайти оптимальний план придбання обладнання.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 машин А и x_2 машин В. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти наступним нерівностям:

$$3x_1+2x_2\leq 15$$
$$x_2\leq 5.$$

Якщо підприємство придбає зазначену кількість обладнання, то продуктивність нової ділянки складе:

$$L= x_1+2x_2 \rightarrow \max.$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть приймати тільки цілі невід'ємні значення, тобто

$$x_1, x_2 \geq 0,$$
$$x_1, x_2 – \text{цілі}.$$

Таким чином, математична модель задачі матиме вигляд:

знайти таке рішення $x=(x_1, x_2)$, що перетворює на максимум цільову функцію

$$L= x_1+2x_2 \rightarrow \max$$

і задовольняє обмеженням

$$3x_1+2x_2\leq 15$$
$$208x_1+505x_2\leq 5200$$
$$x_1, x_2 \geq 0,$$
$$x_1, x_2 – \text{цілі}.$$

Оскільки невідомі можуть приймати тільки цілі значення, задача є задачею цілочисельного програмування. Оскільки число змінних дорівнює двом, для розв'язання задачі можна використати її геометричну інтерпретацію. Для цього побудуємо багатокутник рішень (рис. 6.1).

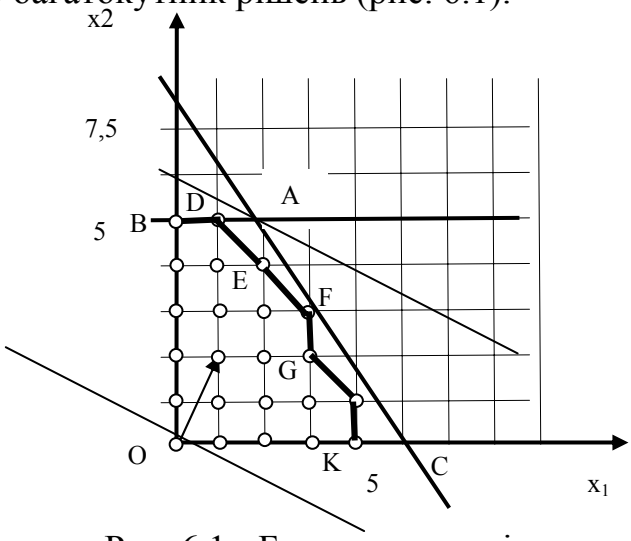

Рис. 6.1 - Багатокутник рішень

Обмеженням задачі задовольняють всі точки отриманого багатокутника OBAC, а умовам цілочисельності – тільки точки, показані кружками. Щоб знайти точку, координати якої є рішенням задачі, замінимо багатокутник OBAC багатокутником OBDEFGHK, що містить всі припустимі точки із цілочисельними координатами й таким, що координати кожної з вершин є цілими числами. Для визначення вершини, що містить оптимальний план, побудуємо вектор c=(1;2) і пряму $x_1+2x_2=0$. Пересуваючи побудовану пряму в напрямку, зазначеному вектором, визначимо, що останньою точкою, яка з'єднує її з багатокутником OBDEFGHK, є його вершина з координатами x=(1; 5).

Вирішимо задачу симплексним методом не з огляду на вимогу цілочисельності. Для цього приведемо її до канонічного вигляду:

$$L= x_1+2x_2 \to \max$$
$$3x_1+2x_2 +x_3 = 15$$
$$x_2 + x_4 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Очевидно, що опорним планом є план

$$x = (0, 0, 15, 5).$$

Заповнимо симплекс-таблицю

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**1**	**2**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	15	3	2	1	0
A_4	0	5	0	1	0	1
L_j		0	0	0	0	0
Δ_j			-1	-2	0	0

Зроблена оцінка оптимальності плану показує, що план не є оптимальним. Перейдемо до нового базису. Очевидно, що вводити до базису треба в першу чергу вектор A_2, виводити з базису при цьому необхідно вектор A_4. Складемо нову симплекс-таблицю. Помножимо головний рядок нової таблиці на -2 і додаємо до рядку вектору A_3, результат записуємо в рядок вектора A_3 нової таблиці.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**1**	**2**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	2	5	0	1	0	1
A_3	0	5	3	0	1	-2
L_j		10	0	2	0	2
Δ_j			-1	0	0	2

Новий опорний план x = (0; 5; 5; 0). Перевіривши його на оптимальність, переконуємося, що цей план також не є оптимальним, його необхідно поліпшити. Перейдемо до чергового опорного плану. Для цього введемо до базису вектор A_1, виводити з базису будемо вектор A_3. Заповнимо чергову симплекс-таблицю.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3
A_2	2	5	0	1	0	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3
Δ_j			0	0	1/3	4/3

Отримали новий опорний план x = (5/3; 5; 0; 0). Всі розраховані значення симплекс-різниць додатні або дорівнюють нулю, отже отриманий план є оптимальним. Але він не задовольняє умові цілочисельності змінних x_1 і x_2. Для змінної x_1, що має дробову частину, складаємо додаткове обмеження, користуючись останньою симплекс-таблицею:

$$x_1 + 1/3x_3 – 2/3x_4 \geq 5,3.$$

До системи обмежень додамо нерівність

$$f(1)\, x_1 + f(1/3)x_3 + f(–2/3)x_4 \geq f(5/3),$$

$$1/3x_3 + 1/3x_4 \geq 2/3.$$

Введемо невід’ємну змінну x_5 і складемо рівняння:

$$1/3x_3 +1/3x_4 -x_5 = 2/3.$$

Складемо нову симплекс-таблицю з новою умовою, доповнивши таблицю, що містить оптимальний план, новим рядком:

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3	0
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	-2/3	0	0	-1/3	-1/3	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3	0
Δ_j			0	0	1/3	4/3	0

Треба пам'ятати, що після включення в систему обмежень додаткового рівняння, яке відповідає правильному відсіканню, завжди буде утворюватися неприпустиме базисне рішення. Для одержання припустимого базисного рішення потрібно перевести в базисні змінні одну з вільних змінних (x_3 або x_4). Нехай це буде x_3. Введемо до базису вектор A_3. Для цього помножимо рядок A_5 на (-3) і результат запишемо в рядок A_3. Головний рядок нової таблиці помножимо на (-1/3) і додамо до першого рядку попередньої таблиці. Результат запишемо в рядок A_1. Потім цей же рядок помножимо на 0,069 і додамо до другого рядку попередньої таблиці, результат запишемо в рядок A_2. Потім помножимо головний рядок на (-1/3) і додамо до другого рядку попередньої таблиці.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1	1	0	0	-1	1
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	2	0	0	1	1	-3
L_j		11	1	2	0	1	1
Δ_j			0	0	0	1	1

Отримано план x = (1; 5; 0; 0; 2). Дослідження плану на оптимальність показує, що він є оптимальним, при цьому отримали цілочисельне рішення.

Таким чином, підприємству треба придбати одну машину А і п'ять машин типу В. При цьому продуктивність нової ділянки буде максимальною і складе 11 одиниць продукції.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1. Для виконання робіт P_1, P_2 і P_3 сільськогосподарське підприємство може придбати трактори марок А і Б вартістю 4 і 3 грош.од. кожний. З використанням нової техніки необхідно виконати не менше 2020 умовн.од. роботи P_1, не менше 104 умовн.од. роботи P_2 і не менше 20 умовн.од. роботи P_3. За розглянутий проміжок часу з використанням трактора марки А можна виконати 404 умовн.од. роботи P_1, 8 умовн.од. роботи P_2 або 1 умовн.од. роботи P_3. З використанням трактора марки Б можна виконати 105 умовн.од. роботи P_1, 10 умовн.од. роботи P_2 або 4 умовн.од. роботи P_3. Скласти економіко-математичну модель, що дозволяє знайти такий варіант придбання тракторів тієї чи іншої марки, при якому будуть виконані всі необхідні роботи, а витрати на нову техніку будуть мінімальними. Користуючись одним з методів цілочисельного лінійного програмування, знайти оптимальний варіант придбання тракторів.

Задача 7.2. Підприємство випускає вироби А і В, при виготовленні яких використовується сировина C_1 і C_2. Відомі запаси сировини (b_1= 7, b_2 = 10), норми витрати на одиницю виробу А сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 1 од. На одиницю продукції В сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 2 од. Оптові ціни виробу А – 12 од., виробу В – 11 од., планова собівартість виробу А – 9 од., В – 10 од. Як тільки обсяг випуску продукції перестане відповідати оптимальним розмірам підприємства, подальше збільшення випуску x_j приводить до підвищення вартості продукції і в першому наближенні фактична собівартість c_j описується функцією

$$c_j = c_j^0 + c_j^{'} x_j ,$$

де c_j’ - деяка постійна величина. При пошуку плану випуску виробів, що забезпечує підприємству найвищий прибуток в умовах порушення балансу між обсягом випуску й оптимальних розмірів підприємства цільова функція набуває вигляд

$$f = (p_1 - (c_1^0 + c_1^{'} x_1)) * x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2^{'} x_2)) * x_2 ,$$

а обмеження за видами сировини мають вигляд

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \ . \\ &x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Скласти економіко-математичну модель задачі. Графічним методом вирішити отриману задачу й сформулювати відповідь в економічних термінах відповідно до умов задачі.

Задача 7.3. За методом Гоморі розв’язати задачі цілочисельного

програмування:

а)

$$Z = x_1 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

б)

$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

в)

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_2 \le 13 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

г)

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

Задача 7.4. За методом віток і границь розв'язати задачу цілочисельного програмування:

а)

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 16 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

б)

$$Z = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \le 32 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

в)

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

г)

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 3x_1 + 9x_2 \le 27 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - цілі \end{cases}$$

Тема 8. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ І АНАЛІЗУ (8 годин)

Постановка задачі нелінійного програмування (ЗНП)

Класичний метод оптимізації з використанням множників Лагранжа

Опукле програмування

Необхідні й достатні умови існування сідлової точки. Теорема Куна-Таккера

Деякі методи розв'язання задач НЛП

Література: [1], с. 79-93; [2], с. 187-195; [3], с. 251-279; [4], с. 797-804.

Контрольні запитання

1. За яких умов оптимізаційну задачу можна віднести до класу нелінійних?
2. Наведіть приклад економічної моделі, що зводиться до задачі нелінійного програмування.
3. Перелічіть основні труднощі, що виникають у процесі розв'язання задачі нелінійного програмування.
4. Який зміст вкладають в поняття «умовна оптимізація»?
5. Для чого призначений метод множників Лагранжа й у чому він полягає?

6. Яку точку множини розв’язків називають стаціонарною?
7. Які принципові етапи належать до градієнтних методів?
8. Поясніть, для розв’язання яких задач призначений метод найскорішого спуску й метод дроблення кроку?
9. Дайте визначення опуклої (увігнутої) функції.
10. Сформулюйте достатню умову опуклості (увігнутості) функції.
11. У чому полягає специфіка задач опуклого програмування?
12. Дайте визначення сідлової точки. Наведіть приклад функції, що має сідлову точку.
13. Сформулюйте необхідну й достатню умови теореми Куна-Таккера. Яке значення вони мають для розв’язання задач нелінійного програмування?
14. У чому полягає умова регулярності Слейтера? Поясніть її зміст.
15. Наведіть приклад пари двоїстих задач нелінійного програмування.
16. Які властивості пари нелінійних двоїстих задач можна застосувати для їх розв’язання?

Приклад 8.1. Знайти умовний екстремум функції F=xy за умови

$$g(x, y) = x + y - 2 = 0 \text{ для } x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Розв'язання

Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y+x-2).$$

Для відшукання передбачуваного екстремуму вирішимо систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y + x - 2 = 0.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, знаходимо y - x = 0. З третього рівняння визначаємо y + x = 1. Підставивши y = x в останню формулу, остаточно одержимо x*= 1 і y* = 1. З урахуванням цих результатів з першого або другого рівнянь знаходимо λ* = -1. Значення функції в точці екстремуму

$$F^*=x^*y^* = 1*1 = 1.$$

Умови прикладу подані на рис. 8.1.

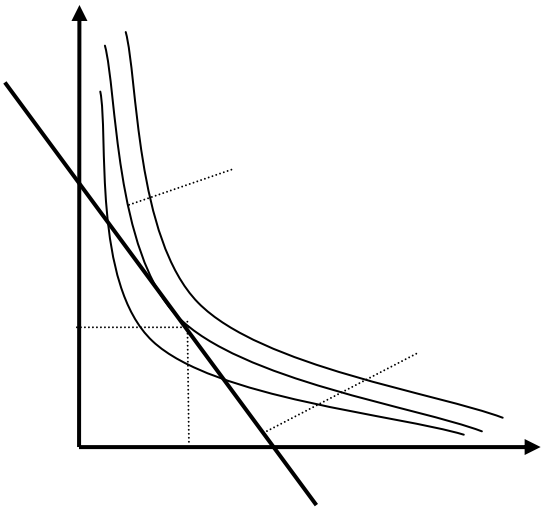

Рис. 8.1 - Умови прикладу

Лінія рівня, що проходить через точку передбачуваного екстремуму, описується рівнянням xy=1. Всі лінії рівня, що лежать нижче лінії xy=1, мають рівень менше 1, а що лежать вище лінії рівня xy=1, мають рівень більше 1. Це випливає з рівняння ліній рівнів y = k/x, де k - значення рівня. Ясно, що чим більше k, тим правіше проходить крива. Функція, обумовлена умовою g(xy)=y+x-2=0, є прямою лінією y=2-x. Через симетрію задачі функції xy=1 і g(xy)=y+x-2=0 торкаються одна одної в точці передбачуваного екстремуму (з координатами (1,1)). Із сказаного випливає, що на прямій y=2-x значення функції u=xy менше одиниці скрізь, крім точки передбачуваного екстремуму. Таким чином, у цій точці має місце максимум.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Використовуючи метод Лагранжа, відшукати умовний екстремум функції

$$F = x_1 x_2 + x_3$$

за умови

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Задача 8.2. Знайти графічним методом максимум і мінімум функції:

$$F = x+2y$$

за умови

$$x^2 + y^2 \leq 4,$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Задача 8.3. За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму.

а). $\begin{array}{l} F = 2x_1^2 + x_2^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{array}$ б). $\begin{array}{l} F = x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \end{array}$ в). $\begin{array}{l} F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{array}$

г). $\begin{array}{l} F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{array}$ д). $\begin{array}{l} F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{array}$ є). $\begin{array}{l} F = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 = 12 \end{array}$

Задача 8.4. На виробництво трьох видів продукції A, B і C витрачають матеріальні, трудові й фінансові ресурси. Норми витрат на одиницю продукції, сумарний запас, а також розмір прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежить від обсягу виробництва (в умовних одиницях), відбиває таблиця

Ресурси	**Продукція**			**Запас ресурсів**
	A	**B**	**C**	
Матеріальні	4	5	7	100
Трудові	3	6	8	120
Фінансові	2	1	4	75
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2+2x_2$	$3x_3^2+6$	
Обсяг виробництва	X_1	X_2	X_3	

Попит на продукцію видів В і С відомий і становить 12 і 8 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, якщо ресурси потрібно використати повністю. Знайти оцінки ресурсів і подати економічний аналіз оптимального плану.

ЗМ.1.2. Аналіз та управління ризиком в економіці

Тема 9. ПОНЯТТЯ ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ. КЛАСИФІКАЦІЯ, МЕТОДИ ОЦІНКИ І УПРАВЛІННЯ (6 годин)

Поняття економічного ризику

Класифікація ризиків

Методи оцінки економічних ризиків

Управління ризиками

Література: [1], с. 95-106; [6], с. 7-24; [7], с. 81-84.

Контрольні запитання

1. У чому полягає роль ризику підприємництва у ринкових умовах?
2. Якими факторами зумовлене виникнення ризикової ситуації?
3. Поясніть, у чому полягає зв'язок ризику й прибутку?
4. Чим зумовлена складність класифікації ризиків?
5. Які ризики належать до чистих ризиків і які до спекулятивних?
6. Як класифікують ризики за сферою виникнення?
7. Як відрізняють припустимий, критичний і катастрофічний ризики?
8. Охарактеризуйте поняття «невизначеність».
9. Який математичний апарат використовують для якісної та кількісної оцінки ризику?
10. На яких двох параметрах ґрунтується теоретичний спосіб економічної оцінки ризику?

Тема 10. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ Й РИЗИКУ (12 годин)

Система невизначеностей

Основні поняття теорії ігор

Змішані стратегії. Основна теорема теорії ігор

Зведення гри двох гравців до задачі лінійного програмування

Література: [1], с. 107-115; [7], с. 84-98.

Контрольні запитання

1. Коротко сформулюйте предмет теорії ігор як наукової дисципліни.
2. Який зміст вкладається в поняття «гра»?
3. Для опису яких економічних ситуацій може бути застосований апарат теорії ігор?
4. Яка гра називається антагоністичною?
5. Чим однозначно визначаються матричні ігри?
6. У чому полягають принципи максиміна й мінімакса?
7. За яких умов можна говорити про те, що гра має сідлову точку?
8. Наведіть приклади ігор, які мають сідлову точку й у яких вона

відсутня.

9. Які підходи існують до визначення оптимальних стратегій?
10. Що називають «ціною гри»?
11. Дайте визначення поняттю «змішана стратегія».
12. Сформулюйте основну теорему матричних ігор.

Приклад 10.1. Дві компанії А і В продають два види товарів. Компанія А рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) і в газетах (A_3). Компанія В, на додаток до використання радіо (B_1), телебачення (B_2) і газет (B_3), розсилає також брошури поштою (B_4). Залежно від уміння й інтенсивності проведення рекламної кампанії кожна з компаній може залучити на свою сторону частину клієнтів конкуруючої компанії. Наведена нижче матриця характеризує відсоток клієнтів, притягнутих або загублених компанією А.

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Мінімуми рядків**
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	-2	4	-9	5	-9
Максимуми стовпців	8	5	9	8	

Розв'язання

Вирішення гри засноване на забезпеченні найкращого результату з найгірших кожного гравця. Якщо компанія А вибирає стратегію A_1, то незалежно від того, що робить компанія В, найгіршим результатом є втрата компанією А 3% ринку на користь компанії В. Це визначається мінімумом елементів першого рядка матриці платежів. Аналогічно при виборі стратегії A_2 найгіршим результатом для компанії А є збільшення ринку на 5 % за рахунок компанії В. Нарешті, найгіршим результатом при виборі стратегії A_3 є втрата компанією А 9% ринку на користь компанії В. Ці результати містяться в стовпці «Мінімуми рядків». Щоб досягти найкращого результату з найгірших, компанія А вибирає стратегію A_2, тому що вона відповідає найбільшому елементові стовпця «Мінімуми рядків».

Розглянемо тепер стратегії компанії В. Оскільки елементи матриці є платежами компанії А, критерій найкращого результату з найгірших для компанії В відповідає вибору мінімаксного значення. У результаті доходимо висновку, що вибором компанії В є стратегія B_2.

Оптимальним рішенням у грі є вибір стратегій A_2 і B_2, тобто обом компаніям треба проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь компанії А, тому що її ринок збільшиться на 5 %. У цьому разі говорять, що ціна гри дорівнює 5% і що компанії А і В використовують стратегії, що відповідають сідловій точці.

Рішення, що відповідає сідловій точці, гарантує, що ні однієї компанії немає рації намагатися вибрати іншу стратегію. Дійсно, якщо компанія В переходить до іншої стратегії (B_1, B_3 або B_4), то компанія А може зберегти свій

вибір стратегії A_2, що приведе до більшої втрати ринку компанією В (6 або 8 %). За тими ж причинами компанії А немає резону використовувати іншу стратегію, тому що коли вона візьме, наприклад, стратегію A_3, то компанія В може використати свою стратегію B_3 і збільшити свій ринок на 9 %. Аналогічні висновки мають місце, якщо компанія А буде використовувати стратегію A_1.

Оптимальне рішення гри, що відповідає сідловій точці, не обов'язково повинне характеризуватися чистими стратегіями. Замість цього оптимальне рішення може вимагати змішування випадковим чином двох або більше стратегій.

Приклад 10.2. Розв’язати гру 2х4, у якій платежі сплачуються гравцеві А.

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

Для розв’язання скористатися графічним методом.

Розв'язання

Гра не має розв’язку у чистих стратегіях, тому стратегії повинні бути змішаними. Очікуваний виграш гравця А, відповідний j-ї чистої стратегії гравця В, визначають за формулою

$$(a_{1j}-a_{2j})p_1+a_{2j}, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Очікувані виграші гравця А, відповідні чистим стратегіям гравця В, запишемо у таблицю

Чисті стратегії гравця В	**Очікувані виграші гравця А**
1	$-2p_1+4$
2	$-p_1+3$
3	p_1+2
4	$-7p_1+6$

Відповідно до чотирьох стратегій гравця В побудуємо чотири прямі лінії (рис. 10.1).

Максимінну точку визначаємо як найбільший виграш нижньої огинаючої, якому відповідає точка перетину прямих 3 і 4. Визначимо імовірність p_1:

$$p_1+2=-7p_1+6;\ p_1=0,5.$$

Визначимо ціну гри:

$$v=\begin{cases} 0,5+2=2,5-з \quad рівняння \quad прямої \quad 3 \\ -7*0,5+6=2,5-з \quad рівняння \quad прямої \quad 4 \end{cases}$$

Оптимальним рішенням для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з ймовірностями 0,5 і 0,5. Оптимальна змішана стратегія гравця В визначається двома стратегіями, що визначають нижню огинаючу графіка, тобто стратегіями B_3 і B_4. Виходячи з цього, запишемо очікувані платежі гравця В, відповідні чистим стратегіям гравця А:

Чисті стратегії гравця А	Очікувані платежі гравця В
1	$4q_3$-1
2	-$4q_3$+6

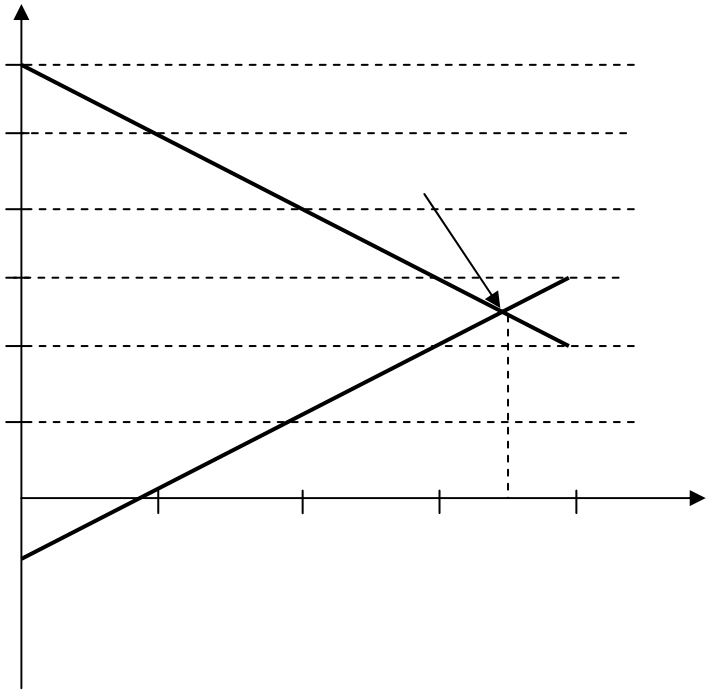

Рис. 10.1 – Визначення точки максиміна

Відповідно до двох стратегій гравця А побудуємо прямі лінії (рис. 10.2).

Мінімакс для гравця В визначаємо як найменший програш верхньої огинаючої, якому відповідає точка перетину прямих. Знайдемо імовірність q_3:

$$4q_3-1=-4q_3+6; \qquad q_3=7/8.$$

Визначимо ціну гри:

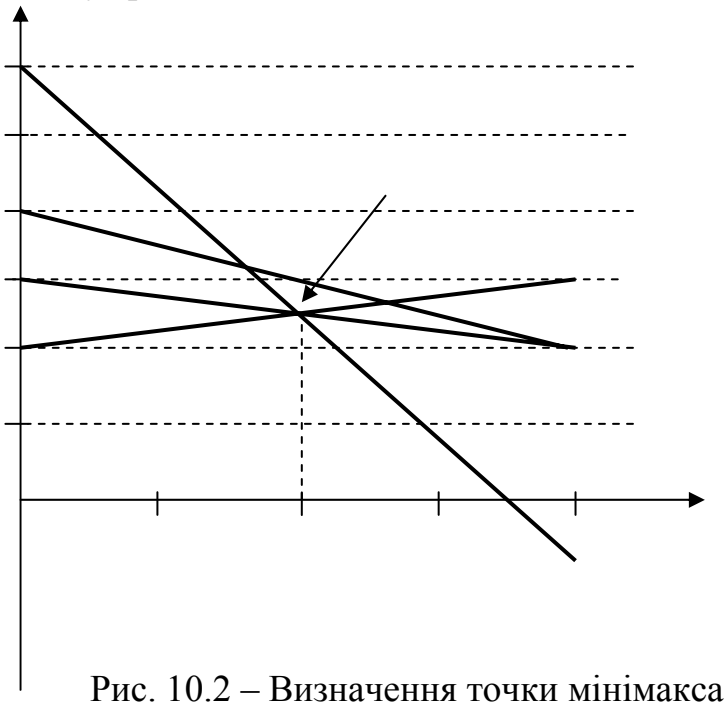

Рис. 10.2 – Визначення точки мінімакса

$$v = \begin{cases} 4 * \frac{7}{8} - 1 = 2{,}5 \\ -4 * \frac{7}{8} + 6 = 2{,}5 \end{cases}.$$

Таким чином, рішення гри для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з рівними ймовірностями 0,5 і 0,5, а для гравця В - змішування стратегій B_3 і B_4 з ймовірностями 7/8 і 1/8.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 10.1. Знайти рішення, зумовлене сідловою точкою, що відповідає чистій стратегії, і ціну гри для наступних ігор, в яких платежі задані для гравця А.

а)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

б)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	-4	-5	6
A_2	-3	-4	-9	-2
A_3	6	7	-8	-9
A_4	7	3	-9	5

Задача 10.2. Розв'язати графічно гру, в якій платежі сплачуються гравцеві А.

а)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	3	4	-3	-2
A_2	2	5	1	4	1

б)

	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	1
A_3	3	7
A_4	4	6
A_5	9	2

в)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	3	2	-4	8
A_2	2	1	4	5	3

г)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4
A_1	2	4	0	3	5
A_2	6	3	8	4	2
A_3	1	3	-2	2	4

Тема 11. КРИТЕРІЇ ОПТИМАЛЬНОСТІ В УМОВАХ ПОВНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ (8 годин)

Критерій гарантованого результату

Критерій оптимізму

Критерій песимізму

Критерій мінімаксного ризику Севіджа

Критерій узагальненого максиміна Гурвіца

Порівняльна оцінка варіантів рішень залежно від критеріїв ефективності

Література: [1], с. 116-125; [7], с. 117-133.

Контрольні запитання

1. У яких випадках для розв'язання ризикової ситуації використовують спеціальні критерії?
2. Поясніть, в чому полягає сутність критерію Вальда? Як він формулюється у разі пошуку мінімуму витрат?
3. Поясніть, в чому полягає сутність критеріїв оптимізму і песимізму? Як формулюються ці критерії у разі пошуку мінімуму витрат?
4. Поясніть, в чому полягає сутність критерію Севіджа?
5. Поясніть, в чому полягає сутність критерію Гурвіца?
6. Як на практиці відбирають розглянуті критерії?
7. У яких випадках використовують інтегральний критерій оптимальності? Поясніть його сутність.
8. Множину яких операцій називають множиною оптимальності за Парето?

Приклад 11.1. За умовами контракту можливі два варіанти дій, що ведуть до різних результатів (табл. 11.1).

Таблиця 11.1 - Варіанти дій

Варіанти		**Виграші, їх ймовірності та корисності**				$M(x)$	$\sigma(x)$	$K_{VAR}(x)$	$M(U(x))$
1	**Величина виграшів**	– 20	0	10	40	12	21,35	1,78	0,44
	Імовірність виграшів	0,2	0,1	0,4	0,3				
	Корисність виграшів	0	0,2	0,3	1				

Продовження табл. 11.1

Варіанти		Виграші, їх ймовірності та корисності				$M(x)$	$\sigma(x)$	$K_{VAR}(x)$	$M(U(x))$
2	**Величина виграшів**	– 10	10	20	40	12	14	1,17	0,36
	Імовірність виграшів	0,2	0,4	0,3	0,1				
	Корисність виграшів	0,1	0,3	0,4	1				

Проранжирувати ці дії, заповнивши таблицю за математичним сподіванням, середньоквадратичним відхиленням; коефіцієнтом варіації; очікуваною корисністю, побудувати функцію корисності на відрізку [– 20; 40].

Розв'язання

Нехай функції корисності (ризикова поведінка) мають вигляд, наведений у табл. 11.2.

Таблиця 11.2 - Табличне значення функції корисності

x	– 20	– 10	0	10	20	40
$U(x)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	1

Обчислимо очікувані корисності:

$$M(U(x)) = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 1 = 0{,}44;$$

$$M(U(x)) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}36.$$

Отже, за математичним сподіванням контракти рівносильні, за середньоквадратичним відхиленням та коефіцієнтом варіації вигіднішим є другий варіант. Проте відповідно до принципу Неймана-Моргенштерна особі, яка приймає рішення, треба обрати перший контракт, тому що він має більшу очікувану корисність.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 11.1. Відділ маркетингу пропонує компанії дані про очікуваний попит на програмні продукти за трьох варіантів ціни (табл. 4.12).

Таблиця 11.3 - Попит на програмні продукти, тис. грн

Очікуваний обсяг продажу	**Можлива ціна за одиницю, грн**		
	8,00	**8,60**	**8,80**
Найкращий з можливого	16 000	14 000	12 500
Найбільш імовірний	14 000	12 500	12 000
Найгірший з можливого	10 000	8000	6000

Імовірність найкращого та найгіршого попиту - 0,25. Постійні витрати на виробництво - 40 000 грн. на рік, змінні витрати - 4 грн за одиницю.

Побудуйте платіжну матрицю доходів та визначте, за якою ціною доцільно випускати продукцію компанією за допомогою таких критеріїв як математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення та коефіцієнт варіації; критерії Байєса, Вальда, Лапласа, Севіджа та Гурвіца.

Якщо людина, яка приймає рішення про випуск продукції, має таку шкалу корисності доходу, то який варіант вона обере? Розрахуйте її премію за ризик.

Корисність доходу	0	10	20	35	60	100
Прибуток, тис. грн	0	5	10	15	20	25

Задача 11.2. Адміністрація театру вирішує, скільки потрібно замовити програмок для вистав. Вартість замовлення 200 грн плюс 0,3 грн за одиницю. Програмки продаються по 0,6 грн. за одиницю. Дохід від реклами становить додатково 300 грн. З минулого досвіду відвідування театру є дані:

Відвідування, осіб	4000	4500	5000	5500	6000
Імовірність	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Очікується, що 40 % відвідувачів купують програмки. Побудуйте платіжну матрицю доходів та визначте, яку кількість програмок необхідно замовити театру за допомогою таких критеріїв як математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення і коефіцієнт варіації. Зробіть висновок щодо кількості програмок, що випускається, використовуючи критерії Байєса, Вальда, Лапласа, Севіджа та Гурвіца.

Якщо людина, яка приймає рішення про випуск програмок, має таку шкалу корисності доходу, то який варіант вона обере? Розрахуйте її премію за ризик.

Корисність доходу	0	10	20	35	60	100
Прибуток, тис. грн	400	500	600	700	800	900

Тема 12. СИСТЕМА ПОКАЗНИКІВ КІЛЬКІСНОЇ ОЦІНКИ СТУПЕНЯ РИЗИКУ (8 годин)

Імовірнісна оцінка ризику

Статистичні оцінки показників ризику

Аналіз ризиків господарських операцій на підставі нормального розподілу

Крива ризиків

Оцінка ризиків за допомогою довірчих інтервалів

Вибір розподілу випадкової величини

Імітаційне моделювання

Література: [1], с. 125-139; [7], с. 155-221.
Контрольні запитання

1. В чому полягає якісний аналіз ризику і в чому кількісний? Охарактеризуйте різницю.
2. Чим відрізняються методи кількісної оцінки ризику на підставі теорії імовірностей і на підставі математичної статистики?
3. Поясніть, як середнє квадратичне відхилення σ використовують для оцінки ризику?
4. Поясніть, як використовують для оцінки ризику коефіцієнт асиметрії і ексцес?
5. Які переваги дає припущення про нормальний розподіл варіативної ознаки?
6. Поясніть, для чого використовують серединне відхилення і як воно пов'язане з середнім квадратичним відхиленням?
7. Які зони ризику розрізняють на кривій ризику? До якого закону розподілу належать ці зони?
8. В чому полягає принцип недостатнього обґрунтування Лапласа?
9. Для чого використовують метод імітаційного моделювання? У чому відмінність безперервних і дискретних імітаційних моделей?
10. Для чого призначений метод зворотних функцій? Поясніть суть методу.
11. Для чого призначений метод згорток? Поясніть суть методу.
12. Яка відмінність між прийняттям рішень в умовах визначеності, в умовах невизначеності й в умовах ризику?

ЗМ 1.3. Економетричні моделі

Тема 13. ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ (8 годин)

Роль економетричних досліджень в економіці
Етапи економетричного моделювання
Класифікація економетричних моделей

Література: [1], с. 140-146; [10], с. 6-23.
Контрольні запитання

1. З якою метою проводять економетричні дослідження?
2. Поясніть складові загальної економетричної моделі.
3. Охарактеризуйте етапи економетричного моделювання.
4. Поясніть відмінність між ендогенними і екзогенними змінними.
5. У чому полягає ідентифікація і верифікація економетричної моделі?
6. Поясніть терміни «регресія», «умовне математичне сподівання» і «збурення».
7. Які класи моделей використовують для аналізу або прогнозу в економетрії?
8. Якими властивостями повинна володіти регресійна модель з одним рівнянням, побудована на основі просторової вибірки?

9. Поясніть терміни «гомоскедастичність» і «гетероскедастичність».
10. Яку вибірку спостережень називають часовим рядом?
11. Які економетричні моделі належать до систем одночасних рівнянь?

Тема 14. МЕТОДИ ПОБУДОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ (16 годин)

Побудова загальної лінійної моделі

Лінійна модель парної регресії. Суть методу найменших квадратів

Оцінка значущості рівняння лінійної регресії та перевірка моделі на адекватність за критеріями Стьюдента і Фішера

Лінійна модель множинної регресії

Оцінка значущості множинної регресії і показники якості моделі

Література: [1], с. 147-168; [10], с. 50-80.

Контрольні запитання

1. Поясніть терміни «рівняння регресії» і «функція регресії».
2. Які помилки належать до помилок специфікації? До помилок виміру?
3. На яких підставах вибирають вид регресійної залежності?
4. Як розраховують залишкову дисперсію? Загальну дисперсію ознаки *y*?
5. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
6. Якими властивостями повинна володіти лінійна модель, щоб оцінки її параметрів мали найменшу дисперсію в класі всіх лінійних незміщених оцінок?
7. Поясніть, що таке коефіцієнт регресії? Коефіцієнт кореляції? Коефіцієнт детермінації?
8. Як визначають статистичну значущість рівняння регресії в цілому?
9. З якою метою визначають стандартну помилку коефіцієнта регресії? Який критерій для цього використовують?
10. Як визначають довірчий інтервал для коефіцієнта регресії?
11. З якою метою і як визначають значущість лінійного коефіцієнта кореляції?
12. У якому випадку використовують лінійну модель множинної регресії?
13. Що таке коефіцієнти «чистої» регресії? Який в них економічний зміст?
14. У якому випадку використовують стандартизовані коефіцієнти регресії?
15. Що характеризують показник множинної кореляції і показник детермінації?
16. Що таке лінійний коефіцієнт множинної кореляції і скорегований індекс множинної кореляції?
17. Для чого розраховують часткові коефіцієнти кореляції?
18. Як оцінюють значущість рівняння множинної регресії в цілому та значущість коефіцієнтів чистої регресії?
19. Поясніть, у чому полягає процедура відбору факторів при побудові рівняння регресії методом виключення?

Приклад 14.1. Визначити залежність між змінним видобутком вугілля Y (т) на одного робітника і потужністю пласта вугілля X (м). Вихідні дані наведено у таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
y_i	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Знайти рівняння регресії Y за X.

Розв'язання

Обчислимо необхідні суми:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 8+11+12+9+8+8+9+9+8+12 = 94;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 8^2+11^2+12^2+9^2+8^2+8^2+9^2+9^2+8^2+12^2 = 908;$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 5+10+10+7+5+6+6+5+6+8 = 68;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 8\cdot 5+11\cdot 10+12\cdot 10+9\cdot 7+8\cdot 5+8\cdot 6+9\cdot 6+9\cdot 5+8\cdot 6+12\cdot 8 = 664;$$

Обчислимо вибіркові характеристики та параметри рівняння регресії:

$$\overline{x} = 94/10 = 9{,}4\ м;\ \overline{y} = 68/10 = 6{,}8\ т.$$

$$s_x^2 = 908/10 - 9{,}4^2 = 2{,}44;$$

$$K(X,Y) = 664/10 - 9{,}4\cdot 6{,}8 = 2{,}48;\ b_1 = 2{,}48/2{,}44 = 1{,}016.$$

Отримаємо рівняння регресії

$$\hat{y} - 6{,}8 = 1{,}016(x - 9{,}4) \text{ або } \hat{y} = 2{,}75 + 1{,}016x.$$

З одержаного рівняння випливає, що при збільшенні потужності пласта на 1 м видобуток вугілля на одного робітника збільшується в середньому на 1,016 т. Відзначимо, що вільний член в даному рівнянні регресії не має реального смислу.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 14.1. Є наступні дані про рівень механізації робіт X(%) та продуктивності праці Y (т/год) для 14 однотипних підприємств:

x_i	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
y_i	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Необхідно:

а) оцінити тісноту і напрям зв'язку між змінними за допомогою коефіцієнта кореляції;

б) знайти рівняння регресії K за x.

Задача 14.2. За результатом досліджень кореляційної залежності між ціною на нафту X та індексом нафтових компаній Y одержані наступні дані:

x =16,2 (грош.од), y = 4000 (умовн. од) s_x^2 =4, s_y^2 =500, Cov(X,Y)=40.

Необхідно:

а) скласти рівняння регресії Y за X;

б) використовуючи рівняння регресії, знайти середнє значення індексу при ціні на нафту 16,5 грош. од.

Задача 14.3. За даними задачі 14.1:

а) знайти рівняння регресії Y за X;

б) знайти коефіцієнт детермінації R^2 і пояснити його смисл;

в) перевірити значущість рівняння регресії на 5%-му рівні за F-критерєм;

г) оцінити середню продуктивність праці на підприємствах з рівнем механізації робіт 60% таі по будувати для неї 95%-ий довірчий інтервал; аналогічний довірчий інтервал знайти для індивідуальних значень продуктивності праці на тих самих підприємствах.

Задача 14.4.. За даними 30 нафтових компаній одержано наступне рівняння регресії між оцінкою Y (грош. од.) та фактичною вартістю X (грош. од.) цих компаній: $y_x = 0{,}8750x + 295$. Знайти: 95%-ві довірчі інтервали для середнього та індивідуального значень оцінки підприємств, фактична вартість яких склала 1300 грош. од., якщо коефіцієнт кореляції між змінними дорівнює 0,76, а середнє квадратичне відхилення змінної X дорівнює 270 грош. од.

Тема 15. МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ ТА ЇЇ ВПЛИВ НА ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ (14 годин)

Поняття мультиколінеарності. Вплив мультиколінеарності на оцінки параметрів

Методи виключення мультиколінеарності

Література: [1], с. 169-175; [10], с. 108-114.

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття мультиколінеарності та у яких формах вона може проявлятися?
2. Які критерії використовують для визначення наявності або відсутності мультиколінеарності?
3. Охарактеризуйте методи, використовувані для усунення або зменшення мультиколінеарності.
4. Поясніть, у чому полягають наслідки включення до моделі мультиколінеарних факторів.
5. Як для оцінки мультиколінеарності факторів використовують визначник матриці парних коефіцієнтів кореляції між факторами?
6. Поясніть алгоритм покрокових процедур відбору найбільш інформативних змінних.

Приклад 15.1. Для дослідження залежності між продуктивністю праці (X_1), віком (X_2) і виробничим стажем (X_3) була проведена вибірка з 100 робітників тієї самої спеціальності. Обчислені парні коефіцієнти кореляції виявилися значущими і склали: $r_{12}=0{,}20$; $r_{13}=0{,}41$; $r_{23}=0{,}82$. Обчислити часткові

коефіцієнти кореляції та оцінити їх значущість на рівні α=0,05.

Розв'язання

Часткові коефіцієнти кореляції обчислюють формулою

$$r_{ijk} = \frac{r_{ij} - r_{ik} r_{jk}}{\sqrt{\left(1 - r_{ik}^2\right)\left(1 - r_{jk}^2\right)}}, \; r_{123} = \frac{0{,}2^2 - 0{,}41 \cdot 0{,}82}{\sqrt{(1 - 0{,}41)^2 (1 - 0{,}82)^2}} = -0{,}26 .$$

аналогічно отримаємо r_{132}=0,44; r_{231}=0,83.

Оцінимо значущість r_{123}. Значення статистики t-критерію за формулою при n'=n-p+ 2= 100-3+2=99 (за абсолютною величиною)

$$|r_1| = \frac{|-0{,}26|\sqrt{99-2}}{\sqrt{1-(-0{,}26)^2}} = 2{,}65$$

більше за табличне t0,95;97=1,99), отже, частковий коефіцієнт кореляції r_{123} є значущим. Аналогічно встановлюється значущість інших часткових коефіцієнтів кореляції.

Порівнюючи часткові коефіцієнти кореляції r_{ijk} з відповідними парними коефіцієнтами, бачимо, що за рахунок «очищення зв'язку» найбільшій зміні піддався коефіцієнт кореляції між продуктивністю праці (X_1) і віком (X_2) робітників (змінилося не тільки його значення, але і знак r_{12}=0,20; r_{123}=-0,26, причому обидва ці коефіцієнти є значущими).

Отже, між продуктивністю праці (X_1) і віком (X_2) робітників існує прямий кореляційний зв'язок (r_{12}=0,20). Якщо ж усунути (елімінірувати) вплив змінної «виробничий стаж» (X_3), то в чистому вигляді продуктивність праці (X_1) знаходиться у зворотному за напрямом (і слабкому за тіснотою) зв'язку з віком робітників (X_2) (r_{123}=-0,26). Це цілком зрозуміло, якщо розглядати вік тільки як показник працездатності організму на певному етапі його життєдіяльності. Так само можуть бути інтерпретовані й інші часткові коефіцієнти кореляції.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 15.1. Є наступні дані про споживання певного продукту Y (умовн. од.) залежно від рівня урбанізації (частки міського населення) X_1, відносного освітнього рівня X_2 і відносного заробітку X_3 для дев'яти географічних районів:

i (номер району)	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	y_i
1	42,2	11,2	31,9	167,1
2	48,6	10,6	13,2	174,4
3	42,6	10,6	28,7	160,8
4	39,0	10,4	26,1	162,0
5	34,7	9,3	30,1	140,8
6	44,5	10,8	8,5	174,6
7	39,1	10,7	24,3	163,7

8	40,1	10,0	18,6	174,5
9	45,9	12,0	20,4	185,7
Середні	41,85	10,62	24,42	167,07

Стандартні відхилення s_{x1} = 4,176; s_{x2} = 0,7463; s_{x3} = 7,928; s_y=12,645. Кореляційна матриця має вигляд:

	X_1	X_2	X_3	Y
X_1	1	0,684	-0,616	0,802
X_2	0,684 -	1	-0,173	0,770
X_3	0,616	-0,173	1	-0,629
Y	0,802	0,770	-0,629	1

Використовуючи покрокову процедуру відбору найбільш інформативних пояснюючих змінних, визначити відповідну регресійну модель, виключивши при цьому мультиколінеарність. Оцінити значущість коефіцієнтів регресії одержаної моделі за t-критерієм.

Задача 15.2. Є наступні дані про вагу Y (у фунтах) та вік X (у тижнях) 13 індичок, вирощених в областях A, B, C.

i	x_i	y_i	Область походження
1	28	12,3	A
2	20	8,9	A
3	32	15,1	A
4	22	10,4	A
5	29	13,1	B
6	27	12,4	B
7	28	13,2	B
8	26	11,8	B
9	21	11,5	C
10	27	14,2	C
11	29	15,4	C
12	23	13,1	C
13	25	13,8	C

Є підстава вважати, що на вагу індичок робить вплив не тільки їх вік, але й область походження. Необхідно:

а) знайти рівняння парної регресії Y за X та оцінити його значущість;

б) ввівши відповідні фіктивні змінні, знайти загальне рівняння множинної регресії за всіма пояснюючими змінними (включаючи фіктивні);

в) оцінити значущість загального рівняння множинної регресії за F-

критерієм та значущість його коефіцієнтів за t-критерієм на рівні α=0,05;

г) простежити за зміною корегованого коефіцієнта детермінації при переході від парної до множинної регресії;

д) оцінити на рівні α=0,05 значущість відмінності між вільними членами рівнянь, що одержуються із загального рівняння множинної регресії Y для кожної області.

Задача 15.3. Під час побудови лінійної залежності витрат на одяг від доходу за вибіркою для 10 жінок одержані наступні суми квадратів та добутків спостережень:

$$\sum_1^{10} x_i = 110,\ \sum_1^{10} x_i^2 = 1540,\ \sum_1^{10} y_i = 60,\ \sum_1^{10} x_i y_i = 828,\ \sum_1^{10} y_i^2 = 448.$$

Аналогічні обчислення сум за вибіркою з 5 чоловіків дали:

$$\sum_1^{5} x_i = 35,\ \sum_1^{5} x_i^2 = 325,\ \sum_1^{5} y_i = 15,\ \sum_1^{5} x_i y_i = 140,\ \sum_1^{5} y_i^2 = 61.$$

За загальною (об'єднаною) вибіркою оцінено регресію з використанням фіктивної змінної Z (Z= 1 для чоловіка і Z= 0 для жінки), яка має вигляд:

$$\hat{y} = -0{,}06 + 0{,}438x + 0{,}46z + 0{,}072(zx).$$

На рівні значущості α=0,05 перевірити гіпотезу, що функція споживання одна і та сама для чоловіків та жінок, якщо виконані всі передумови класичної нормальної лінійної регресії.

Задача 15.4. З метою дослідження впливу чинників X_1 - середньомісячної кількості профілактичних налаштувань автоматичної лінії та X_2 - середньомісячної кількості обривів нитки на чинник Y - середньомісячну характеристику якості тканини (у балах) за даними 37 підприємств легкої промисловості були обчислені парні коефіцієнти кореляції: r_{y1}=0,105, r_{y2}=0,024 та r_{12}=0,996. Визначити часткові коефіцієнти кореляції r_{y12} та r_{y21} і оцінити їх значущість на 5%-му рівні.

Тема 16. УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (12 годин)

Поняття гомоскедастичності і гетероскедастичності

Узагальнений метод найменших квадратів (УМНК)

Література: [1], с. 175-184; [10], с. 150-166.

Контрольні запитання

1. Якими властивостями повинні володіти оцінки параметрів регресії?
2. Як впливає на параметри множинної лінійної моделі порушення умови, що математичне сподівання збурювання ε дорівнює нулю?
3. Як впливає на параметри множинної лінійної моделі порушення умови, що дисперсія збурювання ε постійною?
4. Який спосіб використовують для вивчення гомо- і гетероскедастичності?
5. На підставі якого дослідження роблять висновок про автокорельованість залишків?

6. Як поводяться при недотриманні основних передумов МНК?
7. Чим відрізняється узагальнений МНК від звичайного? У яких випадках його використовують?
8. Які властивості притаманні оцінкам параметрів моделі, отриманим на основі узагальненого МНК?

Тема 17. ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ (16 годин)

Загальні відомості про часові ряди і завдання їх аналізу
Моделювання тенденції часового ряду
Аналіз аддитивної і мультиплікативної моделей часового ряду
Спектральний аналіз часового ряду
Прогнозування часового ряду
Зв'язний аналіз часових рядів

Література: [1], с. 184-199; [10], с. 133-149, 191-222.

Контрольні запитання

1. Наведіть визначення часового ряду.
2. Чим відрізняються часові ряди від звичайних просторових вибірок?
3. Які фактори впливають на рівні часового ряду?
4. Які компоненти містить реальний часовий ряд?
5. Поясніть адитивну і мультиплікативну моделі часового ряду.
6. Поясніть, що таке тренд часового ряду і які види тренду зустрічаються?
7. Як визначають значущість тренду?
8. Перелічіть основні етапи аналізу часових рядів.
9. Перелічіть найпоширеніші методи аналізу часових рядів.
10. Поясніть, що таке автокореляція рівнів часового ряду. Як її можна виміряти?
11. Перелічіть властивості коефіцієнта автокореляції.
12. Що таке автокореляційна функція часового ряду і корелограма?
13. З якою метою виконують аналітичне вирівнювання часового ряду?
14. Які функції найчастіше застосовують для побудови трендів?
15. Який метод дозволяє визначити параметри тренду?
16. Які методи використовують для згладжування часового ряду?
17. В чому полягає метод ковзних середніх?
18. Поясніть, як провадиться усунення сезонних коливань за методом ковзної середньої?
19. З якою метою провадиться спектральний аналіз часового ряду?
20. Поясніть, у чому полягає зв'язний аналіз часових рядів?

Приклад 17.1. Часовий ряд попиту y_t наведено у табл. 17.1. За даними таблиці визначить середнє значення, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнти автокореляції (для лагів т=1;2) і частковий коефіцієнт автокореляції 1-го порядку.

Таблиця 17.1 - Часовий ряд попиту

Рік, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Попит, y_t	213	171	291	309	317	362	351	361

Розв'язання

Знаходимо середнє значення часового ряду за формулою:

$$\bar{y}_t = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n} = \frac{213+171+291+309+317+362+351+361}{8} = 296{,}88 \text{ (од.)}.$$

Дисперсію і середнє квадратичне відхилення обчислимо за співвідношенням

$$s_t^2 = \overline{y_t^2} - \bar{y}_t^2 = 92478{,}38 - 296{,}88^2 = 4343{,}61$$

$$s_t = \sqrt{4343{,}61} = 65{,}31 \text{(од.)}.$$

де $\overline{y_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t^2}{n} = \frac{213^2+171^2+291^2+309^2+317^2+362^2+351^2+361^2}{8} = 92478{,}38$.

Знайдемо коефіцієнт автокореляції r(τ) часового ряду (для лага τ = 1), тобто коефіцієнт кореляції між послідовностями семи пар спостережень y_t та y_{t+1} (t= 1,2...,7):

y_t	213	171	291	309	317	362	351
y_{t+1}	171	291	309	317	362	351	361

Обчислюємо необхідні суми:

$$\sum_{t=1}^{7} y_t = 213 + 171 + 291 + 309 + 317 + 362 + 351 = 2014$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_t^2 = 213^2 + 171^2 + 291^2 + 309^2 + 317^2 + 362^2 + 351^2 = 609506$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_{t+\tau} = 171 + 291 + 309 + 317 + 362 + 351 + 361 = 2162$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_{t+\tau}^2 = 171^2 + 291^2 + 309^2 + 317^2 + 362^2 + 351^2 + 361^2 = 694458$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_t y_{t+\tau} = 213 \cdot 171 + 171 \cdot 291 + 291 \cdot 309 + 309 \cdot 317 + 317 \cdot 362 +$$
$$+ 362 \cdot 351 + 351 \cdot 361 = 642583 .$$

Тепер обчислимо коефіцієнт автокореляції

$$r(1) = \frac{7 \cdot 642583 - 2014 \cdot 2162}{\sqrt{7 \cdot 609506 - 2014^2}\sqrt{7 \cdot 694458 - 2162^2}} = 0{,}725 .$$

Коефіцієнт автокореляції r(2) для лага τ = 2 між членами ряду y_t і y_{t+2} (t= 1,2...,6) за шістьма парами спостережень обчислюємо аналогічно: r(2) = 0,842.

Для визначення часткового коефіцієнта кореляції 1-го порядку $r_{част}(2)=$ $=r_{021}$ між членами ряду y_t і y_{t+2} при виключенні впливу y_{t+1} спочатку знайдемо (по аналогії з попереднім) коефіцієнт автокореляції r(1,2) між членами ряду y_{t+1} і y_{t+2}: r(1,2)=0,825, а потім обчислимо $r_{част}(2)$:

$$r_{чст}(2) = r_{021} = \frac{0{,}842 - 0{,}725 \cdot 0{,}825}{\sqrt{1-0{,}725^2}\sqrt{1-0{,}825^2}} = 0{,}627 .$$

Знання автокореляційних функцій r(τ) і $r_{част}(\tau)$ може надати істотну допомогу при підборі та ідентифікації моделі аналізованого часового ряду і статистичній оцінці його параметрів.

Приклад 17.2. За даними прикладу 17.1 знайти рівняння невипадкової складової (тренду) для часового ряду y_t, вважаючи тренд лінійним.

Розв'язання

Відповідно до методу найменших квадратів параметри лінійної залежності визначають з системи нормальних рівнянь. З урахуванням, що значення t утворюють натуральний ряд чисел від 1 до n, суми $\sum_{t=1}^{n} t$ та $\sum_{t=1}^{n} t^2$ можна виразити як кількість членів ряду n за відомими формулами:

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36, \qquad \sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204 .$$

Далі

$$\sum_{t=1}^{8} y_t = 213 + 171 + 291 + 309 + 317 + 362 + 351 + 361 = 2375$$

$$\sum_{t=1}^{8} y_t^2 = 213^2 + 171^2 + 291^2 + 309^2 + 317^2 + 362^2 + 351^2 + 361^2 = 739827$$

$$\sum_{t=1}^{8} y_t t = 213 \cdot 1 + 171 \cdot 2 + 291 \cdot 3 + 309 \cdot 4 + 317 \cdot 5 +$$
$$+ 362 \cdot 6 + 351 \cdot 7 + 361 \cdot 8 = 11766 .$$

Система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} 8b_0 + 36b_1 = 2375 \\ 36b_0 + 204b_1 = 11766 . \end{cases}$$

Отримаємо b_0=181,32 та b_1=25,679. Отже рівняння тренду має вигляд:

$$\hat{y}_t = 181{,}32 + 25{,}679t ,$$

тобто попит щорічно збільшується у середньому на 25,7 одиниць.

Перевіримо значущість отриманого рівняння тренду за F-критерієм на 5%-му рівні значущості. Обчислимо дисперсії.

Дисперсія зумовлена регресією

$$Q_R = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t - \bar{y}_t\right)^2 = \sum b_1^2\left(t - \bar{t}\right)^2 = b_1^2\left(\sum_{t=1}^{n} t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}{n}\right) =$$

$$= 25{,}679^2\left(204 - \frac{36^2}{8}\right) = 27695{,}3.$$

Дисперсія загальна

$$Q = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}_t\right)^2 = \sum y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)^2}{n} = 739827 - \frac{2375^2}{8} = 34748{,}9$$

Дисперсія залишкова

$$Q_{зал}=Q-Q_R=34748{,}9-27695{,}3=7053{,}6.$$

Обчислимо значення статистики

$$F = \frac{Q_R(n-2)}{Q_{зал}} = \frac{27695{,}3 \cdot 6}{7053{,}6} = 23{,}56\,.$$

Оскільки $F > F_{0,05;1;6}$, рівняння тренду є значущим.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 17.1. Дані про врожайність озимої пшениці у (ц/га) за 10 років наведено у табл 17.2

Таблиця 17.2 **-** Врожайність озимої пшениці у (ц/га)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	20,2	17,1	7,7	15,3	16,3	19,9	14,4	18,7	20,7

Знайти середнє значення, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнти автокореляції для лагов $\tau = 1;2$ часового ряду.

Задача 17.2. За даними табл. 17.2 знайти рівняння тренду часового ряду y_t, вважаючи що він лінійний. Перевірте значущість тренду часового ряду на рівні 0,05.

Задача 17.3. У таблиці 17.3 представлені дані, що відображають динаміку зростання доходів на душу населення y_t (грош. од.) за восьмирічний період:

Таблиця 17.3 **-** Доходи на душу населення y_t (грош. од.)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	1133	1222	1354	1389	1342	1377	1491	1684

Вважаючи, що тренд лінійний і умови класичної моделі виконані, знайти рівняння тренду, оцінити його значущість на рівні 0,05 та дати точковий і з надійністю 0,95 інтервальний прогнози середнього та індивідуального значень доходів на дев’ятий рік.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Ачкасов А. Є. Конспект лекцій з курсу «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 3 курсу заочної форми навчання бакалаврів за галуззю знань 0305 «Економіка і підприємництво», напрями підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік і аудит») / А. Є. Ачкасов, О. О. Воронков; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011.– 204 с.
2. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. - К.: КНЕУ, 2001.
3. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. А., Волощенко А. В. Математическое программирование. - М.:Высш.школа,1980. - 240с.
4. Таха Х. А. Введение в исследование операций. - М.: Изд.дом «Вильямс», 2005.
5. Исследование операций в экономике: Уч. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман./ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
6. Вітлинський В. В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. - К.: «Деміур», 1996, - 212с.
7. Клименко С. М., Дуброва О. С.Обґрунтування господарських рішень та оцінка ризиків: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2005. — 252 с.
8. Наконечный С.И., Терещенко Т.П. Эконометрия, - К.:КНЕУ, 2001.
9. Вітлинський В. В., Наконечний С. І. Ризик у менеджменті - К.: ТОВ «Борисфен-М», 1996. - 326 с.
10. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов/ Под ред. проф. Н.Ш.Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.- 311 с.
11. Практикум по эконометрике: Учеб. пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордиенко и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002 – 192 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки
до практичних занять і самостійної роботи з курсу
«**ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**»
(для студ. 3 курсу заочної форми навчання ФПО та ЗН
галузі знань 0305 - «Економіка і підприємництво»
напрямів підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»,
6.030509 «Облік і аудит»).

Укладач: ст. викл. **ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *А. Є. Ачкасов*

За редакцією автора

Комп'ютерне верстання

План 2011, поз. 605 М

Підп. до друку 18.06.2012 Формат 60х84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,6
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011р.