МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. І. Колосов, А. В. Якунін, С. М. Ламтюгова

КРАТНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

Харків – ХНАМГ – 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ , МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. І. Колосов, А. В. Якунін, С. М. Ламтюгова

КРАТНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

**Електронний альбом дидактичних матеріалів
до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика”
(для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,
спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”)**

Харків – ХНАМГ – 2012

УДК 514.123

Колосов А. І. Кратні та поверхневі інтеграли в презентаціях: Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” (для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”, спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”) / А. І. Колосов, А. В. Якунін, С. М. Ламтюгова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х: ХНАМГ, 2012. – 96 с.

Рецензент: *к.ф.-м.н., доц. М. П. Данилевський*

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол №4 від 23.11.2011р.

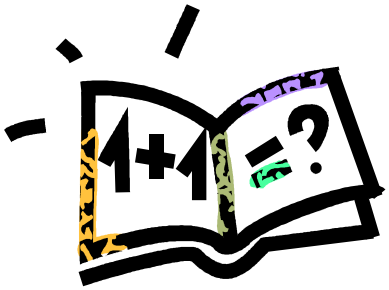
Зміст

Передмова

У цьому альбомі стисло викладено навчальні елементи розділу “Кратні та поверхневі інтеграли”, що відповідають діючим програмам курсу вищої математики для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу з об’єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання.

Зібрані в альбомі дидактичні матеріали призначені для студентів електротехнічних спеціальностей .

зміст



Інструкція по застосуванню

Альбом дидактичних матеріалів «Кратні та поверхневі інтеграли в презентаціях» створено в програмі Power Point у вигляді слайд-шоу.

Презентація подана в режимі «Тільки для читання», тому редагування слайдів не можливе.

Гіперпосилання в змісті та спеціальні кнопки на початку кожного розділу задають перехід на потрібну сторінку (розділ чи пункт). У кінці кожного пункту є кнопка «на початок розділу», де в свою чергу є кнопка «зміст». Далі зі змісту можна перейти в будь-який розділ чи пункт, який цікавить. У презентації є приховані слайди, що уточнюють окремі поняття, на які можна перейти по гіперпосиланням, що розміщені по тексту.

Кнопка  містить посилання на інформацію, що розрахована на самостійне опрацювання.

Можна вийти з презентації в будь-який момент. Для цього потрібно натиснути на клавіатурі клавішу Esc або клікнути правою кнопкою миші, після чого з’явиться керуюче меню, де останнім пунктом буде режим "Закінчити показ". Із цього ж меню можна перейти на будь-який вибраний слайд (не обов’язково в тому порядку, що пропонує презентація).

У друкованому варіанті – неповна демонстраційна збірка пропонованих матеріалів. Повна версія посібника з анімацією, рисунками та опрацьованими самостійними завданнями – тільки в електронному вигляді.

Побажання та пропозиції для покращення приймаються за електронною адресою: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

1 Подвійний інтеграл та його застосування

зміст

1.1. Подвійний інтеграл

1.1.1. Означення та властивості

Нехай у замкненій області D площини Oxy задана неперервна функція $z = f(x, y)$. Розіб'ємо область D на n елементарних частин D_i ($i = \overline{1,n}$), площі яких позначимо через ΔS_i , а діаметри (найбільшу відстань між точками межі області) – через d_i (рис. 1).

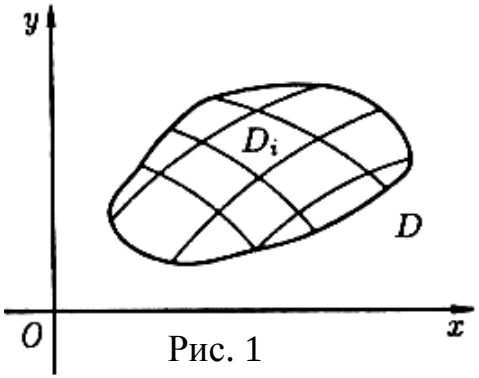


Рис. 1

У кожній точці області D_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i,y_i)$, помножимо значення функції $f(x_i, y_i)$ в цій точці на ΔS_i і складемо суму всіх таких добутків

$$f(x_1, y_1)\Delta S_1 + \cdots + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ називається ***інтегральною сумою функції*** $f(x, y)$ ***по області*** D.

Границя цієї інтегральної суми, коли максимальний діаметр $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$ частинних областей D_i прямує до нуля (при цьому n прямує до нескінченності), якщо вона існує та не залежить від способу поділу на елементарні частини D_i і від вибору точок $M_i(x_i,y_i)$ на них, називається ***подвійним інтегралом від функції*** $f(x,y)$ ***по області*** D і позначається

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS \quad \text{або} \quad \iint\limits_D f(M)\,dS.$$

Отже, за означенням $\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$,

де x і y – ***змінні інтегрування***; $f(x,y)$ – ***підінтегральна функція***; dS – ***елемент*** (***диференціал***) ***площі***; $f(x,y)dS$ – ***підінтегральний вираз***; D – ***область інтегрування***; $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$.

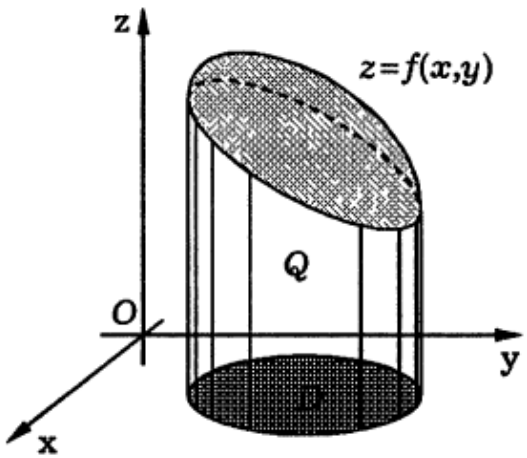


Рис. 2

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x, y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D, верхньою – частина поверхні $z = f(x,y) \ge 0$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною L – межею області D (рис. 2): $V = \iint_D f(x,y)\,dS$.

Фізичний зміст: якщо матеріальна пластина лежить у координатній площині Oxy і має форму замкненої області D, в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x,y)$, то маса m пластини обчислюється за формулою $m = \iint_D \mu(x,y)\,dS$.

Теорема (***достатня умова інтегровності***). *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.*

Властивості подвійного інтеграла:

1) Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_D C\, f(x,y)\,dS = C\iint\limits_D f(x,y)\,dS, \qquad \text{де } C = const.$$

2) Подвійний інтеграл від скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же сумі подвійних інтегралів від кожного доданка окремо:

$$\iint\limits_D \big(f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)\big)dS = \iint\limits_D f(x,y)\,dS + \iint\limits_D g(x,y)\,dS - \iint\limits_D h(x,y)\,dS.$$

3) Якщо функція $f(x,y) \ge 0$ в області D, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dS \ge 0$.

4) Якщо дві функції в області D задовольняють нерівності

$$f(x,y) \ge g(x,y)\text{, то } \iint\limits_D f(x,y)\,dS \ge \iint\limits_D g(x,y)\,dS.$$

5) (***Адитивність***). Якщо область інтегрування D функції $f(x, y)$ розбити на дві частини D_1 *і* D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

6) (***Оцінка подвійного інтеграла***). Якщо функція $f\ (x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D площею S, то

$$m\,S \le \iint\limits_D f(x,y)\,dS \le M\ S,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f\ (x,y)$ в області D.

7) Теорема ***(про середнє значення функції***). Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D площею S.

Величина $\mu = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dS$ називається ***середнім значенням*** функції $f(x,y)$ в області D. *В області D існує хоча б одна точка* $P(\bar{x},\bar{y})$, *в якій середнє значення функції досягається*:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \mu = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dS.$$

Зауваження. Надалі будемо розглядати лише функції, які неперервні в області інтегрування, що гарантує існування подвійного інтеграла. (Хоча подвійний інтеграл може існувати не тільки для неперервних функцій).

На початок розділу

1.1.2. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах зведенням до повторного

Безпосереднє знаходження подвійного інтеграла як границі інтегральної суми пов'язане зі значними труднощами. Набагато простіше перейти до обчислення так званого двократного повторного інтеграла – послідовного знаходження двох звичайних визначених інтегралів.

Зауваження 1. Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в декартовій прямокутній системі координат Oxy зручно розбивати область D координатною сіткою, утвореною прямими, які паралельні осям Ox і Oy (рис. 3).

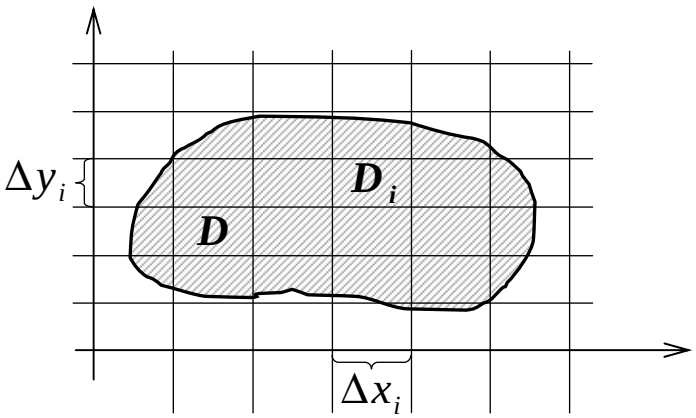


Рис. 3

Тоді внутрішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i, Δy_i і його площа $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $dS=dxdy$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

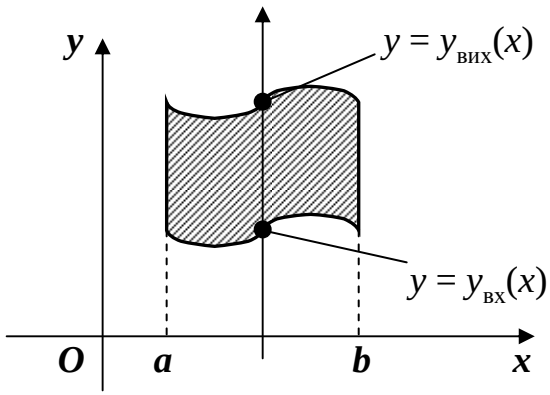


Рис. 4

Область D називається ***правильною в напрямі осі Oy*** (рис. 4), якщо:

1) довільна пробна пряма, що паралельна осі Oy і проходить через область D, перетинає межу області тільки в двох точках: на лінії входу і лінії виходу;

2) лінії входу та виходу задаються в явній формі одним рівнянням відповідно $y = y_{вх}(x)$, $y = y_{вих}(x)$.

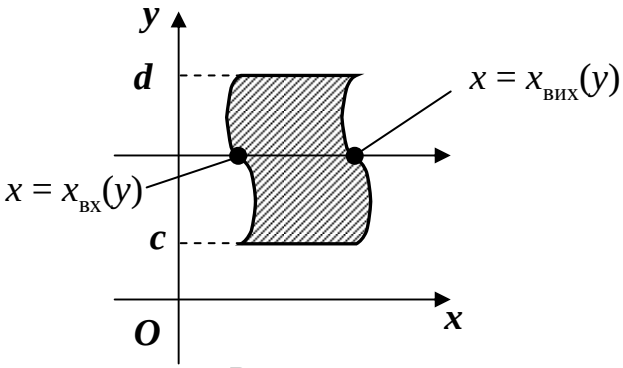


Рис. 5

Аналогічно визначається область ***правильна в напрямі осі Ox*** (рис. 5).

Якщо область D правильна і в напрямі осі Oy, і в напрямі осі Ox, то вона називається просто ***правильною***.

Формула, що зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла має вигляд:

$$a)\ \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy,\ x=a;\ x=b\ (a \le x \le b)$$ – для правильної в напрямі осі Oy області D.

$$\acute{a})\ \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\tilde{n}}^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx,\ y=c;\ y=d\ (c \le y \le d)$$ – для правильної в напрямі осі Ox області D.

Зауваження 2. Спочатку обчислюється ***внутрішній інтеграл*** за ***внутрішньою змінною*** y $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ у припущенні, що ***зовнішня змінна*** x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x.

Зауваження 3. ***Зовнішні межі інтегрування*** a і b – завжди сталі. Обчислюючи ***зовнішній інтеграл*** $\int_a^b S(x)\,dx,$ дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

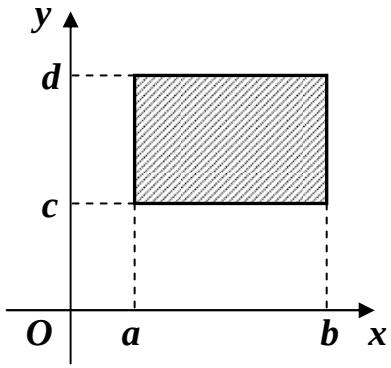


Рис. 6

Зауваження 4. ***Внутрішні межі інтегрування*** $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями зовнішньої змінної x. В окремих випадках вони також можуть бути сталими. Наприклад, коли область інтегрування D – прямокутник зі сторонами $x = a$, $x = b$, $y = c$ і $y = d$, що паралельні осям координат (рис. 6), то всі межі інтегрування є сталими і подвійний інтеграл обчислюється за формулою

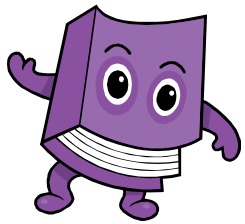
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Приклад 1 На координатній площині Oxy задано замкнену обмежену область D, утворену точками, що лежать у півплощині $x - y - 4 \le 0$ між еліпсом $x^2/48 + y^2/16 = 1$ і колом $x^2 + (y + 2)^2 = 4$. Виконати наступне:

1) Знайти кутові точки області D і зробити її рисунок на координатній площині Oxy (область D заштрихувати і вказати рівняння ділянок її меж).

2) Розбити область D на правильні в напрямі осі Oy частини і зробити відповідний рисунок на координатній площині Oxy (кожну правильну частину виділити оригінальним штрихуванням і вказати у відповідному вигляді рівняння ділянок її меж). Навести аналітичне подання кожної правильної в напрямі осі Oy частини.

3) Розбити область D на правильні в напрямі осі Ox частини і зробити відповідний рисунок на координатній площині Oxy (кожну правильну частину виділити оригінальним штрихуванням і вказати у відповідному вигляді рівняння ділянок її меж). Навести аналітичне подання кожної правильної в напрямі осі Ox частини.



1) Кутові точки області D є точками перетину ліній, які її обмежують. Для знаходження останніх складемо і розв'яжемо відповідні системи рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x-y-4=0; & y=x-4; & x_1=0;\ x_2=6; \\ x^2/48+y^2/16=1; & x^2+3(x-4)^2=48; & y_1=-4;\ y_2=2; \end{cases} \quad M_1(0;-4);\ M_2(6;2);$$

$$\begin{cases} x-y-4=0; & y=x-4; & x_1=0;\ x_2=2; \\ x^2+(y+2)^2=4; & x^2+(x-4+2)^2=4; & y_1=-4;\ y_2=-2; \end{cases} \quad \begin{matrix} M_1(0;-4)\ \text{–одержана вище;} \\ M_3(2;-2); \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2/48+y^2/16=1; & x^2=48-3y^2; & y=-4; \\ x^2+(y+2)^2=4; & 48-3y^2+(y+2)^2=4; & x=0; \end{cases} \quad M_1(0;-4)-\ \text{одержана вище.}$$

Область D зображена штриховкою на рис. 7.

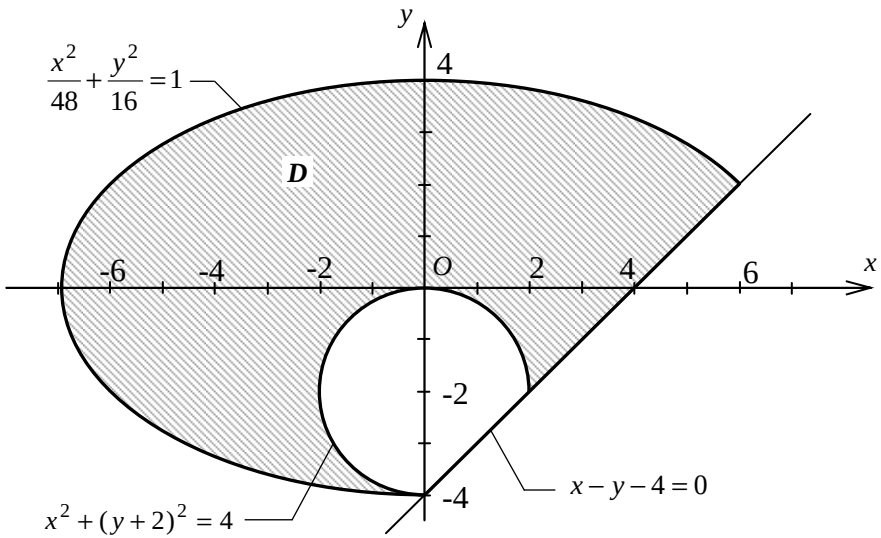
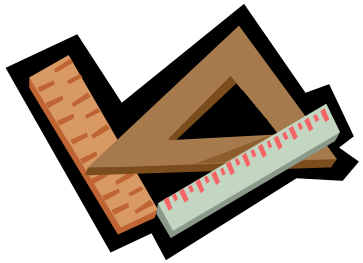


Рис. 7



2) Прямі $x = -2$, $x = 0$ і $x = 2$ розбивають область D на чотири правильні в напрямі осі Oy частини. Відповідне зображення області D відтворено на рис. 8.

Її правильні в напрямі осі Oy частини можна подати аналітично як множини точок наступними виразами:

$$D_1 : \left\{(x, y) \,\middle|\, -4\sqrt{3} \le x \le -2;\ -\sqrt{16 - x^2/3} \le y \le \sqrt{16 - x^2/3}\right\};$$

$$D_2 : \left\{(x, y) \,\middle|\, -2 \le x \le 0;\ -\sqrt{16 - x^2/3} \le y \le -\sqrt{4 - x^2} - 2\right\};$$

$$D_3 : \left\{(x, y) \,\middle|\, -2 \le x \le 2;\ \sqrt{4 - x^2} - 2 \le y \le \sqrt{16 - x^2/3}\right\};$$

$$D_4 : \left\{(x, y) \,\middle|\, 2 \le x \le 6;\ x - 4 \le y \le \sqrt{16 - x^2/3}\right\}.$$

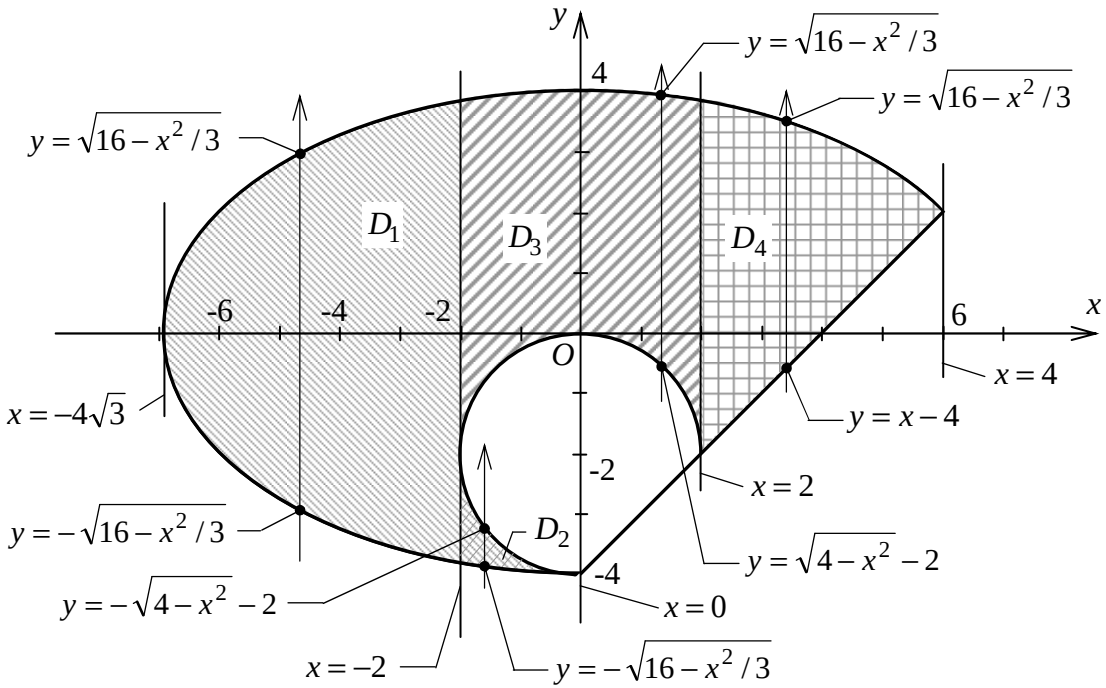


Рис. 8

3) Прямі $y = -2$, $y = 0$ і $y = 2$ розбивають область D на чотири правильні в напрямі осі Ox частин. Відповідне зображення області D відтворено на рис. 9.

Її правильні в напрямі осі Ox частини можна подати аналітично як множини точок наступними виразами:

$$D_1 : \left\{ (x, y) \,\middle|\, -4 \le y \le 0;\ -\sqrt{48-3y^2} \le x \le -\sqrt{4-(y+2)^2} \right\};$$

$$D_2 : \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le y \le 2;\ -\sqrt{48-3y^2} \le x \le y+4 \right\};$$

$$D_3 : \left\{ (x, y) \,\middle|\, 2 \le y \le 4;\ -\sqrt{48-3y^2} \le x \le \sqrt{48-3y^2} \right\};$$

$$D_4 : \left\{ (x, y) \,\middle|\, -2 \le y \le 0;\ \sqrt{4-(y+2)^2} \le x \le y+4 \right\}.$$

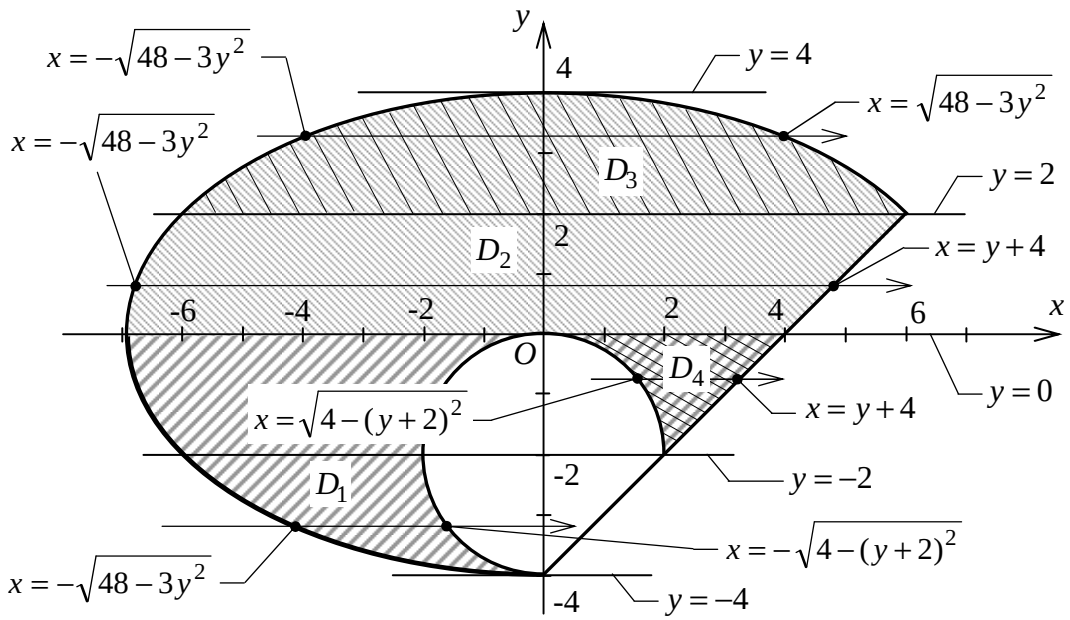
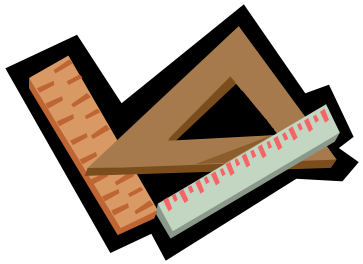
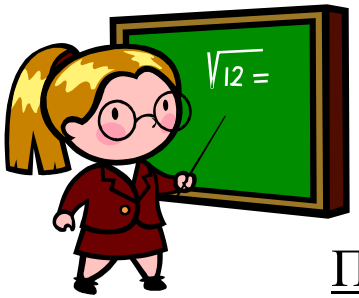


Рис. 9





Правило знаходження меж інтегрування для правильної в напрямі осі Oy (рис. 4) області D:

1) Область D спроектувати паралельно осі Oy на вісь Ox і одержати відрізок $[a; b]$, $a \le x \le b$. Числа a і b – відповідно нижня і верхня межі у зовнішньому інтегралі за x. Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D, які лежать на вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$, що обмежують цю область.

2) Провести через будь-яку внутрішню точку x відрізка $[a; b]$ пробну пряму, паралельну осі Oy і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2. Щоб визначити внутрішні межі інтегрування за y – ординати вказаних точок, необхідно розв'язати рівняння лінії входу і лінії виходу відносно y: $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що на відрізку $[a; b]$ обмежені і зберігають аналітичний вираз, – відповідно нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за y.

Зауваження 5. Якщо область D правильна в напрямах обох осей Ox і Oy, то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. Зрозуміло,що результати при цьому однакові, тобто *значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається ***зміною порядку інтегрування***.

Зауваження 6. У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 7. Якщо область D не є правильною в напрямі жодної з осей Ox чи Oy, то її необхідно розбити на частини без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є правильною в напрямі Ox чи Oy.

Приклад 1

Обчислити $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, де область D обмежена лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

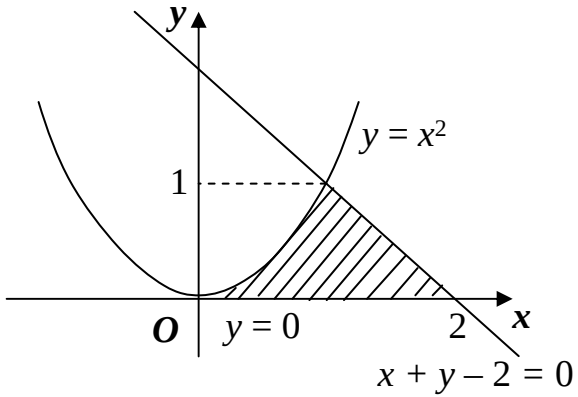


Рис. 10

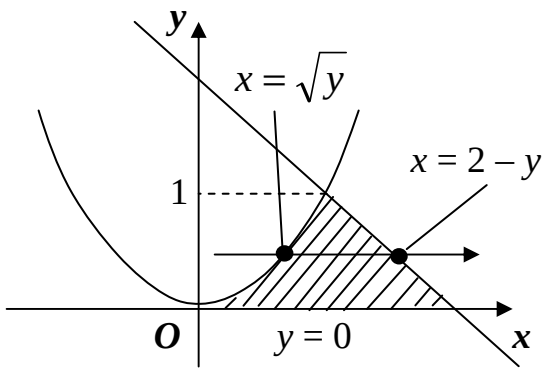


Рис. 11

Побудуємо область інтегрування (рис. 10).

І спосіб.

Область D правильна в напрямку осі Ox (рис.11) $D:\{0 \le y \le 1;\ \sqrt{y} \le x \le 2-y\}$.

Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{3/2} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7 \cdot y^2}{2 \cdot 2} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{y^{5/2}}{5} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1{,}45.$$

II спосіб.

Область D неправильна в напрямку осі Oy. Прямою $x = 1$ розіб'ємо її на дві правильні області D_1 і D_2 (рис. 12):

$$D_1 :\{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x^2\}; \quad D_2 :\{1 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2 - x\}.$$

Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

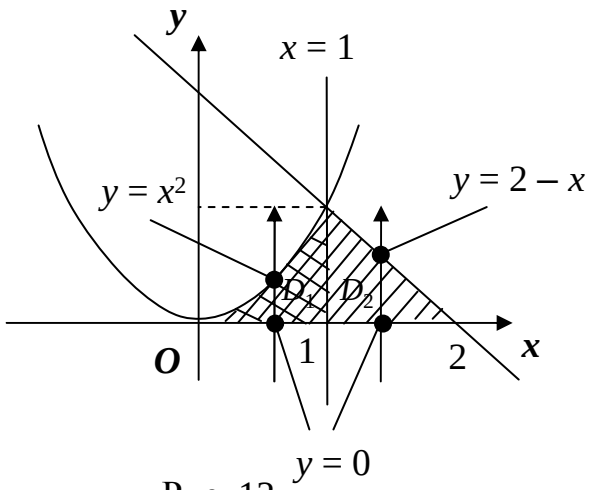


Рис. 12

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+2y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x+2y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+2y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-y} (x+2y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(xy + y^2\right)\Big|_0^{x^2} dx + \int_1^2 \left(xy + y^2\right)\Big|_0^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 + x^4\right)dx + \int_1^2 \left(2x - x^2 + (2-x)^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-2)^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{20} + 3 - 2 = 1{,}45.$$

Приклад 2

У заданих повторних інтегралах змінити порядок інтегрування:

а) $$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy,$$

б) $$I = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x, y)\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x, y)\, dx$$

(розв’язати самостійно).

а) Використовуючи зазначені межі інтегрування запишемо рівняння ліній, що обмежують відповідну область, та зобразимо їх в одній системі координат (рис. 13):

$$D\ :\ x=-1;\ x=1;\ \ y=-\sqrt{1-x^2};\ y=1-x^2.$$

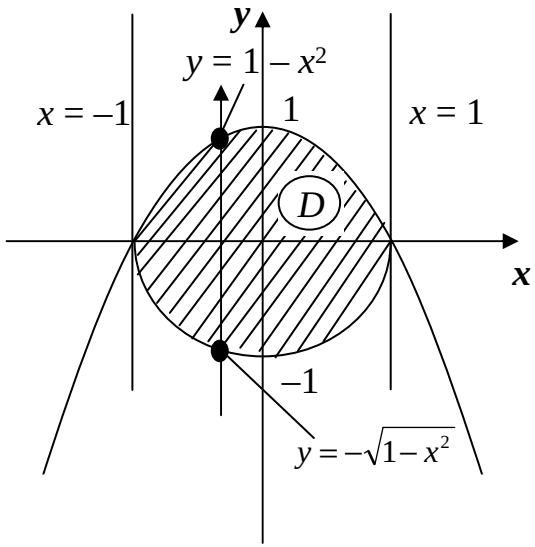


Рис. 13

Область D правильна в напрямі осі Oy (рис.13). Для зміни порядку інтегрування область D треба подати як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи на правильні у вибраному напрямі частини. У даному випадку область D – неправильна в напрямі осі Ox, тому прямою $y = 0$ розіб'ємо її на дві правильні області D_1 і D_2 (рис. 14):

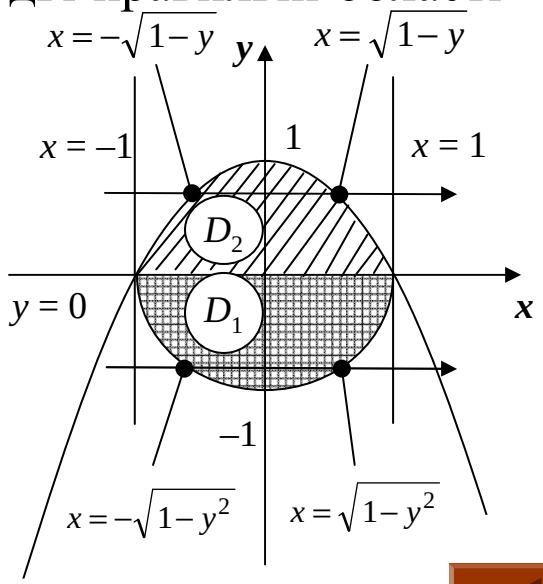


Рис. 14

$$D_1:\ y=-1;\ y=0;\ x=-\sqrt{1-y^2};\ \ x=\sqrt{1-y^2},$$

$$D_2:\ y=0;\ y=1;\ x=-\sqrt{1-y};\ \ x=\sqrt{1-y};\ D=D_1\cup D_2.$$

Тоді $$I=\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\,dx.$$

На початок розділу

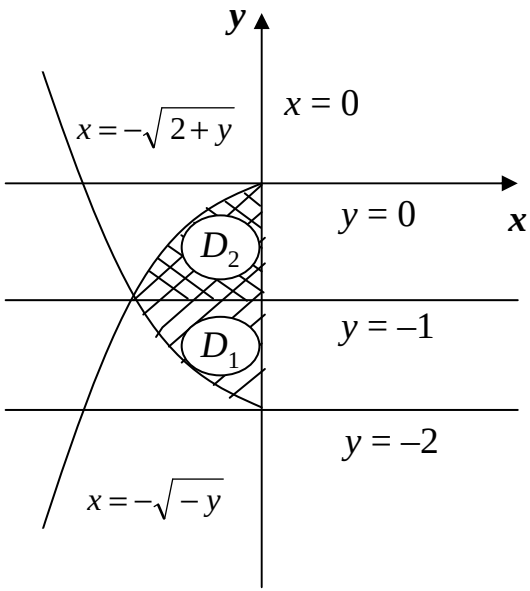


Рис. 15

б) $D_1:\ y = -2;\ y = -1;\ x = -\sqrt{2+y};\ \ x = 0,$

$$D_2:\ y = -1;\ y = 0;\ x = -\sqrt{-y};\ \ x = 0.$$

$$D = D_1 \bigcup D_2.$$

Область D зображена на рис. 15.

Вона правильна в напрямі осі Oy (рис. 16):

$$D:\ x = -1;\ x = 0;\ \ y = x^2 - 2;\ \ y = -x^2.$$

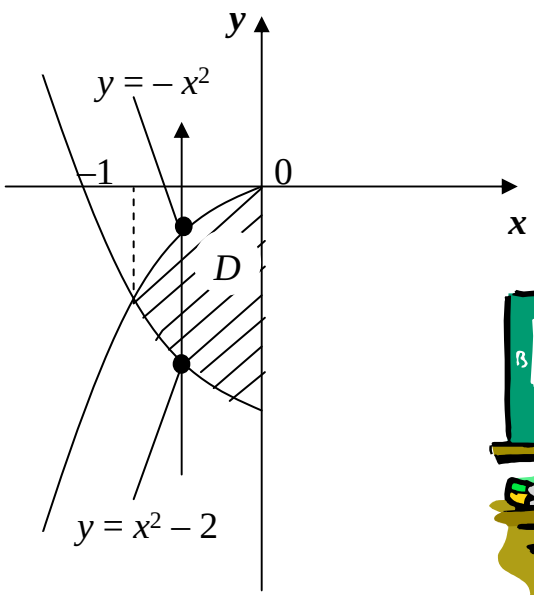
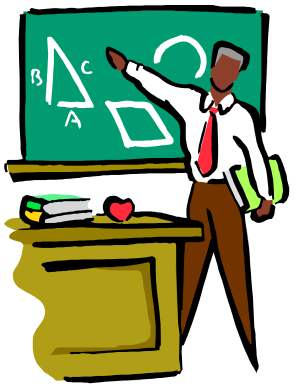


Рис. 16



Тому $\quad I = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2-2}^{-x^2} f(x, y)\, dy.$

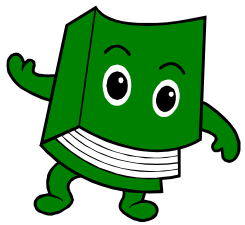
1.1.3. Подвійний інтеграл у полярній системі координат

Обчислення подвійних інтегралів іноді вдається спростити, зробивши заміну змінних. Нехай формули $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y)$ області D координатної площини Oxy і точками $M^*(u,v)$ деякої області D^* іншої координатної площини Ouv. Тоді, в припущенні неперервності частинних похідних функцій $x(u, v)$ і $y(u, v)$ по u і по v, має місце формула

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right| du\,dv,$$

яка називається ***формулою заміни змінних у подвійному інтегралі***.
Тут $J(u, v)$ - ***якобіан*** перетворення:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}.$$



На практиці часто застосовують перехід до полярних координат. Прямокутні x, y і полярні ρ, φ координати зв'язані співвідношеннями:

$$x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi \quad (0 \le \rho < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi),\quad \text{звідки}\quad x^2 + y^2 = \rho^2.$$

У цьому випадку якобіан $J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$

Формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі набуває вигляду $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$

Перехід до полярних координат доцільно застосовувати тоді, коли:

1) область інтегрування D задана у полярній системі;

2) область інтегрування D – круг або його частина (сектор, сегмент, кільце і т.п.), оскільки при цьому рівняння межі області містять суму $x^2 + y^2 = \rho^2$;

3) сама підінтегральна функція містить цей вираз $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Визначення меж при обчисленні подвійного інтеграла в полярних координатах можна робити, використовуючи зображення області D на площині Oxy. Якщо область D обмежена двома кривими, полярні рівняння яких $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$ і променями $\varphi=\varphi_1$ і $\varphi=\varphi_2$ (така область D називається ***правильною у напрямі координатних променів*** $\varphi = C$ (рис. 17)), то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

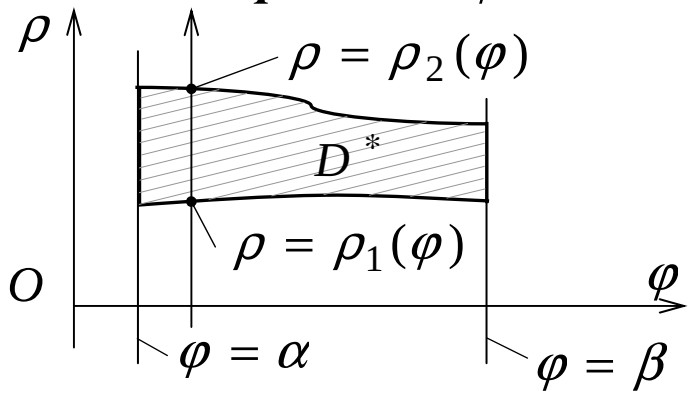


Рис. 17

Зокрема, якщо область D містить усередині початок координат, тоді

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho,$$

де $\rho=\rho(\varphi)$ – полярне рівняння кривої, що обмежує область D.

Приклад 1

Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл:

$$\iint\limits_D xdxdy,\ D: x^2+(y-2)^2=4;\ x^2+(y-4)^2=16;\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ x=0.$$

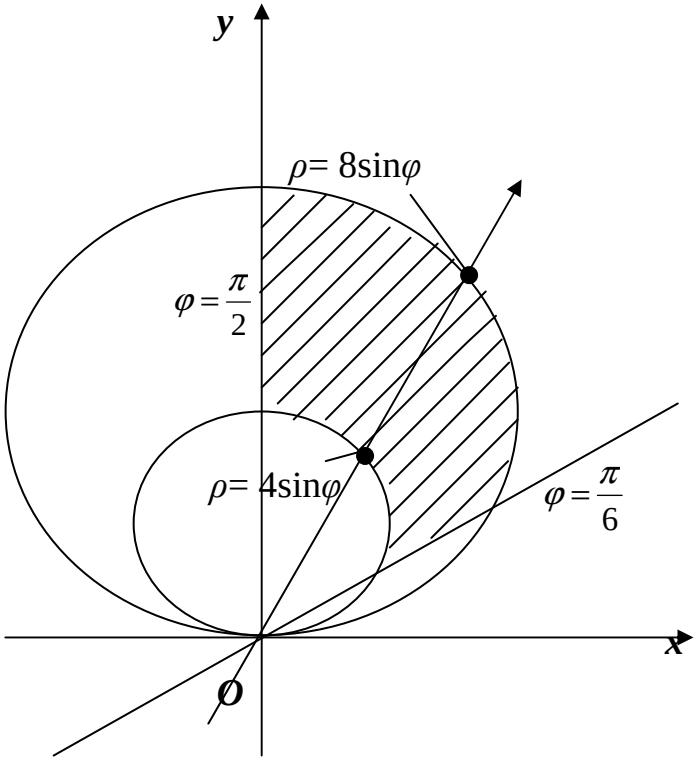


Рис. 18

Перейдемо в підінтегральному виразі та в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$f(x,y)=\rho\cos\varphi \qquad dS=dxdy=\rho d\rho d\varphi$$

1) $\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\sin\varphi-2)^2=4;$

$\rho=4\sin\varphi.$

2) $\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\sin\varphi-4)^2=16;$

$\rho=8\sin\varphi.$

3) $\rho\sin\varphi=\dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}};\quad tg\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\quad \varphi=\dfrac{\pi}{6}.$

4) $\rho\cos\varphi=0;\quad \varphi=\dfrac{\pi}{2}.$

Область D як правильна в напрямі координатних променів зображена на рис. 18.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho\cos\varphi\cdot\rho\, d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\cdot(512\sin^3\varphi - 64\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 448\sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{448}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \left| \begin{array}{ll} \sin\varphi = u & u_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ du = \cos\varphi\, d\varphi & u_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{448}{3}\int_{1/2}^{1} u^3 du = \frac{448}{3}\cdot\frac{u^4}{4}\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{112}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{112}{3}\cdot\frac{15}{16} = 35.$$

Приклад 2

Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл (виконати самостійно):

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \quad D: x^2 + y^2 - 2x \le 0,\ y \le 0.$$

На початок розділу

Область інтегрування зображена на рис. 19.

$$\int_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{-\pi/2}^{0} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{0}^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{0} 8\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

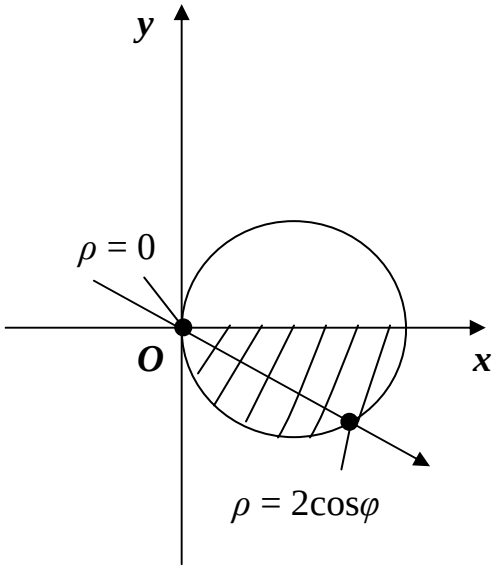


Рис. 19

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{0} \cos^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{0} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} \sin\varphi = t & t_1 = -1 \\ dt = \cos\varphi\, d\varphi & t_2 = 0 \end{matrix} \right| = \frac{8}{3}\int_{-1}^{0} (1-t^2)dt = \frac{8}{3}\left.\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{9}.$$

1.2. Застосування подвійного інтеграла в геометрії та фізиці

1.2.1. Геометричні застосування

1) Площа плоскої фігури

Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ підінтегральну функцію покласти тотожно рівною одиниці $f(x,y)\equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D:

$$S=\iint_D dx\,dy,$$

а в полярній системі координат – $S=\iint_{D^*}\rho\,d\rho\,d\varphi.$

2) Об'єм тіла

Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V, яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z = z_1(x, y)$ і виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$V=\iint_{D_{xy}}\left(z_2(x,y)-z_1(x,y)\right)dxdy.$$

Зауваження 1. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy, то його об'єм обчислюється за аналогічною формулою відповідно

$$V=\iint_{D_{yz}}\left(x_2(y,z)-x_1(y,z)\right)dydz \quad \text{і} \quad V=\iint_{D_{xz}}\left(y_2(x,z)-y_1(x,z)\right)dxdz.$$

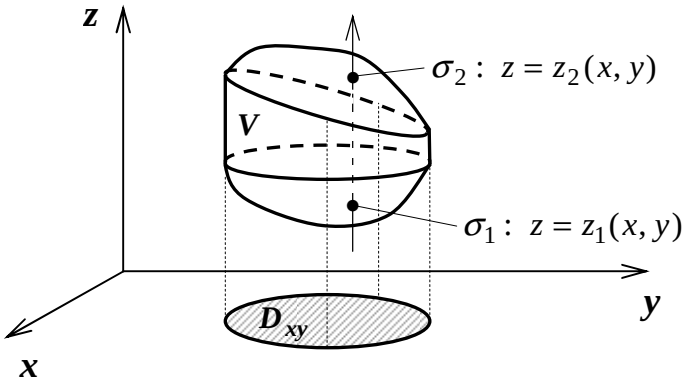


Рис.20

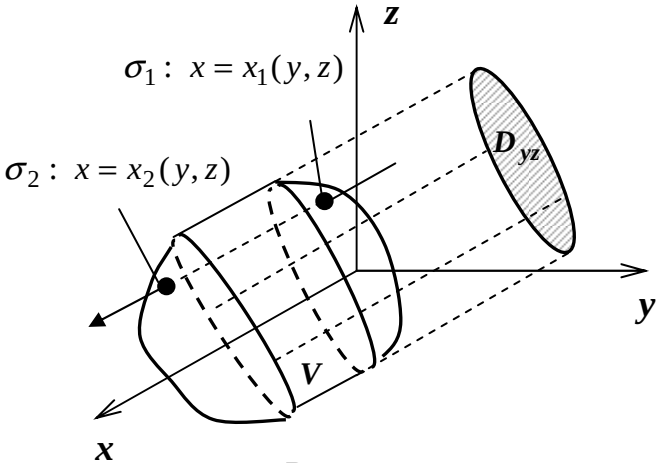


Рис. 21

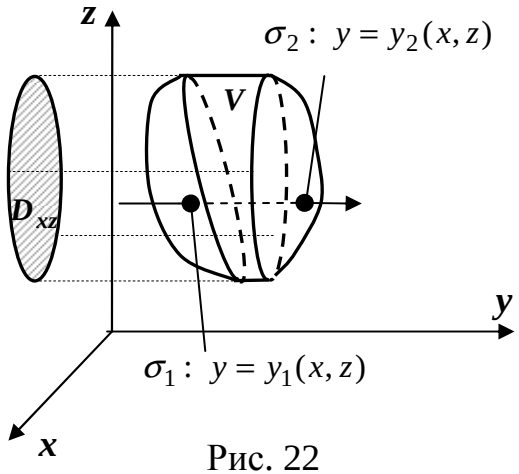


Рис. 22

Область V називається ***правильною в напрямі осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови:

1) межа її проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих;

2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній ***поверхні входу*** σ_1 і дальній ***поверхні виходу*** σ_2;

3) рівняння кожної з поверхонь задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} $\left(z_1(x, y) \le z_2(x, y)\right)$ (рис. 20).

Аналогічно вводиться означення просторової області V, що ***правильна в напрямі осі*** Ox (рис. 21) ***чи*** Oy (рис. 22).

Якщо просторова область V правильна в напрямі кожної з координатних осей Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною***.

<u>Зауваження 1</u>. Якщо область V – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують координатні чи їм паралельні площини.

3) Площа поверхні

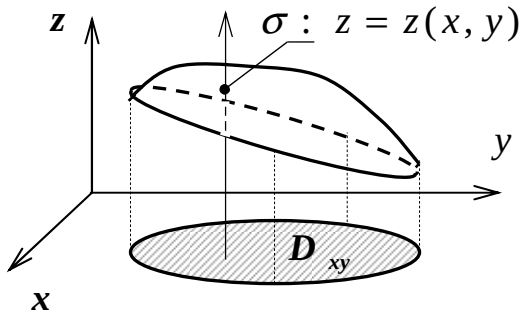


Рис. 23

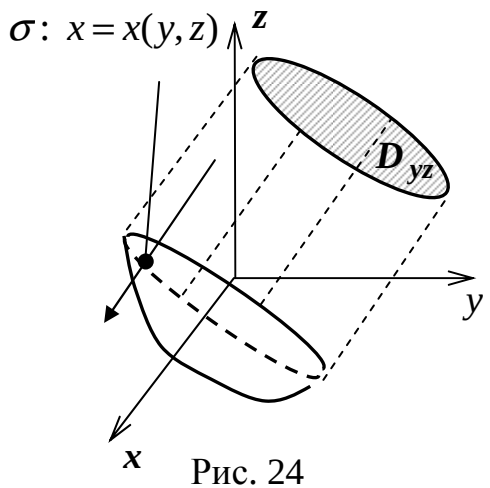


Рис. 24

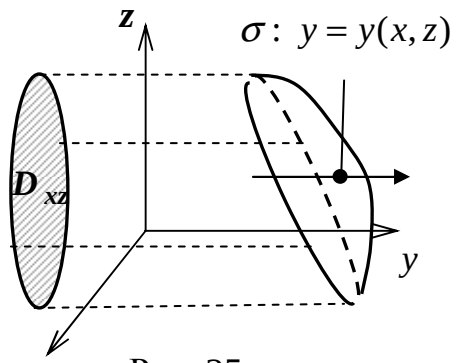


Рис. 25

Нехай σ – деяка поверхня, плоска область D_{xy} – її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 23).

Поверхня σ називається ***правильною в напрямі осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) довільна пробна пряма, що проходить через область D_{xy} паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає поверхню σ лише в одній точці, тобто поверхня взаємно однозначно проектується в область D_{xy}; 2) рівняння поверхні σ задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна в D_{xy}.

Аналогічно розглядаються поверхні, що правильні в напрямі осей Ox (рис. 24) і Oy (рис. 25).

Якщо поверхня σ правильна у всіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною***.

Якщо поверхня σ – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Як правило, для цього застосовують координатні чи їм паралельні площини.

Якщо поверхня σ правильна у напрямі осі Ox, Oy чи Oz, то її площа обчислюється відповідно за формулою:

$$S_\sigma = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\, dy\, dz; \qquad S_\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\, dx\, dz;$$

$$S_\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy.$$

Приклад 1

Обчислити площу плоскої області D, що обмежена лініями: $y = 3\sqrt{x},\ y = \dfrac{3}{x},\ x = 4.$

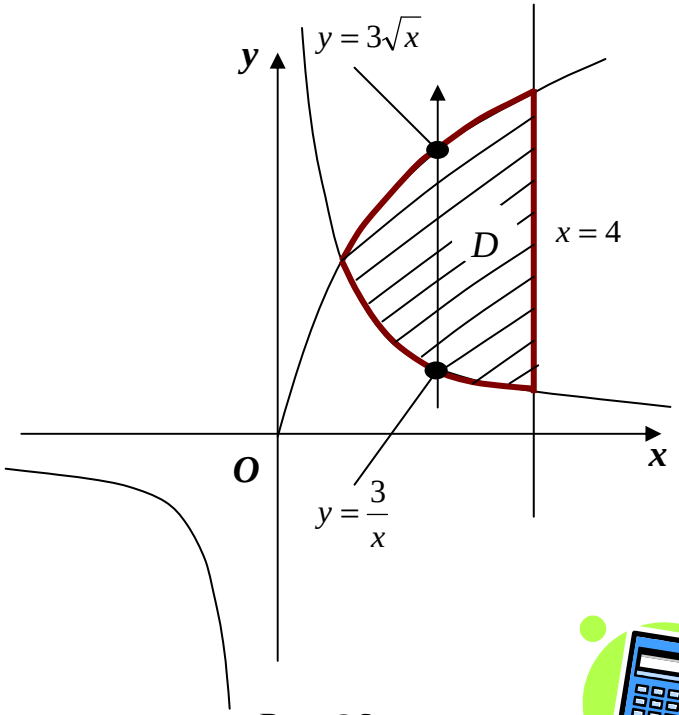


Рис. 26

Область D – правильна в напрямі осі Oy (рис. 26). Тоді

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_1^4 dx \int_{3/x}^{3\sqrt{x}} dy = \int_1^4 y\Big|_{3/x}^{3\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_1^4 \left(3\sqrt{x} - 3/x\right)dx = \left(3\frac{x^{3/2}}{3/2} - 3\ln|x|\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \left(2\sqrt{x^3} - 3\ln|x|\right)\Big|_1^4 = 16 - 3\ln 4 - 2 = 14 - 3\ln 4$$

(кв. од.)

Приклад 2

Обчислити площу плоскої області D, що обмежена лініями (розв’язати самостійно):

$$x = 8 - y^2,\ x = -2y.$$

Область D – правильна в напрямку осі Ox (рис. 27). Тоді

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{4}dy\int\limits_{-2y}^{8-y^2}dx=\int\limits_{-2}^{4}x\Big|_{-2y}^{8-y^2}dy=\int\limits_{-2}^{4}(8-y^2+2y)dy=$$

$$=\left(8y-\frac{y^3}{3}+2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=32-\frac{64}{3}+16+16-\frac{8}{3}-4=60-24=36\,(\text{кв. од.})$$

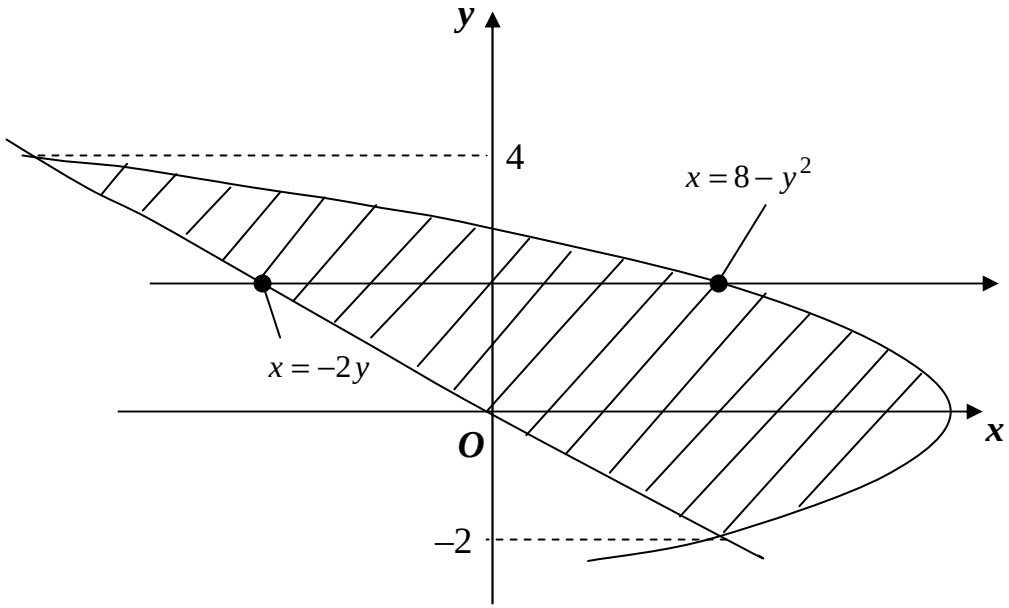


Рис. 27

Приклад 3

Обчислити площу області, що обмежена лінією $\rho = 2 - \sin\varphi$.

Побудуємо область у полярних координатах (рис. 28) за точками з таблиці 1.

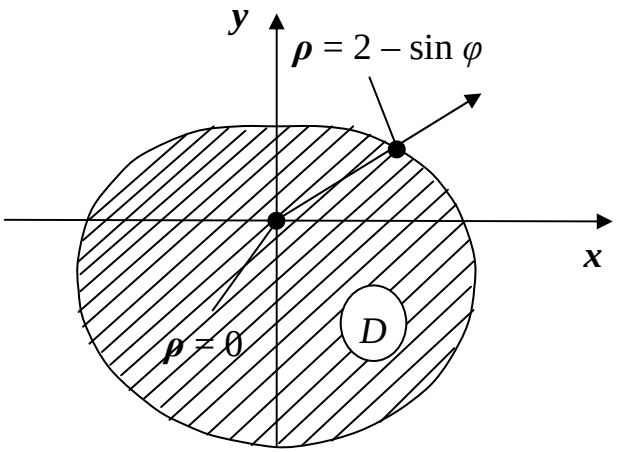


Рис. 28

Таблиця 1

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
ρ	2	1,3	1	1,3	2
φ		$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
ρ		2,7	3	2,7	2

$$S = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2-\sin\varphi} \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2-\sin\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \sin^2\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - 4\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\varphi + 4\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\cdot 2\pi + 4\cos 2\pi - \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 + 4\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(9\pi + 4) - \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{9\pi}{2} \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 4

Обчислити об'єм тіла V, що обмежене поверхнями

$$z = 4 - x^2, x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$$

Тіло обмежене параболічним циліндром $z = 4 - x^2$ і площинами $x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$ (рис. 29).

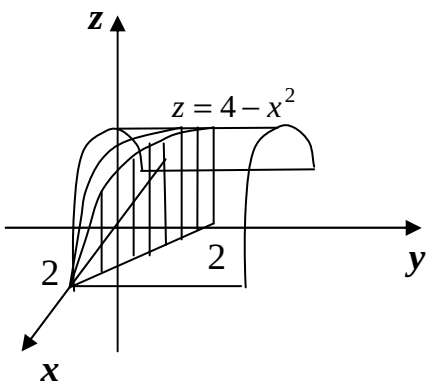


Рис. 29

Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy}, що зображена на рис. 30. Вона є правильною. Тоді

$$V = \iint_D z dxdy = \iint_D (4 - x^2) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4 - x^2) dy =$$

$$= \int_0^2 (4 - x^2) y \Big|_0^{2-x} dx = \int_0^2 (4 - x^2)(2 - x) dx = \int_0^2 (8 - 2x^2 - 4x + x^3) dx =$$

$$= \left(8x - 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^2 = 16 - 2 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot 2 + 4 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

(куб. од.)

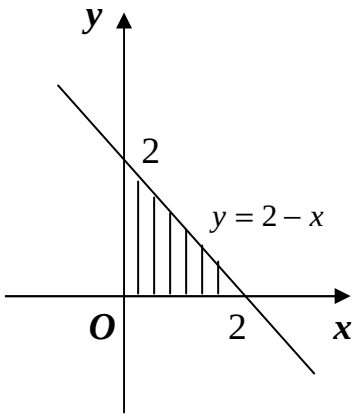


Рис. 30

Приклад 5

Обчислити площу поверхні циліндра $x^2 = 2z$, яка відсічена площинами $x - 2y = 0,\ y = 2x, x = 2\sqrt{2}$ (рис. 31).

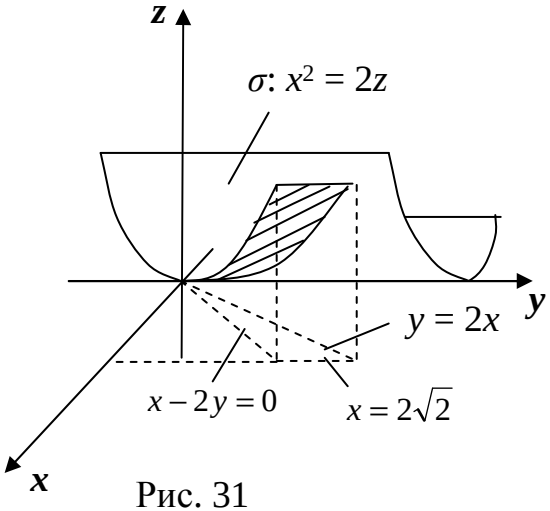


Рис. 31

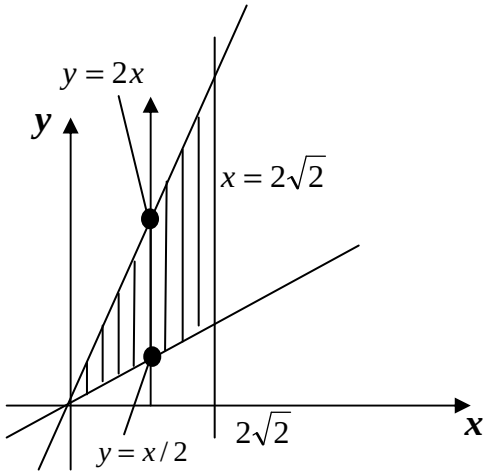


Рис. 32

Область інтегрування зображена на рис. 32.

Із рівняння циліндра маємо $z'_x = x,\ z'_y = 0.$

Тоді

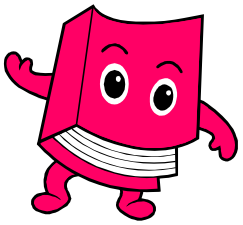
$$S = \iint_D \sqrt{1+x^2}\,dxdy = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx \int_{x/2}^{2x} dy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} \cdot y\Big|_{x/2}^{2x} dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} \cdot \left(2x - \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = u \\ du = 2xdx \\ xdx = \dfrac{du}{2} \\ u_1 = 1;\ u_2 = 9 \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int_1^9 \sqrt{u}\,\frac{du}{2} =$$

$$= \frac{3}{4}\int_1^9 \sqrt{u}\,du = \frac{\sqrt{u^3}}{2}\Bigg|_1^9 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9^3} - 1\right) = 13 \text{ (кв. од.)}$$

На початок розділу



1.2.2. Фізичні застосування

1) Матеріальна пластина, що займає область D у площині Oxy і характеризується поверхневою густиною $\mu(x, y)$, має масу:

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy.$$

2) Середня густина пластини: $\mu_{\text{сер}} = \dfrac{m}{S} = \iint_D \mu(x, y)\, dxdy \Big/ \iint_D dxdy.$

3) Статичні моменти пластини відносно осей Ox, Oy відповідно

$$M_x = \iint_D y\,\mu(x, y)\, dxdy; \quad M_y = \iint_D x\,\mu(x, y)\, dxdy.$$

4) Координати центра маси пластини відповідно

$$x_c = M_y / m; \quad y_c = M_x / m.$$

5) Моменти інерції пластини відносно осей Ox, Oy та відносно початку координат:

$$I_x = \iint_D y^2\,\mu(x, y)\, dxdy; \quad I_y = \iint_D x^2\,\mu(x, y)\, dxdy;$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,\mu(x, y)\, dxdy = I_x + I_y.$$

Зауваження. Якщо пластина однорідна, то $\mu = \mu_0 = \text{const}$.

Приклад 1

Знайти координати центра маси пластини D, що обмежена частиною еліпса в першій чверті $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ та координатними осями, якщо поверхнева густина $\mu(x, y) = 3xy$.

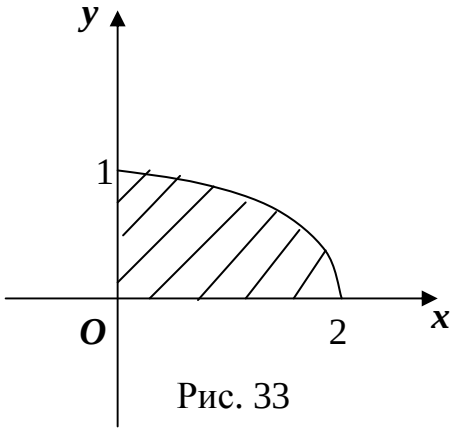


Рис. 33

На рис. 33 зображена задана пластина. Обчислимо її масу:

$$m=\iint_D 3xy\,dxdy=3\int_0^2 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2/4}} y\,dy=3\int_0^2 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2/4}}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^2 x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x(4-x^2)\,dx=\frac{3}{8}\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{2}.$$

Знайдемо статичні моменти пластини:

$$M_x=\iint_D y\cdot 3xy\,dxdy=3\int_0^2 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2/4}} y^2dy=3\int_0^2 x\left(y^3/3\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2/4}}dx=\int_0^2 x\sqrt{\left(1-x^2/4\right)^3}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}1-x^2/4=u\\ du=-\frac{x}{2}dx;\ xdx=-2du\\ u_1=1;u_2=0\end{array}\right|=-2\int_1^0\sqrt{u^3}\,du=2\int_0^1 u^{3/2}\,du=2\frac{2u^{5/2}}{5}\Bigg|_0^1=\frac{4}{5}.$$

M_y обчислити самостійно.

Тоді $x_c=\frac{16}{15};\ y_c=\frac{8}{15}.$

На початок розділу

$$M_y = \iint_D x \cdot 3xy\,dxdy = 3\int_0^2 x^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2/4}} y\,dy = 3\int_0^2 x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2/4}} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{3}{2}\int_0^2\left(x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{3}{2}\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{4}\frac{32}{5}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{40-24}{15}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{15} = \frac{8}{5}.$$

2 Потрійний інтеграл та його застосування

зміст

2.1. Потрійний інтеграл

2.1.1. Означення та властивості

Нехай у замкненій області V простору $Oxyz$ задана неперервна функція $u = f(x, y, z)$.

Розіб'ємо область V сіткою довільних кусково-гладких поверхонь на елементарні частини V_i ($i = \overline{1,n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. У кожній комірці V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо інтегральну суму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ (ΔV_i – об'єм елементарної області V_i).

Границя цієї інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття тривимірної області V, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні комірки V_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$ у них, називається ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x, y, z)$ ***по області*** V:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i,$$

де x, y і z – ***змінні інтегрування***; $f(x, y, z)$ – ***підінтегральна функція***; dV – ***елемент*** (***диференціал***) ***об'єму***; $f(x, y, z)\, dV$ – ***підінтегральний вираз***; V – ***область інтегрування***, d_i – ***діаметр*** V_i (довжина найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області V_i).

Фізичний зміст потрійного інтеграла:

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\, dV,$$

де μ (x, y, z) – об'ємна густина; m – маса.

Геометричний зміст потрійного інтеграла: Якщо в потрійному інтегралі підінтегральну функцію покласти тотожно рівною одиниці $f(x, y, z) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме об'єму області інтегрування V:

$$V = \iiint_V dV.$$

Зауваження. *Умови існування та основні властивості потрійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям подвійного і звичайного визначеного інтеграла.*

На початок розділу

2.1.2. Обчислення потрійного інтеграла в прямокутній системі координат

У прямокутній системі координат диференціал об'єму має вигляд $dV = dx\,dy\,dz$ і потрійний інтеграл можна подати у формі

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz.$$

Нехай тривимірна область V – правильна в напрямі осі Oz і обмежена знизу і зверху поверхнями відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$.

Тоді справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz,$$

за якою спочатку обчислюється внутрішній одновимірний інтеграл по z, а потім зовнішній подвійний інтеграл по x, y.

Якщо при цьому плоска область D_{xy}, що служить проекцією тіла V на площину Oxy, є правильною в напрямі осі Oy, то приходимо до формули

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz,$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

<u>Зауваження 1</u>. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній z при фіксованих зовнішніх змінних x і y. Потім знаходиться проміжний інтеграл по y при фіксованому x. В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по x.

<u>Зауваження 2</u>. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області V відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та форми області V, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x, y, z)$.

Приклад

Для потрійного інтеграла $I = \iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz$ вказано підінтегральну функцію f $(x,$ $y,$ $z)$ й область інтегрування V, яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей.

Необхідно:

1) Зобразити тіло V у прямокутній системі координат $Oxyz$ як правильну в напрямі осі Oz просторову область.

2) Подати його проекцію D_{xy} як правильну в напрямі осі Ox плоску область, при необхідності розбиваючи на частини, і зробити відповідний рисунок.

3) За результатами пунктів 1) і 2) перейти до повторного інтеграла і обчислити його значення.

а) $f(x, y, z) = z$;
V: $x^2 = 2y$; $z = 0$; $2y + z = 2$;

б) $f(x, y, z) = x + z$;
V: $x = 0$; $y = 0$; $z = 1$; $x + y + z = 2$.

б) виконати самостійно.

а) $f(x, y, z) = z$;

V: $x^2 = 2y$; $z = 0$; $2y + z = 2$; $y = 1$. Дана область інтегрування V є вертикальним циліндричним тілом, а його проекцією на координатну площину Oxy є плоска область D_{xy}. На рис. 34 це тіло V подано як правильну в напрямі осі Oz просторову область, що обмежена знизу координатною площиною $z = 0$ (поверхня входу), зверху – площиною $z = 2 - 2y$ (поверхня виходу), а з боків – параболічним циліндром $x^2 = 2y$. Відповідно на рис. 35 проекцію D_{xy} відтворено як правильну в напрямі осі Ox плоску область. Тоді потрійний інтеграл переходом до повторного обчислюється так:

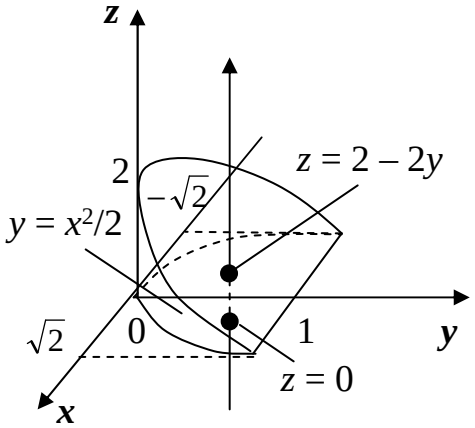


Рис. 34

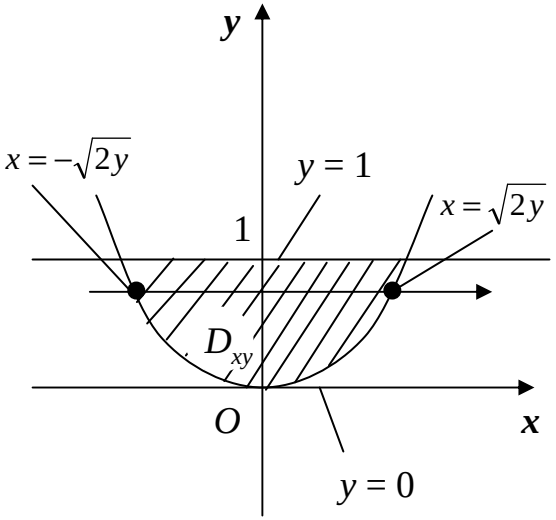


Рис. 35

$$I = \iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx \int_0^{2-2y} z\,dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} (z^2/2)\Big|_0^{2-2y} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} (2-2y)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-2y)^2 \cdot x\Big|_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dy = 4\int_0^1 (1-y)^2\sqrt{2y}\,dy =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^1 (y^{1/2} - 2y^{3/2} + y^{5/2})\,dy = 4\sqrt{2}\left(\frac{y^{3/2}}{3/2} - 2\frac{y^{5/2}}{5/2} + \frac{y^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{64}{105}\sqrt{2}.$$

На початок розділу

б) $f(x, y, z) = x + z$;

V: $x = 0$; $y = 0$; $z = 1$;

$x + y + z = 2$.

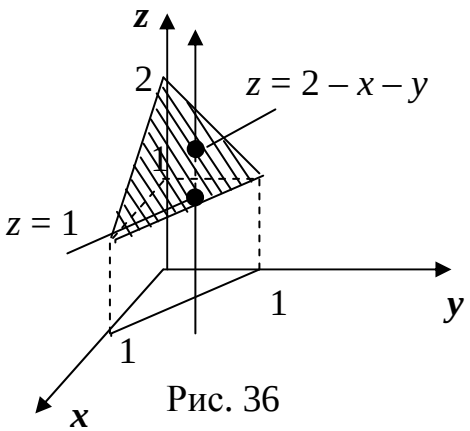


Рис. 36

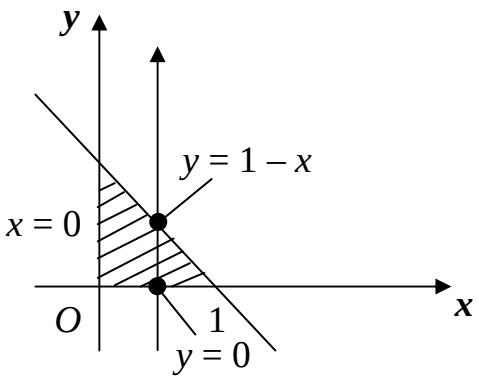


Рис. 37

$$I = \iiint\limits_V (x+z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} (x+z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xz + z^2/2\right)\Big|_1^{2-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(2x - x^2 - xy + \frac{(2-x-y)^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2} - \frac{(2-x-y)^3}{6} - \frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{(2-x)^3}{6}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - \frac{x}{6} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{(2-x)^4}{24}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

2.1.3. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній та сферичній системах координат

Нехай функція $f\ (x,\ y,\ z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V простору (x, y, z), а функції $x = x\ (u,\ v,\ w)$, $y = y\ (u,\ v,\ w)$ і $z = z\ (u,\ v,\ w)$ разом з частинними похідними неперервні в обмеженій замкненій області V^* простору $(u,\ v,\ w)$ і взаємно однозначно відображають цю область на область V, причому ***якобіан*** відображення $J\ (u,\ v,\ w)$ відмінний від нуля:

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді має місце ***формула заміни змінних у потрійному інтегралі***

$$\iiint_V f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_{V^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right|\ dudvdw.$$

Змінні u, v і w служать криволінійними координатами точки, а вираз $dV^* = \left|J(u,v,w)\right| dudvdw$ задає ***елемент об'єму*** у криволінійному просторі. Модуль якобіана $\left|J(u,v,w)\right|$ визначає коефіцієнт зміни нескінченно малого об'єму при відповідному перетворенні координат.

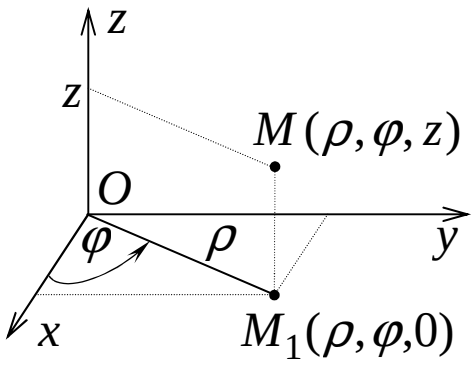


Рис. 38

У ***циліндричній*** системі координат положення точки визначається полярними координатами φ, ρ та аплікатою z (рис. 38), а формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні Координати, мають вигляд: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$ $(0 \le \rho < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi)$, звідки $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Модуль якобіана дорівнює $|J(\rho,\varphi,z)| = \rho$, тоді

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdy\,dz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho d\varphi\,dz.$$

<u>Зауваження 1</u>. Перехід до циліндричних координат доцільно застосовувати, коли: 1) область інтегрування V задана у циліндричній системі; 2) область інтегрування V проектується в круг або його частину; 3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів хоча б двох декартових координат.

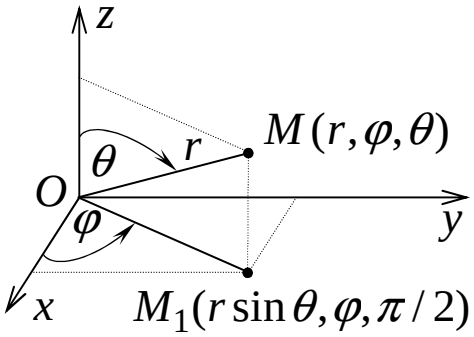


Рис. 39

У ***сферичній*** системі координат положення точки визначається координатами r, φ, θ (рис. 39), а формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні координати, мають вигляд: $x = r\cos\varphi\sin\theta$; $y = r\sin\varphi\sin\theta$; $z = r\cos\theta$, звідки $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $(0 \le r < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le \theta \le \pi)$.

Модуль якобіана дорівнює $|J(\rho,\varphi,z)| = r^2\sin\theta$, тоді

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V^*} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi\,d\theta.$$

<u>Зауваження 2</u>. До сферичних координат зручно переходити, коли: 1) область інтегрування V задана у сферичній системі; 2) областю інтегрування V є куля чи її частина; 3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів всіх трьох декартових координат $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Приклад 1

Обчислити $\iiint_V xyz\,dxdydz$, де V – частина простору, яка обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 3z$, що розташована в першому октанті (рис. 40).

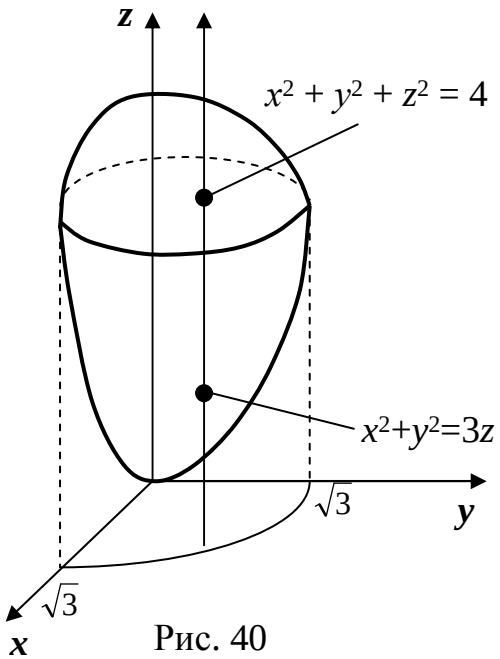


Рис. 40

Знайдемо лінію перетину параболоїда і сфери:

$$\begin{cases} x^2+y^2=3z; \\ x^2+y^2+z^2=4; \end{cases} \quad 3z+z^2=4;\ z^2+3z-4=0; \quad z_1=-4;\ z_2=1; \quad \begin{cases} x^2+y^2=3; \\ z=1. \end{cases}$$

На рис. 40 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекція зображена на рис. 41.

Перейдемо до циліндричних координат:

$$z=\frac{x^2+y^2}{3} \Rightarrow z=\frac{\rho^2}{3}; \quad z=\sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow z=\sqrt{4-\rho^2};$$

$$f(x,y,z)=xyz=\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot z=\rho^2 z\cos\varphi\sin\varphi.$$

Тоді $\iiint_V xyz\,dxdydz=\iiint_{V^*} z\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$

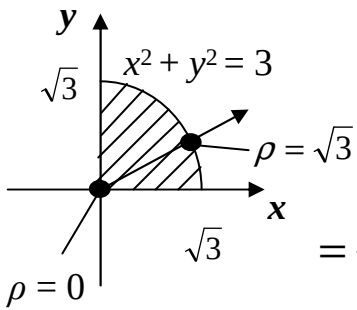


Рис. 41

$$=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3 d\rho\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} z\,dz=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3\left(z^2/2\right)\Big|_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3\left(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9}\right)d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin2\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(4\rho^3-\rho^5-\frac{\rho^7}{9}\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin2\varphi\left(\rho^4-\frac{\rho^6}{6}-\frac{\rho^8}{72}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{8}\left(-\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{27}{32}.$$

Обчислити $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, де V - куля $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Приклад 2

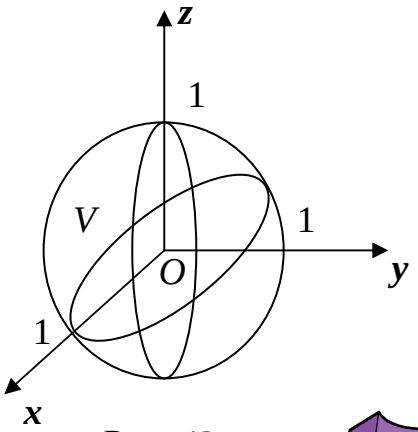
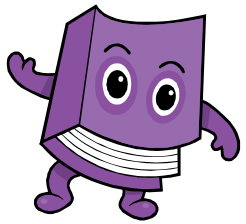


Рис. 42

Тіло V зображене на рис. 42. Його проекція на площину Oxy – на рис. 43. Перейдемо до сферичних координат:

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow r=1;$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{1}{1+(r^2)^{3/2}}=\frac{1}{1+r^3}.$$



Тоді $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_V \frac{r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta}{1+r^3}=$

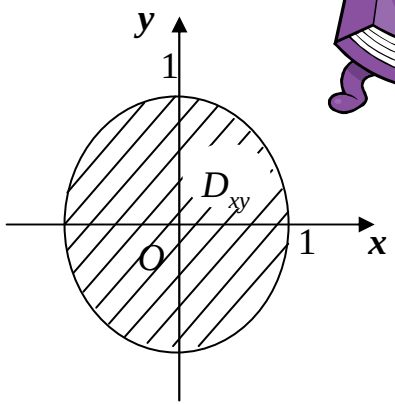


Рис. 43

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{r^2}{1+r^3}dr=\left|\begin{array}{l}1+r^3=u\\ du=3r^2dr\\ u_1=1;u_2=2\end{array}\right|=\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2\frac{1}{3}\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\ln|u|\Big|_1^2 d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\ln 2\, d\varphi=\frac{1}{3}\ln 2\int_0^{\pi}\sin\theta(\varphi)\Big|_0^{2\pi}d\theta=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot 2\pi\, d\theta=\frac{2\pi}{3}\ln 2\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi}{3}\ln 2(1+1)=\frac{4\pi}{3}\ln 2.$$

На початок розділу

2.2. Застосування потрійного інтеграла

1) Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об'єм просторової області обчислюється за формулою $V = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz.$

2) Якщо матеріальне тіло V має густину $\mu = \mu(x, y, z)$, то за фізичним змістом потрійного інтеграла маса m тіла обчислюється за формулою

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\, dxdydz.$$

3) Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ тіла V є відношенням маси m тіла до його об'єму V, тобто $\mu_{\text{сер}} = m / V$.

4) Статичні моменти M_{yz}, M_{xz} і M_{xy} відносно координатних площин і координати центра маси $C(x_c, y_c, z_c)$ тіла V знаходяться відповідно за співвідношеннями:

$$M_{yz} = \iiint_V x\mu(x, y, z)\, dxdydz; \quad M_{xz} = \iiint_V y\mu(x, y, z)\, dxdydz;$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\mu(x, y, z)\, dxdydz; \quad x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \; y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \; z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

5) Моменти інерції I_x, I_y, I_z і I_o тіла V відносно осей і початку координат визначаються відповідно за формулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\mu\, dxdydz; \; I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\mu\, dxdydz;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\mu\, dxdydz; \quad I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\mu\, dxdydz.$$

Приклад

Знайти координати центра маси тіла V, що обмежене площинами $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$, якщо його густина $\mu(x, y, z) = 1$.

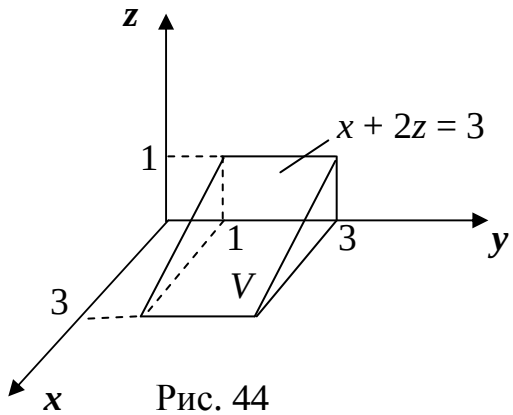


Рис. 44

$$M = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{(3-x)/2} dz = \int_0^3 dx \int_1^3 z\Big|_0^{(3-x)/2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 dx \int_1^3 (3-x)dy = \frac{1}{2}\int_0^3 (3-x)\cdot y\Big|_1^3 dx = \int_0^3 (3-x)dx =$$

$$= \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

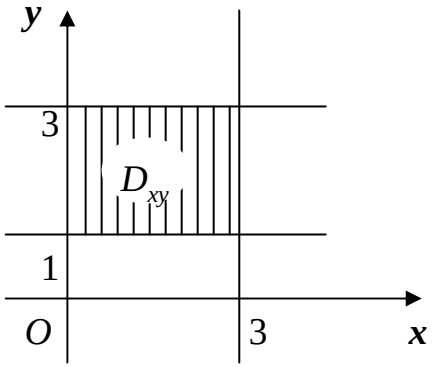


Рис. 45

$$M_{yz} = \iiint\limits_V xdxdydz = \int_0^3 xdx \int_1^3 dy \int_0^{(3-x)/2} dz = \int_0^3 xdx \int_1^3 z\Big|_0^{(3-x)/2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 xdx \int_1^3 (3-x)dy = \frac{1}{2}\int_0^3 x(3-x)\cdot y\Big|_1^3 dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx =$$

$$= \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

Тоді $x_c = 1$.

y_c і z_c знайдіть самостійно.

$y_c = 2$; $z_c = 1/2$.

На початок розділу

3 Поверхневі інтеграли та їх застосування

зміст

3.1. Поверхневий інтеграл за площею (I роду)

3.1.1. Означення та властивості поверхневого інтеграла за площею

Будемо розглядати тільки двосторонні поверхні, тобто такі поверхні, для яких вектор нормалі не змінює свого напряму при повному обході довільного замкненого контуру, що лежить на поверхні та не має спільних точок з її межею. Вибір певної сторони такої поверхні називається її ***орієнтацією***.

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(x, y, z)$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u(\overline{M}_i) = u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} u(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i.$$

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ.

Скінченна границя цієї інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$ *, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається* ***поверхневим інтегралом за площею*** (***поверхневим інтегралом першого роду***) *від функції* $u = u(x, y, z)$ *по поверхні* σ:

$$\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i\right)\Delta\sigma_i,$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$ (найбільша відстань між двома зовнішніми точками межі області $\Delta\sigma_i$).

Якщо $u = u(x, y, z) \geq 0$ і функцію $u = u(x, y, z)$ розглядати як поверхневу густину маси, розподілену по поверхні σ, то поверхневий інтеграл виражає масу всієї поверхні:

$$m = \iint\limits_{\sigma} u(x, y, z)\, d\sigma$$

(<u>фізичний зміст</u> поверхневого інтеграла за площею).

Якщо $u = u(x, y, z)$ є густиною розподілу елементарних зарядів по поверхні, то інтеграл виражає сумарний заряд поверхні.

Коли $u = u(x, y, z) = 1$, то маємо площу поверхні σ $\quad S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma.$

<u>Зауваження</u>. *Поверхневий інтеграл за площею не залежить від вибору сторони поверхні* σ:

$$\iint\limits_{\sigma^-} u(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+} u(x, y, z)\, d\sigma.$$

Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

На початок розділу

3.1.2. Обчислення поверхневого інтеграла за площею

Якщо поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} – проекції σ на площину Oxy, то

$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

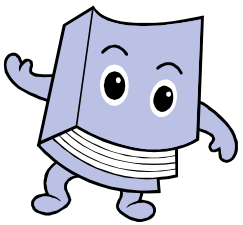
Зауваження 1. Поклавши $u = u(x, y, z) \equiv 1$, для площі поверхні σ маємо формулу

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy.$$

Зауваження 2. Може статися, що поверхня σ неправильна в напрямі осі Oz, але правильна в напрямі осі Oy чи Ox, тобто може бути подана явно у вигляді $y = y(x, z)$ чи $x = x(y, z)$. Тоді хід міркувань зберігається з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину Oxz чи Oyz. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. У загальному випадку поверхню σ треба розбити на правильні у вибраному напрямі частини.

Якщо поверхня – правильна в напрямі осі Oy чи Ox, то

$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_{xz}} u(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz;$$

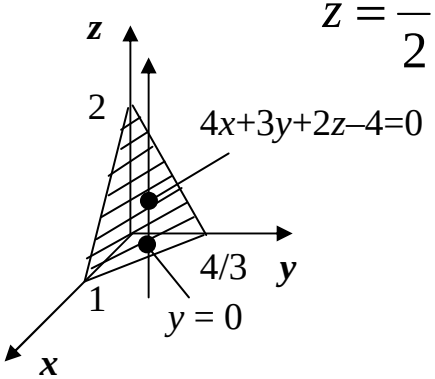


$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_{yz}} u(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz.$$

Обчислити поверхневий інтеграл за площею $I = \iint_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma$, де σ_p – частина площини p: $4x+3y+2z-4=0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню на одну з координатних площин відповідно: а) Oxy, б) Oxz, в) Oyz.

а) Поверхню σ будемо розглядати як правильну в напрямі осі Oz, а її проекцію D_{xy} – як правильну в напрямі осі Oy плоску область (рис. 46). Тоді

$$z = \frac{1}{2}(4-4x-3y);\ z'_x = -2;\ z'_y = -\frac{3}{2};\ D_{xy}: 0 \le x \le 1; 0 \le y \le \frac{4-4x}{3}.$$



$$\iint_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma = \iint_{D_{xy}}(x-3y+4-4x-3y)\sqrt{1+4+9/4}\,dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx \int_0^{(4-4x)/3}(4-3x-6y)\,dy = \frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 \left(4y-3xy-3y^2\right)\Big|_0^{(4-4x)/3} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 \left(\frac{16}{3}(1-x)-(4-4x^2)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\left(\frac{16}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)-\left(2x^2-4\frac{x^3}{3}\right)+\frac{16}{3}\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

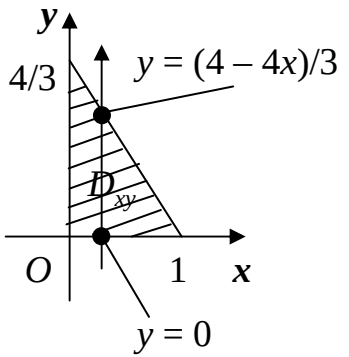
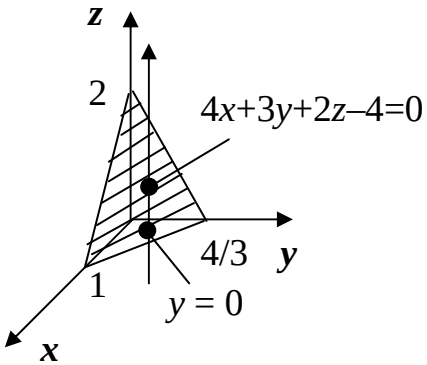


Рис. 46

(Способами б) і в) розв'язати самостійно).

На початок розділу

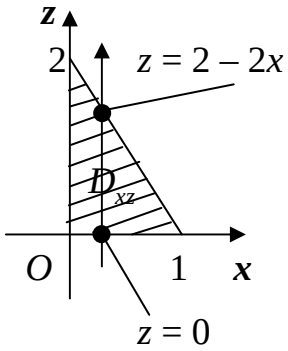


б) $$\iint\limits_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma=\iint\limits_{D_{xz}}(x-4+4x+2z+2z)\sqrt{1+16/9+4/9}dxdz=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{3}\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}(5x+4z-4)dz=\frac{\sqrt{29}}{3}\int_0^1\left(5xz+2z^2-4z\right)\Big|_0^{2-2x}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{3}\int_0^1\left(10x-10x^2+2(4-8x+4x^2)-(8-8x)\right)dx=\frac{\sqrt{29}}{3}\int_0^1(-2x^2+2x)\,dx=$$

$$=\frac{2\sqrt{29}}{3}\int_0^1(-x^2+x)dx=\frac{2\sqrt{29}}{3}\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{29}}{3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

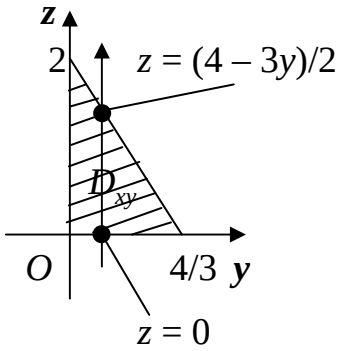


в) $$\iint\limits_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma=\iint\limits_{D_{yz}}\left(1-\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z-3y+2z\right)\sqrt{1+9/16+1/4}dydz=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{4}\int_0^{4/3}dy\int_0^{(4-3y)/2}\left(-\frac{15}{4}y+\frac{3}{2}z+1\right)dz=\frac{\sqrt{29}}{4}\int_0^{4/3}\left(-\frac{15}{4}yz+\frac{3}{2}\frac{z^2}{2}+z\right)\Bigg|_0^{2-\frac{2}{3}y}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{4}\int_0^{4/3}\left(-\frac{15}{4}\left(2y-\frac{3}{2}y^2\right)+\frac{3}{4}\left(4-6y+\frac{9}{4}y^2\right)+2-\frac{3}{2}y\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{4}\left(-\frac{15}{4}\left(y^2-\frac{1}{2}y^3\right)+\frac{3}{4}\left(4y-3y^2+\frac{3}{4}y^3\right)+2y-\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_0^{4/3}=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$



3.1.3. Застосування поверхневого інтеграла за площею

1) <u>Площа поверхні</u> $S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma.$

2) <u>Маса поверхні</u> $m = \iint\limits_{\sigma} u(x, y, z)\, d\sigma.$

3) <u>Статичні моменти</u> поверхні:

$$M_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\mu(x, y, z)d\sigma; \quad M_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x\mu(x, y, z)d\sigma; \quad M_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y\mu(x, y, z)d\sigma.$$

4) <u>Моменти інерції</u> поверхні:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma; \quad I_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma;$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma; \quad I_o = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma.$$

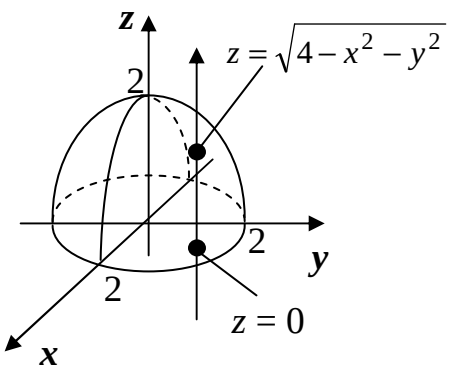
5) <u>Координати центра маси</u> поверхні:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Приклад 1

Знайти масу m частини поверхні σ: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, якщо поверхнева густина $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2};\ z'_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}};\ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$



$$m=\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=2\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\,dxdy=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho=$$

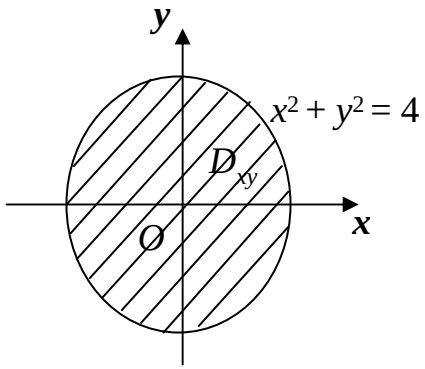
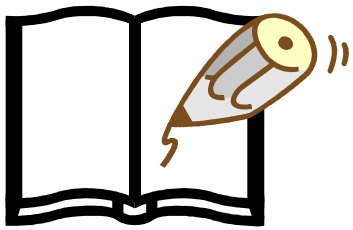


Рис. 47

$$=\left|\begin{array}{c}\rho=2\sin t;\ d\rho=2\cos t dt\\ t_1=0;\ t_2=\pi/2\\ 4-\rho^2=4-4\sin^2 t=4\cos^2 t\end{array}\right|=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t dt=$$

$$=8\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=4\int_0^{2\pi}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}d\varphi=2\pi\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=4\pi^2.$$



На початок розділу

3.2. Поверхневий інтеграл за координатами (II роду)

3.2.1. Означення та властивості поверхневого інтеграла за координатами

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай вибрана сторона $\sigma^{\pm}$ (фіксується один певний знак «+» чи «–») цієї поверхні характеризується одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.

Нехай на поверхні визначено деяку неперервну векторну функцію

$$\vec{F} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\vec{F}$ на поверхні σ.

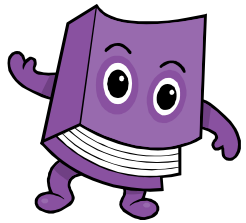
Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожної частини $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо в цій точці значення заданої функції $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і нормалі $\vec{n}(\overline{M}_i)$, потім знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і $\vec{n}(\overline{M}_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарного майданчика $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i.$$

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

Скінченна границя цієї інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$ *, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається* ***поверхневим інтегралом за координатами*** (***поверхневим інтегралом другого роду***) *від вектор-функції* $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$ *по вибраній стороні* $\sigma^{\pm}$ *поверхні σ*:

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}\left(\overline{M}_i\right) \cdot \vec{n}\left(\overline{M}_i\right) \Delta\sigma_i,$$



де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Якщо поверхня замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$.

<u>Зауваження 1</u>. *При зміні орієнтації поверхні σ поверхневий інтеграл за координатами тільки змінює знак*: $\iint\limits_{\sigma^{-}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\iint\limits_{\sigma^{+}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, оскільки при цьому одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ змінює знак. Інші властивості поверхневого інтеграла другого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Якщо виразити скалярний добуток в координатній формі, то одержимо співвідношення

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma,$$

що відображає ***зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду***.

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна подати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно поверхневий інтеграл можна розбити на три інтеграли-доданки:

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

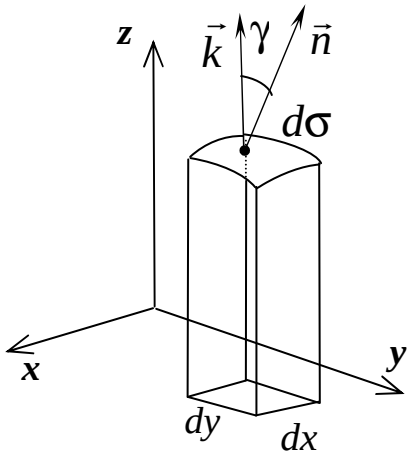


Рис. 48

Розглянемо останній з інтегралів $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$

Обчислимо скалярний добуток $\vec{k}\cdot\vec{n} = |\vec{k}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\gamma = \cos\gamma$ (рис. 48). Далі $\cos\gamma\, d\sigma$ є проекція елементарного майданчика на площину Oxy: $\cos\gamma\, d\sigma = dxdy$, тому

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy.$$

Аналогічно $\cos\alpha\, d\sigma = dydz$, $\cos\beta\, d\sigma = dxdz$.

Тоді $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz$; $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz.$

Отримані три інтеграли $I_x = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz$; $I_y = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz$; $I_z = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$

називаються ***поверхневими інтегралами за відповідною парою координат*** (y, z) або (x, z), або (x, y).

Повний поверхневий інтеграл за координатами записується так

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy,$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

<u>Зауваження 2</u>. Виділимо два важливі випадки, коли поверхневий інтеграл $I_z = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$ за парою координат (x, y) дорівнює нулю:

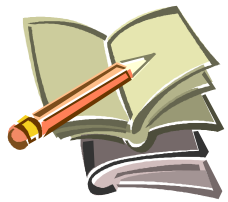
а) якщо $R = 0$ всюди на поверхні σ, тобто векторне поле

$$\vec{F} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

є ***плоскопаралельним*** (вектор $\vec{F}$ паралельний одній площині Oxy), при цьому $\vec{F} \perp \vec{k}$;

б) якщо $\vec{k} \perp \vec{n}$ всюди на поверхні σ, тобто σ є циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні осі Oz, при цьому її проекцією D_{xy} на площину Oxy служить деяка лінія – фігура нульової площі. Аналогічні твердження справедливі для поверхневих інтегралів

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz \quad \text{і} \quad I_y = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz.$$



На початок розділу

3.2.2. Обчислення поверхневого інтеграла за координатами

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$$

зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Можна спочатку перейти до поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma,$$

а потім спроектувати поверхню σ на <u>одну</u> з координатних площин і перейти до подвійного інтеграла.

Але, як правило, зручніше спроектувати поверхню на всі <u>три</u> координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

Метод проектування на одну з координатних площин.

Нехай поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 49). Тоді для напрямних косинусів одиничного вектора нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ справедливі співвідношення:

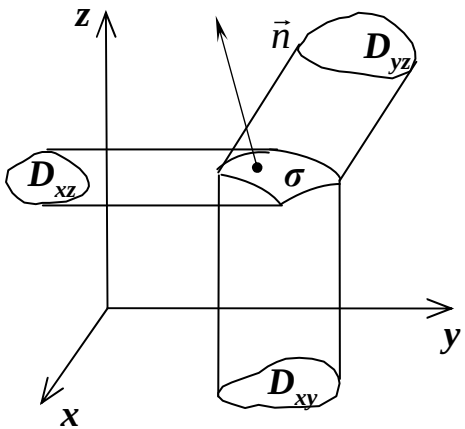


Рис. 49

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}; \quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}};$$

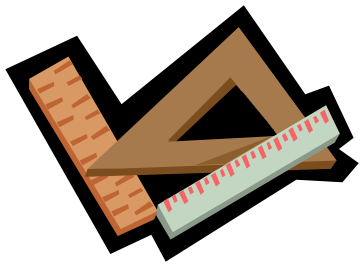
$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

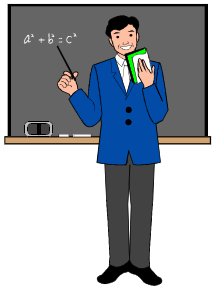
де перед квадратним коренем береться один певний знак «+» чи «–» у залежності від орієнтації поверхні.

Площі елементарного майданчика $d\sigma$ та його проекції $dS = dxdy$ зв'язані рівністю: $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$

Відповідно для поверхневого інтеграла маємо:
у векторній формі

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\left(\vec{F},\vec{n}\right)/|\cos\gamma|\right]\Big|_{z=z(x,y)}\,dxdy$$





або в координатній формі

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{-z'_x\ P}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{-z'_y\ Q}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{R}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \right) \times$$

$$\times \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{xy}} \left(-z'_x(x,y)P(x,y,z(x,y)) - z'_y(x,y)Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))\right) dx\,dy.$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут γ між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною віссю Oz – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

<u>Зауваження 1</u>. Аналогічно розглядаються випадки поверхонь, що правильні в напрямі осей Ox чи Oy. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно).

Метод проектування на всі три координатні площини.

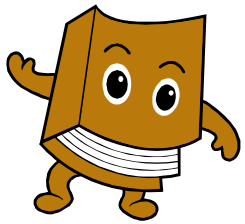
Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямах *Ox*, *Oy*, *Oz*. Її, зокрема, можна задати явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функцію $z(x, y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину *Oxy* (рис. 49).

Якщо $dS = dxdy$ – площа проекції елементарного майданчика $d\sigma$ на площину *Oxy*, то площа самого майданчика

$$d\sigma = dxdy/|\cos\gamma| = \pm dxdy/\cos\gamma,$$

де береться один певний знак «+» чи «–» у залежності від орієнтації поверхні.

Тоді для поверхневого інтеграла $I_z = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$ маємо:



$$I_z = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy,$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла $I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$ за парою координат (x, y) зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли $I_x = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz$ і $I_y = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz$ за відповідною парою координат (y, z) і (x, z):

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,dydz;$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x,z), z)\,dxdz,$$

де D_{yz} і D_{xz} – проекції поверхні σ на відповідні координатні площини. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо кут між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною координатною віссю – гострий, чи знак мінус, якщо цей кут – тупий.

Повний поверхневий інтеграл по координатах знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = I_x + I_y + I_z.$$

<u>Зауваження 2</u>. У загальному випадку поверхню σ доводиться розбивати на правильні у вибраному напрямі частини.

Приклад 1

Обчислити поверхневий інтеграл за координатами

$$I = \iint\limits_{\sigma^-} z\,dydz - 4y\,dxdz + 8x^2\,dxdy$$

методом проектування на одну координатну площину. Тут σ^- – внутрішня сторона частини параболоїда обертання $z = x^2 + y^2 + 1$, що відсікається площиною $z = 2$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ утворює з віссю Oz тупий кут γ.

Задана поверхня зображена на рис. 50. Вона правильна в напрямі осі Oz і задається явно рівнянням $z = x^2 + y^2 + 1$. Коло D_{xy} - її проекція на площину Oxy. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак мінус, оскільки кут γ – тупий. Тоді

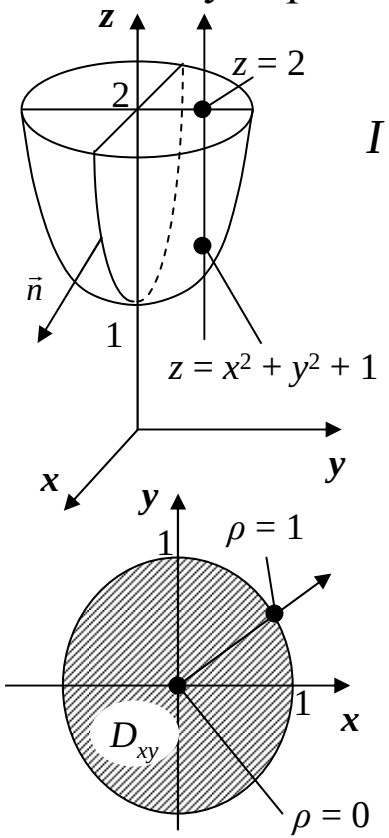


Рис. 50

$$\sigma^- :\ z = x^2 + y^2 + 1,\ z'_x = 2x,\ z'_y = 2y.$$

$$I = \iint\limits_{\sigma^-} zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(-2x(x^2+y^2+1) + 2y\cdot 4y + 8x^2\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(2x(x^2+y^2+1) - 8(x^2+y^2)\right)dxdy = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ x^2+y^2 = \rho^2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \rho \le 1;\ dxdy = \rho\,d\rho\,d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2\rho\cos\varphi(\rho^2+1) - 8\rho^2\right)\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2\rho^4\cos\varphi + 2\rho^2\cos\varphi - 8\rho^3\right)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\cos\varphi\cdot\frac{\rho^5}{5} + 2\cos\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3} - 8\cdot\frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5}\cos\varphi + \frac{2}{3}\cos\varphi - 2 \right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{15}\cos\varphi - 2 \right)d\varphi = \left(\frac{16}{15}\sin\varphi - 2\varphi \right)\Bigg|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

Приклад 2

Методом проектування на всі три координатні площини обчислити $I = \iint\limits_{\sigma^+} xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, де σ^+ – зовнішня сторона частини сфери σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка лежить в першому октанті. Відповідний вектор нормалі якої $\vec{n}$ утворює з віссю Oz гострий кут γ.

Поверхня є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 51). Вона правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz.

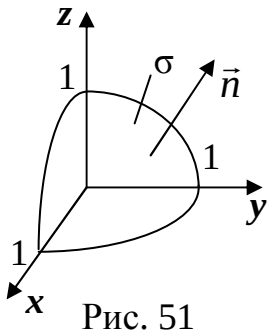


Рис. 51

При цьому нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ^+ з осями Oy і Oz утворює гострі кути β і γ, а з віссю Ox – тупий кут α.

Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса 1. Поверхню σ можна задати явно відповідно одним з рівнянь

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, \qquad y = \sqrt{1 - x^2 - z^2} \qquad \text{чи} \qquad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини по відповідній парі координат (y, z) і (x, z), і (x, y):

$$\iint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+} x\, dydz + xy^2 dxdz + dxdy = I_x + I_y + I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів-доданків:

Подвійні інтеграли обчисліть самостійно.

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^+} x\, dydz = -\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\, dydz = -\frac{\pi}{6}; \quad I_z = \iint\limits_{\sigma^+} xz^2 dxdy = +\iint\limits_{D_{xy}} x(1 - x^2 - y^2) dxdy = \frac{2}{15};$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma^+} dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \frac{\pi}{4}; \quad I = I_x + I_y + I_z = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{15}.$$

На початок розділу

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^+} x\,dydz = -\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz = \left| \begin{array}{c} y=\rho\cos\varphi;\ \ z=\rho\sin\varphi; \\ y^2+z^2=\rho^2;\ \ dydz=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{2}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(-d\varphi) = -\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{6}.$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma^+} dxdz = +\iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \frac{\pi}{4}.$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma^+} xz^2 dxdy = +\iint\limits_{D_{xy}} x\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2 dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right)dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi;\ \ y=\rho\sin\varphi; \\ x^2+y^2=\rho^2;\ \ dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho\left(1-\rho^2\right)\rho\,d\rho = \int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{5}\rho^5\right)\Big|_0^1 \cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{15}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{15}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{15}.$$

3.2.3. Застосування поверхневого інтеграла за координатами

Поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ також називають ***потоком векторного поля*** $\vec{F}$ через вибрану сторону $\sigma^{\pm}$ поверхні σ:

$$\Pi^{\pm} = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

(<u>фізичний зміст</u> поверхневого інтеграла за координатами).

<u>Зауваження 1</u>. Якщо всюди на поверхні σ векторне поле $\vec{F}$ дотичне до неї ($\vec{F} \perp \vec{n}$), тобто σ є векторною поверхнею, то потік через неї дорівнює нулю:

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} 0\, d\sigma = 0.$$

Приклад

Знайти потік векторного поля $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + 2z^2\,\vec{k}$ через частину площини σ: $2x + y + 2z = 1$, яка обмежена координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ утворює з віссю Oz гострий кут γ) (рис. 52)

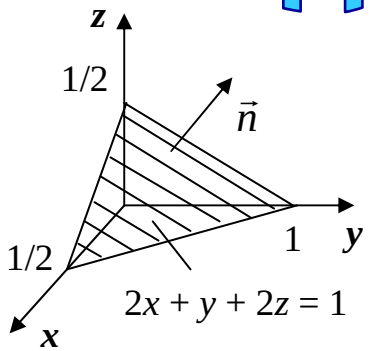


Рис. 52

Проекція D_{xy} поверхні σ на площину Oxy зображена на рис. 53.

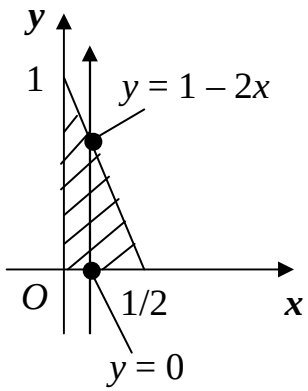


Рис. 53

Знайдемо координати одиничної нормалі до площини:

$$\vec{N} = \{2;1;2\}; \quad \left|\vec{N}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3; \quad \vec{n} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}\cdot 2z^2; \quad z = \frac{1-2x-y}{2}; \quad z'_x = -1; \quad z'_y = -1/2.$$

Тоді
$$\Pi = \iint\limits_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+}\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}\cdot 2z^2\right)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{D}\left(2x^2 + y^2 + 4\left(\frac{1-2x-y}{2}\right)^2\right)\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{D}\left(2x^2 + y^2 + (1-2x-y)^2\right)dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D}(6x^2 + 2y^2 - 4x - 2y + 4xy + 1)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}dx\int_0^{1-2x}(6x^2 + 2y^2 - 4x - 2y + 4xy + 1)dy = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(6x^2y + 2\frac{y^3}{3} - 4xy - 2\frac{y^2}{2} + 4x\frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_0^{1-2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(6x^2(1-2x) + \frac{2}{3}(1-2x)^3 - 4x(1-2x) - (1-2x)^2 + 2x(1-2x)^2 + (1-2x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(-\frac{28}{3}x^3 + 10x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{28}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + 10\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{16} + \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{8} - 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{96}.$$

На початок розділу

3.2.4. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між криволінійним і поверхневим інтегралами (другого роду):

$$\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma, \quad \text{або}$$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

при цьому вибирається додатний напрям обходу контуру L: якщо дивитися з кінця вектора нормалі $\vec{n}$ до відповідної сторони σ^+ поверхні σ, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки.

<u>Зауваження 1</u>. Коли векторне поле безвихрове, тобто $rot\, \vec{F} = \vec{0}$, то для довільного замкненого контуру L, який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо $\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \iint_{\sigma^\pm} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$. Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, то $rot\, \vec{F} = \vec{0}$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

<u>Зауваження 2</u>. Із формули Стокса випливає, що потік вихору векторного поля $\vec{F}$ не залежить від виду поверхні σ, що натягнута на замкнений контур L. Тому *потік вихору векторного поля через замкнену поверхню дорівнює нулю*.

Приклад 1

Дано просторове векторне поле

$$\vec{F} = (2x+z)\vec{i} + 3xy\,\vec{j} + (2y-3z)\vec{k}$$

і поверхня σ – частина площини $p:\ 4x+2y-3z-12=0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Знайти циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру L, що обмежує поверхню σ, при додатному напрямі обходу відносно нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ цієї площини p. Обчислення провести за допомогою формули Стокса.

Поверхня σ – це $\Delta M_x M_y M_z$ (рис. 54) з вектором нормалі $\vec{N} = (3, 4, -2)$.

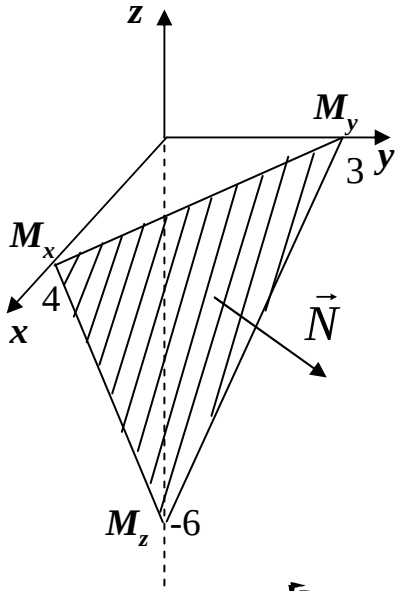


Рис. 54

Поверхня σ правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz. Для обчислення поверхневого інтеграла використаємо метод проектування на одну координатну площину, за яку виберемо Oxy. При цьому нормаль до вибраної сторони σ^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ. Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy є $\Delta OM_x M_y$ (рис. 55). Тоді

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

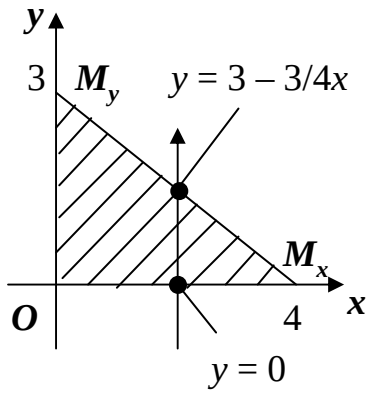


Рис. 55

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x+z & 3xy & 2y-3z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(2y-3z)-\frac{\partial}{\partial z}3xy\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(2y-3z)-\frac{\partial}{\partial z}(2x+z)\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}3xy-\frac{\partial}{\partial y}(2x+z)\right)\vec{k}=(2-0)\vec{i}-(0-1)\vec{j}+(3y-0)\vec{k}=2\vec{i}+\vec{j}+3y\vec{k}.$$

$$\sigma:\ z=3x/2+2y-6;\quad z'_x=3/2;\ z'_y=2;\ \cos\gamma<0\Rightarrow"-"$$

$$\sigma\xrightarrow{Oz}D_{xy}=\Delta OM_xM_y:\ 0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 3-3x/4$$

$$\Gamma=\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}=\iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\sigma^+}2\,dydz+dxdz+3y\,dxdy=-\iint_{D_{xy}}\left(-\frac{3}{2}\cdot 2-2\cdot 1+3y\right)dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}(3y-5)\,dxdy=\int_0^4 dx\int_0^{3-3x/4}(3y-5)\,dy=\int_0^4\left(3\frac{y^2}{2}-5y\right)\Bigg|_0^{3-3x/4}dx=$$

$$=\int_0^4\left(\frac{3}{2}\left(9-\frac{9}{2}x+\frac{9}{16}x^2\right)-5\left(3-\frac{3}{4}x\right)\right)dx=\left(\frac{3}{2}\left(9x-\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{16}x^3\right)-5\left(3x-\frac{3}{8}x^2\right)\right)\Bigg|_0^4=-12.$$

На початок розділу

3.2.5. Формула Остроградського – Гауса

Формула Остроградського – Гауса

в координатній формі

$$\oiint\limits_{\sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

або у векторній формі $\oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V div\, \vec{F}\, dV.$

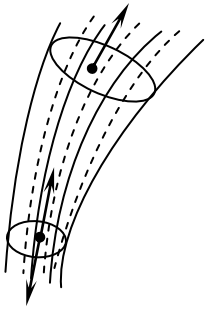


Рис. 56

Зауваження 1. *Дивергенція* $\operatorname{div} \vec{F}$ *не залежить від вибору системи координат (є інваріантною скалярною характеристикою поля*).

Зауваження 2. *В соленоїдальному полі потік вектора в напрямі векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той же.*

Векторна трубка – поверхня, що є сукупністю всіх векторних ліній векторного поля, що проходять через деяку замкнену лінію (рис. 56).

Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей текучої рідини, то в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Зауваження 3. *Інколи зручно доповняти задану поверхню до замкненої, додаючи довільні прості поверхні. Далі потрібно обчислити за формулою Остроградського-Гауса потік через всю замкнену поверхню, а потім відняти потоки через додаткові поверхні.*

Приклад 1

Обчислити потік векторного поля

$$\vec{F}=\left(\frac{1}{3}x^3-2yz\right)\vec{i}+yz^2\vec{j}+(y^2z-x)\vec{k}$$

через зовнішню сторону σ^+ поверхні сфери σ: $x^2+y^2+z^2=1$.

Оскільки поверхня σ замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гауса. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3-2yz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(yz^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(zy^2-x\right)=x^2+z^2+y^2.$$

Тоді $$\Pi=\oiint\limits_{\sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\left|\begin{array}{c} x=\rho\sin\theta\cos\varphi;\;\; y=\rho\sin\theta\sin\varphi;\;\; z=\rho\cos\theta; \\ \sigma:\,\rho=1;\;\; dx\,dy\,dz=\rho^2\sin\theta\;d\rho\,d\varphi\,d\theta;\;\; x^2+y^2+z^2=\rho^2 \end{array}\right|=\iiint\limits_V\rho^4\,\sin\theta\;d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

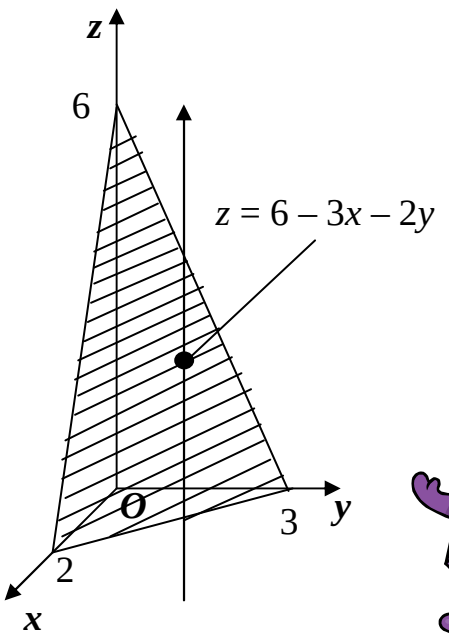
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1\rho^4\,d\rho=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}d\varphi=\frac{2}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{5}.$$

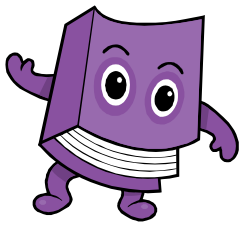
Приклад 2

Обчислити потік векторного поля (самостійно)

$$\vec{F}=(3x+2y)\vec{i}+(3-5y)\vec{j}+(x-2y+6z)\vec{k}$$

через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди V, утвореної при перетині площини p: $3x+2y+z-6=0$ з координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$. Обчислення провести за допомогою формули Остроградського – Гауса.





$$div\,\vec{F} = (3x+2y)'_x + (3-5y)'_y + (x-2y+6z)'_z = 4.$$

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV = 4\iiint\limits_V dxdydz =$$

$$= \left| \begin{array}{c} V:\ 0 \le z \le 6-3x-2y;\ V \xrightarrow{Oz} D_{xy}; \\ D_{xy}:\ 0 \le x \le 2;\ \ 0 \le y \le 3-3x/2 \end{array} \right| =$$

$$= 4\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{6-3x-2y} dz = 4\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-3x/2} (6-3x-2y)\,dy =$$

$$= 4\int\limits_0^2 \left(6y-3xy-y^2\right)\Big|_0^{3-3x/2} dx = 4\int\limits_0^2 \left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9\right) dx =$$

$$= 4\left(\frac{9}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{9}{2}x^2 + 9x\right)\Bigg|_0^2 = 24.$$

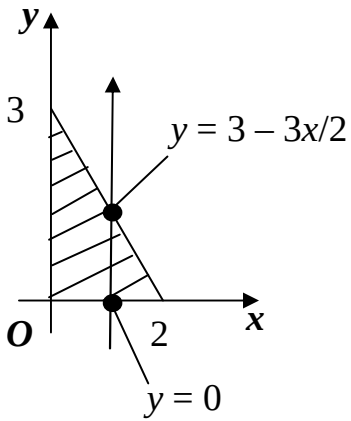


Рис. 57

Приклад 3

Обчислити поверхневий інтеграл за координатами

$$I = \iint\limits_{\sigma^+} y(x^2 - z^2)dydz + x(x^2 + y^2 - z^2)dxdz + (x^2 + y^2)z^2 dxdy,$$

де σ^+ – зовнішня сторона частини однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, що лежить між площинами $z = 0$, $z = 1$.

Задачу розв'язати двома способами:

1) Застосувати метод проектування на всі три координатні площини.

2) Доповнити поверхню σ до замкненої, додаючи круги

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Застосувати формулу Остроградського-Гауса і від результату відняти відповідні поверхневі інтеграли по додаткових поверхнях.

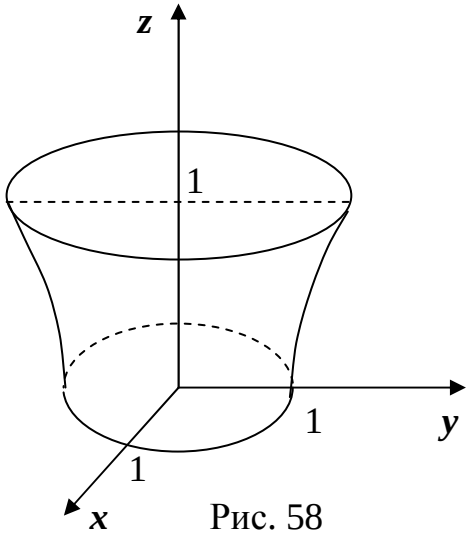


Рис. 58

Спосіб 1.

Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини по відповідній парі координат (y, z), (x, z), (x, y) і обчислимо окремо кожний з інтегралів.

Поверхня σ зображена на рис. 58. Вона неправильна в напрямах Ox, Oy і правильна в напрямі Oz.

а) Розглянемо інтеграл $I_x = \iint_{\sigma^+} y(x^2 - z^2)\,dydz.$ Поверхня σ координатною площиною $x = 0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Ox частини: передню $\sigma_{x1} : x = \sqrt{1 - y^2 + z^2}$ і задню $\sigma_{x2} : x = -\sqrt{1 - y^2 + z^2}$ зі спільною проекцією D_{yz} на площину Oyz (рис. 59).

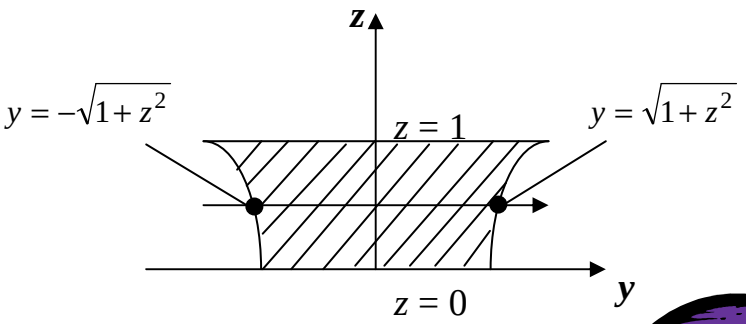
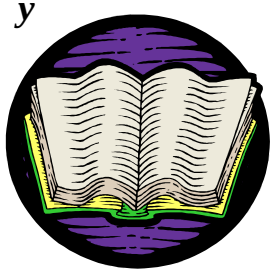


Рис. 59

При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{x1}^+ з віссю Ox утворює гострий кут α, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{x2}^+ з віссю Ox утворює тупий кут α. Тоді



$$I_x = \iint_{\sigma^+} y(x^2 - z^2)dydz =$$

$$= \iint_{\sigma_{x1}^+} y(x^2 - z^2)dydz + \iint_{\sigma_{x2}^+} y(x^2 - z^2)dydz =$$

$$= \iint_{D_{yz}} y\left(\left(\sqrt{1 - y^2 + z^2}\right)^2 - z^2\right)dydz - \iint_{D_{yz}} y\left(\left(-\sqrt{1 - y^2 + z^2}\right)^2 - z^2\right)dydz = 0.$$

б) Розглянемо $I_y = \iint_{\sigma^+} x(x^2+y^2-z^2)\,dxdz.$ Поверхня σ координатною площиною $y=0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oy частини: праву $\sigma_{y1}: y=\sqrt{1-x^2+z^2}$ і ліву $\sigma_{y2}: y=-\sqrt{1-x^2+z^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 60).

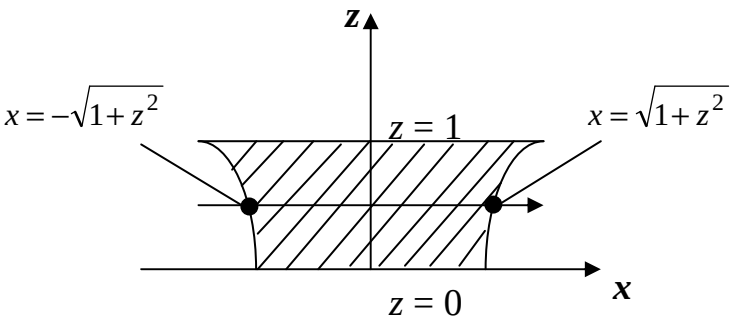


Рис. 60

При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{y1}^+ з віссю Oy утворює гострий кут β, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{y2}^+ з віссю Oy утворює тупий кут β. Тоді

$$I_y = \iint_{\sigma^+} x(x^2+y^2-z^2)dxdz =$$

$$= \iint_{\sigma_{y1}^+} x(x^2+y^2-z^2)dxdz + \iint_{\sigma_{y2}^+} x(x^2+y^2-z^2)dxdz =$$

$$= \iint_{D_{yz}} x\left(x^2+\left(\sqrt{1-x^2+z^2}\right)^2-z^2\right)dxdz - \iint_{D_{yz}} x\left(x^2+\left(-\sqrt{1-x^2+z^2}\right)^2-z^2\right)dxdz = 0.$$

в) Розглянемо інтеграл $I_z = \iint_{\sigma^+} (x^2+y^2)z^2 dxdy$. Поверхня σ – правильна в напрямі осі *Oz*, її можна задати рівнянням $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$. Проекція D_{xy} поверхні σ на площину *Oxy* зображена на рис. 61.

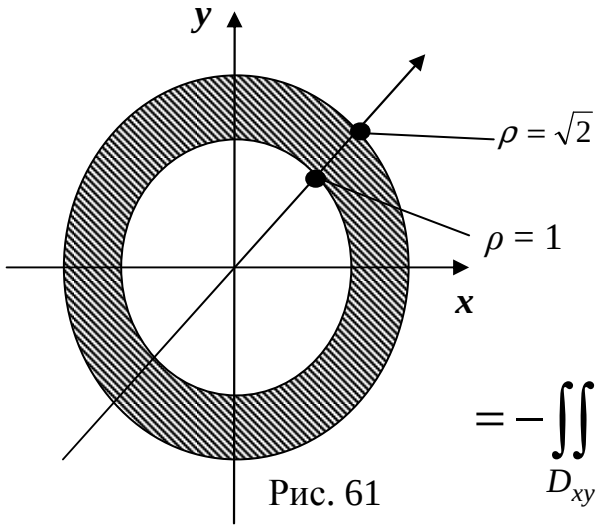


Рис. 61

При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+ з віссю *Oz* утворює тупий кут γ.

$$I_z = \iint_{\sigma^+} (x^2+y^2)z^2 dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2-1}\right)^2 dxdy = -\iint_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right) dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ x^2+y^2 = \rho^2;\ dxdy = \rho\, d\varphi\, d\rho \end{array} \right| = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2(\rho^2-1)\rho\, d\rho = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \left(\rho^5-\rho^3\right) d\rho =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^6}{6} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} d\varphi = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) d\varphi = -\frac{5}{12}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Тоді $I = I_x + I_y + I_z = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Спосіб 2.

Доповнимо поверхню σ до замкненої, додаючи круги

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x^2+y^2\le 2 \\ z=1 \end{cases}.$$

Оскільки поверхня σ (рис. 62) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гауса. Знайдемо дивергенцію

$$div\vec{F}=2xy+2xy+2(x^2+y^2)z.$$

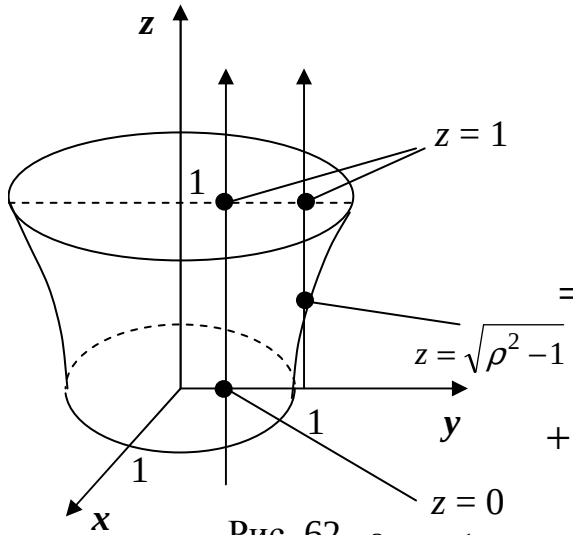


Рис. 62

Тоді

$$\Pi=\iiint\limits_V (4xy+2(x^2+y^2)z)dxdydz=\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{matrix}\right|=$$

$$=\iiint\limits_V (4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2 z)\rho\,d\rho\,dz=\iiint\limits_{V_1}(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2 z)\rho\,d\rho\,dz+$$

$$+\iiint\limits_{V_2}(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2 z)\rho\,d\rho\,dz=\left|\begin{matrix} V_1: 0\le\rho\le 1; 0\le\varphi\le 2\pi; 0\le z\le 1; \\ V_2: 1\le\rho\le\sqrt{2}; 0\le\varphi\le 2\pi; \sqrt{\rho^2-1}\le z\le 1 \end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^1(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2 z)dz+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int_{\sqrt{\rho^2-1}}^1(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2 z)dz=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho\int_0^1(\sin 2\varphi+z)dz+2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho\int_{\sqrt{\rho^2-1}}^1(\sin 2\varphi+z)dz=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\sin 2\varphi\cdot z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1\rho^3 d\rho+2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\left(\sin 2\varphi\cdot z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{\rho^2-1}}^1\rho^3 d\rho=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\right)\rho^3 d\rho+2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\rho^3\left(\sin 2\varphi\cdot\left(1-\sqrt{\rho^2-1}\right)+\frac{1}{2}\left(1-(\rho^2-1)\right)\right)d\rho=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 d\varphi+2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\rho^3\left(\sin 2\varphi-\sin 2\varphi\sqrt{\rho^2-1}+1-\frac{1}{2}\rho^2\right)d\rho=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}d\varphi+2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\left(\rho^3\sin 2\varphi-\rho^3\sin 2\varphi\sqrt{\rho^2-1}+\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{1}{2}\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}+2\int_0^{2\pi}\left(\sin 2\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}-\sin 2\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\rho\cdot\rho^2\sqrt{\rho^2-1}d\rho+\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}\right)d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\rho^2-1=u;\ \rho^2=u+1;\ du=2\rho\,d\rho;\\ \rho\,d\rho=\dfrac{du}{2};\ u_{\acute{i}}=0;\ u_{\hat{a}}=1\end{array}\right|=\frac{\pi}{2}+2\int_0^{2\pi}\left(\sin 2\varphi\cdot\frac{3}{4}-\sin 2\varphi\cdot\int_0^1(u+1)\sqrt{u}\,\frac{du}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\sin 2\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\cdot\left(\frac{2u^{5/2}}{5}+\frac{2u^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{6}\right)d\varphi=\frac{\pi}{2}+2\int_0^{2\pi}\left(\frac{13}{60}\sin 2\varphi+\frac{1}{6}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\left(-\frac{13}{120}\cos 2\varphi+\frac{1}{6}\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}.$$

Знайдемо відповідні поверхневі інтеграли по додаткових поверхнях

а) $\sigma:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$; $\quad I_a=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)z^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 0\,dxdy=0.$

б) $\sigma:\begin{cases} x^2+y^2\le 2 \\ z=1 \end{cases}$;

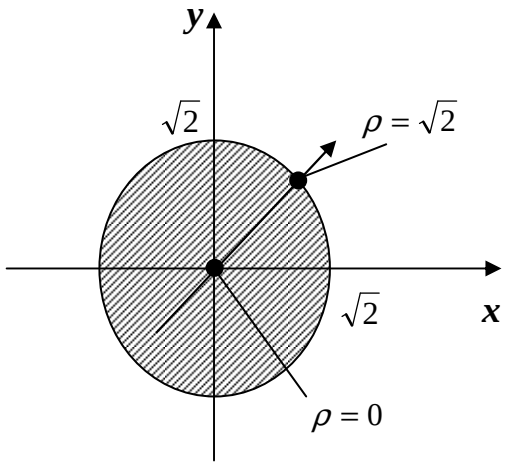


Рис. 63

$$I_{\acute{a}}=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)z^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 1dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi.$$

Тоді $\quad I=\Pi-I_{\grave{a}}-I_{\acute{a}}=\dfrac{7\pi}{6}-2\pi=-\dfrac{5\pi}{6}.$

На початок розділу

Список літератури

1. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 4. – Х.: ХГУ, 1971. – 133 с.

2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1997. – 415 с.

3. Бізюк В. В., Якунін А. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків.– Х.: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

4. Архіпова О. С., Протопопова В. П., Пахомова Є. С. Посібник для розв’язання типових завдань з курсу вищої математики. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 205 с.

5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

6. Станішевський С. О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Колосов Анатолій Іванович,
Якунін Анатолій Вікторович, **Ламтюгова** Світлана Миколаївна

КРАТНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи
з дисципліни “Вища математика” (для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”)

Відповідальний за випуск: *Л. Б. Коваленко*
В авторській редакції

План 2012, поз. 139 М

Підп. до друку 22.03.2012 р. Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум.-друк.арк 3,0
Тираж 10 пр. Зам. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК №4064 від 12.05.2011