МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

**С. А. Станишевский,**
**С. М. Мордовцев**

# Конспект лекций
# и задания для практических и самостоятельных занятий
# по дисциплине «Численные методы»

(для студентов 1 курса заочной формы обучения
направления подготовки 6.030601 -«Менеджмент»)

Харьков – ХНАГХ – 2012

**Станишевский С. А.** Конспект лекций и задания для практических и самостоятельных занятий по дисциплине «Численные методы» (для студентов 1 курса заочной формы обучения направления подготовки 6.030601 -«Менеджмент») / С. А. Станишевский, С. М. Мордовцев; Харьк. нац. акад. гор. хоз-ва. Х.: ХНАГХ, 2012 – 82 с.

Авторы: к.т.н., доц. С. А. Станишевский
к.т.н., доц. С. М. Мордовцев

Рецензент: проф., докт. физ.-мат. наук А. И. Колосов

Рекомендовано кафедрой высшей математики, протокол № 9 от 25.04.2012 р.

Содержание

# Введение

Современная экономика и управление не могут обойтись без математических методов обработки информации. К примеру, для оценки уровня социально-экономического развития используются методы приближенных вычислений, теории вероятности, математической статистики. Для эффективного управления предприятием менеджер обязан владеть методами прогнозирования, осуществлять многовариантные аналитические расчеты.

Численные методы позволяют решать достаточно сложные практические управленческие и экономические задачи, используя современные информационные технологии. В представленном пособии достаточно подробно описаны задачи приближенного решения нелинейных уравнений, определенных интегралов, дифференциальных уравнений первого порядка. Особое внимание уделено вопросам аппроксимации различных функций, которые часто описывают кривые тренда. Рассмотрен один из методов прогнозирования экономических показателей. Приводятся примеры использования табличного процессора MS Excel, языка программирования Visual Basic for Application (VBA).

*Цель дисциплины* — формирование у студентов знаний и навыков для самостоятельного применения методов прикладной математики при решении управленческих задач с использованием информационных технологий.

*Задание дисциплины* заключается в том, чтобы на должном уровне предоставить студентам теоретические и практические знания о специальных разделах высшей математики, посвященных численным методам.

*Предметом дисциплины* являются проблемы, решение которых требует знания прикладной математики.

После самостоятельного изучения теоретического материала студент должен самостоятельно решить предложенные примеры, ответить на вопросы и выполнить расчетно-графические задания (РГЗ) по каждому разделу. РГЗ выполняются согласно вариантам.

# 1. Приближенное решение уравнений

## *1.1 Методы приближенного решения уравнений*

Для большинства уравнений нет возможности получить точное решение. В первую очередь это касается трансцендентных уравнений, в которых неизвестная $x$ находится под знаком трансцендентной функции. Доказано, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольные алгебраические уравнения степени выше четвертой.

Тем не менее, если мы сумеем приближенно определить корни уравнения с заданной степенью точности и указать пределы возможной погрешности, то задачу отыскания корней можно считать решенной.

Рассмотрим произвольное уравнение:

$$f(x) = 0 \qquad (1.1)$$

Построим (можно приближенно) график кривой $y = f(x)$. Тогда точки пересечения графика с осью $Ox$ являются корнями уравнения. Таких корней может быть один, несколько на заданном интервале.

В простейших случаях уравнение можно представить в виде:

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (1.2)$$

Тогда точки пересечения графиков $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ являются корнями уравнения. Например, на рисунке 1.1 показано графическое решение уравнения $x - 1 = \sin x$ на отрезке $[0;3]$. Подобный способ решения уравнений используется крайне редко, погрешность решения велика.

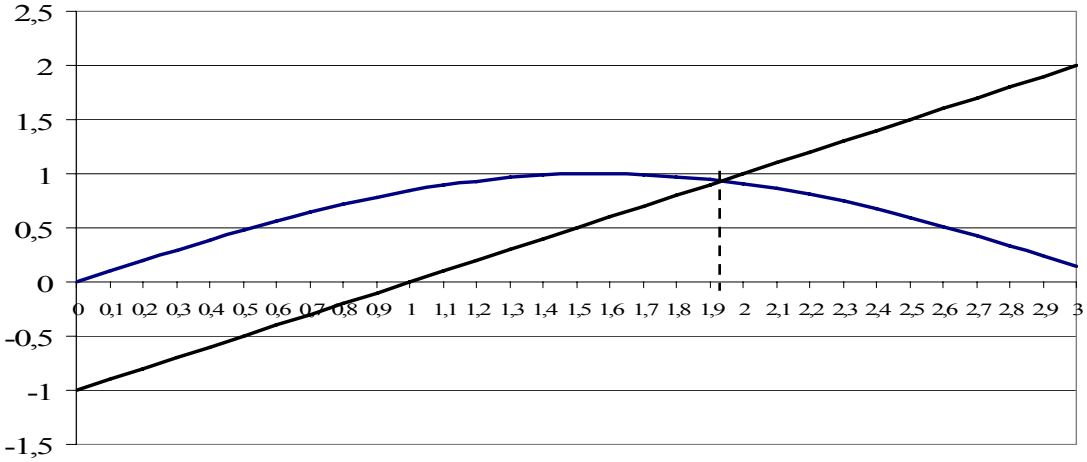



Рис. 1.1 – Графическое решение уравнения (1.2), корень $x_c \approx 1.935$

Перейдем к описанию аналитических методов решения уравнения (1.1). Предполагается, что функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем на этом отрезке находится хотя бы один корень уравнения. Проблема состоит в том, что заведомо неизвестно, сколько корней уравнения лежат на отрезке.

Поэтому на первом этапе рекомендуется подсчитать значения функции в n точках отрезка, причем рекомендуется выбрать значение n такое, что

$h = \dfrac{b-a}{n} \le 0.1$. Одновременно проверяется выполнение неравенства $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$, что будет означать, что на интервале $[x_{i-1}; x_i]$ имеется корень уравнения (1.1). Таким образом, мы определим местонахождение всех корней уравнения на отрезке $[a,b]$.

Второй этап направлен на уточнение значения корней. Рассмотрим, например, как можно с заданной долей приближения определить корень уравнения на интервале $[x_{i-1}; x_i]$. Предлагается использовать следующие методы решения, описанные ниже.

**Метод половинного деления**. В этом случае интервал делится пополам, т.е. вычисляется значение $x_C = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ и значение функции $f(x_C)$. В случае выполнения неравенства $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ полагаем $x_{i-1} = x_C$ (рис 1.2). В противном случае, присваиваем $x_i = x_C$ (рис. 1.3). Затем процедура повторяется до тех пор, пока $x_i - x_{i-1} < \varepsilon$, где $\varepsilon$ - заданная погрешность.

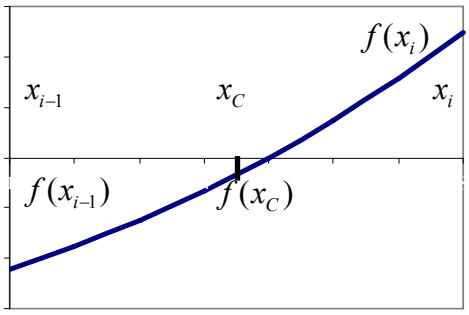



Рис. 1.2 - Выполняется $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$

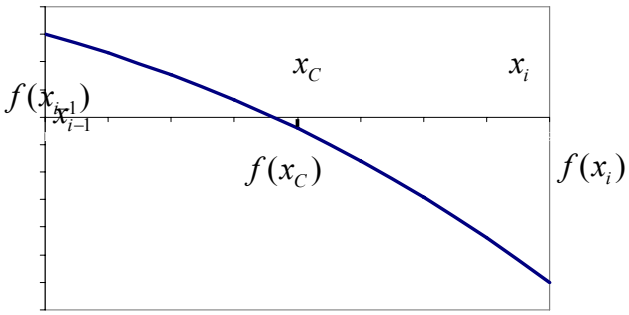



Рис. 1.3 - Выполняется $f(x_C) \cdot f(x_i) > 0$

Достоинством метода является его безусловная сходимость, если на интервале [*a, b*] имеется хотя бы один корень. Кроме того, метод не использует производных. К недостаткам относят медленную сходимость, т.е. достаточно большое число вычислений функции *f(x)* по сравнению с другими методами. Рекомендуется к использованию в тех случаях, если нет жестких требований ко времени счета. А с появлением мощных процессоров, проблема времени уходит на второй план.

**Метод хорд**. Через точки с координатами $\{x_{i-1}; f(x_{i-1})\}$, $\{x_i; f(x_i)\}$ проводится прямая линия (рис .1.4), уравнение которой имеет вид:

$$\frac{y - f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad (1.3)$$

Точка пересечения прямой с осью Ох определяется по формуле:

$$x_C = x_{i-1} - \frac{(x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \qquad (1.4)$$

В случае выполнения неравенства $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ полагаем $x_{i-1} = x_C$. В противном случае, присваиваем $x_i = x_C$. Затем расчеты повторяются до тех пор, пока $|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$ ($\varepsilon$ - заданная погрешность), либо $f(x_i) = f(x_{i-1})$.

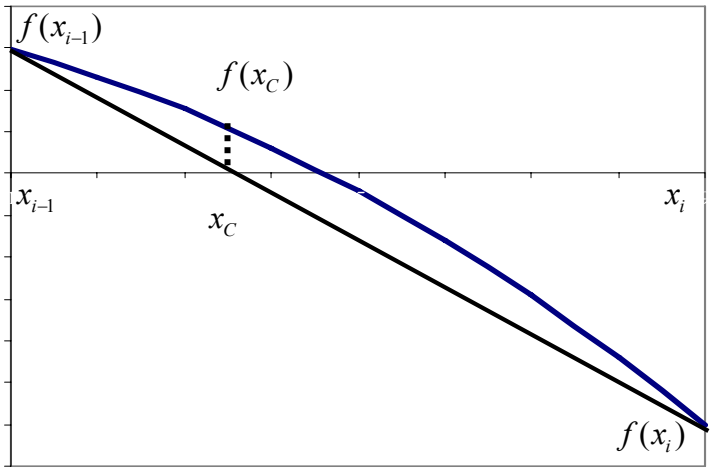



Рис. 1.4 – Метод хорд

**Метод касательных (Ньютона).** Возьмем некоторую точку *c* отрезка $[x_{i-1};x_i]$ и проведем в точке $\{c;f(c)\}$ графика функции касательную к этому графику. Уравнение касательной имеет вид $y-f(c)=f'(c)\cdot(x-c)$. В качестве приближенного корня уравнения примем абсциссу точки пересечения касательной с осью *Ox*. Полагая в уравнении касательной *y=0,* находим для абсциссы точки пересечения

$$x_C = c - \frac{f(c)}{f'(c)} \qquad (1.5)$$

Остается решить вопрос о выборе точки *c*. На рис. 1.5 мы приняли *c =b*. Нетрудно видеть, что в этом случае $f'(c)>0; f''(c)>0,$ так как кривая вогнута. Обычно принимают *c =a* или *c=b,* исходя из того, что знак функции должен совпадать со знаком второй производной, т. е. *c* выбирают так, чтобы произведение $f(c)f''(c)$ было положительно. В этом случае можно гарантировать, что приближенное значение корня, полученное по способу касательных, лежит в интервале $[x_{i-1};x_i]$. При использовании MS Excel и VBA применять метод Ньютона нерационально. Достаточно произвести расчеты с помощью методов половинного деления или хорд.

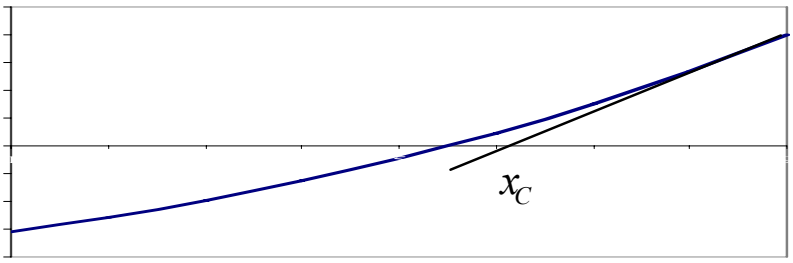



Рис. 1.5 – Метод Ньютона

**Пример**. Решить уравнение $f(x)=x^3-2x^2+3x-5=0$ на отрезке [0;2].

**Решение**. Разобьем отрезок на 20 интервалов длиной 0,1. Подсчитаем значение функции. с помощью MS Excel. График функции представлен на рисунке 1.6

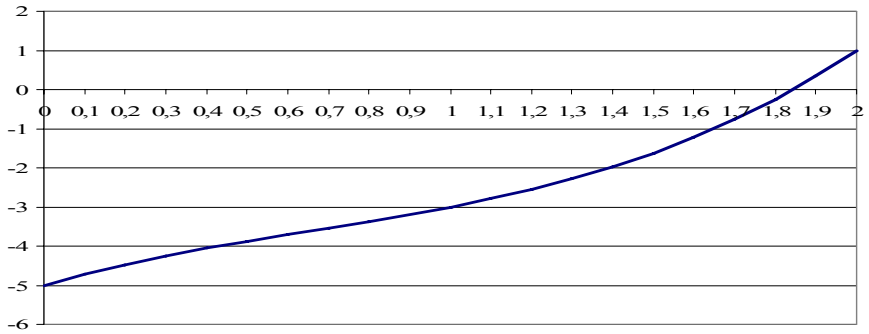



Рис. 1.6 – Поиск интервала, на концах которого функция имеет разные знаки

Из рис. 1.6 видно, что функция меняет знак на интервале [1,8;1,9]. Таким образом, полагаем $x_{i-1} = 1{,}8;\ \ x_i = 1{,}9;\ f(x_{i-1}) = -0{,}248; f(x_i) = 0{,}339$.

Метод половинного деления.

Шаг 1. Подсчитаем $x_C = (1{,}8 + 1{,}9)/2 = 1{,}85 \Rightarrow f(x_C) = 0{,}037$.

Так как $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ *не выполняется*, то полагаем $x_i = x_C = 1{,}85$

Шаг 2. Новое значение $x_C = (1{,}85 + 1{,}8)/2 = 1{,}825$ , а значение функции в этой точке равно $f(x_C) = -0{,}10786$. Неравенство $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ *выполняется* на интервале [1,825; 1,85].

Шаг 3. Следовательно $x_C = (1{,}85 + 1{,}825)/2 = 1{,}8375 \Rightarrow f(x_C) = -0{,}036$ и т.д.

Продолжая процесс, получим решение уравнения $x_C = 1{,}843731689$ при выполнении условия $x_{i-1} - x_i < \varepsilon = 0{,}00001$. Отметим, что $f(x_C) = -0{,}000015$. Как показали расчеты, для достижения этого результата понадобится выполнить 14 шагов.

Метод хорд.

Шаг 1. По формуле (1.4) получим $x_C = 1{,}8 - \dfrac{(1{,}9 - 1{,}8) \cdot (-0{,}248)}{0{,}339 + 0{,}248} = 1{,}8422487$, тогда $f(x_C) = -0{,}00864$. Так как $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ *выполняется*, то полагаем $x_{i-1} = x_C = 1{,}8422487$

Шаг 2. Снова вычисляем $x_C = 1{,}8422487 - \dfrac{(1{,}9 - 1{,}8422487) \cdot (-0{,}00864)}{0{,}339 + 0{,}00864} = 1{,}843684$ тогда $f(x_C) = 0{,}00029$. Так как $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ *не выполняется*, то полагаем $x_i = x_C = 1{,}843684$ и т.д. Как видим, уже на втором шаге получен удовлетворительный результат.

Продолжая процесс, получим решение уравнения $x_C = 1{,}843734$ при выполнении условия $|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon = 0{,}00001$. Как показали расчеты, для достижения этого результата понадобится выполнить 9 шагов.

Метод касательных.

Шаг 1. Вычислим производные $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3;\ f''(x) = 6x - 4$. На интервале [1,8;1,9] производные положительны. В точке $x = 1{,}9$ знак функции совпадает со знаком второй производной. Следовательно, принимаем *c=b.* Тогда по формуле (1.5) получим $x_C = 1{,}9 - \dfrac{0{,}339}{6{,}23} = 1{,}846$. Так как $f(x_C) = 0{,}0132$, то на интервале [1,8;1,846] можно вновь применить метод касательных.

Шаг 2. Полагаем $c$=1,846, тогда по (1.5) получим $x_C = 1{,}846 - \frac{0{,}0132}{5{,}8391} = 1{,}8438$ и т.д.

**Метод итераций**. В ряде случаев для решения уравнений можно применить метод итераций (повторений). Для этого уравнение переписывается в виде:

$$x = \varphi(x) \qquad (1.6)$$

Предположим, что выделенный интервал $[a,b]$ имеет корень уравнения. Выбираем произвольную точку $x_o$ (нулевое приближение) и подчитываем первое приближение: $x_1 = \varphi(x_o)$. Следующие приближения получаются по формуле:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad (1.7)$$

Если последовательность $x_1, x_2, x_3...., x_n$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_C$, то $x_C$ является корнем уравнения (1.6).

Однако может случиться, что последовательность не имеет предела и тогда метод итерации не приводит к цели. Условие сходимости итерационного процесса определяется теоремой.

<u>Теорема</u>. Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a,b]$, $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке и существует такое вещественное число $\lambda$, что $|\varphi'| \le \lambda < 1$ для всех $x \in [a,b]$. Тогда итерационная последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$ сходится при любом начальном приближении $x_O \in [a,b]$

Отметим, что условия теоремы не являются необходимыми. Это означает, что итерационная последовательность может оказаться сходящейся и при невыполнении этих условий.

В ряде случаев уравнение $f(x) = 0$ преобразуется к виду (1.6) следующим преобразованием: $x = x - mf(x)$, где $m$ – произвольная константа. Тогда для выполнения условия теоремы достаточно подобрать $m$ так, чтобы выполнялось условие: $|1 - mf'(x)| \le 1$ на выбранном отрезке.

**Пример**. Решить методом итераций уравнение $4x - 5\ln x = 5$

**Решение**. Запишем уравнение в виде $1{,}25(1 + \ln x) = x$. Построим графики функций $y = \varphi(x) = 1{,}25(1 + \ln x)$ и $y = x$ и найдем точки пересечения графиков (рис. 1.7). Из графика следует, что на изучаем отрезке имеется два корня уравнения. Примем в качестве начального приближения для правого корня $x_O = 2{,}28$. Итерационный процесс сходится, так как $0 < \varphi'(x) = 1{,}25 / x < 1$ в окрестности правого корня.

При отыскании второго корня в окрестности $x_o = 0.57$ процесс оказывается расходящимся, так как первая производная $\varphi'$ больше единицы. Поэтому исходное уравнение следует переписать в виде $x = e^{0.8x-1}$. Тогда $0 < \varphi' = 0.8e^{0.8x-1} < 1$ в окрестности левого корня.

В таблице 1.1 представлены результаты итерационного процесса по формуле (1.7).

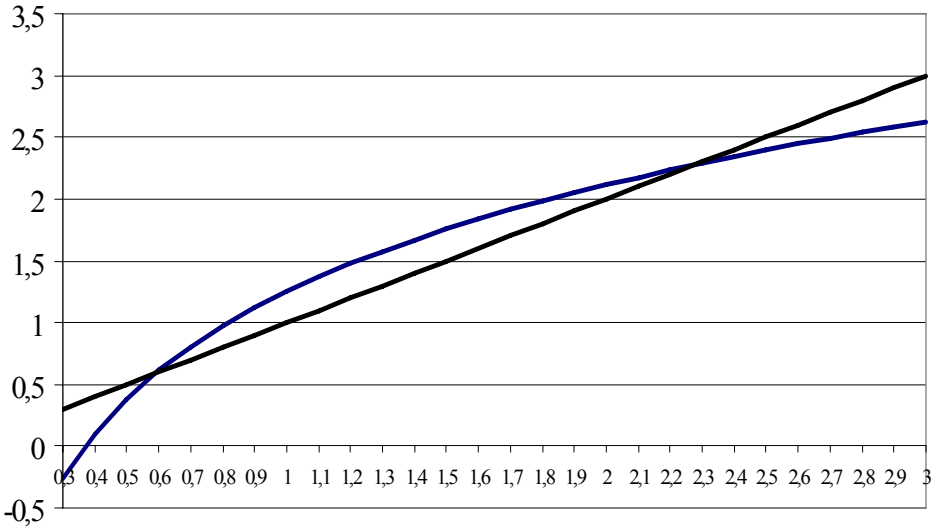



Рис. 1.7 – Определение начальных приближений

Таблица 1.1 – Вычисление корня методом итераций

| n | правый корень | | левый корень | |
|---|---|---|---|---|
| | $x_n$ | $\varphi(x_{n-1})$ | $x_n$ | $\varphi(x_{n-1})$ |
| 1 | 2,28 | 2,28022 | 0,57 | 0,58042 |
| 2 | 2,28022 | 2,28034 | 0,58042 | 0,58528 |
| 3 | 2,28034 | 2,28041 | 0,58528 | 0,58756 |
| 4 | 2,28041 | 2,28044 | 0,58756 | 0,58863 |
| 5 | 2,28044 | 2,28046 | 0,58863 | 0,58914 |
| 6 | 2,28046 | 2,28047 | 0,58914 | 0,58938 |
| 7 | 2,28047 | 2,28048 | 0,58938 | 0,58949 |
| 8 | 2,28048 | 2,28048 | 0,58949 | 0,58954 |
| 9 | 2,28048 | 2,28048 | 0,58954 | 0,58957 |
| 10 | 2,28048 | 2,28048 | 0,58957 | 0,58958 |

Таким образом, найдены два корня уравнения $x_{C1} = 0{,}58957$; $x_{C2} = 2{,}28048$.

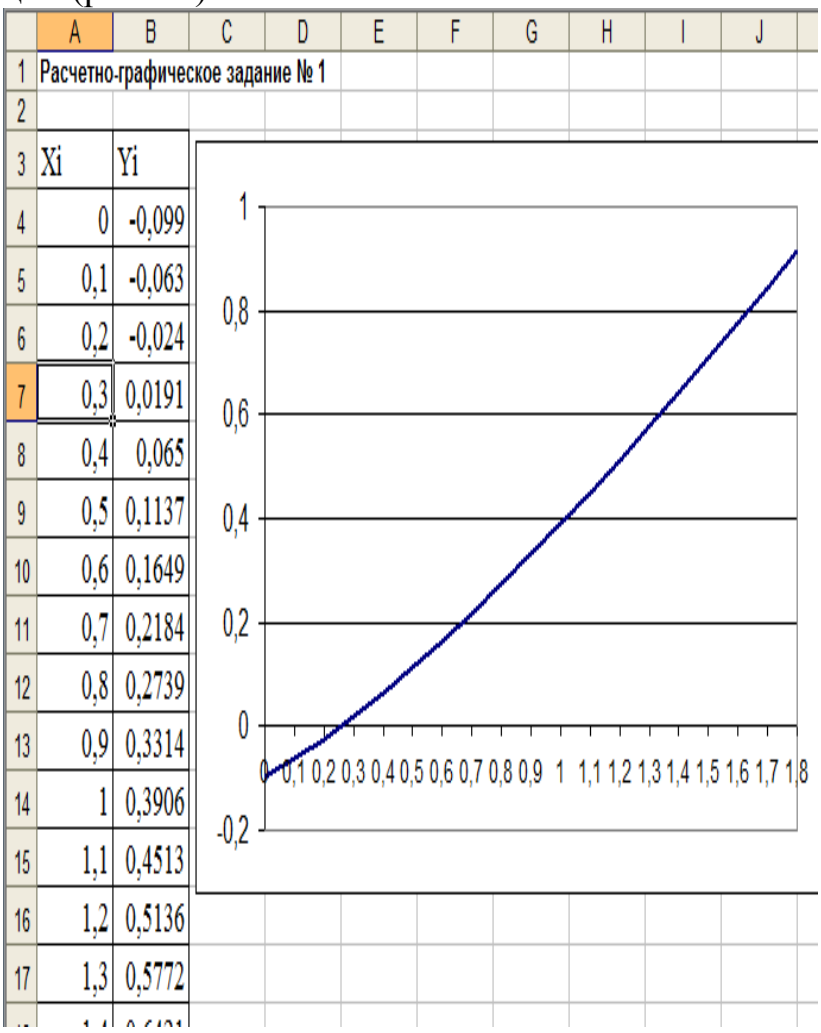
### *1.2. Расчетно-графическое задание № 1.*

Найти корни уравнений, представленных ниже. Для решения задачи составить компьютерную программу вычисления корней методом половинного деления, методом хорд и методом итераций с использованием MS EXCEL.

| | |
|---|---|
| **1.** $\ln x + (x+1)^3 = 0$ | **24.** $arctgx - 3x + 2 = 0$ |
| **2.** $x \cdot 2^x - 1 = 0$ | **25.** $3^{x-1} - 4 - x = 0$ |
| **3.** $\sqrt{x+1} - 1/x = 0$ | **26.** $tg(0{,}44x + 0{,}3) - x^2 = 0$ |
| **4.** $x - \cos x = 0$ | **27.** $\sqrt{x} - \cos(0{,}4x) = 0$ |
| **5.** $3x - \cos x - 4 = 0$ | **28** $x - \sin x - 0{,}25 = 0$ |
| **6.** $x + \ln x - 0{,}5 = 0$ | **29.** $x \ln x - 1{,}2 = 0$ |
| **7.** $2 - x - 3\ln x = 0$ | **30.** $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$ |
| **8.** $(x-1)^2 - 0{,}5e^x = 0$ | **31.** $ctgx - 0{,}1x = 0$ |
| **9.** $(2-x)e^x - 0{,}5 = 0$ | **32.** $\left[(x-2)^2 - 1\right] \cdot 2^x - 1 = 0$ |
| **10.** $2{,}2x - 2^x = 0$ | **33.** $0{,}5^x + 8 - (x+2)^2 = 0$ |
| **11.** $x^2 + 4\sin x - 2 = 0$ | **34.** $4x - 5\ln x - 7 = 0$ |
| **12.** $2x - 5\ln x - 7 = 0$ | **35.** $\sqrt{x+2} - 1/3x = 0$ |
| **13.** $5x - 8\ln x - 8 = 0$ | **36.** $\sin 0{,}8x + 2 - 3x^2 = 0$ |
| **14.** $x^2 - \ln(x+1) = 0$ | **37.** $arctg 2x - 1/x = 0$ |
| **15.** $-2x + \cos x - 0.5 = 0$ | **38.** $2e^x + 1{,}5x - 5 = 0$ |
| **16.** $\sin 0.5x + 1 - x^2 = 0$ | **39.** $arctg(x-1) + 2x - 3 = 0$ |
| **17.** $5x - 8\ln x - 8 = 0$ | **40.** $3^x + 5x - 3 = 0$ |
| **18.** $0{,}6x + \ln(x+2) - 1 = 0$ | **41.** $2e^x - 2x - 3 = 0$ |
| **19.** $\sin(x + 0{,}5) - 2x + 0{,}5 = 0$ | **42.** $(x-3)\cos x + 1 = 0$ |
| **20.** $\ln(2+x) + 2x - 3 = 0$ | **43.** $0{,}5x^2 + 2\sin x - 1 = 0$ |
| **21.** $2^x + 5x - 3 = 0$ | **44.** $(2-x)e^x - 0{,}5 = 0$ |
| **22.** $(x-4)\cos x - 1 = 0$ | **45.** $\sin x + 1 - x^3 = 0$ |
| **23.** $arctgx - 1/3x^2 = 0$ | **46.** $-7x + \ln(x+1) + 3 = 0$ |

**Пример выполнения РГЗ № 1.** Решить уравнение $x - \ln(2x+3) = -1$

**<u>Пример решения</u>.** На рабочем листе MS Excel составьте таблицу, которая подсчитывает значения функции $y = f(x) = x - \ln(2x+3) + 1$ и постройте график функции (рис 1.8).




**Метод итераций**

| n | Xi | φ(Xi) |
|---|---|---|
| 1 | 0,2500000 | 0,2527630 |
| 2 | 0,2527630 | 0,2543406 |
| 3 | 0,2543406 | 0,2552402 |
| 4 | 0,2552402 | 0,2557529 |
| 5 | 0,2557529 | 0,2560450 |
| 6 | 0,2560450 | 0,2562113 |
| 7 | 0,2562113 | 0,2563060 |
| 8 | 0,2563060 | 0,2563599 |
| 9 | 0,2563599 | 0,2563906 |
| 10 | 0,2563906 | 0,2564081 |
| 11 | 0,2564081 | 0,2564181 |
| 12 | 0,2564181 | 0,2564237 |
| 13 | 0,2564237 | 0,2564269 |
| 14 | 0,2564269 | 0,2564288 |
| 15 | 0,2564288 | 0,2564298 |
| 16 | 0,2564298 | 0,2564304 |
| 17 | 0,2564304 | 0,2564308 |
| 18 | 0,2564308 | 0,2564310 |
| 19 | 0,2564310 | 0,2564311 |
| 20 | 0,2564311 | 0,2564311 |

Рис. 1.8 – Значения и график функции $y = f(x) = x - \ln(2x+3) + 1$

Из рисунка следует, что корень уравнения находится в интервале [0.2;0.3].

**<u>Метод итераций</u>.** В качестве последовательного приближения выбираем $x_o = 0.25$. Представим уравнение в виде $x = \varphi(x) = \ln(2x+3) - 1$. Вычислите производную $\varphi'$. Неравенство $\varphi'(x_0) = \left.\dfrac{2}{2x+3}\right|_{x=x_0} = 0{,}57 < 1$ выполнено.

В MS Excel составьте таблицу, реализующую итерационный процесс. Для этого необходимо ввести формулы в ячейки таблицы:

в ячейку F18 введите =LN(2*E18+3)-1

в ячейку E19 введите =F18

Затем размножить формулы по строкам таблицы (рис. 1.8). Таким образом, корень уравнения $x_C = 0{,}2564312$, причем $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 10^{-5}$.

**<u>Метод половинного деления</u>.** Для реализации алгоритма, описанного выше составим процедуру с использованием встроенного языка программирования Visual Basic for Aplication (VBA). Необходимые сведения о VBA представлены в приложении 2.

С помощью панели «Элементы управления» в ячейке H16 внедрите объект «Кнопка» (CommandButton1), в окне «Свойства» в строке «Caption» введите наименование: МПД (рис. 1.9):

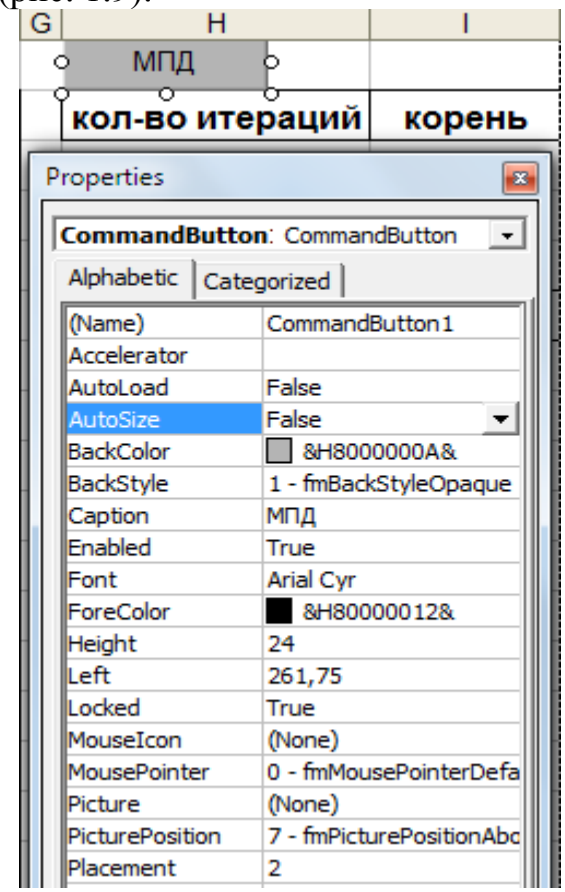



Рис. 1.9 – Внедрения объекта «Кнопка»

Дважды щелкните по кнопке и запишите код процедуры, которая реализует метод:

| *Текст кода* | *Комментарий (не вводится)* |
|---|---|
| Private Sub CommandButton1_Click() | Объявлена процедура |
| Dim f(1000) | задан массив для значений функции |
| n = 0.1 | задан шаг разбиения |
| i = 0 | |
| E = 0.0000001 | задана погрешность $\varepsilon$ |
| j = 17 | начальное значение счетчика строк |
| For x = 0 To 3 Step n | открыт цикл для расчета значений функции |
| i = i + 1 | |
| f(i) = x - Log(2 * x + 3) + 1 | подсчитывается функция |
| If i > 1 And f(i) * f(i - 1) < 0 Then | если соседние значения функции разных знаков, то начинает работу метод: определяются $x_{i-1} \to x1$ |
| j = j + 1 | |
| x1 = x - n | |
| x2 = x | $x_i \to x2$ |

| | |
|---|---|
| L = n | начальное значение L |
| k = 0 | подключается счетчик числа шагов |
| While L > E | начинает работать метод пока L>ε |
| k = k + 1 | |
| xc = (x1 + x2) / 2 | вычисляются $x_C$ и $f(x_C)$ |
| fc = xc - Log(2 * xc + 3) + 1 | |
| If f(i) * fc < 0 Then | если неравенство выполняется |
| x1 = xc | $x_{i-1} \to x_C$ |
| Else | в противном случае |
| x2 = xc | $x_i \to x_C$ |
| End If | |
| L = x2 - x1 | пересчитывается значение L |
| Wend | конец внутреннего цикла |
| jj = Trim(Str(j)) | |
| Worksheets(2).Range("h" + jj).Value = xc | вывод корня в ячейку h18 |
| Worksheets(2).Range("i" + jj).Value = k | вывод числа шагов в ячейку i18 |
| End If | |
| Next | конец внешнего цикла |
| End Sub | конец процедуры |

При нажатии кнопки (событие Click) процедура определит корень уравнения: $x_C$ = 0,25643129 3, число итераций – 20.

**<u>Метод хорд</u>.** В ячейке H20 внедряется еще одна кнопка, имеющая название: Метод хорд. Текст процедуры имеет вид:

| *Текст кода* | *Комментарий (не вводится)* |
|---|---|
| Private Sub CommandButton2_Click() | Объявлена процедура |
| Dim f(1000) | массив для значений функции |
| n = 0.1 | задан шаг |
| i = 0 | |
| E = 0.00000001 | задана погрешность $\varepsilon$ |
| j = 8 | начальное значение счетчика строк |
| For x = 0.1 To 3 Step n | открыт цикл по X |
| i = i + 1 | счетчик цикла |
| f(i) = -3 * x + Log(x + 1) + 2 | вычисление функции |
| If i > 1 And f(i) * f(i - 1) < 0 Then | проверка: если соседние значения функции разных знаков, то начинает работу метод хорд: определяются |
| j = j + 1 | |
| x1 = x - n | $x_{i-1} \to x1$; $x_i \to x2$ |
| x2 = x | |
| f1 = f(i - 1) | |
| f2 = f(i) | задано начальное значение L |
| L = abs(f2-f1) | начальное значение счетчика итераций |
| k = 0 | |
| Do While L > E | открыт цикл для реализации метода хорд до тех пор пока L>E |
| k = k + 1 | |

| | |
|---|---|
| If f1 = f2 Then<br>xc = x2<br>Exit Do<br>Else<br>xc = x1 - (x2 - x1) * f1 / (f2 - f1)<br>fc = -3 * xc + Log(xc + 1) + 2<br>If f2 * fc < 0 Then<br>x1 = xc<br>f1 = fc<br>Else<br>x2 = xc<br>f2 = fc<br>End If<br>L = abs(f2-f1)<br>End If<br>Loop<br>jj = Trim(Str(j))<br>Worksheets(1).Range("g" + jj).Value = xc<br>Worksheets(1).Range("h" + jj).Value = k<br>End If<br>Next<br>End Sub | если f1=f2, то корень найден - выход из цикла<br><br><br>вычисляется $x_C$ и $f(x_C)$<br><br>если неравенство выполняется<br>$x_{i-1} \to x_C$<br>иначе<br>$x_i \to x_C$<br><br>Конец условия<br>пересчитывается значение L<br><br>конец внутреннего цикла<br><br>вывод первого корня в ячейку H21<br>вывод числа итераций в ячейку i21<br><br>конец внешнего цикла<br>конец процедуры |

Результат выполнения процедуры, реализующей метод хорд показан на рисунке 1.10:

Метод хорд

| кол-во итераций | корень |
|---|---|
| 0,256431209 | 8 |

Рис. 1.10 – Вычисление корня уравнения методом хорд

### *1.3. Задачи для самостоятельного решения*

1. Определить корни уравнения $tg(0{,}55x + 0.1) = x^2$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001.

Ответ: $x_C$ = 0,75

2. Определить корень уравнения $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.5 = 0$ методом хорд с точностью до 0.001.

Ответ: $x_C$ = -0,96

3. Определить корни уравнения $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$ методом половинного деления отрезка с использованием MS Excel.

Ответ: $x_1$ = -1,935; $x_2$ =1,463; $x_3$ =2,473

4. Определить корни уравнений, представленных ниже, используя методы половинного деления отрезка и хорд:

а) $5^x - 6x - 3 = 0$ ответ: $x_1$ = -0,41446; $x_2$ =1,563324

б) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ ответ: $x_1$ = - 1,73205; $x_2$ =1,73205

в) $2\cos(x + \pi/6) + x^2 = 3x - 2$ ответ: $x_1$ = 1,0,3181; $x_2$ =2,9607

г) $x^2 \log_{0,5}(x+1) = 1$ ответ: $x_C$ = - 0,7288

5. Методом Ньютона вычислить корень уравнения $e^x(2-x) - 0.5 = 0$ на отрезке [1.5; 2.5] с точностью ε=0,001.

Ответ: $x_C$ =1,927

6. Определить корни уравнения $2x + \lg(2x+3) = 1$ методом итераций.

Ответ: $x_C$ =0,23

### *1.4. Вопросы по теме*

1. Каковы этапы решения уравнения с одной неизвестной численными методами?
2. Какие существуют методы решения уравнения с одной неизвестной?
3. Суть метода половинного деления отрезка. Графическая интерпретация метода.
4. Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода.
5. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода.
6. Суть метода простой итерации.
7. Какое уравнение можно решать методом простой итерации?
8. Каковы достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении уравнения $x = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, содержащего корень, методом простой итерации?
9. Как строится итерационная последовательность точек при решении уравнения методом простой итерации?

# 2. Приближенное вычисление интегралов

## *2.1. Формула прямоугольников*

Для вычисления определенного интеграла используется формула Ньютона Лейбница. Однако большинство интегралов невозможно вычислить через комбинацию элементарных функций. Например, простой на первый взгляд, интеграл $\int_0^{\pi} \sqrt{x} \cdot \sin x dx$ невозможно вычислить точно. Поэтому необходимо разработать приближенные методы, позволяющие находить численное решение интегралов.

Известно, что определенный интеграл $J = \int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $y = f(x)$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ох, прямыми $y = a, y = b$ и кривой $y = f(x)$. Это утверждение поможет нам получить формулы для приближенного вычисления интегралов.

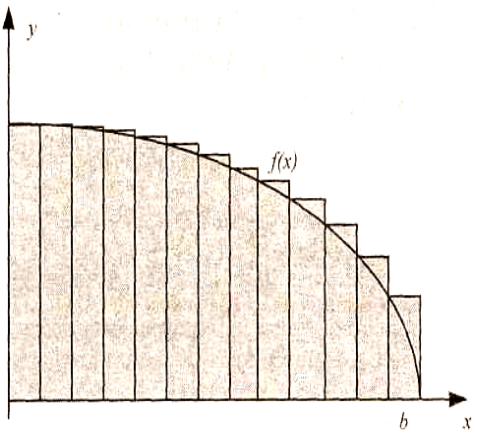



Рис. 2.1 - Метод левых прямоугольников

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей. Длина одной части равна $h = \frac{b-a}{n}$. Назовем эту величину шагом. Введем обозначения:

$$y_0 = f(a), y_1 = f(a+h),$$
$$y_2 = f(a+2h),...$$
$$y_i = f(a+ih),...y_{n-1} = f(a+(n-1)h),$$
$$y_n = f(a+nh) = f(b)$$

Построим прямоугольники так, как показано на рисунке 2.1. Вычислим площади прямоугольников. Полученное значение можно считать приближенным значением определенного интеграла:

$$J \approx S_{П1} = hy_0 + hy_1 + ...hy_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot h \qquad (2.1)$$

Построим прямоугольники так, как показано на рисунке 2.2. Вычислим площади прямоугольников. Тогда получим вторую формулу для приближенного вычисления интеграла:

$$J \approx S_{П1} = hy_1 + hy_1 + ...hy_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot h \qquad (2.2)$$

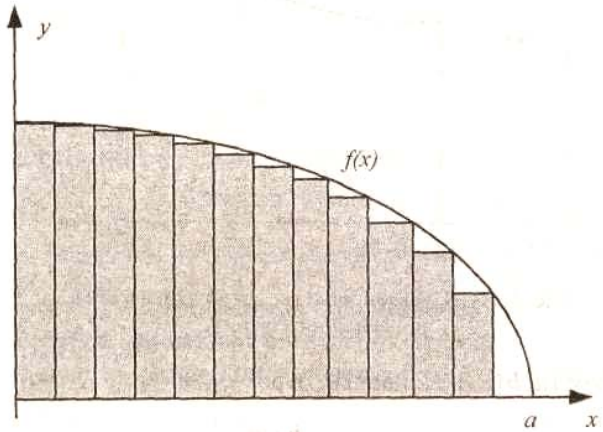



Рис. 2.2 - Метод правых прямоугольников

При увеличении числа разбиений повышается точность вычислений. Определим погрешность метода. Для этого разложим функцию в окрестности точки $x = x_i$

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)\cdot(x - x_i) + \frac{1}{2}f''(x_i)\cdot(x - x_i)^2 + \frac{1}{6}f''(x_i)\cdot(x - x_i)^3 + \frac{1}{24}f''''(x_i)\cdot(x - x_i)^4 + ...$$

Тогда интеграл на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ будет равен

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong f(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2}f'(x_i)(\Delta x_i)^2 + \frac{1}{6}f''(x_i)(\Delta x_i)^3 + \frac{1}{24}f'''(x_i)(\Delta x_i)^4 + \frac{1}{120}f''''(x_i)(\Delta x_i)^5 + ...$$

Погрешность на отрезке составит

$$\Delta_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}f'(x_i)(\Delta x_i)^2$$

Полное число отрезков равно n, $\Delta x_i = h = (b - a)/n$ , тогда полная погрешность составит для метода прямоугольников $n\Delta_i$ , т.е. $M(b - a)h/2$, где $M = \max|f'(x)|$.

## *2.2. Формула трапеции*

После деления отрезка $[a, b]$ на n частей построим трапеции так, как показано на рисунке 3.3 и вычислим суммарную площадь этих трапеций:

$$S_T = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \frac{y_2 + y_3}{2}h + .... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h$$

В результате получим приближенную формулу вычисления интегралов методом трапеции:

$$J \approx S_T = h\cdot\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right] = h\cdot\left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2}\right] \qquad (2.3)$$

Погрешность на отрезке составит

$$\Delta_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{1}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]\Delta x_i = \frac{1}{12}f''(x_i)(\Delta x_i)^3$$

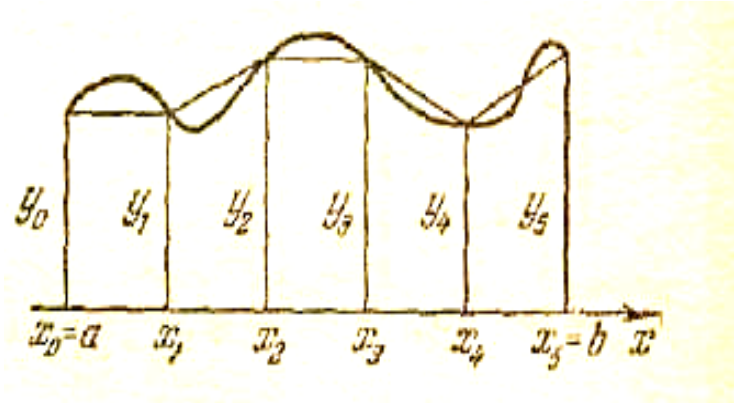



Рис. 2.3 - Метод трапеций

Полное число отрезков равно n, $\Delta x_i = h = (b-a)/N$ , тогда полная погрешность составит для метода трапеций $n\Delta_I$, т.е. $L(b-a)h^2/12$, где $L = \max|f''(x)|$.

## *2.3. Формула Симпсона*

Предположим, что дано уравнение параболы $Y = Ax^2 + Bx + C$, которая исследуется на отрезке *[-h; h]*. Вычислим значения функции в трех точках отрезка: $Y(-h) = Ah^2 - Bh + C,\ Y(0) = C,\ \ Y(h) = Ah^2 + Bh + C$. Отсюда следует $Y(-h) + Y(h) = 2Ah^2 + 2C$.

Вычислим интеграл

$$J_n = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch = \frac{h}{3}\cdot(2Ah^2 + 6C)$$

или $J_n = \frac{h}{3}\cdot\left[Y(-h) + Y(h) + 4Y(0)\right]$

Введем обозначения: Y(-h)=$y_0$, Y(0)=$y_1$, Y(h)=$y_2$, тогда

$$J_n = \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (2.4)$$

- площадь, ограниченная параболой, осью x и вертикальными прямыми $x = \pm h$

Выберем четное число n и разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей. Длина одной части равна $h = \frac{b-a}{n}$. Назовем эту величину шагом. Заменяем на интервалах отрезка кривую $y = f(x)$ параболами, проходящими через 3 точки. Вычислим сумму площадей этих парабол, используя формулу (3.4):

$$S_C = \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6 + ... + y_{n-2} + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \Rightarrow$$

Таким образом, получим формулу Симпсона, которая достаточно точно (по сравнению с предыдущими методами) вычисляет определенный интеграл:

$$J \approx S_C = \frac{h}{3}\cdot(y_0 + y_n + 4\cdot(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}) + 2\cdot(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})) \qquad (2.5)$$

Полная погрешность составит $\frac{K(b-a)h^4}{18}$, где $K = \max\left|f^{IV}(x)\right|$

**Пример**. Вычислить определенный интеграл $J = \int_1^e \ln x dx$

**<u>Решение</u>**. Для решения используем табличный процессор MS EXCEL. Вначале вычислим шаг, используя формулу $h = \frac{e-1}{10}$ (отрезок решено поделить на n=10 частей). Для этого введем формулу в ячейку B1: =(EXP(1)-1)/10

Затем создадим таблицу и в качестве первого значения *x* введем нижний предел интегрирования, т.е. в нашем случае – единицу.

Следующие значения *x* получаются прибавлением шага к предыдущему значению. На рисунке 2.4 показано, как записываются основные формулы для вычисления значений подынтегральной функции $y = LN(x)$:

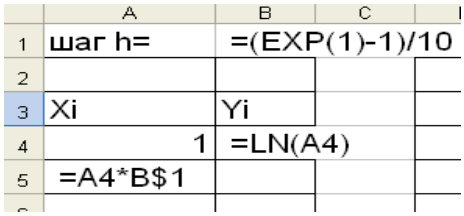



Рис. 2.4 - Формирование таблицы для расчета подынтегральной функции

После копирования формул получим значения функции $y = LN(x)$, которые имеют обозначения $y_0; y_1; ....y_n$. Построим график функции на отрезке $[1, e]$. Таким образом, значение интеграла равно площади криволинейной трапеции, представленной на графике (рис. 2.5). Зная значения $y_i$, с помощью формул (2.1), (2.2), (2.3) и (2.5) вычислим приближенное значение интеграла, вводя эти формулы в соответствующие ячейки. Результаты расчета представлены ниже:

| x | Y |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1,17183 | 0,1585651 |
| 1,34366 | 0,2953945 |
| 1,51548 | 0,4157352 |
| 1,68731 | 0,5231372 |
| 1,85914 | 0,6201145 |
| 2,03097 | 0,7085131 |
| 2,2028 | 0,789728 |
| 2,37463 | 0,8648397 |
| 2,54645 | 0,9347017 |
| 2,71828 | 1 |

$y_0$

$y_n$

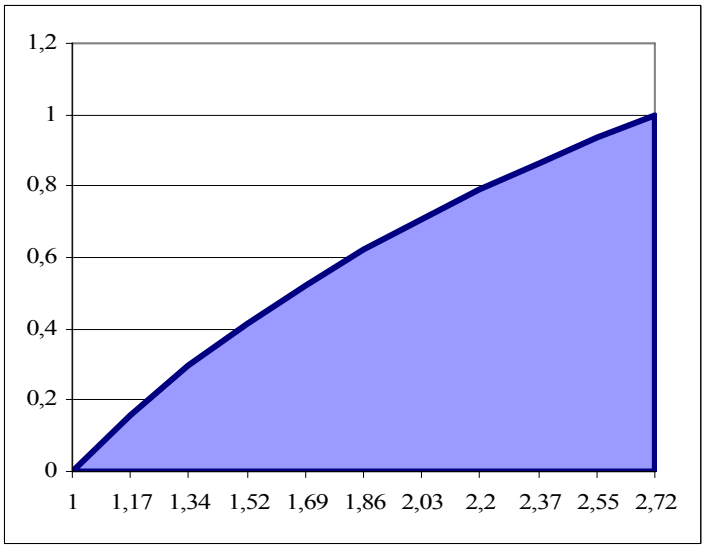



Рис. 2.5 – График функции $y = LN(x)$

**МЕТОДЫ:**

| | |
|---|---|
| **прямоугольников** | 0,91253291 |
| | 1,084361 |
| **трапеций** | 0,998447 |
| **Симпсона** | 0,999991 |

Формула (2.1) вводится в ячейку С18 и может быть записана в виде

**=СУММ(В4:В13)*В1**

Таким образом, приближенное значение интеграла $\int_1^e Lnxdx \approx 0{,}999991$

Сравним с точным значением, которое вычисляется по формуле:

$$\int^e Lnxdx = x \cdot Lnx\Big|_1^e - x\Big|_1^e = 1$$

Погрешность не превышает $10^{-5}$

## *2.4. Метод Монте-Карло.*

В предыдущих пунктах мы рассмотрели несколько различных формул интегрирования, в которых использовались значения функции $f(x)$, вычисляемые в равноотстоящих точках. Однако можно использовать и другой подход, суть которого легко понять из следующего примера.

Представим себе прямоугольник высотой *H* и длиной *b - a* такой, что функция *fx)* целиком лежит внутри данного прямоугольника (рис. 2.6).

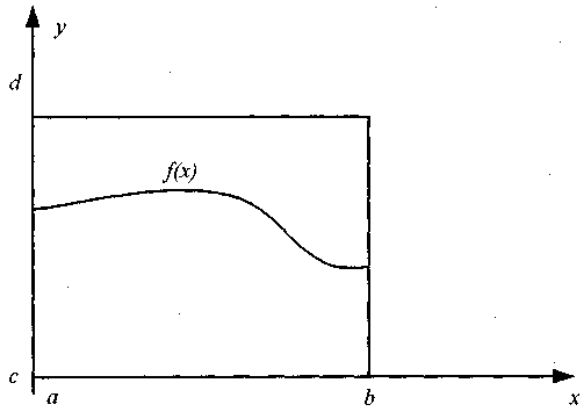



Рис. 2.6 - Метод Монте-Карло

Сгенерируем *N* пар случайных чисел, равномерно распределенных в данном прямоугольнике:

$$a < x_i < b, \quad 0 < y_i < \mathrm{H} \ .$$

Тогда доля точек $(x_i, y_i)$, удовлетворяющих условию $y_i \le f(x_i)$ является оценкой отношения интеграла от функции *f(x)* к площади рассматриваемого прямоугольника. Следовательно, оценка интеграла в данном методе может быть получена по формуле:

$$J_{MK} \approx A\frac{n_s}{N} \qquad (2.6)$$

где $n_s$ — число точек, удовлетворяющих условию $y_i \le f(x_i)$; *N* — полное количество точек; *A* — площадь прямоугольника.

Можно предложить и другой путь вычисления определенного интеграла, рассматривая его как среднее значение функции *f(x)* на отрезке *[a, b]:*

$$J_{MK} \approx \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad (2.7)$$

где $x_i$ последовательность случайных чисел с равномерным законом распределения на отрезке *[a, b]*. Погрешность метода меняется как $O(n^{-0.5})$.

**Пример**. С помощью метода Монте-Карло вычислить определенный интеграл $J = \int_1^e \ln x dx$

**Решение**. С помощью VBA создадим функцию ММК (вычисляется по формуле (2.7)). Здесь используется функция RND(1), генерирующая случайные числа в интервале [0; 1].

| *Текст кода* | *Комментарии (не вводить)* |
|---|---|
| Function MMK(N, a, b) | Объявлена функция ММК, входные параметры: N – число точек; a, b – нижний и верхний пределы интегрирования |
| h = (b - a) / N | определяется h |
| s = 0 | открывается цикл, вычисляются случайные значения *x* и производится суммирование значений функции в точках *x*. |
| For i = 1 To N | |
| x = a + (b - a) * Rnd(1) | |
| s = s + Log(x) | |
| Next | конец цикла, если i>N |
| MMK = h * s | вычисление интеграла по формуле (2.7) |
| End Function | |

Результат использования функций ММК при N=1000000 в MS Excel показаны на рисунке 2.7:

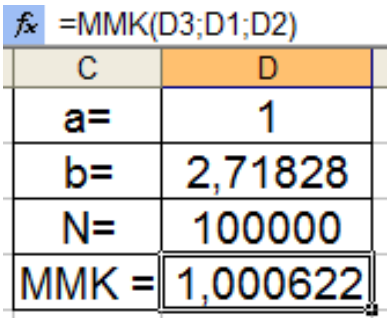



Рис. 2.7 – Вычисление интеграла по методу Монте-Карло

## *2.5. Расчетно-графическое задание № 2*

Найти приближенное значение интегралов с помощью методов прямоугольников, трапеций, Симпсона и Монте-Карло. Численное решение сравнить с точным решением и определить погрешность.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$ | 13. $\int_4^7 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$ | 25. $\int_1^2 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ |
| 2. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$ | 14. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$ | 26. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ |
| 3. $\int_0^2 \frac{xdx}{(x+3)^2}$ | 15. $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ | 27. $\int_0^1 \frac{x-8}{x^2-4x^2+4}$ |
| 4. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$ | 16. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx$ | 28. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$ |
| 5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ | 17. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ | 29. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$ |
| 6. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ | 18. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ | 30. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$ |
| 7. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}dx}{x}$ | 19. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+3x+1}$ | 31. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$ |
| 8. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$ | 20. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+6x-5}$ | 32. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx$ |
| 9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$ | 21. $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2-2x+4}$ | 33. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)} dx$ |
| 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ | 22. $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2-2x+2}$ | 34. $\int_0^{\pi/12} \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx$ |
| 11. $\int_1^3 \frac{x^2dx}{2x+3}$ | 23. $\int_0^1 arctg\sqrt{x} dx$ | 35. $\int_1^2 \frac{arctgxdx}{1+x^2} dx$ |
| 12. $\int_0^1 xe^{2x} dx$ | 24. $\int_0^{0.9} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 36. $\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$ |

| | | |
|---|---|---|
| 37. $\int_0^1 \frac{dx}{2-x^2}$ | 52. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ | 67. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)dx}{x^2}$ |
| 38. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}$ | 53. $\int_1^2 \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$ | 68. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$ |
| 39. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2}$ | 54. $\int_1^2 \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$ | 69. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ |
| 40 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}$ | 55. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos xdx$ | 70. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$ |
| 41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$ | 56. $\int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{2+e^{2x}}$ | 71. $\int_0^1 \frac{dx}{3-2x^2}$ |
| 42. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx$ | 57. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ | 72. $\int_2^4 \frac{dx}{1+x+x^2}$ |
| 43. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ | 58. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{5-x^6}$ | 73. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}$ |
| 44. $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x+x^2}$ | 59. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ | 74. $\int_e^{2e} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ |
| 45. $\int_0^1 \ln(1+x)dx$ | 60. $\int_0^2 x^2e^{4x}dx$ | 75. $\int_{-1}^0 \ln(1-x)dx$ |
| 46. $\int_0^{0,9} \ln(1-x)dx$ | 61. $\int_0^2 e^{x^2}xdx$ | 76. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+3x+1}$ |
| 47. $\int_0^2 x^2e^x dx$ | 62. $\int_1^2 x^2\ln xdx$ | 77. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ |
| 48. $\int_1^e x^2\ln xdx$ | 63. $\int_1^2 \frac{\ln(x+2)}{x^2}dx$ | 78. $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}dx$ |
| 49. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ | 64. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$ | 79. $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{3+2x}dx$ |
| 50. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-3x+4x^2}}$ | 65. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$ | 80. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ |
| 51. $\int_0^1 xe^{-x}dx$ | 66. $\int_0^1 \frac{xdx}{4x+3}$ | 81. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 xdx$ |

**Пример выполнения РГЗ № 2.**

Вычислить определенный интеграл $J = \int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

Решение. Используем табличный процессор MS EXCEL. Задаем значение n=10 частей и вычислим шаг, используя формулу $h = \frac{5-3}{10} = 0{,}2$. Введем значение $h$ в ячейку B2. Создадим таблицу и в качестве первого значения $x$ введем нижний предел интегрирования, который в нашем случае равняется 3. В ячейку B5 введите, а затем скопируйте формулу, которая позволяет вычислять следующее значение $X_i$, которые равно предыдущему плюс шаг.

В ячейке B4 записываются формула для вычисления значений подинтегральной функции $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Скопируйте формулу до ячейки B14 включительно (рис. 2.8).

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | **Расчетно-графическое задание № 2** | | |
| 2 | шаг h= | 0,2 | |
| 3 | Xi | Y | i |
| 4 | 3 | 0,5 | 0 |
| 5 | 3,2 | 0,37878788 | 1 |
| 6 | 3,4 | 0,29761905 | 2 |
| 7 | 3,6 | 0,24038462 | 3 |
| 8 | 3,8 | 0,1984127 | 4 |
| 9 | 4 | 0,16666667 | 5 |
| 10 | 4,2 | 0,14204545 | 6 |
| 11 | 4,4 | 0,12254902 | 7 |
| 12 | 4,6 | 0,10683761 | 8 |
| 13 | 4,8 | 0,09398496 | 9 |
| 14 | 5 | 0,08333333 | 10 |

$$J = \int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

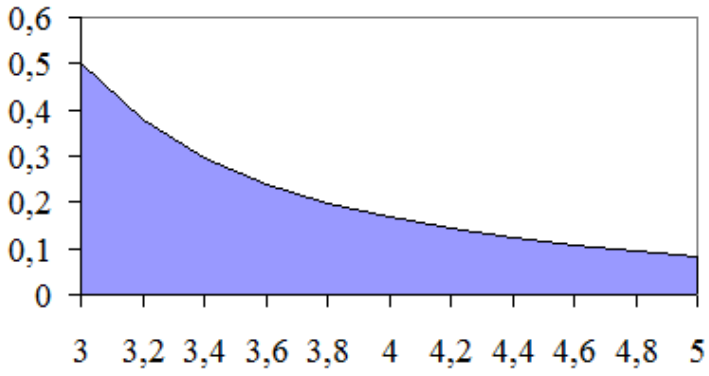



Рис. 2.8 - Формирование таблицы для вычисления значений подинтегральной функции

Таким образом, вычислены значения функции $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, которые в теории обозначены как $y_0; y_1; \ldots y_n$. Постройте график функции на отрезке [3; 5] (рис 2.8). Значение определенного интеграла равняется площади криволинейной трапеции, представленной на графике.

Используя значение $y_i$, с помощью формул (2.1), (2.2), (2.3) и (2.5) вычислите приближенные значения данного интеграла, вводя их в соответствующие ячейки E16, F16, E18, E20.

Например, формула метода трапеций (2.3), которая вводится в ячейку E18, может быть записанная в виде:

**=B2*((B4+B14)/2+B5+B6+B7+B8+B9+B10+B11+B12+B13)**

Найдем точное решение интеграла и запишем его в ячейку E22.

$$J_T = \int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_3^5 \frac{dx}{(x-1{,}5)^2 - 0.25} = \ln\frac{x-2}{x-1}\Big|_3^5 = \ln\frac{3}{2} = 0{,}40546511$$

Вычислим ошибку для трех методов по формуле $\varepsilon = \left|1 - \frac{J}{J_T}\right| \cdot 100\%$:

метод прямоугольников ε =10,85%

метод трапеций ε =0,57%

метод Симпсона ε =0,01%

**Метод Монте-Карло**. С помощью VBA создадим функцию ММК. Для того, чтобы из рабочей книги загрузить редактор VBA, нажмите клавиши Alt и F11. Появится окно, которое состоит из главного меню, панели инструментов и нескольких окон. Выберите пункт Вставка (Insert) главного меню VBA, потом пункт Модуль (Module). Введите в появившемся окне текст кода для создания функции ММК.

*Текст кода*

```
Function MMK (N, a, b)
h = (b - a) / N
S = 0
For  i = 1 To N
x = a + (b - a) * Rnd(1)
S = S + 1/(x*x-3*x+2)
Next
MMK = h * S
End Function
```

Сохраните файл, в ячейку D24 рабочего листа Excel введите значение N, равное 1000000. В ячейку E24 запишем формулу, которая осуществляет вызов функции МК**:**

**=ММК(D24;A4;A14)**

Результаты вычисления интеграла представлены на рис. 2.9.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | | | | | погрешность | |
| 16 | **Формула прямоугольников** | | 0,4494576 | 0,3661243 | 10,850% | 9,703% |
| 17 | | | | | | |
| 18 | **Метод трапеций** | | 0,40779092 | | 0,574% | |
| 19 | | | | | | |
| 20 | **Метод Симпсона** | | 0,40551037 | | 0,011% | |
| 21 | | | | | | |
| 22 | **Точное решения** | | 0,40546511 | | 0,000% | |
| 23 | | N | | | | |
| 24 | **Метод Монте-Карло** | 1000000 | 0,4054427 | | 0,006% | |

Рис. 2.9 – Результат выполнения РГЗ № 2

## *2.6. Задачи для самостоятельного решения*

Найти приближенное решение определенных интегралов:

| Интегралы | Ответ по методу Симпсона |
|---|---|
| 1. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ | 1.0000002 |
| 2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ | 0.52359881 |
| 3. $\int_0^{\pi/3} tgx dx$ | 0.69315036 |
| 4. $\int_2^3 \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$ | 0.33423917 |
| 5. $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$ | 0,46128101 |
| 6. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(2\sin x + 5\cos x)^2} dx$ | 0.10001928 |
| 7. $\int_{0.6}^{1.4} \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x+\sqrt{x^2+1}} dx$ | 0.59040751 |
| 8. $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$ | 0.40413385 |
| 9. $\int_0^{\pi} \sqrt{x} \sin\ x dx$ | 0,9777 |

## *2.7. Вопросы по теме*

1. В каком случае используется численное интегрирование?
2. Постановка задачи численного интегрирования.
3. Какие существуют методы интегрирования функции?
4. Графическая интерпретация метода прямоугольников.
5. Как оценить погрешность метода прямоугольников?
6. Графическая интерпретация метода трапеций.
7. Как оценить погрешность метода трапеций?
8. Графическая интерпретация метода Симпсона.
9. Как оценить погрешность метода Симпсона?
10. Чем отличаются формулы метода трапеций и метода Симпсона?
11. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага h ?
12. Чем отличается вычисление погрешности метода трапеций и Симпсона?
13. Основная идея метода Монте-Карло
14. Графическая интерпретация метода Монте-Карло
15. Как получить численное решение с помощью MS Excel и VBA.

# 3. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

## *3.1. Метод последовательных приближений Пикара*

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

и полагаем, что задано начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Основная задача – задача Коши – найти уравнение кривой $y = y(x)$, которая удовлетворяет уравнению (3.1) и проходит через точку $(x_0, y_0)$.

Предполагаем, что в окрестности точки $(x_0, y_0)$ уравнение удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Это означает, что, если правая часть уравнения непрерывна в некоторой области R: $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$, то существует решение, определенное в окрестности $|x - x_0| < d$ $(d > 0)$. Решение единственное, если выполнено условие Липшица

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \le N|\tilde{y} - y| \tag{3.2}$$

Чаще всего полагают $N = \max|f'_y(x, y)|$ в области R.

Построим решение для $x \ge x_0$. Интегрируя уравнение (3.1) получим

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \tag{3.3}$$

Уравнение является интегральным. Оно должно удовлетворять начальному условию. Применим прием решения такого уравнения, который называется метод последовательных приближений. Первое приближение имеет вид:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx \tag{3.4}$$

Определив из уравнения $y_1$ найдем второе приближение

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx \tag{3.5}$$

Все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$\boxed{y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx} \tag{3.6}$$

Геометрическая интерпретация метода представляет собой кривые $y_n = \varphi_n(x)$, проходящих через точку $(x_0, y_0)$. Можно доказать, что последовательные приближения на отрезке $x_0, x_0 + d$ равномерно сходятся, причем предельная функция $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ удовлетворяет уравнению и начальному условию.

Если правая часть дифференциального уравнения определена и непрерывна в области R и $M = \max|f(x,y)|$, то за величину $d$ можно принять $d = \min(a, b/M)$, причем кривая $y(x)$ при $x_0 \le x \le x_0 + d$ будет не выходить за пределы треугольника, образованного прямыми $y = y_0 + M(x - x_0)$, $y = y_0 - M(x - x_0)$, $x = d$ (рис. 3.1):

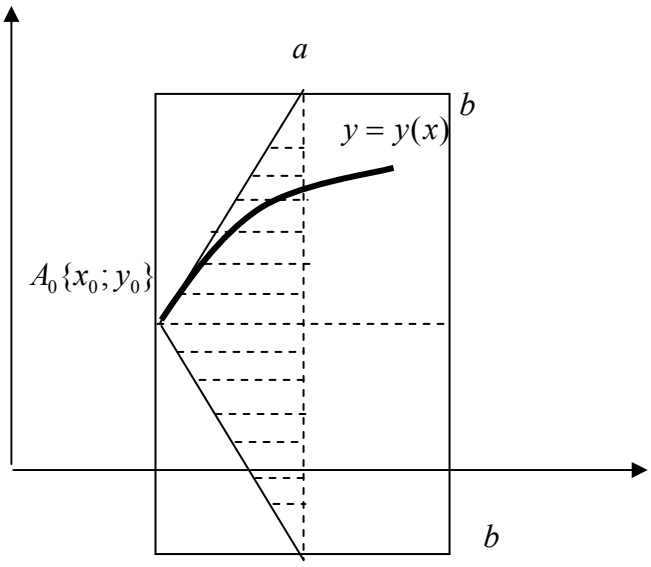



Рис. 3.1 – Сходимость решения

Для оценки погрешности метода $\varepsilon_n = |y - y_n|$ из (3.4) вычтем (3.6). Получим

$$y - y_n = \int_{x_0}^{x} [f(x,y) - f(x, y_{n-1})]dx .$$

Отсюда $$\varepsilon_n = |y - y_n| \le \int_{x_0}^{x} [f(x,y) - f(x, y_{n-1})]dx$$

В силу условия (3.2) находим

$$|f(x,y) - f(x, y_{n-1})| \le N|y - y_{n-1}| \le N\varepsilon_{n-1}$$

Следовательно, $$\varepsilon_n \le \int_{x_0}^{x} N\varepsilon_{n-1}dx, \ (n = 1,2,3....), \qquad (3.7)$$

причем по теореме Лагранжа на отрезке длиной $d$ имеем

$$\varepsilon_0 = |y - y_0| = (x - x_0)\cdot|y'(\xi)|, \text{ где } x_0 < \xi < x .$$

Так как $|y'(\xi)| \le |f(\xi, y(\xi))| \le M$, то $\varepsilon_0 \le M(x - x_0)$.

Используя формулу (3.7) найдем

$$\varepsilon_1 \le N\int_{x_o}^{x} \varepsilon_0 dx \le NM\int_{x_o}^{x} (x - x_0)dx = NM\frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

$$\varepsilon_2 \le N\int_{x_o}^{x} \varepsilon_1 dx \le \frac{N^2M}{2!}\int_{x_o}^{x} (x - x_0)^2 dx = N^2M\frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

и т.д. Окончательно получим $$\varepsilon_n = |y - y_n| \le MN^n\frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (3.8)$$

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = x - y \qquad (*)$$

при начальном условии $y(0) = 1$

Решение. Начальное приближение $y_0 = 1$. Тогда, согласно (3.6)

$$y_n = 1 + \int_0^x f(x, y_{n-1})dx \text{, где } f(x, y_{n-1}) = x - y_{n-1}$$

Шаг 1 (n=1). $f(x, y_0) = x - y_0 = x - 1$, тогда $y_1 = 1 + \int_0^x (x-1)dx = 1 - x + 0.5x^2$

Шаг 2 (n=2). $f(x, y_1) = x - y_1 = x - 1 + x - 0.5x^2 = -1 + 2x - 0.5x^2$ , тогда

$$y_2 = 1 + \int_0^x (-1 + 2x - 0.5x^2)dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$$

Аналогично выполним третий и четвертый шаги и получим

$$y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$$

Оценим погрешность в области R [0,1,0,2], т.е. $a = 1,\ b = 1$ (см. рис. 3.1). Имеем $|f(x, y)| \le |x - y| \le |x| + |y| \le a + b = 2 = M$ ,

$d = \min\{a; b/M\} = \min\{1; 0.5\} = 0.5$, $N = \max|f_y'| = 1$. Следовательно,

$\varepsilon_4 \le 2 \cdot 1^4 \cdot \frac{0.5^5}{5!} = \frac{1}{1920}$=5*10$^{-4}$

Найдем точное решение дифференциального уравнения. Для этого полагаем $y = u \cdot v$. Подставим в уравнение (*), получим

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \left(\frac{dv}{dx} + v\right) = x \qquad (**)$$

Приравняем к нулю выражение в скобках, получим $\int \frac{dv}{v} = -\int dx$, откуда $\ln v = -x$. Следовательно, $v = e^{-x}$.

Подставим полученное выражение в (**). Получим $\int du = \int xe^x dx$. Тогда

$$u = e^x(x-1) + C \Rightarrow\ y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Для определения постоянной интегрирования используем начальное условие $y(0) = 1$. Тогда *C=2.* Таким образом, точное решение дифференциального уравнения имеет вид $y = 2e^{-x} - 1 + x$.

Составим таблицу, в которой сравниваются точное и приближенное решения.

Таблица 3.1 - Метод последовательных приближений

| $x_i$ | $y$ | $y_4$ | $y$-$y_4$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0,0000000 |
| 0,05 | 0,952459 | 0,952459 | 0,0000000 |
| 0,1 | 0,909675 | 0,909675 | -0,0000001 |
| 0,15 | 0,871416 | 0,871417 | -0,0000006 |
| 0,2 | 0,837462 | 0,837464 | -0,0000025 |
| 0,25 | 0,807602 | 0,807609 | -0,0000075 |
| 0,3 | 0,781636 | 0,781655 | -0,0000183 |
| 0,35 | 0,759376 | 0,759415 | -0,0000389 |
| 0,4 | 0,74064 | 0,740715 | -0,0000746 |
| 0,45 | 0,725256 | 0,725388 | -0,0001321 |

На рисунке 3.2 видно, что погрешность увеличивается при удалении X от начального значения:

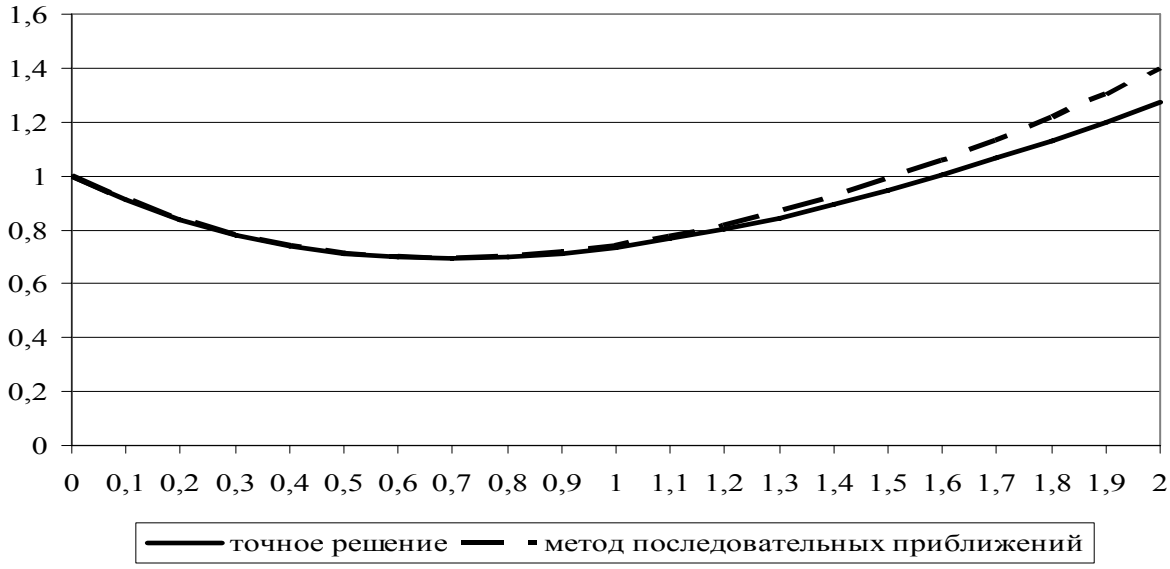



Рис. 3.2 – Сравнение точного и приближенного решений

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = \frac{y}{8x} - 3x^2 \qquad (***)$$

при начальном условии $y(1) = -1$

**Решение.** Согласно (3.6)

$$y_n = -1 + \int_1^x f(x, y_{n-1})dx \text{, где } f(x, y_{n-1}) = x - y_{n-1}$$

Шаг 1 (n=1). $f(x, y_0) = -\frac{1}{8x} - 3x^2$,

тогда $y_1 = -1 - \frac{1}{8}\int_1^x \frac{dx}{x} - 3\int_1^x x^2 dx = 1 + \ln x\Big|_1^x - x^3\Big|_1^x = -1 - \frac{\ln x}{8} - x^3 + 1 = -\frac{\ln x}{8} - x^3$

Шаг 2 (n=2). $f(x, y_1) = \frac{1}{8x} \cdot (-\frac{\ln x}{8} - x^3) - 3x^2 = -\frac{\ln x}{64x} - \frac{25}{8}x^2$,

тогда $y_2 = -1 - \frac{1}{64}\int_1^x \frac{\ln x dx}{x} - \frac{25}{8}\int_1^x x^2 dx = -\frac{1}{128}\ln^2 x - \frac{25}{24}x^3 + \frac{1}{24}$

<u>Шаг 3</u> (n=3). $f(x, y_2) = \frac{1}{8x}\cdot(-\frac{1}{128}\ln^2 x - \frac{25}{24}x^3 + \frac{1}{24}) - 3x^2 = \frac{1}{192x} - \frac{\ln^2 x}{1024x} - \frac{601}{192}x^2$,

тогда $y_3 = -1 + \frac{1}{192}\int_1^x \frac{dx}{x} - \frac{1}{1024}\int_1^x \frac{\ln^2 x dx}{x} - \frac{601}{192}\int_1^x x^2 dx \Rightarrow$

$$y_3 = -1 + 0{,}0052083 \cdot \ln x + 0.00032552083 \cdot \ln^3 x - 1{,}04340278 \cdot (x^3 - 1)$$

Найдем <u>точное решение</u> дифференциального уравнения. Для этого полагаем $y = u \cdot v$. Подставим в уравнение (***), получим

$$\frac{du}{dx}\cdot v + u \cdot \left(\frac{dv}{dx} - \frac{v}{8x}\right) = -3x^2 \qquad (****)$$

Приравняем к нулю выражение в скобках, получим $\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x}$, откуда $\ln v = \frac{1}{8}\ln x$. Следовательно, $v = x^{\frac{1}{8}}$.

Подставим полученное выражение в (****). Получим $\int du = -3\int x^{\frac{15}{8}} dx$. Тогда

$$u = -\frac{24}{23}x^{\frac{23}{8}} + C \Rightarrow \; y = -\frac{24}{23}x^3 + Cx^{\frac{1}{8}}.$$

Для определения постоянной интегрирования используем начальное условие $y(1) = -1$. Тогда *C=1/23.* Таким образом, точное решение дифференциального уравнения имеет вид . $y = -\frac{24}{23}x^3 + \frac{1}{23}x^{\frac{1}{8}}$

Составим таблицу, в которой сравниваются точное и приближенное решения.

Таблица 3.2 – Сравнение точного и приближенного решений

| $x_i$ | $y$ | $y_3$ | $y_3 - y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -1,00000 | -1,0000 | 0,000000 |
| 1,05 | -1,16421 | -1,1642 | 0,000000 |
| 1,1 | -1,34487 | -1,3449 | 0,000000 |
| 1,15 | -1,54276 | -1,5428 | 0,000000 |
| 1,2 | -1,75865 | -1,7586 | 0,000000 |
| 1,25 | -1,99334 | -1,9933 | 0,000001 |
| 1,3 | -2,24759 | -2,2476 | 0,000001 |
| 1,35 | -2,52221 | -2,5222 | 0,000002 |
| 1,4 | -2,81796 | -2,8180 | 0,000004 |
| 1,45 | -3,13563 | -3,1356 | 0,000006 |
| 1,5 | -3,47600 | -3,4760 | 0,000009 |
| 1,55 | -3,83986 | -3,8398 | 0,000013 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,6 | -4,22798 | -4,2280 | 0,000017 |
| 1,65 | -4,64115 | -4,6411 | 0,000022 |
| 1,7 | -5,08015 | -5,0801 | 0,000029 |
| 1,75 | -5,54576 | -5,5457 | 0,000036 |
| 1,8 | -6,03877 | -6,0387 | 0,000045 |
| 1,85 | -6,55996 | -6,5599 | 0,000055 |
| 1,9 | -7,11011 | -7,1100 | 0,000067 |
| 1,95 | -7,69000 | -7,6899 | 0,000080 |
| 2 | -8,30041 | -8,3003 | 0,000095 |

Применение метода Пикара требует вычисления интегралов, что может оказаться невыполнимым в элементарных функциях. Кроме того, в вопросах практического применения математики чаще требуется не формула, дающая решение, а числовые значения функции при заданных значениях аргумента. Численные методы как раз и дают искомое решение в форме таблицы значений. Ниже рассмотрим несколько численных методов.

### *3.2. Метод Эйлера*

Дано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$. Задаем шаг *h настолько малым*, что для всех *x* в интервале $[x_0; x_1]$, ($x_1 = x_0 + h$ ) значения функции *y* будут мало отличаться от $y_0$. Тогда для указанного интервала можно записать:

$$y = y_0 + (x - x_0) \cdot y_0' = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0; y_0)$$

Итак, кривая на этом участке заменяется касательной к ней в точке $(x_0; y_0)$. Тогда $y_1 = y\big|_{x=x_1} = y_0 + hy_0' = y_0 + hf(x_0; y_0)$

Аналогично можно записать для второго участка: $y_2 = y_1 + hy_1' = y_1 + hf(x_1; y_1)$.

В результате получим формулу Эйлера, реализующую численное решение дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i)}, \qquad (3.8)$$

где *i*=0,1,2,…..

Недостаток метода: низкая точность и накопление ошибок. Можно доказать, что если правая часть непрерывна, то последовательность $y_n$ при h→0 на малом отрезке равномерно стремится к искомой кривой.

<u>Пример 1</u>. С помощью метода Эйлера найти численное решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = x - y \qquad (*)$$

при начальном условии $y(0) = 1$

<u>Решение</u>. Отрезок [0; 0,5] разобьем на 10 частей с шагом h=0,05. Тогда, согласно формуле (3.8) получим:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 + 0{,}05 \cdot (0 - 1) = 0{,}95$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 0{,}95 + 0{,}05 \cdot (0{,}05 - 0{,}95) = 0{,}95 - 0{,}045 = 0{,}905$$ и т.д.

Результаты представим в таблице:

Таблица 3.3 - Метод Эйлера

| | | Шаг=h= | 0,05 | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i,y_i)*h$ | $y$ | $y-y_i$ |
| 0 | 1 | -0,05 | 1 | 0 |
| 0,05 | 0,95 | -0,045 | 0,952459 | 0,002458849 |
| 0,1 | 0,905 | -0,04025 | 0,909675 | 0,004674836 |
| 0,15 | 0,86475 | -0,03574 | 0,871416 | 0,006665953 |
| 0,2 | 0,829013 | -0,03145 | 0,837462 | 0,008449006 |
| 0,25 | 0,797562 | -0,02738 | 0,807602 | 0,010039691 |
| 0,3 | 0,770184 | -0,02351 | 0,781636 | 0,01145266 |
| 0,35 | 0,746675 | -0,01983 | 0,759376 | 0,012701587 |
| 0,4 | 0,726841 | -0,01634 | 0,74064 | 0,013799229 |
| 0,45 | 0,710499 | -0,01302 | 0,725256 | 0,014757484 |
| 0,5 | 0,697474 | -0,00987 | 0,713061 | 0,015587441 |

Относительная погрешность составила 11%, причем точность решения уменьшается при удалении $x$ от начального значения (рис. 3.3):

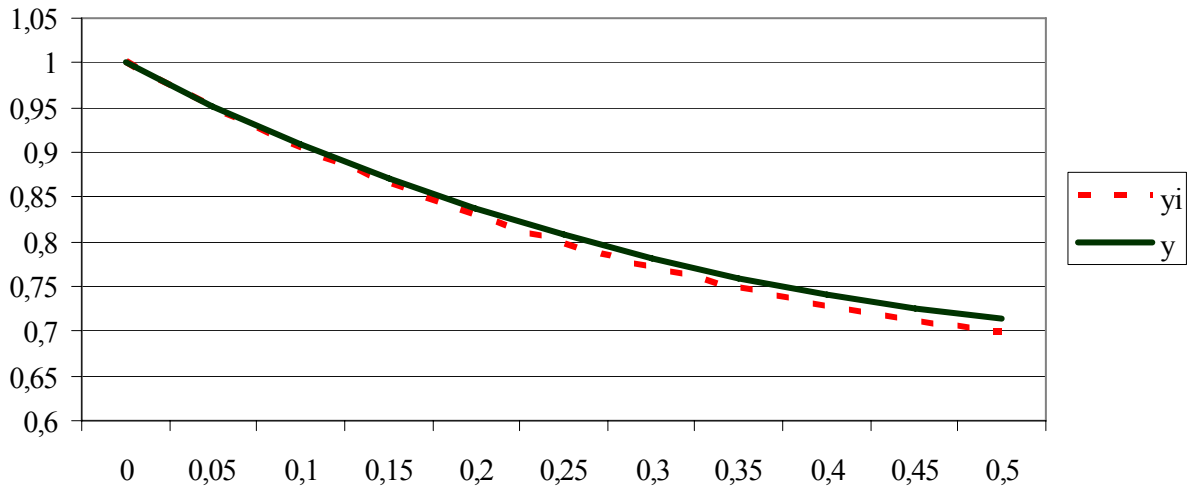



Рис. 3.3 - Сравнение результатов

### *3.3. Модификации метода Эйлера*

Снова рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Выбрав шаг $h$, положим $x_i = x_0 + ih$, $(i = 0,1,2...)$. Согласно методу Эйлера последовательные значения искомого решения вычисляются по приближенной формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i) \qquad (3.9).$$

Более точным является усовершенствованный метод, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i;$$

и находят значение направления поля интегральных кривых в средней точке $\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right)$, т.е. $f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right)$. Тогда

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}}} \qquad (3.10)$$

Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный метод Эйлера-Коши. Вначале определяется «грубое» приближение по формуле (4.9), затем вычисляется $\widetilde{f}_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$. Тогда формула численного решения дифференциального уравнения принимает вид:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h\frac{f_i + \widetilde{f}_{i+1}}{2}} \qquad (3.11)$$

<u>Пример</u>. С помощью методов Эйлера и MS Excel найти численное решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = y - \frac{2x}{y} \qquad (*)$$

при начальном условии $y(0) = 1$

Решение. <u>Точное решение</u>. Перепишем уравнение (*) в виде

$$yy' = y^2 - 2x$$

и введем замену $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$. В результате получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$z' - 2z = -4x,$$

которое решается по методике, изложенной в предыдущих примерах. В результате получим решение в виде

$$y^2 = z = 2x + 1 + Ce^{2x}$$

Подстановка начального условия позволяет определить C=0. Таким образом, точное частное решение уравнения (*) имеет вид

$$y_T = \sqrt{2x+1} \qquad (**)$$

<u>Метод Эйлера</u>. Шаг 1. Отрезок [0; 0.5] разобьем на 10 частей с шагом $h$=0.05. Тогда, согласно формуле (3.8) получим:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 + 0.05 \cdot (1 - 0) = 1.05$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 1.05 + 0.05 \cdot (1.05 - 2 \cdot 0.05/1.05) = 1{,}0977381 \quad \text{и т.д.}$$

Для решения задачи лучше всего использовать MS Excel. В таблице 3.4 представлены результаты расчетов и формулы, которые позволяют вычислить точное решение и реализовать метод Эйлера.

Таблица 3.4 – Сравнение точного решения и метода Эйлера

| | точное решение | метод Эйлера | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $y_T$ | $y_i$ | $hf_i$ | $\lvert y_T - y_i \rvert$ |
| 0 | 1 | 1 | 0,05 | 0 |
| 0,05 | 1,048809 | 1,05 | 0,04774 | 0,00119 |
| 0,1 | 1,095445 | 1,097738 | 0,04578 | 0,00229 |
| 0,15 | 1,140175 | 1,143515 | 0,04406 | 0,00334 |
| 0,2 | 1,183216 | 1,187574 | 0,04254 | 0,00436 |
| 0,25 | 1,224745 | 1,230111 | 0,04118 | 0,00537 |
| 0,3 | 1,264911 | 1,271294 | 0,03997 | 0,00638 |
| 0,35 | 1,30384 | 1,31126 | 0,03887 | 0,00742 |
| 0,4 | 1,341641 | 1,350131 | 0,03788 | 0,00849 |
| 0,45 | 1,378405 | 1,388011 | 0,03698 | 0,00961 |
| 0,5 | 1,414214 | 1,424991 | 0,03616 | 0,01078 |

=$B$2*(C4-2*A4/C4)

=C4+D4

=корень(2*A4+1)

*Примечание. Значение h записано в ячейке B2, первое значение $x_i$ введено в ячейку A4.*

Модифицированный метод Эйлера. Отрезок [0; 0,5] разобьем на 10 частей с шагом $h$=0,05. Тогда, согласно формуле (3.10) получим:

$$x_{0+\frac{1}{2}} = 0{,}025;\ y_{0+\frac{1}{2}} = 1 + 0{,}025 \cdot (1-0) = 1{,}025$$

$$f_{0+\frac{1}{2}} = 1{,}025 - 2 \cdot 0{,}025 / 1{,}025 = 0{,}9762195$$

Тогда по формуле (3.10) получим

$y_1 = y_0 + hf_{0+\frac{1}{2}} = 1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9762195 = 1{,}048811$ и т.д.

В MS Excel создадим таблицу, которая позволяет найти численное решение дифференциального уравнения указанным методом:

Таблица 3.5 – Модифицированный метод Эйлера

| $x_i$ | $y_i$ | $hf_i/2$ | $x_{i+\frac{1}{2}}$ | $y_{i+\frac{1}{2}}$ | $hf_{i+\frac{1}{2}}$ | $y_T$ | $\lvert y_T - y_i \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,025 | 0,025 | 1,025 | 0,048811 | 1 | 0,00000 |
| 0,05 | 1,048811 | 0,023836623 | 0,075 | 1,072648 | 0,04664 | 1,048808848 | 0,00000 |
| 0,1 | 1,095451 | 0,022821954 | 0,125 | 1,118273 | 0,044736 | 1,095445115 | -0,00001 |
| 0,15 | 1,140187 | 0,021926807 | 0,175 | 1,162114 | 0,043047 | 1,140175425 | -0,00001 |
| 0,2 | 1,183234 | 0,021129435 | 0,225 | 1,204363 | 0,041536 | 1,183215957 | -0,00002 |
| 0,25 | 1,22477 | 0,020413254 | 0,275 | 1,245183 | 0,040174 | 1,224744871 | -0,00003 |
| 0,3 | 1,264944 | 0,019765372 | 0,325 | 1,284709 | 0,038938 | 1,264911064 | -0,00003 |
| 0,35 | 1,303882 | 0,019175592 | 0,375 | 1,323058 | 0,037809 | 1,303840481 | -0,00004 |
| 0,4 | 1,341691 | 0,018635731 | 0,425 | 1,360327 | 0,036774 | 1,341640786 | -0,00005 |
| 0,45 | 1,378465 | 0,018139135 | 0,475 | 1,396605 | 0,035819 | 1,378404875 | -0,00006 |

*Примечание. В первой строке третьего столбца вводится формула:*

*=$B$2*(B4-2*A4/B4)/2*

*в первой строке четвертого столбца вводится формула: A4+$B$2/2*

*в первой строке пятого столбца вводится формула: =B4+C4*

*в первой строке шестого столбца вводится формула: =$B$2*(E4-2*D4/E4)*

*в второй строке второго столбца вводится формула: =B4+F4*

Модифицированный метод Эйлера-Коши. Согласно формуле (3.9) получим:

$$hf(x_0;y_0) = hf_0 = 0{,}05\cdot(1-0) = 0{,}05$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0;y_0) = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

$$h\widetilde{f}_1 = f(x_1,y_1) = 0{,}05\cdot(1{,}05 - 2*0{,}05/1.05) = 0{,}0477381$$

Тогда по формуле (4.11) получим

$$y_1 = y_0 + \frac{hf_0 + h\widetilde{f}_1}{2} = 1 + 0{,}5\cdot(0{,}05 + 0{,}477381) = 1{,}048869$$

и т.д. В MS Excel создадим таблицу, которая позволяет найти численное решение дифференциального уравнения указанным методом:

Таблица 3.6 – Модифицированный метод Эйлера

| $x_i$ | $y_i$ | $hf_i$ | $x_{i+1}$ | $y_{i+1}$ | $h\widetilde{f}_{i+1}$ | $h(f_i+\widetilde{f}_{i+1})/2$ | $y_T$ | $\lvert y_T - y_i\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,05 | 0,05 | 1,05 | 0,047738 | 0,04887 | 1 | 0,00000 |
| 0,05 | 1,048869 | 0,047676 | 0,1 | 1,096545 | 0,045708 | 0,04669 | 1,048809 | -0,00006 |
| 0,1 | 1,095561 | 0,045650 | 0,15 | 1,141211 | 0,043917 | 0,04478 | 1,095445 | -0,00012 |
| 0,15 | 1,140345 | 0,043863 | 0,2 | 1,184208 | 0,042321 | 0,04309 | 1,140175 | -0,00017 |
| 0,2 | 1,183437 | 0,042272 | 0,25 | 1,225709 | 0,040889 | 0,04158 | 1,183216 | -0,00022 |
| 0,25 | 1,225017 | 0,040843 | 0,3 | 1,26586 | 0,039594 | 0,04022 | 1,224745 | -0,00027 |
| 0,3 | 1,265236 | 0,039551 | 0,35 | 1,304787 | 0,038415 | 0,03898 | 1,264911 | -0,00032 |
| 0,35 | 1,304219 | 0,038375 | 0,4 | 1,342594 | 0,037337 | 0,03786 | 1,30384 | -0,00038 |
| 0,4 | 1,342075 | 0,037299 | 0,45 | 1,379374 | 0,036345 | 0,03682 | 1,341641 | -0,00043 |
| 0,45 | 1,378897 | 0,036310 | 0,5 | 1,415207 | 0,03543 | 0,03587 | 1,378405 | -0,00049 |

*Примечание.*

*В первой строке третьего столбца вводится формула: =$B$2*(B4-2*A4/B4)*

*в первой строке четвертого столбца вводится формула: A4+$B$2*

*в первой строке пятого столбца вводится формула: =B4+C4*

*в первой строке шестого столбца вводится формула: =$B$2*(E4-2*D4/E4)*

*в первой строке седьмого столбца вводится формула: =(C4+F4)/2*

*во второй строке второго столбца вводится формула: =B4+G4*

## *3.4. Метод Рунге-Кутта*

Дано дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Выбрав шаг $h$, положим $x_i = x_0 + ih$, $(i = 0,1,2...)$. Согласно методу Рунге-Кутта последовательные численные значения функции $y(x)$ определяются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\ ,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \qquad (3.12)$$

где

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),$$
$$k_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}),$$
$$k_3^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}), \qquad (3.13)$$
$$k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

Погрешность метода на каждом шаге – величина порядка $h^5$. В таблице 3.7 представлена схема реализации метода Рунге-Кутта.

Таблица 3.7 - Схема расчета

| $x_i$ | $y_i$ | $k_1^i$ | $k_2^i$ | $k_3^i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $k_1^0 = hf(x_0, y_0)$ | $k_2^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2})$ | $k_3^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2})$ |
| $x_1$ | $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ | $k_1^1 = hf(x_1, y_1)$ | $k_2^1 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^1}{2})$ | $k_3^1 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^1}{2})$ |
| . | .... | …. | ……. | …. |

продолжение таблицы 3.7

| $k_4^i$ | $\Delta y_i$ |
|---|---|
| $k_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0)$ | $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$ |
| $k_4^1 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3^1)$ | $\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)})$ |
| ……. | …… |

<u>Пример.</u> С помощью метода Рунге-Кутта найти численное решение дифференциального уравнения первого порядка $y' = x - y$ при начальном условии $y(0) = 1$

**<u>Решение</u>**. Отрезок [0; 0.5] разобьем на 10 частей с шагом h=0.05. Тогда, согласно формуле (4.9) получим на первом шаге:

$$k_1^{(0)} = hf(x_0; y_0) = 0{,}05 \cdot (0 - 1) = -0{,}05$$

$$k_2^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}) = 0{,}05 \cdot (0{,}025 - 1 + 0{,}05/2) = \text{-}0{,}0475$$

$$k_3^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}) = 0{,}05 \cdot (0{,}025 - 1 + 0{,}0475/2) = -0{,}0475625 \qquad \text{и т.д.}$$

$$k_4^{(0)} = hf(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}) = 0{,}05 \cdot (0.05 - 1 + 0{,}0475625) = \text{-}0{,}045121875$$

$$\Delta y_0 = (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + k_3^{(0)} + k_4^{(0)})/6 = -0{,}047541$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 - 0{,}047541 = 0{,}952459$$

Результаты представим в таблице:

Таблица 3.8 - Метод Рунге-Кутта

| | *метод Рунге-Кутта* | | | | | | *точное решение и погрешность* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $y_i$ | $k_1^i$ | $k_2^i$ | $k_3^i$ | $k_4^i$ | $\Delta y_i$ | $y_T$ | $\lvert y_T - y_i \rvert$ |
| 0 | 1,000000 | -0,050000 | -0,047500 | -0,047563 | -0,045122 | -0,047541 | 1,000000 | 0,00000000 |
| 0,05 | 0,952459 | -0,045123 | -0,042745 | -0,042804 | -0,040483 | -0,042784 | 0,952459 | 0,00000001 |
| 0,1 | 0,909675 | -0,040484 | -0,038222 | -0,038278 | -0,036070 | -0,038259 | 0,909675 | 0,00000001 |
| 0,15 | 0,871416 | -0,036071 | -0,033919 | -0,033973 | -0,031872 | -0,033954 | 0,871416 | 0,00000001 |
| 0,2 | 0,837462 | -0,031873 | -0,029826 | -0,029877 | -0,027879 | -0,029860 | 0,837462 | 0,00000002 |
| 0,25 | 0,807602 | -0,027880 | -0,025933 | -0,025982 | -0,024081 | -0,025965 | 0,807602 | 0,00000002 |
| 0,3 | 0,781636 | -0,024082 | -0,022230 | -0,022276 | -0,020468 | -0,022260 | 0,781636 | 0,00000002 |
| 0,35 | 0,759376 | -0,020469 | -0,018707 | -0,018751 | -0,017031 | -0,018736 | 0,759376 | 0,00000003 |
| 0,4 | 0,740640 | -0,017032 | -0,015356 | -0,015398 | -0,013762 | -0,015384 | 0,740640 | 0,00000003 |
| 0,45 | 0,725256 | -0,013763 | -0,012169 | -0,012209 | -0,010652 | -0,012195 | 0,725256 | 0,00000003 |
| 0,5 | 0,713061 | -0,010653 | -0,009137 | -0,009175 | -0,007694 | -0,009162 | 0,713061 | 0,00000003 |
| 0,55 | 0,703900 | -0,007695 | -0,006253 | -0,006289 | -0,004881 | -0,006276 | 0,703900 | 0,00000003 |
| 0,6 | 0,697623 | -0,004881 | -0,003509 | -0,003543 | -0,002204 | -0,003532 | 0,697623 | 0,00000004 |
| 0,65 | 0,694092 | -0,002205 | -0,000899 | -0,000932 | 0,000342 | -0,000921 | 0,694092 | 0,00000004 |
| 0,7 | 0,693171 | 0,000341 | 0,001583 | 0,001552 | 0,002764 | 0,001562 | 0,693171 | 0,00000004 |
| 0,75 | 0,694733 | 0,002763 | 0,003944 | 0,003915 | 0,005068 | 0,003925 | 0,694733 | 0,00000004 |
| 0,8 | 0,698658 | 0,005067 | 0,006190 | 0,006162 | 0,007259 | 0,006172 | 0,698658 | 0,00000004 |
| 0,85 | 0,704830 | 0,007259 | 0,008327 | 0,008300 | 0,009343 | 0,008309 | 0,704830 | 0,00000004 |
| 0,9 | 0,713139 | 0,009343 | 0,010359 | 0,010334 | 0,011326 | 0,010343 | 0,713139 | 0,00000004 |
| 0,95 | 0,723482 | 0,011326 | 0,012293 | 0,012269 | 0,013212 | 0,012277 | 0,723482 | 0,00000004 |
| 1 | 0,735759 | 0,013212 | 0,014132 | 0,014109 | 0,015007 | 0,014117 | 0,735759 | 0,00000004 |

### *3.5. Расчетно-графическое задание № 3*

Найти решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(1) = -1$ на отрезке [1;2] с использованием: 1. Метода последовательных приближений; 2. Методов Эйлера; 3. Метода Рунге-Кутта.

Сравнить решения с точным решением и оценить погрешность. Построить график полученной функции $y = y(x)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $y' = -\frac{y}{x} + x$ | 18. $y' = -\frac{y}{2x} - x^2$ | 35. $y' = \frac{2y}{x} - x^4$ | 52. $y' = -\frac{y}{x} - 4x^4$ |
| 2. $y' = -\frac{y}{x} + x^2$ | 19. $y' = -\frac{y}{2x} - x^3$ | 36. $y' = \frac{y}{2x} - x$ | 53. $y' = -\frac{y}{x} - 6x^4$ |
| 3. $y' = -\frac{y}{x} + x^3$ | 20. $y' = -\frac{y}{2x} - x^4$ | 37. $y' = \frac{y}{2x} - x^2$ | 54. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^2$ |
| 4. $y' = -\frac{y}{x} + x^4$ | 21. $y' = -\frac{y}{2x} + x^4$ | 38. $y' = \frac{y}{2x} - x^3$ | 55. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^3$ |
| 5. $y' = -\frac{2y}{x} + x$ | 22. $y' = -\frac{y}{2x} + x$ | 39. $y' = \frac{y}{2x} - x^4$ | 56. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^4$ |
| 6. $y' = -\frac{2y}{x} + x^2$ | 23. $y' = -\frac{y}{2x} + x^2$ | 40. $y' = \frac{y}{x} + 2x$ | 57. $y' = \frac{y}{4x} + 8x$ |
| 7. $y' = -\frac{2y}{x} + x^3$ | 24. $y' = -\frac{y}{2x} + x^3$ | 41. $y' = \frac{y}{x} + 2x^2$ | 58. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^2$ |
| 8. $y' = -\frac{2y}{x} + x^4$ | 25. $y' = \frac{y}{x} + x$ | 42. $y' = \frac{y}{x} + 2x^3$ | 59. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^3$ |
| 9. $y' = -\frac{y}{x} - x$ | 26. $y' = \frac{y}{x} + x^2$ | 43. $y' = \frac{y}{x} + 2x^4$ | 60. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^4$ |
| 10. $y' = -\frac{y}{x} - x^2$ | 27. $y' = \frac{y}{x} + x^3$ | 44. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^3$ | 61. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^3$ |
| 11. $y' = -\frac{y}{x} - x^3$ | 28. $y' = \frac{y}{x} + x^4$ | 45. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^4$ | 62. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^4$ |
| 12. $y' = -\frac{y}{x} - x^4$ | 29. $y' = \frac{y}{x} - x^4$ | 46. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^2$ | 63. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^2$ |
| 13. $y' = -\frac{2y}{x} - x$ | 30. $y' = \frac{y}{x} - x$ | 47. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^2$ | 64. $y' = \frac{y}{x} - 8x$ |
| 14. $y' = -\frac{2y}{x} - x^2$ | 31. $y' = \frac{y}{x} - x^2$ | 48. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^3$ | 65. $y' = \frac{y}{x} - 8x^2$ |
| 15. $y' = -\frac{2y}{x} - x^3$ | 32. $y' = \frac{y}{x} - x^3$ | 49. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^4$ | 66. $y' = \frac{y}{x} - 8x^3$ |
| 16. $y' = -\frac{2y}{x} - x^4$ | 33. $y' = \frac{2y}{x} - x^2$ | 50. $y' = -\frac{y}{x} - 4x$ | 67. $y' = -\frac{y}{x} + 8x$ |
| 17. $y' = -\frac{y}{2x} - x$ | 34. $y' = \frac{2y}{x} - x^3$ | 51. $y' = -\frac{y}{x} - 4x^2$ | 68. $y' = -\frac{y}{x} + 8x^2$ |

## Пример решения РГЗ № 3

Найти решение дифференциального уравнения.

$$y' = \frac{y}{3x} + 2x^2, \qquad (*)$$

при начальном условии $y(1) = -1$

**<u>Решение</u>**. **<u>Этап 1.</u>** Найдем точное решение данного дифференциального уравнения. Для этого считаем $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ і $v = v(x)$ произведение двух неизвестных функций. Подставим в данное уравнение (*). Получим:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \left( \frac{dv}{dx} - \frac{v}{3x} \right) = 2x^2 \qquad (**)$$

Приравняем к нулю выражение в скобке и решим дифференциальное уравнение методом разделения переменных. Получим $\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x}$,

откуда $\ln v = \frac{1}{3} \ln x = \ln x^{\frac{1}{3}}$. Итак, первая неизвестная функция найдена: $v = x^{\frac{1}{3}}$.

Подставим полученную функцию в уравнение (**), разделим переменные и проинтегрируем. Получим $\int du = 4 \int x^{2-\frac{1}{3}} dx = 2 \int x^{\frac{5}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{8}{3}}$. Откуда:

$$u = \frac{3}{4} x^{\frac{8}{3}} + C.$$

Итак, вторая неизвестная функция найдена. Общее решение уравнения (*) имеет вид: $y = u \cdot v = x^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{3}{4} x^{\frac{8}{3}} + C) = \frac{3}{4} x^3 + C x^{\frac{1}{3}}$

Для определения постоянной интеграции используем начальное условие $y(1) = -1$. Тогда

$$-1 = \frac{3}{4} + C \;\Rightarrow\; C = -\frac{7}{4}$$

Таким образом, точное решение, которое отвечает начальным условиям, имеет вид

$$y = 0{,}25 \cdot \left( 3x^3 - 7x^{\frac{1}{3}} \right) \qquad (***)$$

**Этап 2. Метод последовательных приближений**

Согласно (4.5):

$$y_n = -1 + \int_1^x f(x, y_{n-1}) dx, \text{ где } f(x, y_{n-1}) = \frac{y_{n-1}}{3x} + 2x^2$$

<u>Шаг 1</u> (n=1). $f(x, y_0) = -\frac{1}{3x} + 2x^2$; тогда

$$y_1 = -1 - \frac{1}{3} \int_1^x \frac{dx}{x} + 2 \int_1^x x^2 dx = 1 - \frac{1}{3} \ln x \Big|_1^x + \frac{2}{3} x^3 \Big|_1^x = -1 + \frac{\ln x}{3} + \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{\ln x}{3} + \frac{2}{3} x^3$$

Шаг 2 (n=2). $f(x,y_1)=\frac{1}{3x}\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{\ln x}{3}+\frac{2}{3}x^3\right)+2x^2 \Rightarrow$

$$f(x,y_1)=-\frac{5}{9x}+\frac{\ln x}{9x}+\frac{2}{9}x^2+2x^2=-\frac{5}{9x}+\frac{\ln x}{9x}+\frac{20}{9}x^2$$

тогда $y_2=-1-\frac{5}{9}\int_1^x\frac{dx}{x}+\frac{1}{9}\int_1^x\frac{\ln x dx}{x}+\frac{20}{9}\int_1^x x^2dx=-1-\frac{5}{9}\ln x\Big|_1^x+\frac{1}{18}\ln^2 x\Big|_1^x+\frac{20}{27}x^3\Big|_1^x \Rightarrow$

$$y_2=-1-\frac{5}{9}\ln x+\frac{1}{18}\ln^2 x+\frac{20}{27}x^3-\frac{20}{27}=-\frac{47}{27}-\frac{5}{9}\ln x+\frac{1}{18}\ln^2 x+\frac{20}{27}x^3$$

Шаг 3 (n=3). $f(x,y_2)=\frac{1}{3x}\cdot\left(-\frac{47}{27}-\frac{5}{9}\ln x+\frac{1}{18}\ln^2 x+\frac{20}{27}x^3\right)+2x^2 \Rightarrow$

$$f(x,y_2)=-\frac{47}{81x}-\frac{5}{27}\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{54}\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{20}{81}x^2+2x^2=-\frac{47}{81x}-\frac{5}{27}\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{54}\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{182}{81}x^2$$

тогда:

$$y_3=-1-0{,}5802469\cdot\ln x++0{,}0925926\cdot\ln^2 x+0{,}0061728\cdot\ln^3 x+0{,}748971\cdot(x^3-1)$$

(****)

**Этап 3.** Откройте рабочий лист MS Excel. Отрезок [1; 2] разобьем на 20 частей с шагом h=0.05.В ячейку B2 введите значение шага h, равное 0,05. Создайте заголовок первой таблицы (рис. 3.4). Введите в ячейку A4 первое значение X, равное 1. В ячейку A5 введите формулу, которая вычисляет следующее значение $X_i$, которое равно предыдущему значению плюс шаг. Скопируйте формулу до 24-го строки.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **РГЗ № 3** | | | $y'=\frac{y}{3x}+2x^2$ | | $y(1)=-1$ | |
| 2 | шаг h= | 0,05 | | | | | |
| 3 | Xi | Yt | Y3 | Yэ | h*f | Y3-Yt | Yэ-Yt |

Рис. 3.4 - Заголовок первой таблицы

В ячейку B4 запишите формулу (***), которая вычисляет точное решение $Y_t$: **=0,25*(3*A43-7*F4(1/3))**

Скопируйте формулу для всех значений X. В ячейку C4 запишите формулу (****), что разрешает вычислить третье приближение $Y_3$:

**=-1-0,5802469*LN(A4)+0,0925926*LN(A4)2+0,0061728*LN(A4)3+0,748971*(A43-1)**

**Метод Эйлера.** В ячейку D4 введите начальное значение $Y_o$, равное -1. В ячейку E4 введите формулу, которая равна произведению шага h на правую часть дифференциального уравнения (первое значение X сохраняется в ячейке A4, а значение Y - в ячейке D4):

**=$B$2*(D4/(3*A4)+2*A4*A4)**

В ячейку D5 введите формулу Эйлера (3.9) для начальных значений X i Y:

**=D4+E4**

Скопируйте формулы для всех значений X. Вычислите погрешность приближенных решений: $\varepsilon_{20}=abs(1-y_3/y_t)$=2,4%; $\varepsilon_{20}=abs(1-y_э/y_t)$=5%.

Постройте графики функций $Y_t$, $Y_3$, $Y_Э$:

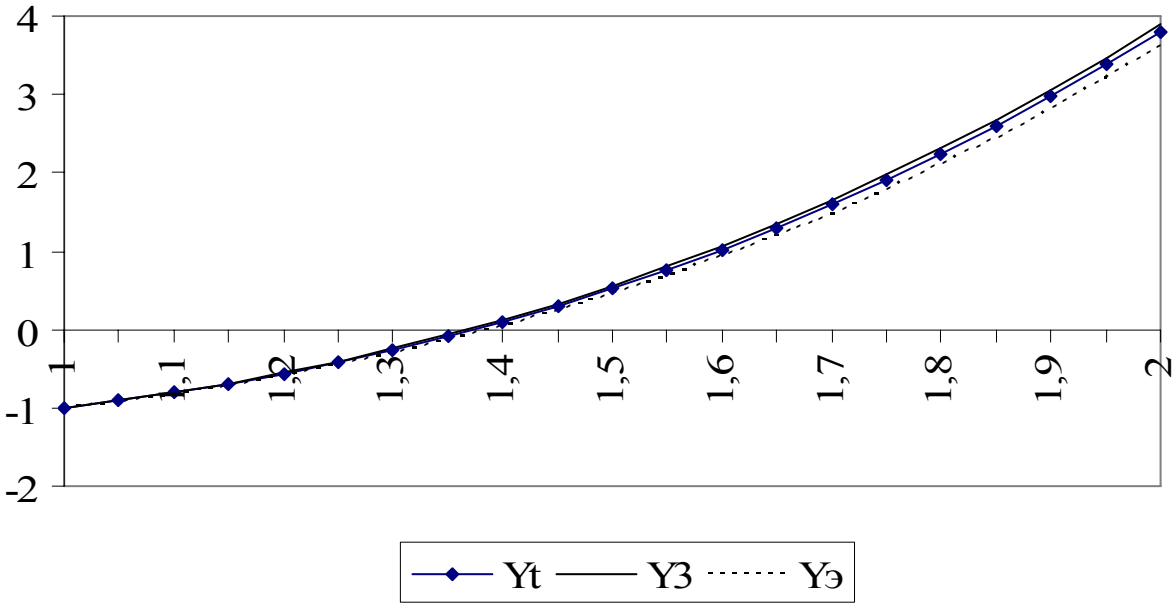



Рис. 3.5 - Сравнение точного и приближенных решений дифференциального уравнения

**Модификация метода Эйлера.** Создайте вторую таблицу для поиска численного решения дифференциального уравнения с использованием модифицированного метода Эйлера (рис 3.6).

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | **Модифікація методу Ейлера** | | | | | | | |
| 43 | шаг h= | 0,05 | | | | | | |
| 44 | Xi | Yэм | Xi+1/2 | h*f/2 | Yi+1/2 | h*fi+1/2 | Yt | Yэм-Yt |

Рис. 3.6 - Заголовок второй таблицы

Наша – записать формулы для модифицированного метода Эйлера (3.10). Введите в ячейку A45 первое значение X, равное 1. В ячейку A46 введите формулу, которая позволяет вычислить следующее значение $X_i$, которое равно предыдущему значению плюс шаг. Скопируйте формулу.

В ячейку B45 введите начальное значение $Y_o$, равное -1. В ячейку C45 введите формулу:

**=A45+$B$43/2** (определяет значение $x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + h/2$);

В ячейку D45 введите формулу: **=$B$43*(B45/(3*A45)+2*A45*A45)/2**
(определяет значение $h \cdot f(x_0; y_o)/2 = h \cdot \left(y_0/(3x_0) + 2x_0^2\right)/2$);

В ячейку E45 введите формулу: **=B45+D45**
(определяет значение $y_{0+\frac{1}{2}} = y_o + h \cdot f(x_0; y_o)/2$);

В ячейку F45 введите формулу: **=$B$43*(E45/(3*C45)+2*C45*C45)**
(определяет значение $h \cdot f_{0+\frac{1}{2}}(x_{0+\frac{1}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}) = h \cdot \left( y_{0+\frac{1}{2}}/(3x_{0+\frac{1}{2}}) + 2x^2_{0+\frac{1}{2}} \right)$);

В ячейку B46 введите формулу: **=B45+F45**

(определяет значение $y_1 = y_0 + h \cdot f_{0+\frac{1}{2}}\left(x_{0+\frac{1}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}\right)$).

Скопируйте формулы для всех значений X. Вычислите абсолютную погрешность приближенных решений.

**Метод Рунге-Кутта**. Создайте третью таблицу (рис 3.7).

| | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Метод Рунге-Кутта** | | | | | | | | |
| 2 | шаг h= | 0,05 | | | | | | | |
| 3 | **Xi** | **Yрк** | **K1** | **K2** | **K3** | **K4** | **ΔY** | **Yt** | **Yрк-Yt** |

Рис. 3.7 - Заголовок таблицы

Скопируйте значения Xi из столбца A. В ячейку K4 введите начальное значение Y, равное -1. В ячейку L4 введите формулу:

**=$K$2*(K4/(3*J4)+2*J4*J4)**

(определяет значение $k_1^0 = hf(x_0, y_0) = h \cdot \left(y_0/(3x_0) + 2x_0^2\right)$);

В ячейку M4 введите формулу:

**=$K$2*(($K4+L4/2)/(3*($J4+$K$2/2))+2*($J4+$K$2/2)2)**

(определяет значение

$k_2^0 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1^0/2) = h \cdot \left((y_0 + k_1^0/2)/(3 \cdot (x_0 + h/2) + 2(x_0 + h/2)^2\right)$);

В ячейку N4 введите формулу:

**=$K$2*(($K4+M4/2)/(3*($J4+$K$2/2))+2*($J4+$K$2/2)2)**

(определяет значение

$k_3^0 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_2^0/2) = h \cdot \left((y_0 + k_2^0/2)/(3 \cdot (x_0 + h/2) + 2(x_0 + h/2)^2\right)$);

В ячейку O4 введите формулу:

**=$K$2*(($K4+N4)/(3*($J4+$K$2))+2*($J4+$K$2)2)**

(определяет значение

$k_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0 2) = h \cdot \left((y_0 + k_3^0)/(3 \cdot (x_0 + h) + 2(x_0 + h)^2\right)$);

В ячейку P4 введите формулу:

**=(L4+2*M4+2*N4+O4)/6**

(определяет значение $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$);

В ячейку K5 введите формулу: **=K4+P4**

(определяет значение $y_1 = y_0 + \Delta y_0$);

Скопируйте формулы для всех значений X. Вычислите абсолютную погрешность приближенных решений. Данный метод наиболее точный, поскольку абсолютная погрешность решения $y_{20}$ не превышает $10^{-8}$.

Ниже представлены результаты выполнения РГЗ № 4.

Таблица 1 - Точное решение, метод последовательный приближений, метод Эйлера

| Xi | Yt | Y3 | Yэ | h*f | Y3-Yt | Yэ-Yt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | -1 | -1 | 0,08333 | 0 | 0 |
| 1,05 | -0,9105 | -0,9105 | -0,9167 | 0,0957 | 0,00000 | -0,0062 |
| 1,1 | -0,8082 | -0,8082 | -0,821 | 0,10856 | 0,00001 | -0,0127 |
| 1,15 | -0,6928 | -0,6928 | -0,7124 | 0,12193 | 0,00003 | -0,0196 |
| 1,2 | -0,5637 | -0,5636 | -0,5905 | 0,1358 | 0,00007 | -0,0268 |
| 1,25 | -0,4203 | -0,4202 | -0,4547 | 0,15019 | 0,00013 | -0,0344 |
| 1,3 | -0,2622 | -0,262 | -0,3045 | 0,1651 | 0,00021 | -0,0423 |
| 1,35 | -0,0888 | -0,0885 | -0,1394 | 0,18053 | 0,00031 | -0,0506 |
| 1,4 | 0,10029 | 0,10072 | 0,04113 | 0,19649 | 0,00043 | -0,0592 |
| 1,45 | 0,30573 | 0,3063 | 0,23762 | 0,21298 | 0,00057 | -0,0681 |
| 1,5 | 0,528 | 0,52873 | 0,4506 | 0,23001 | 0,00073 | -0,0774 |
| 1,55 | 0,76764 | 0,76854 | 0,68061 | 0,24757 | 0,00090 | -0,087 |
| 1,6 | 1,02519 | 1,02628 | 0,92818 | 0,26567 | 0,00110 | -0,097 |
| 1,65 | 1,30118 | 1,30248 | 1,19385 | 0,28431 | 0,00130 | -0,1073 |
| 1,7 | 1,59615 | 1,59768 | 1,47815 | 0,30349 | 0,00153 | -0,118 |
| 1,75 | 1,91066 | 1,91241 | 1,78165 | 0,32322 | 0,00176 | -0,129 |
| 1,8 | 2,24523 | 2,24723 | 2,10486 | 0,34349 | 0,00200 | -0,1404 |
| 1,85 | 2,60042 | 2,60267 | 2,44835 | 0,36431 | 0,00225 | -0,1521 |
| 1,9 | 2,97677 | 2,97927 | 2,81266 | 0,38567 | 0,00251 | -0,1641 |
| 1,95 | 3,37482 | 3,37759 | 3,19833 | 0,40759 | 0,00277 | -0,1765 |
| 2 | 3,79514 | 3,79817 | 3,60592 | 0,43005 | 0,00303 | -0,1892 |

Таблица 2 - Модифицированный метод Эйлера (фрагмент)

| Xi | Yэм | Xi+1/2 | h*f/2 | Yi+1/2 | h*fi+1/2 | Yt | Yэм-Yt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 1,025 | 0,04167 | -0,9583 | 0,08948 | -1 | 0,0000 |
| 1,05 | -0,9105 | 1,075 | 0,0479 | -0,8626 | 0,10219 | -0,9105 | 0,0000 |
| 1,1 | -0,8083 | 1,125 | 0,05438 | -0,754 | 0,11539 | -0,8082 | -0,0001 |
| 1,15 | -0,6929 | 1,175 | 0,0611 | -0,6318 | 0,1291 | -0,6928 | -0,0001 |
| 1,2 | -0,5638 | 1,225 | 0,06808 | -0,4958 | 0,14332 | -0,5637 | -0,0002 |
| 1,25 | -0,4205 | 1,275 | 0,07532 | -0,3452 | 0,15805 | -0,4203 | -0,0002 |
| 1,3 | -0,2625 | 1,325 | 0,08282 | -0,1797 | 0,1733 | -0,2622 | -0,0003 |
| 1,35 | -0,0892 | 1,375 | 0,09057 | 0,00141 | 0,18908 | -0,0888 | -0,0003 |
| 1,4 | 0,09991 | 1,425 | 0,09859 | 0,19851 | 0,20538 | 0,10029 | -0,0004 |
| 1,45 | 0,3053 | 1,475 | 0,10688 | 0,41218 | 0,22222 | 0,30573 | -0,0004 |
| 1,5 | 0,52752 | 1,525 | 0,11543 | 0,64295 | 0,23959 | 0,528 | -0,0005 |
| 1,55 | 0,7671 | 1,575 | 0,12425 | 0,89135 | 0,25749 | 0,76764 | -0,0005 |

### *3.6. Задачи для самостоятельного решения*

1. Известно, что интеграл $\int e^{-x^2}dx$ не берется в конечном виде в элементарных функциях. Пользуясь тем, что функция $y = e^{-x^2}\int_0^{0.5} e^{-t^2}dx$ является решением уравнения $y' = 2xy + 1$ (начальное условие $y(0) = 0$), вычислить решение уравнения с использованием метода Симпсона. С помощью метода последовательных приближений (ограничиваясь пятым шагом) определить приближенное решение дифференциального уравнения и сравнить полученные решения.

Ответ: $y_5\big|_{x=0.5} = \left[x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{8}{105}x^7 + \frac{16}{945}x^9\right]_{x=0,5} = 0.5923$

2. Найти численное решение дифференциального уравнения $y' = y^2 - x$ при начальном условии $y(0) = 1$ с помощью метода Эйлера.

Ответ: Фрагмент решения представлен в таблице:

| $x_i$ | $y_i$ | $hf(x_i; y_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1,000000 | 0,050000 |
| 0,05 | 1,050000 | 0,052625 |
| 0,1 | 1,102625 | 0,055789 |
| 0,15 | 1,158414 | 0,059596 |
| 0,2 | 1,218010 | 0,064177 |
| 0,25 | 1,282188 | 0,069700 |
| 0,3 | 1,351888 | 0,076380 |

3. Найти численное решение дифференциального уравнения $y' = \sin x \cos x - y \cos x$ при начальном условии $y(0) = 1$ с помощью модифицированного метода Эйлера и сравнить с точным решением.

Ответ: Точное решение $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$

Фрагмент решения представлен в таблице:

| $x_i$ | $y_i$ | $0{,}5hf(x_i, y_i)$ | $x_{i+\frac{1}{2}}$ | $y_{i+\frac{1}{2}}$ | $hf_{i+\frac{1}{2}}$ | $y_T$ | $\lvert y_i - y_T \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00000 | 0,00000 | 0,02500 | 0,00000 | 0,00125 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,05 | 0,00125 | 0,00243 | 0,07500 | 0,00368 | 0,00355 | 0,00123 | 0,00002 |
| 0,1 | 0,00480 | 0,00473 | 0,12500 | 0,00953 | 0,00571 | 0,00482 | 0,00002 |
| 0,15 | 0,01051 | 0,00687 | 0,17500 | 0,01738 | 0,00772 | 0,01063 | 0,00012 |
| 0,2 | 0,01823 | 0,00884 | 0,22500 | 0,02707 | 0,00955 | 0,01849 | 0,00026 |
| 0,25 | 0,02779 | 0,01064 | 0,27500 | 0,03842 | 0,01122 | 0,02823 | 0,00044 |
| 0,3 | 0,03900 | 0,01225 | 0,32500 | 0,05126 | 0,01270 | 0,03966 | 0,00066 |
| 0,35 | 0,05170 | 0,01368 | 0,37500 | 0,06538 | 0,01400 | 0,05261 | 0,00090 |
| 0,4 | 0,06570 | 0,01491 | 0,42500 | 0,08061 | 0,01511 | 0,06687 | 0,00117 |
| 0,45 | 0,08081 | 0,01594 | 0,47500 | 0,09676 | 0,01603 | 0,08225 | 0,00144 |

4. Найти численное решение дифференциального уравнения $y' = 2xy + 1$ при начальном условии $y(0) = 0$ с помощью методов Метода Рунге-Кутта.

Ответ: Фрагмент решения представлен в таблице:

| $x_i$ | $y_i$ | $k_1^i$ | $k_2^i$ | $k_3^i$ | $k_4^i$ | $\Delta y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00000 | 0,05000 | 0,05006 | 0,05006 | 0,05025 | 0,05008 |
| 0,05 | 0,05008 | 0,05025 | 0,05056 | 0,05057 | 0,05101 | 0,05059 |
| 0,1 | 0,10067 | 0,05101 | 0,05158 | 0,05158 | 0,05228 | 0,05160 |
| 0,15 | 0,15227 | 0,05228 | 0,05312 | 0,05313 | 0,05411 | 0,05315 |
| 0,2 | 0,20542 | 0,05411 | 0,05523 | 0,05524 | 0,05652 | 0,05526 |
| 0,25 | 0,26068 | 0,05652 | 0,05795 | 0,05797 | 0,05956 | 0,05798 |
| 0,3 | 0,31866 | 0,05956 | 0,06132 | 0,06135 | 0,06330 | 0,06137 |
| 0,35 | 0,38003 | 0,06330 | 0,06544 | 0,06548 | 0,06782 | 0,06549 |
| 0,4 | 0,445527 | 0,067821 | 0,07038 | 0,07043 | 0,07322 | 0,07044 |
| 0,45 | 0,515969 | 0,073219 | 0,07625 | 0,07632 | 0,07961 | 0,07633 |
| 0,5 | 0,592296 | 0,079615 | 0,08319 | 0,08328 | 0,08716 | 0,08328 |

5. Найти численное решение дифференциального уравнения $y' = xe^{-x^2} - 2xy$, $y(0) = 0$ с помощью метода Рунге-Кутта на отрезке [0; 1] и сравнить полученные результаты с точным решением.

Ответ: Точное решение имеет вид $y = 0.5x^2e^{-x^2}$. Фрагмент решения представлен в таблице:

| $x_i$ | $y_i$ | $k_1^i$ | $k_2^i$ | $k_3^i$ | $k_4^i$ | $\Delta y_i$ | $y_T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00020 | 0,00020 | 0,00040 | 0,00020 | 0 |
| 0,02 | 0,00020 | 0,00040 | 0,00060 | 0,00060 | 0,00080 | 0,00060 | 0,0002 |
| 0,04 | 0,00080 | 0,00080 | 0,00100 | 0,00099 | 0,00119 | 0,00099 | 0,0008 |
| 0,06 | 0,00179 | 0,00119 | 0,00139 | 0,00139 | 0,00158 | 0,00139 | 0,00179 |
| 0,08 | 0,00318 | 0,00158 | 0,00177 | 0,00177 | 0,00196 | 0,00177 | 0,00318 |
| 0,1 | 0,00495 | 0,00196 | 0,00215 | 0,00215 | 0,00233 | 0,00215 | 0,00495 |
| 0,12 | 0,00710 | 0,00233 | 0,00251 | 0,00251 | 0,00269 | 0,00251 | 0,0071 |
| 0,14 | 0,00961 | 0,00269 | 0,00287 | 0,00287 | 0,00304 | 0,00287 | 0,00961 |
| 0,16 | 0,01248 | 0,00304 | 0,00321 | 0,00321 | 0,00337 | 0,00321 | 0,01248 |
| 0,18 | 0,01568 | 0,00337 | 0,00353 | 0,00353 | 0,00369 | 0,00353 | 0,01568 |
| 0,2 | 0,01922 | 0,00369 | 0,00384 | 0,00384 | 0,00399 | 0,00384 | 0,01922 |

### *3.7. Вопросы по теме*

1. Что значит — решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
2. Графическая интерпретация численного решения дифференциального уравнения.
3. Какие существуют методы решения дифференциального уравнения в зависимости от формы представления решения?
4. В чем суть метода последовательных приближений Пикара?
5. Какова погрешность метода Пикара?
6. В чем заключается суть метода Эйлера?
7. Применение каких формул позволяет получить значения искомой функции по методу Эйлера?
8. В чем отличие метода Эйлера и усовершенствованных методов Эйлера?
9. Как использовать метод Рунге-Кутта для численного решения дифференциальных уравнений первого порядка?
10. Как реализовать метод Эйлера с помощью MS Excel?

# 4. Аппроксимация точечных функций

## *4.1 Метод наименьших квадратов*

Методы аппроксимации (приближения) функций широко применяются при решении управленческих задач, связанных с оценкой и прогнозированием экономических показателей. Пусть дана основная система функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ...., \varphi_m(x)\}$, которые в дальнейшем считаем непрерывно дифференцируемыми. Функция вида

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + .... + a_m\varphi_m(x)$$

называется обобщенным многочленом или полиномом. Коэффициенты $a_i$ являются константами.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$. Задача о приближении можно сформулировать так: данную функцию требуется приближенно заменить (аппроксимировать) обобщенным полиномом так, чтобы отклонение функции от полинома на заданном множестве было наименьшим. Это достигается путем подбора постоянных коэффициентов. Полученный полином называют аппроксимирующим.

Если точечная функция описывает какие-либо показатели и число замеров достаточно велико, то степень полинома будет высокой, что значительно усложняет вычисления. В этих случаях обычно используют метод наименьших квадратов. Согласно методу наименьших квадратов необходимо выполнение условия: сумма квадратов разности между значениями исходной функции $y_i = f(x_i)$, заданной в точках $x_i (i = 0,1,2,...,n)$, и аппроксимирующей функции $y_i = F(x_i)$ в этих же точках должна быть минимальной. Условие минимальности имеет вид:

$$S = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - F(x_i)]^2 \to \min \quad , \tag{4.1}$$

где S - сумма квадратов разности (отклонений), взятая по всем точкам таблицы; $n+1$- количество табличных значений функций. Приближение функции в виде (4.1) называется *квадратичным.*

Допустим, что функция $F(x)$ заданна в виде линейной комбинации $m$ заданных функций $\varphi_j(x)(j = 0,1,2,...,m)$

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ... + a_m\varphi_m(x) \, . \tag{4.2}$$

Функции $\varphi_j(x)$ называют *базисными,* а их линейную комбинацию – *линейной математической моделью.* Модель называется линейной потому, что коэффициенты $a_j (j = 0,1,2,...,m)$ входят в неё линейно.

Задача построения аппроксимирующей функции $F(x)$ сводится к определению коэффициентов $a_i = (i = 0,1,2,...,m)$, которые должны быть таковыми, чтобы математическая модель согласовывалась с данными по условию (4.1).

Существует много разных методов определения коэффициентов $a_i$, которые дают минимальную сумму квадратов отклонений. Один из них – это применение методов математического анализа. Для минимума функций многих переменных необходимо, чтобы производные от функции по каждой переменной были равны нулю. В данном случае переменными параметрами являются коэффициенты $a_i (i = 0,1,2,...,m)$.

Условие минимума S будет выполнено тогда, когда

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, ..., \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \tag{4.3}$$

Подставим (2.21) в (2.19), получим

$$S = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]^2 = \min \tag{4.4}$$

Вычислим частные производные и получим систему $m$ уравнений с неизвестными $a_i (i = 0,1,2,...,m-1)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]\varphi_0(x_i) = 0, \\
&\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]\varphi_1(x_i) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]\varphi_m(x_i) = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Перепишем её в виде:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_k(x_i) y_i. \tag{4.6}$$

Удобной формой записи этой системы является:

$$\sum_{j=1}^{m+1} b_{kj} a_j = c_k (k = 1,2,...,m), \tag{4.7}$$

где $a_j$ - неизвестные системы уравнений; $b_{kj} = \sum_{i=1}^{n=1} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$ - коэффициенты системы; $c_k = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_k(x_i) y_i$ - элементы столбца правой части.

Систему уравнений (4.7) называют *нормальной*. Коэффициенты $b_{kj}$ нормальной системы зависят только от базисных функций, а функции $y_i$ входят только в правую часть. Рассмотрим частные случаи.

**Линейная аппроксимация.** Пусть $F(x) = a_0 + a_1 x$.

Тогда $S = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i)]^2$. Минимум функции двух переменных относительно коэффициентов $a_0, a_1$ достигается при выполнении условий:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i)] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i] x_i = 0$$

Уравнения можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \qquad (4.8)$$

Из этой системы уравнений определим неизвестные коэффициенты $a_0$ и $a_1$.

Пример. Функция представлена в виде таблицы.

Таблица 4.1– Расчет коэффициентов системы уравнений (4.8)

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0,100 | 0,333 | 0,010 | 0,033 |
| | 0,300 | 0,415 | 0,090 | 0,125 |
| | 0,600 | 0,517 | 0,360 | 0,310 |
| | 0,800 | 0,644 | 0,640 | 0,516 |
| | 1,000 | 0,803 | 1,000 | 0,803 |
| | 1,200 | 1,000 | 1,440 | 1,200 |
| | 1,400 | 1,246 | 1,960 | 1,744 |
| **Сумма** | **5,400** | **4,959** | **5,500** | **4,731** |

Следовательно, уравнение примет вид

$$\begin{cases} 7a_0 + 5{,}4a_1 = 4.959 \\ 5{,}4a_0 + 5{,}5a_1 = 4{,}731 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 0{,}185 \\ a_1 = 0{,}6785 \end{matrix}$$

Таким образом, табличная функция заменяется прямой $F(x) = 0{,}185 + 0{,}6785x$

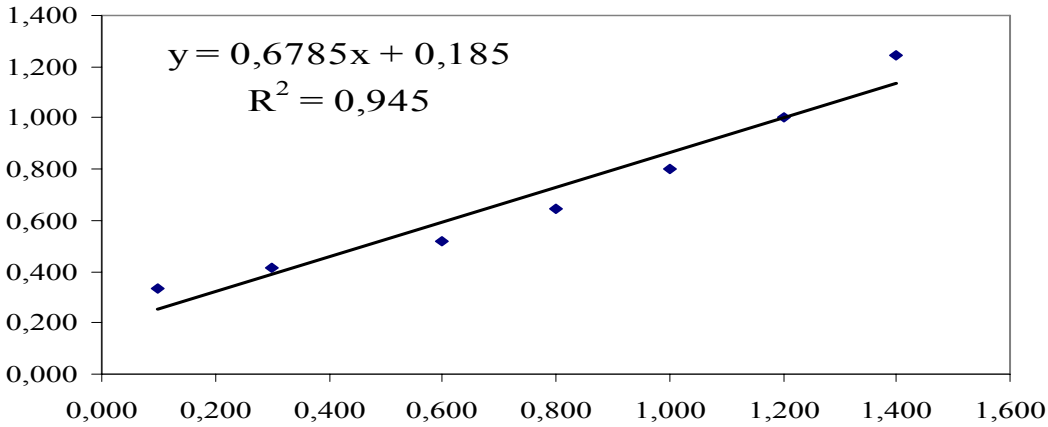



Рис. 4.1 – Линейная аппроксимация

Средняя ошибка аппроксимации определяется по формуле:

$$E = \frac{100\%}{n} \sum \left| \frac{F(x_i) - y_i}{F(x_i)} \right| \qquad (4.9)$$

Для предварительной оценки аппроксимации точечной функции с использованием метода наименьших квадратов используют коэффициент детерминации $R^2$. Его определяют по следующему правилу:

1. Определяют среднее значений $y_i$ по формуле: $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$
2. Вычисляют сумму квадратов отклонений значений полученной функции в точках $x_i$ от среднего $\sum [y(x_i) - \bar{y}]^2$

3. Вычисляют сумму квадратов отклонений значений точечной функции в точках $x_i$ от среднего $\sum[y_i - \bar{y}]^2$
4. Тогда коэффициент детерминации равен $R^2 = \dfrac{\sum[y(x_i) - \bar{y}]^2}{\sum[y_i - \bar{y}]^2}$ (4.10)

Значение коэффициента изменяется от 0 до 1. Чем ближе к единице, тем точнее результаты точечного квадратичного аппроксимирования.

Результаты расчета представлены в таблице 4.2

Таблица 4.2 – Расчет средней ошибки и $R^2$

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ | $F(x_i)$ | $E_i$ | $[F(x_i) - \bar{y}]^2$ | $[y_i - \bar{y}]^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,100 | 0,333 | 0,010 | 0,033 | 0,252855 | 0,318277 | 0,20751155 | 0,140667 |
| | 0,300 | 0,415 | 0,090 | 0,125 | 0,388546 | 0,068712 | 0,10229972 | 0,085934 |
| | 0,600 | 0,517 | 0,360 | 0,310 | 0,592083 | 0,126335 | 0,01352724 | 0,036522 |
| | 0,800 | 0,644 | 0,640 | 0,516 | 0,727774 | 0,114568 | 0,00037576 | 0,004095 |
| | 1,000 | 0,803 | 1,000 | 0,803 | 0,863465 | 0,070325 | 0,02404842 | 0,008902 |
| | 1,200 | 1,000 | 1,440 | 1,200 | 0,999156 | 0,000845 | 0,08454522 | 0,085037 |
| | 1,400 | 1,246 | 1,960 | 1,744 | 1,134847 | 0,097708 | 0,18186617 | 0,288736 |
| Сумма | **5,400** | **4,959** | **5,500** | **4,731** | | | 0,61417407 | 0,649894 |
| | среднее | 0,708389 | | | ошибка | 11,4% | $R^2 =$ | 0,945037 |

**Полином второй степени**: $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Тогда $S = \sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2 - y_i]^2$. Минимум функции трех переменных достигается при выполнении условий:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2 - y_i] x_i = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i] x^2{}_i = 0$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2{}_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x^2{}_i + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x^2{}_i y_i \end{cases} \quad (4.11)$$

Таблица 4.3 – Расчет коэффициентов системы уравнений (4.11)

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $x_i^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,100 | 0,333 | 0,010 | 0,033 | 0,001 | 0,0001 | 0,00333333 |
| | 0,300 | 0,415 | 0,090 | 0,125 | 0,027 | 0,0081 | 0,03737196 |
| | 0,600 | 0,517 | 0,360 | 0,310 | 0,216 | 0,1296 | 0,18622152 |
| | 0,800 | 0,644 | 0,640 | 0,516 | 0,512 | 0,4096 | 0,41241216 |
| | 1,000 | 0,803 | 1,000 | 0,803 | 1,000 | 1,000 | 0,802742 |
| | 1,200 | 1,000 | 1,440 | 1,200 | 1,728 | 2,0736 | 1,440000 |
| | 1,400 | 1,246 | 1,960 | 1,744 | 2,744 | 3,8416 | 2,44163276 |
| **Сумма** | **5,400** | **4,959** | **5,500** | **4,731** | **6,228** | **7,463** | **5,324** |

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} 7a_0 + 5{,}4a_1 + 5{,}5a_2 = 4{,}9587 \\ 5{,}4a_0 + 5{,}5a_1 + 6{,}228a_2 = 4{,}731 \\ 5{,}5a_0 + 6{,}228a_1 + 7{,}463a_2 = 5{,}324 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 0{,}3407 \\ a_1 = 0{,}0384 \\ a_2 = 0{,}4302 \end{matrix}$$

Следовательно, полином примет вид: $F(x) = 0{,}3407 + 0{,}0384x + 0{,}4302x^2$

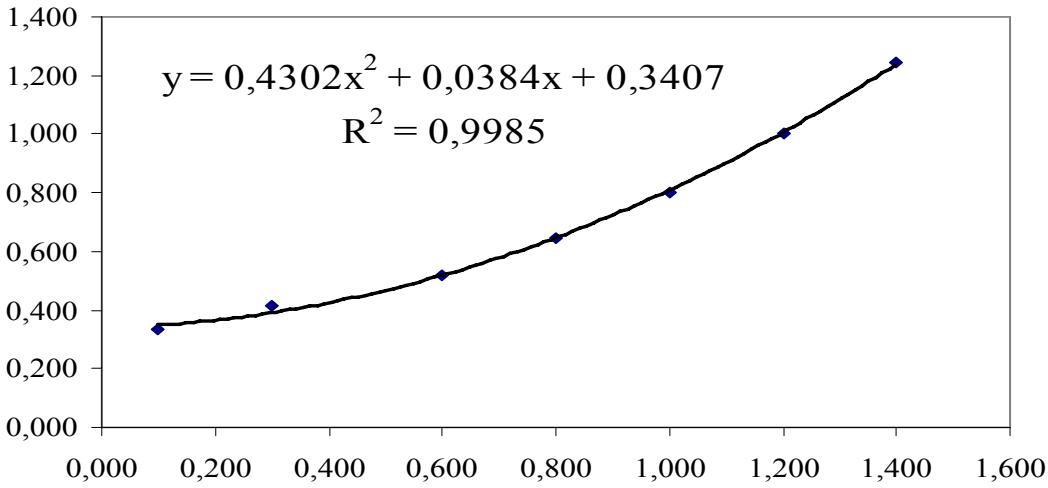



Рис. 4.2 – Замена табличной функции полиномом второй степени

Средняя ошибка аппроксимации составила только 2%, а коэффициент детерминации $R^2$ практически равен единице. Таким образом, полином второй степени является лучшим приближением табличной функции.

**Степенная функция** $y = ax^b$

Тогда $\ln y = \ln a + b \ln x$. Обозначим $Y = \ln y,\ X = \ln x \Rightarrow \quad Y = A + bX,\ \ A = \ln a$. Приходим к случаю линейной аппроксимации, т.е.можно провести исследование по описанной выше методике, но в качестве $x_i, y_i$ будут использоваться $X_i = \ln x_i, Y_i = \ln y_i$

Таблица 4.4 - Расчет коэффициентов

| | $x_i$ | $y_i$ | $X_i$ | $Y_i$ | $X_i^2$ | $X_i^2 Y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,100 | 0,333 | -2,303 | -1,099 | 5,301898 | 2,529651 |
| | 0,300 | 0,415 | -1,204 | -0,879 | 1,449551 | 1,058158 |
| | 0,600 | 0,517 | -0,511 | -0,659 | 0,260943 | 0,336719 |
| | 0,800 | 0,644 | -0,223 | -0,439 | 0,049793 | 0,098059 |
| | 1,000 | 0,803 | 0,000 | -0,220 | 0 | 0 |
| | 1,200 | 1,000 | 0,182 | 0,000 | 0,033241 | 0 |
| | 1,400 | 1,246 | 0,336 | 0,220 | 0,113214 | 0,073931 |
| **Сумма** | **5,400** | **4,959** | **-3,722** | **-3,076** | **7,209** | **4,097** |

Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} 7A - 3{,}722b = -3{,}076 \\ -3{,}722A + 7{,}209b = 4{,}097 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -0{,}18925 \\ b = 0{,}4706 \end{matrix} \Rightarrow a = e^A = 0.827$$

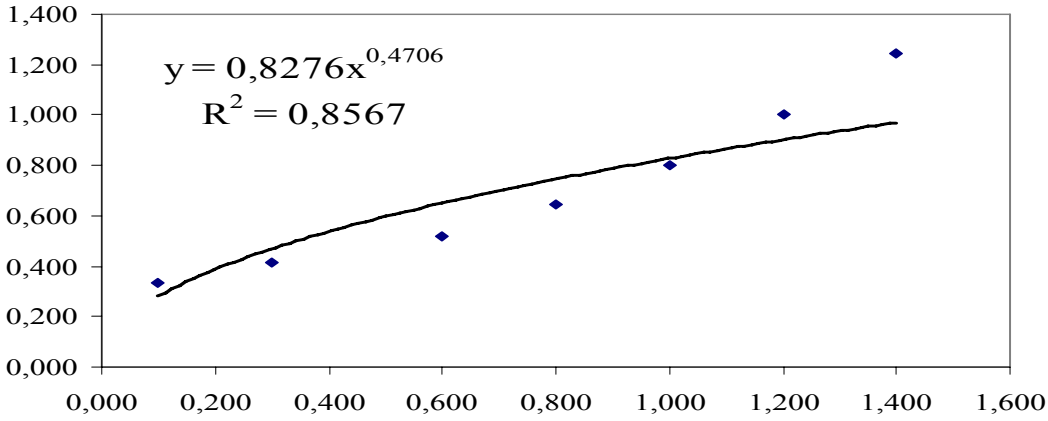



Рис. 4.3 – Замена табличной функции степенной функцией

**Экспоненциальная функция** $y = a \cdot e^{bx}$

Тогда $\ln y = \ln a + xb$. Обозначим $Y = \ln y \Rightarrow Y = A + bx,\ A = \ln a$

Приходим к случаю линейной аппроксимации, но в качестве $x_i, y_i$ будут использоваться $X_i = x_i,\ Y_i = \ln y_i$

Таблица 4.5 - Расчет коэффициентов

| | $x_i$ | $y_i$ | $Y_i$ | $x_i^2$ | $x_i^2 Y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,100 | 0,333 | -1,099 | 0,010 | -0,10986 |
| | 0,300 | 0,415 | -0,879 | 0,090 | -0,26367 |
| | 0,600 | 0,517 | -0,659 | 0,360 | -0,3955 |
| | 0,800 | 0,644 | -0,439 | 0,640 | -0,35156 |
| | 1,000 | 0,803 | -0,220 | 1,000 | -0,21972 |
| | 1,200 | 1,000 | 0,000 | 1,440 | 0 |
| | 1,400 | 1,246 | 0,220 | 1,960 | 0,307612 |
| **Сумма** | **5,400** | **4,959** | **-3,076** | **5,500** | **-1,033** |

Тогда $\begin{cases} 7a_0 + 5{,}4a_1 = -3{,}076 \\ 5{,}4a_0 + 5{,}5a_1 = -1{,}033 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = --1{,}21435 \\ b_1 = 1{,}0045 \end{matrix} \Rightarrow a = e^A = 0.2969$

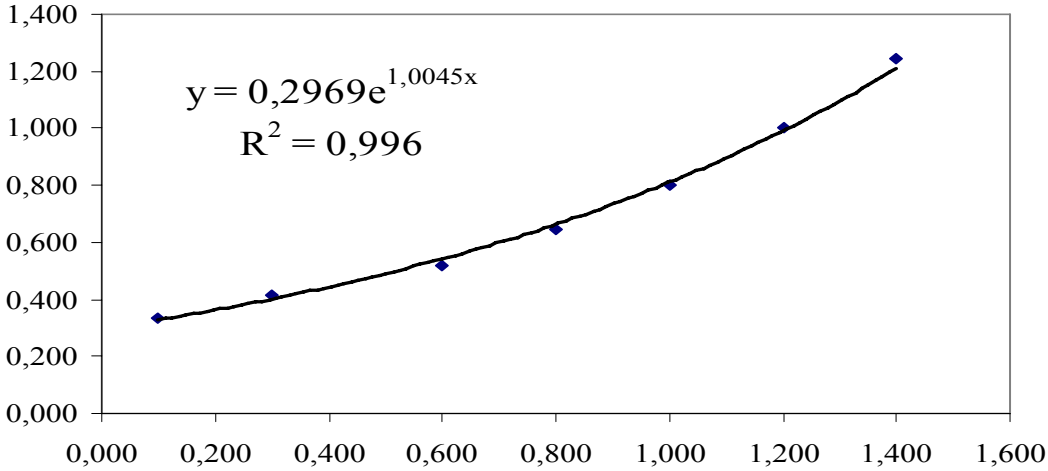



Рис. 4.4 – Замена табличной функции экспоненциальной функцией

**Логарифмическая функция** $y = a \cdot + b \ln x$

Обозначим $X = \ln x \Rightarrow y = A + bX$. Приходим к случаю линейной аппроксимации, но в качестве $x_i$ будет использоваться $X_i = \ln x_i$

Таблица 4.6 - Расчет коэффициентов

| | $x_i$ | $y_i$ | $X_i$ | $X_i^2$ | $X_i^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,100 | 0,333 | -2,303 | 5,302 | -0,76753 |
| | 0,300 | 0,415 | -1,204 | 1,450 | -0,49994 |
| | 0,600 | 0,517 | -0,511 | 0,261 | -0,26424 |
| | 0,800 | 0,644 | -0,223 | 0,050 | -0,14379 |
| | 1,000 | 0,803 | 0,000 | 0,000 | 0 |
| | 1,200 | 1,000 | 0,182 | 0,033 | 0,182322 |
| | 1,400 | 1,246 | 0,336 | 0,113 | 0,419154 |
| **Сумма** | **5,400** | **4,959** | **-3,722** | **7,209** | **-1,074** |

Тогда

$$\begin{cases} 7a_0 - 3{,}7226a_1 = 4{,}959 \\ -3{,}772a_0 + 7{,}209a_1 = -1{,}074 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0{,}8672 \\ b = 0{,}2987 \end{matrix}$$

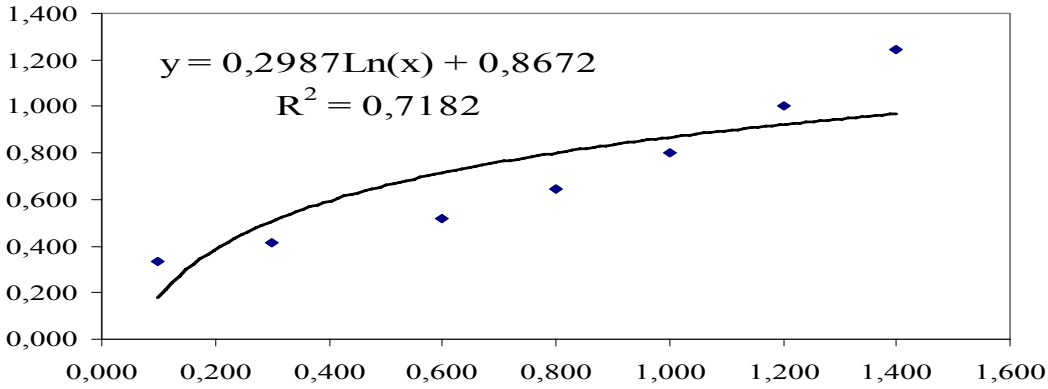



Рис. 4.5 – Замена табличной функции логарифмической функцией

## *4.2. Задачи для самостоятельного решения*

1. Даны значения функции в восьми точках:

| $x_i$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4,2 | 3,6 | 2,6 | 1,8 | 1,4 | 0,8 | 0,6 | 0 |

С помощью метода наименьших квадратов найти приближенное выражение функции вида $F(x) = a_1 x + a_0$.

Ответ: $F(x) = -1.1952x + 5{,}1619$

2. Даны значения функции в восьми точках:

| $x_i$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 8,9 | 4,6 | 2,6 | 1,5 | 1,2 | 0,8 | 0,6 | 0,5 |

С помощью метода наименьших квадратов найти приближенное выражение функции вида $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Ответ: $F(x) = 15{,}159 - 8{,}206x + 1{,}1262x^2$

3. Даны значения функции в восьми точках:

| $x_i$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 10,8 | 5,8 | 3,2 | 2,2 | 1,5 | 0,9 | 0,6 | 0,5 |

С помощью метода наименьших квадратов найти приближенное выражение функции вида $F(x) = ax^b$.

Ответ: $F(x) = 12{,}77x^{-2{,}0935}$

4. Даны значения функции в восьми точках:

| $x_i$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 10,8 | 5,8 | 3,2 | 2,2 | 1,5 | 0,9 | 0,6 | 0,5 |

С помощью метода наименьших квадратов найти приближенное выражение функции вида $F(x) = ae^{bx}$.

Ответ: $F(x) = 21.613e^{-0.8819x}$

5. Даны значения функции в восьми точках:

| $x_i$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 2,1 | 3,6 | 4,8 | 6 | 6,7 | 7,2 | 8,6 |

С помощью метода наименьших квадратов найти приближенное выражение функции вида $F(x) = a\ln x + b$.

Ответ: $F(x) = 5{,}0273\ln x + 0{,}4398$

6. Даны показатели товарооборота (в млрд. грн.) по региону Украины

| | $x_i$ | объем товарооборота (ОТ) |
|---|---|---|
| 2000 г. | 1,00 | 0,95 |
| 2001 г. | 2,00 | 1,22 |
| 2002 г. | 3,00 | 1,43 |
| 2003 г. | 4,00 | 1,76 |
| 2004 г. | 5,00 | 2,40 |
| 2005 г. | 6,00 | 3,52 |
| 2006 г. | 7,00 | 4,78 |
| 2007 г. | 8,00 | 6,35 |

Подобрать функцию, для которой коэффициент детерминации будет наибольшим, и с ее помощью сделать прогноз об объемах товарооборота на 2008 г.

Ответ: $OT = 0{,}0087x^3 + 0{,}0101x^2 + 0{,}0437x + 0{,}9364$, $R^2 = 0{,}9986$.

Прогноз на 2008 г. *ОТ = 8,49 млн. грн.*

## *4.3. Расчетно-графическое задание № 4*

Значения точечной функции $y = f(x)$ заданы в 10 точках. С помощью метода наименьших квадратов найти приближенное выражение функций: линейной, квадратичной, степенной, логарифмической и выбрать функцию, для которой коэффициент детерминации будет наибольшим. Вычислить величину средней ошибки. Построить графики функций.

Таблица 4.7 – Значения точечной функции

| Варианты | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ |
| 1 | 12 | 18 | 19 | 12,5 | 1,1 | 10,2 | 10,9 | 1,3 | -1,8 | 20 |
| 1,5 | 8,2 | 17 | 18 | 9,7 | 1,6 | 8 | 9 | 1,7 | -1,3 | 19,5 |
| 2 | 6,5 | 16 | 16 | 7 | 2,2 | 6,6 | 7,7 | 2,3 | -0,7 | 18,3 |
| 2,5 | 4,8 | 15 | 13 | 6 | 3,2 | 6 | 6,7 | 3,1 | 0,3 | 16,5 |
| 3 | 3,6 | 12 | 9 | 5,5 | 4,1 | 5,1 | 5,5 | 4 | 1,2 | 11 |
| 3,5 | 2,8 | 8 | 4 | 4,8 | 5,5 | 4,5 | 4,8 | 5,4 | 2,6 | 6 |
| 4 | 2,1 | 4 | -2 | 4,2 | 7,3 | 3,8 | 4,1 | 7,2 | 4,4 | -1 |
| 4,5 | 1,7 | 1 | -9 | 3,5 | 10,5 | 3 | 3,6 | 10,4 | 7,6 | -8 |
| 5 | 1,6 | -2 | -14 | 3 | 14 | 2,6 | 3,2 | 14,1 | 11,1 | -14 |
| 5,5 | 1,3 | -6 | -19 | 2,5 | 16,1 | 2,2 | 3,1 | 16 | 13,2 | -20 |
| **Варіанти** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| $x_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ |
| 1 | 11,5 | 13,2 | 2,2 | 11,7 | 19,3 | 6 | 5,6 | 17,1 | -6,9 | 11,8 |
| 2 | 7,7 | 10,4 | 2,7 | 7,4 | 18,8 | 3,9 | 6 | 13,3 | -6,4 | 9,7 |
| 3 | 6 | 7,7 | 3,3 | 6,1 | 17,4 | 2,2 | 6,6 | 11,6 | -5,8 | 8,3 |
| 4 | 4,3 | 6,7 | 4,3 | 4,2 | 13,6 | 0,5 | 7,4 | 9,9 | -4,8 | 7,5 |
| 5 | 3,1 | 6,2 | 5,2 | 3,5 | 9,1 | -0,7 | 8,3 | 8,7 | -3,9 | 6,6 |
| 6 | 2,3 | 5,5 | 6,6 | 2,5 | 4,3 | -1,5 | 9,7 | 7,9 | -2,5 | 6 |
| 7 | 1,6 | 4,9 | 8,4 | 1,7 | 1 | -2,2 | 11,5 | 7,2 | -0,7 | 5,4 |
| 8 | 1,2 | 4,2 | 11,6 | 1,2 | -5 | -2,6 | 14,7 | 6,8 | 2,5 | 4,6 |
| 9 | 1,1 | 3,7 | 15,1 | 1,1 | -13 | -2,8 | 17,5 | 6,7 | 6 | 4,2 |
| 10 | 0,8 | 3,2 | 17,2 | 0,8 | -20 | -3 | 20 | 6,4 | 8,1 | 4 |

продолжение табл. 4.7

| **Варіанти** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ | $y_i$ |
| 0,5 | 16,4 | 5 | 8,4 | 15,2 | 5,4 | 7,8 | -4,3 | 11 | 4,7 | 18,1 |
| 1,2 | 15,4 | 5,5 | 4,1 | 12,4 | 1,6 | 5 | -3,8 | 10 | 5,2 | 14,3 |
| 1,8 | 14,4 | 6,1 | 2,8 | 9,7 | -0,1 | 3,4 | -3,2 | 9 | 5,8 | 12,6 |
| 2,4 | 13,4 | 7,1 | 0,9 | 8,7 | -1,8 | 1,3 | -2,2 | 8 | 6,8 | 10,9 |
| 3 | 10,4 | 8 | 0,2 | 8 | -3 | 0,6 | -1,3 | 5 | 7,7 | 9,7 |
| 3,6 | 6,4 | 9,4 | -0,8 | 7,2 | -3,8 | 0 | 0,1 | 1 | 9,1 | 8,9 |
| 4,2 | 3 | 11,2 | -1,6 | 6,9 | -4,5 | -0,5 | 1,9 | -2,4 | 10,9 | 8,2 |
| 4,8 | -2 | 14,4 | -2,1 | 6,2 | -4,9 | -1,2 | 5,1 | -7,4 | 14,1 | 7,8 |
| 5,2 | -6,1 | 17,9 | -2,2 | 5,9 | -5 | -1,5 | 8,6 | -11,5 | 17,6 | 7,7 |
| 5,8 | -10 | 21 | -2,5 | 5,2 | -5,3 | -2 | 12 | -15,4 | 21 | 7,4 |

## Пример выполнения РГЗ № 4

Дано: Функция $y = f(x)$ представлена таблицей

| $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|
| 0,4 | 1,1 |
| 0,8 | 1,8 |
| 1,2 | 2,2 |
| 1,6 | 2,5 |
| 2,0 | 2,7 |
| 2,4 | 2,9 |
| 2,8 | 3,1 |
| 3,2 | 3,2 |
| 3,6 | 3,3 |
| 4,0 | 3,4 |

**<u>Решение. 1 этап.</u> Линейная аппроксимация.** $F(x) = a_0 + a_1 x$ .

В MS EXCEL создадим таблицу, введя соответствующие формулы в ячейки столбцов C, D, E, F, G. Например, для вычисления произведения чисел в столбцах A і B, в ячейке D3 необходимо ввести формулу: **=A3*B3**

В строке 14 необходимо найти суммы чисел в столбцах, используя функцию «Автосуммирование» (значок Σ - на панели инструментов). Вид заполненной таблицы показан на рис. 4.6.

С помощью встроенных функций **МОБР** и **МУМНОЖ** решим систему уравнений (4.8). Обозначим главную матрицу через A:

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x & \sum x_i^2 \end{pmatrix}, \qquad (4.12)$$

а матрицу свободных членов через B:

$$B = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \qquad (4.13)$$

Матрица решения X:

$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B \qquad (4.14)$$

где $A^{-1}$ – обратная матрица.

D3 =A3*B3

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | Xi | Yi | Xi^2 | Xi*Yi | Xi^3 | Xi^4 | Yi*Xi^2 |
| 3 | 0,4 | 1,1 | 0,1600 | 0,4400 | 0,0640 | 0,0256 | 0,1760 |
| 4 | 0,8 | 1,8 | 0,6400 | 1,4400 | 0,5120 | 0,4096 | 1,1520 |
| 5 | 1,2 | 2,2 | 1,4400 | 2,6400 | 1,7280 | 2,0736 | 3,1680 |
| 6 | 1,6 | 2,5 | 2,5600 | 4,0000 | 4,0960 | 6,5536 | 6,4000 |
| 7 | 2,0 | 2,7 | 4,0000 | 5,4000 | 8,0000 | 16,0000 | 10,8000 |
| 8 | 2,4 | 2,9 | 5,7600 | 6,9600 | 13,8240 | 33,1776 | 16,7040 |
| 9 | 2,8 | 3,1 | 7,8400 | 8,6800 | 21,9520 | 61,4656 | 24,3040 |
| 10 | 3,2 | 3,2 | 10,2400 | 10,2400 | 32,7680 | 104,8576 | 32,7680 |
| 11 | 3,6 | 3,3 | 12,9600 | 11,8800 | 46,6560 | 167,9616 | 42,7680 |
| 12 | 4,0 | 3,4 | 16,0000 | 13,6000 | 64,0000 | 256,0000 | 54,4000 |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | **22,0000** | **26,2000** | **61,6000** | **65,2800** | **193,6000** | **648,5248** | **192,6400** |

Рис. 4.6 - Сформированная таблица

Составьте два массива для матрицы A – область ячеек A16:B17 и матрицы B – область ячеек D16:D17. В ячейку A16 введите число 10 (количество заданных точек). В ячейку B16 запишите формулу: **=A14.** Тогда в B16 будет отображаться значение суммы $\sum x_i$. Аналогично, согласно формулам заполните сдачу ячеек для матриц A і B (рис. 4.7).

Пометьте область, начиная с ячейку A19 по B20 (Рис. 4.7).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 15 | матрица A | | | матрица B |
| 16 | 10 | 22,0000 | | 26,2000 |
| 17 | 22,0000 | 61,6000 | | 65,2800 |
| 18 | обратная матрица | | | решение |
| 19 | | | | a0= |
| 20 | | | | a1= |

Рис 4.7 - Подготовка данных

Нажмите кнопку $f_x$ и выберите из списка функцию **МОБР**(). Заметьте числа матрица А, после чего нажмите **Enter** и **ОК**. В ячейку А19 появится первый элемент обратной матрицы. Для отражения всех элементов нажмите клавишу **F2**, а потом **Enter** при нажатых одновременное клавишах **Ctrl** и **Shift**.

Заметьте столбец ячейку с Е19 по Е20 и вызовите функцию **МУМНОЖ**(). Заметьте массив 1 – обратную матрицу А, массив 2 – матрицу-столбец В. Нажмут ОК. Для отображения всех элементов матрицы решений **X** нажмите клавишу F2, а потом **Enter** при нажатых одновременное клавишах **Ctrl** и **Shift**.

На рис 4.8 представленный результат решений уравнения:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | матрица А | | | матрица В | |
| 16 | 10 | 22,0000 | | 26,2000 | |
| 17 | 22,0000 | 61,6000 | | 65,2800 | |
| 18 | обратная матрица | | | решение | |
| 19 | 0,46667 | -0,16667 | | a0= | 1,346667 |
| 20 | -0,1667 | 0,075758 | | a1= | 0,578788 |

Рис.4.8 - Решение системы уравнений матричным методом

Заметьте началу данные в столбцах А і В, и, используя «Мастер диаграмм», постройте **точечный** график. В главном меню появился пункт «Диаграмма». Выберите из этого пункта подпункт «Прибавить линию тренда». Заметьте линейный график, потом щелкните по вкладышу «Параметры» и установите галочек в двух последних строках (рис. 4.9).

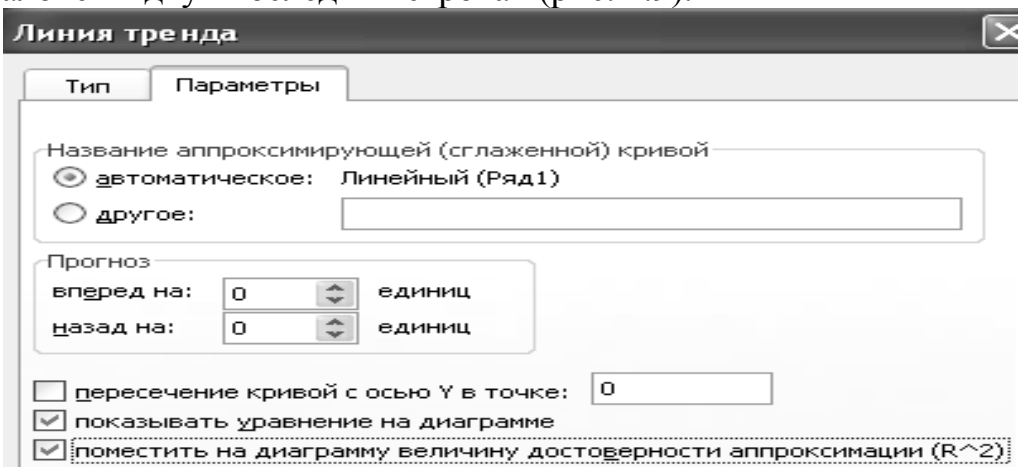



Рис. 4.9 - Параметры

Программа построит график линейной функции, выведет на экран ее уравнения и значение коэффициента детерминации (рис. 4.10).

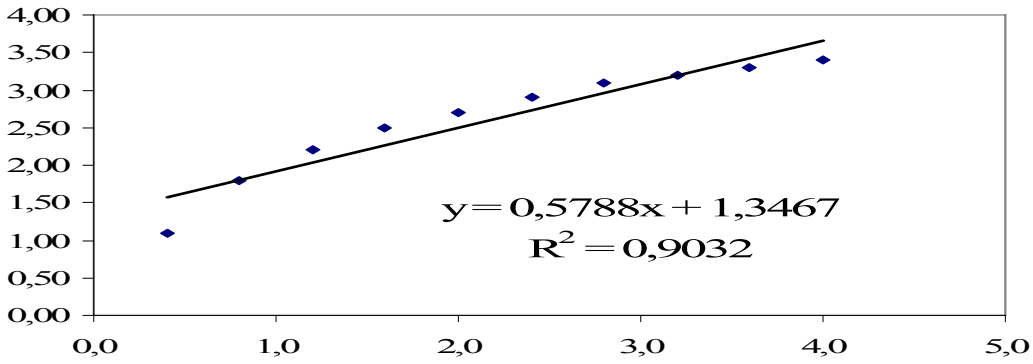



Рис. 4.10 - Линейная аппроксимация

Повторите описанный выше процесс решения системы уравнений для случая квадратичной функции. Матрицы A i B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Постройте график точечной функции и подберите полином второй степени (режим «Добавить линию тренда»). Снова постройте график точечной функции и подберите логарифмическую функцию.

Подсчитайте ошибку аппроксимации, сформировав таблицу, показанную на рис. 4.11. Например, для вычисления значения линейной функции необходимо в ячейку A32 ввести и скопировать по строкам формулу:

**=$E$19+$E$20*A3**

Для расчета ошибки линейной аппроксимации, в ячейку B32 вводим и копируем по строкам формулу:

**=ABS(1-A3/A32)**

находим сумму значений столбца B и делим результат на количество – 10. Аналогично подсчитывается ошибка квадратичной аппроксимации (рис. 4.11).

| 31 | F(x) | E | F(x) | E |
|---|---|---|---|---|
| 32 | 1,57818 | 0,302995 | 1,241818 | 0,1142 |
| 33 | 1,8097 | 0,005358 | 1,697576 | 0,06034 |
| 34 | 2,04121 | 0,077791 | 2,097273 | 0,04898 |
| 35 | 2,27273 | 0,1 | 2,440909 | 0,02421 |
| 36 | 2,50424 | 0,07817 | 2,728485 | 0,01044 |
| 37 | 2,73576 | 0,060035 | 2,96 | 0,02027 |
| 38 | 2,96727 | 0,04473 | 3,135455 | 0,01131 |
| 39 | 3,19879 | 0,000379 | 3,254848 | 0,01685 |
| 40 | 3,4303 | 0,037986 | 3,318182 | 0,00548 |
| 41 | 3,66182 | 0,0715 | 3,325455 | 0,02242 |
| 42 | E= | 7,8% | | 3,3% |

Рис. 4.11 - Расчет ошибки

### *4.4 Вопросы по теме*

1. Виды аппроксимирующих функций
2. Что такое интерполяция?
3. Как построить интерполяционный многочлен Лагранжа?
4. Общая постановка задачи нахождения приближающей функции.
5. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наимень-

ших квадратов?

6. Какие функции могут быть использованы в качестве приближающих?
7. Как находятся отклонения измеренных значений Y от вычисленных по формуле приближающей функции?
8. Как найти приближающую функцию в виде линейной функции ?
9. Как найти приближающую функцию в виде квадратичной функции?
10. Как привести показательную, степенную, логарифмическую функции к линейной?
11. Как вычислить коэффициент детерминации?
12. Как вычислить стандартную ошибку?
13. Как можно определить правильность вида выбранной функции?

# 5 Прогнозирование экономических показателей

## *5.1 Модели прогнозирования временных рядов с учетом сезонности*

*Прогноз* — научно обоснованное суждение о перспективах, возможных состояниях того или иного явления в будущем и (или) об альтернативных путях и сроках их осуществления. *Прогнозирование* — процесс разработки прогнозов. Прогнозирование играет важную роль в принятии управленческих решений. Так при разработке перспективных планов развития предприятия результаты прогноза продаж и выпуска продукции являются отправной точкой для определения будущих доходов и расходов предприятия и ожидаемой прибыли. Чаще всего экономические показатели, на основе которых осуществляется прогноз, можно представить в виде временных рядов, т.е. упорядоченной по времени последовательности наблюдений. Временные ряды включают два обязательных элемента: уровни ряда – числовые значения показателя и время, выраженное моментами или периодами (день, месяц, квартал, год), к которым относятся уровни.

Существуют разнообразные методы прогнозирования, обзор которых можно найти, например, в книге [16]. В ряде случаев временной ряд проявляет сезонный фактор. Например, в таблице 5.1 и на рис. 5.1 представлена динамика чистого дохода предприятия розничной торговли, которое находится в курортном городе. Как видно из рисунка 5.1, поквартальная динамика доходов от реализации товаров имеет синусоидальный характер с тенденцией роста тренда.

Таблица 5.1 - Показатели чистого дохода от реализации товаров

| год | квартал | Xi | чистый доход, тыс.грн. (Yi) | год | квартал | Xi | чистый доход, тыс.грн. (Yi) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2004 | 1 | 1 | 1072,0 | 2008 | 1 | 17 | 1987,0 |
| | 2 | 2 | 1387,0 | | 2 | 18 | 2366,0 |
| | 3 | 3 | 2359,0 | | 3 | 19 | 4137,0 |
| | 4 | 4 | 1684,0 | | 4 | 20 | 2814,0 |
| 2005 | 1 | 5 | 1289,0 | 2009 | 1 | 21 | 1907,0 |
| | 2 | 6 | 1626,0 | | 2 | 22 | 2301,0 |
| | 3 | 7 | 2743,0 | | 3 | 23 | 3878,0 |
| | 4 | 8 | 1864,0 | | 4 | 24 | 2500,0 |
| 2006 | 1 | 9 | 1703,0 | 2010 | 1 | 25 | 2322,0 |
| | 2 | 10 | 2169,0 | | 2 | 26 | 2814,0 |
| | 3 | 11 | 3597,0 | | 3 | 27 | 4715,0 |
| | 4 | 12 | 2233,0 | | 4 | 28 | 3310,0 |
| 2007 | 1 | 13 | 1893,0 | 2011 | 1 | 29 | 2812,0 |
| | 2 | 14 | 2348,0 | | 2 | 30 | 3498,0 |
| | 3 | 15 | 3966,0 | | 3 | 31 | 5581,0 |
| | 4 | 16 | 2637,0 | | 4 | 32 | 3870,0 |

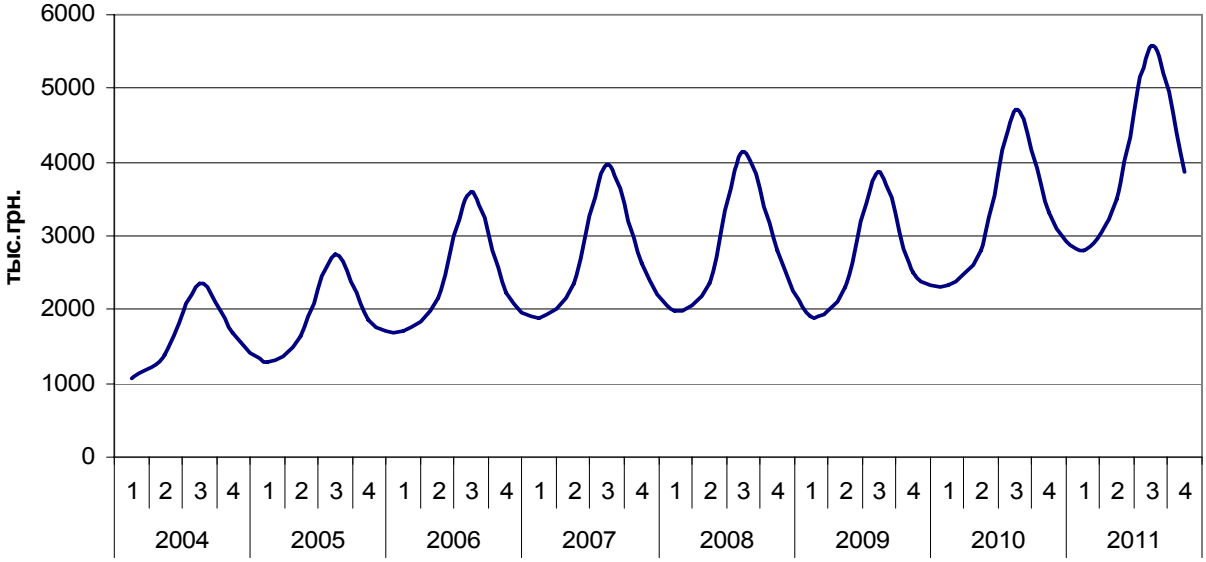



Рис. 5.1 – Динамика чистого дохода от реализации товаров

При исследовании такого временного рядя можно выделить составляющие, которые с экономической точки зрения несут разную содержательную нагрузку. Основными структурообразующим элементами являются:

– тенденция (тренд) — $F$ – соответствует медленному долговременному изменению показателя;

– циклические колебания — С – являются результатом действия факторов, циклически изменяющихся со временем, т.е. содержащих возрастающие и убывающие фазы в длительном периоде;

– сезонная компонента — $S$ – обусловлена действием некоторого периодически повторяющегося в определенное время года, квартала, месяца, недели явления, связанного с сезонами или ритмами человеческой активности. Период таких колебаний (в отличие от циклических) не превышает года;

– случайные колебания — $E$ – не поддаются учету и регистрации, образованы в результате суперпозиции большого числа внешних факторов.

Для анализа временного ряда используем либо **аддитивную модель:**

$$Y = F + C + S + E,$$

либо **мультипликативную модель:**

$$Y = F * C * S * E,$$

Итак, мы имеем временной ряд $y_1, y_2, ... y_t, .... y_n$ с периодом сезонности L=4 (ежеквартальные данные). **Метод оценивания сезонной волны состоит в выделении тренда скользящими средними** по формуле

$$\hat{y}_t = \frac{1}{L}\left( \sum_{s==-(m-1)}^{m-1} y_{t+s} + 0.5 \cdot y_{t-m} + 0.5 \cdot y_{t+m} \right) \qquad (5.1)$$

где $m = L/2; \quad t = m+1, m+2, ... n-m$

Например, в нашем случае $m = L/2 = 2$, тогда первое сглаженное значение при $t = m+1 = 3$ определяется по формуле (5.1) в виде

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{8}y_1 + \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{4}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{1}{8}y_5 \qquad (5.1.1)$$

После этого вычисляется отклонение от сглаженных значений в качестве оценки сезонности в аддитивной модели

$$S_t = \frac{1}{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}(y_{t+Lj} - \hat{y}_{t+Lj}), \quad t = 1,...,m \quad h = n/L$$

$$S_t = \frac{1}{h-1}\sum_{j=0}^{h-2}(y_{t+Lj} - \hat{y}_{t+Lj}), \quad t = m+1,...,2m \qquad (5.2.1)$$

или для определения коэффициента сезонности – в мультипликативной модели:

$$S_t = \frac{1}{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{y_{t+Lj}}{\hat{y}_{t+Lj}}, \quad t = 1,...,m \quad h = n/L$$

$$S_t = \frac{1}{h-1}\sum_{j=0}^{h-2}\frac{y_{t+Lj}}{\hat{y}_{t+Lj}}, \quad t = m+1,...,2m \qquad (5.2.2)$$

Разные пределы суммирования объясняется тем, что при использовании скользящей средней с четным значением длины интервала сглаживания m первых и m последних уровней ряда будут потеряны.

Для того чтобы сезонные составляющие не зависели от года, необходимо провести их корректировку (усреднение). Окончательные формулы для оценки сезонности имеют вид:

для аддитивной модели $\hat{S}_t = S_t - \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} S_i$ (5.3.1)

для мультипликативной модели $\hat{S}_t = S_t \frac{L}{\sum_{i=1}^{L} S_i}$ (5.3.2)

Таким образом, построение тренд-сезонной модели осуществляется в следующей последовательности:

1. Выделяется сезонная компонента.
2. Осуществляется переход к временному ряду без сезонной компоненты:

   для аддитивной модели $z_t = y_t - \hat{S}_t$

   для мультипликативной модели $z_t = y_t / \hat{S}_t$
3. Определяется линия тренда для ряда $z_t$
4. Моделирование динамики исходного ряда с учетом полученной линии тренда.
5. Использование модели для прогнозирования.

В пункте 5.2 представлен пример использования моделей для краткосрочного прогнозирования чистого дохода.

## *5.2. Расчетно-графическое задание № 5*

Используя показатели чистого дохода от реализации товаров составить прогноз продаж на 2012 год.

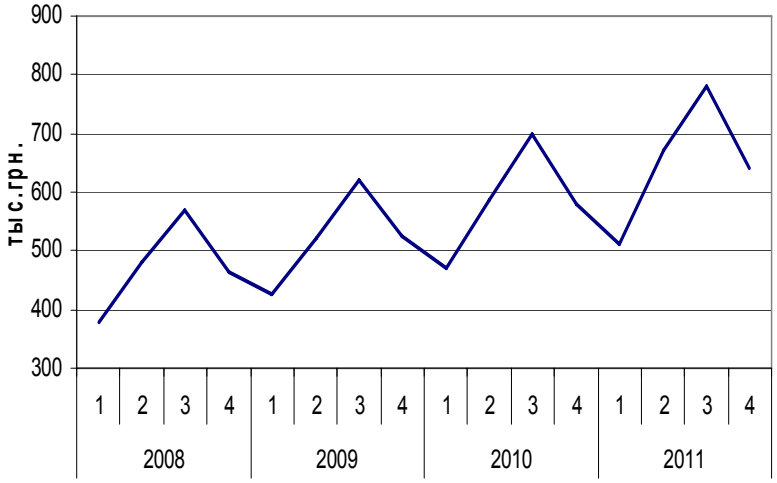
Таблица 5.2 – Показатели чистого дохода, в тыс.грн.

| год | квартал | варианты | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **0** |
| 2008 | 1 | 483 | 462 | 475 | 455 | 503 | 390 | 440 | 430 | 530 | 440 |
| | 2 | 601 | 591 | 596 | 570 | 631 | 470 | 580 | 550 | 670 | 550 |
| | 3 | 716 | 709 | 700 | 675 | 746 | 630 | 700 | 690 | 790 | 650 |
| | 4 | 586 | 580 | 575 | 550 | 608 | 480 | 570 | 565 | 640 | 530 |
| 2009 | 1 | 538 | 526 | 530 | 505 | 561 | 430 | 495 | 460 | 590 | 480 |
| | 2 | 648 | 662 | 670 | 605 | 672 | 535 | 630 | 630 | 710 | 584 |
| | 3 | 778 | 778 | 780 | 735 | 812 | 632 | 760 | 770 | 850 | 701 |
| | 4 | 645 | 660 | 670 | 610 | 673 | 542 | 585 | 610 | 715 | 580 |
| 2010 | 1 | 590 | 580 | 590 | 552 | 615 | 507 | 570 | 515 | 645 | 530 |
| | 2 | 730 | 760 | 760 | 689 | 760 | 583 | 690 | 680 | 800 | 660 |
| | 3 | 878 | 870 | 885 | 826 | 915 | 726 | 840 | 840 | 965 | 790 |
| | 4 | 722 | 709 | 720 | 680 | 753 | 627 | 650 | 660 | 795 | 650 |
| 2011 | 1 | 636 | 642 | 665 | 600 | 662 | 589 | 632 | 580 | 701 | 570 |
| | 2 | 836 | 860 | 862 | 786 | 870 | 651 | 805 | 770 | 920 | 752 |
| | 3 | 970 | 980 | 995 | 915 | 1010 | 800 | 900 | 910 | 1070 | 875 |
| | 4 | 800 | 824 | 835 | 750 | 835 | 722 | 770 | 760 | 880 | 722 |

**Пример решения РГЗ № 5**

| год | кв | t | Y |
|---|---|---|---|
| 2008 | 1 | 1 | 380 |
| | 2 | 2 | 480 |
| | 3 | 3 | 570 |
| | 4 | 4 | 465 |
| 2009 | 1 | 5 | 425 |
| | 2 | 6 | 520 |
| | 3 | 7 | 620 |
| | 4 | 8 | 525 |
| 2010 | 1 | 9 | 470 |
| | 2 | 10 | 585 |
| | 3 | 11 | 700 |
| | 4 | 12 | 580 |
| 2011 | 1 | 13 | 510 |
| | 2 | 14 | 670 |
| | 3 | 15 | 780 |
| | 4 | 16 | 640,0 |

1. Построим график чистого дохода. Видно наличие ярко выраженной сезонности продаж.




2. Используя формулы (5.1) и (5.2), в MS Excel составим таблицу, позволяющую выделить сезонную составляющую ряда.

Таблица 1 - Сглаживание ряда и определение сезонной составляющей

| год | квартал | $t$ | $y_i$ | $\hat{y}_t$ | аддитивная модель | мультипликативная модель |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 1 | 1 | 380 | | сезонная составляющая $S_t$ | |
| | 2 | 2 | 480 | | | |
| | 3 | 3 | 570 | 479,375 | 90,625 | 1,189048 |
| | 4 | 4 | 465 | 490,000 | -25,000 | 0,94898 |
| 2009 | 1 | 5 | 425 | 501,250 | -76,250 | 0,84788 |
| | 2 | 6 | 520 | 515,000 | 5,000 | 1,009709 |
| | 3 | 7 | 620 | 528,125 | 91,875 | 1,173964 |
| | 4 | 8 | 525 | 541,875 | -16,875 | 0,968858 |
| 2010 | 1 | 9 | 470 | 560,000 | -90,000 | 0,839286 |
| | 2 | 10 | 585 | 576,875 | 8,125 | 1,014085 |
| | 3 | 11 | 700 | 588,750 | 111,250 | 1,18896 |
| | 4 | 12 | 580 | 604,375 | -24,375 | 0,959669 |
| 2011 | 1 | 13 | 510 | 625,000 | -115,000 | 0,816 |
| | 2 | 14 | 670 | 642,500 | 27,500 | 1,042802 |
| | 3 | 15 | 780 | | | |
| | 4 | 16 | 640 | | | |

Первое значение $\hat{y}_t$ подсчитывается по формуле

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{8}y_1 + \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{4}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{1}{8}y_5$$

Затем результат копируется по строкам таблицы. Первое значение сезонной составляющей вычисляется по формулам:

$$S_3 = y_3 - \hat{y}_3 \text{ - для аддитивной модели,}$$

$$S_3 = y_3 / \hat{y}_3 \text{ - для мультипликативной модели.}$$

Результат копируется по строкам таблицы.

3. Используя формулу (5.3) проведем корректировку сезонной составляющей. Для этого составим таблицу, в которой соберем сезонные составляющие поквартально.

Таблица 2 - Корректировка сезонной составляющей

| мультипликативная модель | | | | аддитивная модель | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| кв. | $S_t$ | средняя | $\hat{S}_t$ | кв. | $S_t$ | средняя | $\hat{S}_t$ |
| 1 | 0,8479 | 0,83439 | 0,83444 | 1 | -76,2500 | -93,75000 | -92,65625 |
| | 0,8393 | | | | -90,0000 | | |
| | 0,8160 | | | | -115,0000 | | |
| 2 | 1,0097 | 1,02220 | 1,02226 | 2 | 5,0000 | 13,54167 | 14,63542 |
| | 1,0141 | | | | 8,1250 | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,0428 | | | | 27,5000 | | |
| 3 | 1,1890 | 1,18399 | 1,18407 | 3 | 90,6250 | 97,91667 | 99,01042 |
| | 1,1740 | | | | 91,8750 | | |
| | 1,1890 | | | | 111,2500 | | |
| 4 | 0,9490 | 0,95917 | 0,95923 | 4 | -25,0000 | -22,08333 | -20,98958 |
| | 0,9689 | | | | -16,8750 | | |
| | 0,9597 | | | | -24,3750 | | |
| | среднее | 1,0001 | | | среднее | -1,09375 | |

5. Выделяем тренд

для аддитивной модели $z_t = y_t - \hat{S}_t$

для мультипликативной модели $z_t = y_t / \hat{S}_t$

Таблица 3 - Выделение тренда

мультипликативная модель аддитивная модель

| $t$ | $y_i$ | $\hat{S}_t$ | $z_t$ | $\hat{S}_t$ | $z_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 380,0 | 0,83444 | 455,394 | -92,65625 | 472,65625 |
| 2 | 480,0 | 1,02226 | 469,546 | 14,63542 | 465,36458 |
| 3 | 570,0 | 1,18407 | 481,392 | 99,01042 | 470,98958 |
| 4 | 465,0 | 0,95923 | 484,764 | -20,98958 | 485,98958 |
| 5 | 425,0 | 0,83444 | 509,323 | -92,65625 | 517,65625 |
| 6 | 520,0 | 1,02226 | 508,675 | 14,63542 | 505,36458 |
| 7 | 620,0 | 1,18407 | 523,620 | 99,01042 | 520,98958 |
| 8 | 525,0 | 0,95923 | 547,314 | -20,98958 | 545,98958 |
| 9 | 470,0 | 0,83444 | 563,251 | -92,65625 | 562,65625 |
| 10 | 585,0 | 1,02226 | 572,260 | 14,63542 | 570,36458 |
| 11 | 700,0 | 1,18407 | 591,183 | 99,01042 | 600,98958 |
| 12 | 580,0 | 0,95923 | 604,652 | -20,98958 | 600,98958 |
| 13 | 510,0 | 0,83444 | 611,187 | -92,65625 | 602,65625 |
| 14 | 670,0 | 1,02226 | 655,409 | 14,63542 | 655,36458 |
| 15 | 780,0 | 1,18407 | 658,747 | 99,01042 | 680,98958 |
| 16 | 640,0 | 0,95923 | 667,202 | -20,98958 | 660,98958 |

Постройте график $z_t$ и в качестве линии тренда выберите прямую (см. раздел 4).

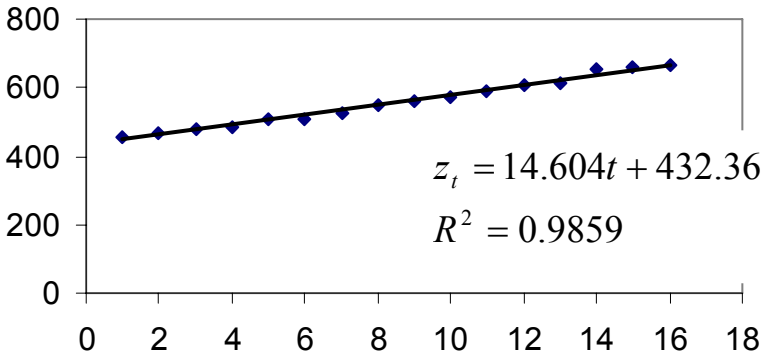



Рис. 1 - Линия тренда для мультипликативной модели

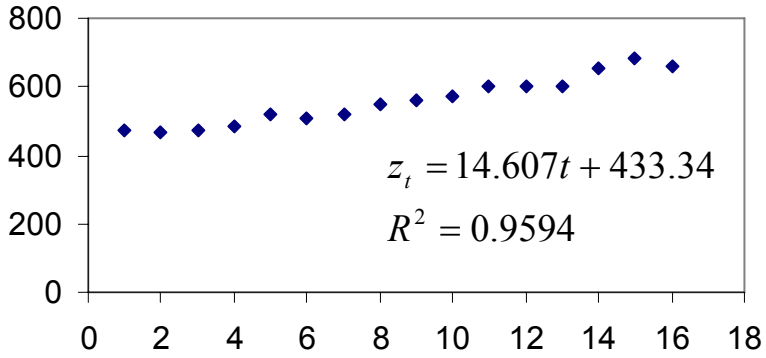



Рис. 2 - Линия тренда для аддитивной модели

Величина коэффициента детерминации показывает, что наиболее подходящей является мультипликативная модель.

6. Используя мультипликативную модель, проведем прогноз чистого дохода на 2012 г. (t = 17, 18, 19, 20). Для этого

Таблица 4 - Прогноз чистого дохода

| $t$ | $z_t$ | $\hat{S}_t$ | Чистый доход, тыс. грн. $y_t = z_t / \hat{S}_t$ |
|---|---|---|---|
| 17 | 680,6 | 0,83444 | **567,9** |
| 18 | 695,2 | 1,02226 | **710,7** |
| 19 | 709,8 | 1,18407 | **840,5** |
| 20 | 724,4 | 0,95923 | **694,9** |

Задача для самостоятельного решения

Используя данные из таблицы 5.1 составьте прогноз чистого дохода на 2012 г.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. - СПб.: Лань, 2003.-736 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. - М.:Наука, 1985.

3. Станішевський С.О. Вища математика. - Харків: ХНАМГ, 2005.-270 с.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. Наука.

5. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad.- СПб.: БХВ-Петербург, 2005 . – 464 с.

6. Демидович Б.П., Марон И. А. Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: ГИФМЛ, 1963 – 400 с.

7. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. - М.: ГИФМЛ, 1962 – 356 с.

8. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.

9. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977. – 228 с.

10. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М.: Высшая школа, 1990. -208 с.

11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.- 576 с.

12. Арженовский С.В. Методы социально-экономического прогнозирования: Учебное пособие. – М.: Изд.-торг. корпорация «Дашков и К»; Ростов н/Д: Наука-Спектр, 2009. – 236 с.

# Приложения

*П.1. Запись формул в ячейках и таблицах*

При записи формул надо помнить три основных правила:

*Первое правило*: **любая формула начинается со знака равно "=" и вводится без пробелов**.

*Второе правило*: **адреса ячеек записываются только с использованием букв английского алфавита (строчные или прописные – без разницы)**.

*Третье правило:* **формулу лучше всего редактировать в строке формул.**

Заполните столбцы А и В. Надо перемножить числа столбцов А и В, а результат вывести в столбце С.

Сделайте активной ячейку С1 и введите в неё формулу: **=A1*B1** и нажмите клавишу **Enter**. Для этого вначале нажмите знак =, затем щелкните по ячейке А1, нажмите знак * (лучше на цифровой клавиатуре справа) и снова щелкните, но по ячейке В1. После этого нажмите клавишу **Enter**.

| | A | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **=A1*B1** |
| **2** | **4** | **6** | |
| **3** | **6** | **9** | |
| **4** | **8** | **12** | |
| **5** | **10** | **15** | |

В ячейке С1 появится результат умножения содержимого ячейки А1 на содержимое ячейки В1. Вернитесь в ячейку С1. *В строке формул будет записана введенная вами формула*: **=A1*B1**

Таким образом, если в ячейку введена формула, то она появится в строке формул, а в самой ячейке – результат расчетов по этой формуле.

Что делать дальше? Можно, конечно, перейти к ячейке С2 и снова записать формулу: =A2*B2 и так далее. Но это нерационально, особенно для больших таблиц. Excel предлагает великолепный приём копирования формулы, при котором адреса ячеек будут автоматически переписываться в соответствии с расположением ячеек. Для того чтобы скопировать формулу, вернитесь в ячейку С1 и установите курсор мыши в **нижний правый угол так, чтобы он принял вид маленького черного крестика**, нажмите ЛК и, не отпуская её, переместите курсор мыши вниз по столбцу С, до последней строки таблицы. Отпустите ЛК. На экране появится результат умножения столбца А на столбец В. Щелкните, например, по ячейке С4. В строке формул вы увидите запись: =A4*B4 , которую записала при копировании сама программа.

Таким образом, достаточно ввести формулу один раз, а затем скопировать её по строкам или столбцам. Адреса ячеек в формуле перепишутся автоматически. При записи формул можно использовать операторы: + (сложение), - (вычитание), / ( деление), * ( умножение), ^ - возведение в степень. Во время вычислений в первую очередь выполняются действия в скобках. Умножение и деление выполняются раньше сложения и вычитания. Операторы, имеющие одинаковый приоритет, выполняются слева направо.

Если формула введена неверно, в ячейке появляется сообщение об ошибке. Вот некоторые сообщения:

| | |
|---|---|
| #ДЕЛ/0 | Попытка деления на ноль |
| #ИМЯ? | Используется имя, отсутствующее в списке |
| #ЗНАЧ! | Введена математическая формула, которая ссылается на текст |
| #ССЫЛКА! | Отсутствует диапазон ячеек, на который ссылается формула |

*В правиле 1 было сделано замечание о том, что пробелы внутри формулы недопустимы. Но, если формула длинная, в неё можно включить символы табуляции и разрывы строк. Тогда формула легко воспринимается. Для того чтобы ввести символы табуляции, установите в строке формул текстовый курсор в заданную позицию и нажмите совокупность клавиш Ctrl-Alt-Tab. Разрыв строки появляется при нажатии клавиш Alt-Tab.*

### *П.2. Использование констант в формулах*

Адреса ячеек, используемые в формуле, называют относительными, так как они изменяются при копировании формулы. Иногда необходимо зафиксировать адрес ячейки или серии ячеек, то есть сделать его абсолютным. Например, шаг h содержится в ячейке, скажем B1. Как сделать адрес ячейки B1 абсолютным? Для этого перед координатой строки или столбца (или и строки и столбца) в формулах помещают знак доллара $.

В ячейку A4 введем первое значение x, равное 1. В ячейку B1 запишем значение шага: 0,05. Наша задача: в ячейку A5 ввести формулу так, чтобы при копировании крестиком к предыдущему значению прибавлялся шаг.

Вначале введите формулу: **=A4*B1**

Затем щелкните в строку формул так чтобы текстовый курсор появился в конце формулы. Нажмите клавишу F4 на клавиатуре. Формула изменится: **=A4*$B$1** Нажмите Enter, вернитесь в ячейку и скопируйте крестиком вниз:

шаг h= 0,05

| X |
|---|
| 1 |
| 1,05 |
| 1,1 |
| 1,15 |
| 1,2 |
| 1,25 |
| 1,3 |
| 1,35 |
| 1,4 |
| 1,45 |

### *П.3. Суммирование строк и столбцов*

В большинстве таблиц необходимо просто просуммировать числа в строках и столбцах. Для этого применяется встроенная функция автосуммирования. Например, мы хотим найти суммы чисел в столбце A. Щелкните по ячейке A6. Нажмите на панели инструментов на кнопочку Σ (автосумма). В ячейке A6 появится формула: **=СУММ(A1:A5)**. Это означает, что программа подключила встроенную функцию суммирования. Аргумент функции: A1:A5 указывает на диапазон ячеек, которые необходимо просуммировать. Нажмите клавишу **Enter** . Формула может копироваться крестиком. Когда вы щелкайте по кнопочке "Автосумма", программа определяет зону суммирования. Если вам не устраивает предложенный диапазон, то с помощью мыши можно пометить другой диапазон ячеек.

*П.4. Использование встроенных функций*

Excel содержит большое количество встроенных функций: математических, статистических, и финансовых и т.д. С одной из этих функций мы уже познакомились. Это функция **СУММ**( ). Каждая функция имеет уникальное имя. Оно часто указывает на назначение функции. Аргументы функции записываются в круглых скобках. Весьма полезна функция **ОКРУГЛ**( ), которая позволяет округлять число до заданного количества знаков после запятой. Общий вид функции:

=**ОКРУГЛ**(число или адрес ячейки ; число знаков после запятой)

Для примера:

1. введите в ячейку F10 число 10,
2. введите в ячейку G10 число 6.
3. в ячейке H10 запишите формулу: **=F10/G10**
4. Нажмите клавишу **Enter**.

Появится результат: 1,666667.

Вернемся в ячейку H10. Щелкните по строке формул и измените формулу: **=ОКРУГЛ(F10/G10;2)** Нажмите клавишу **Enter**. Результат равен 1,67.

Использование мастера функций облегчает задачу ввода. формул с использованием встроенных функций.

Удалите формулу из ячейки H10. Щелкните ЛК по знаку равно = слева от строки формул. Появится список встроенных функций (рис. п1):

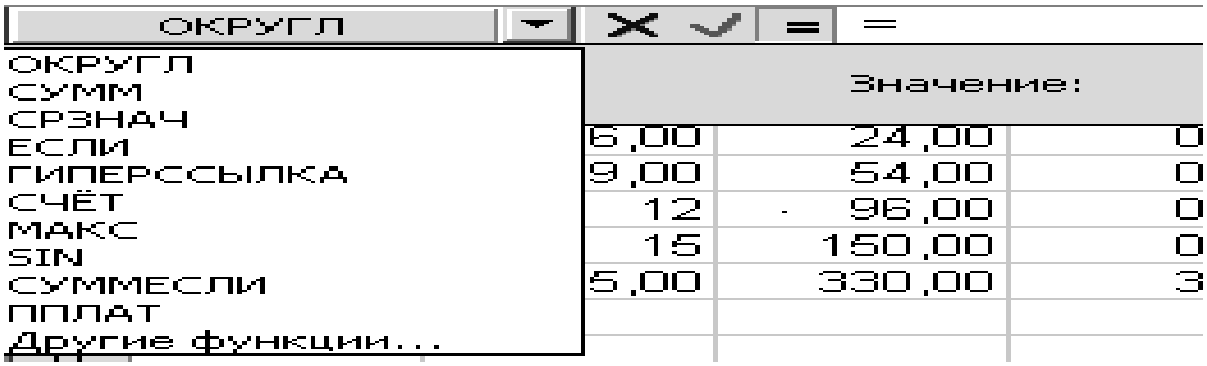



Рис. п.1 - Выбор функции

Откройте список функций, щелкнув по стрелке. Выберите функцию **ОКРУГЛ**. Если ее не окажется в списке, щелкните по пункту "Другие функции". Появится окно с полным списком встроенных функций, из которого можно найти **ОКРУГЛ**

После выбора функции заполните поля:

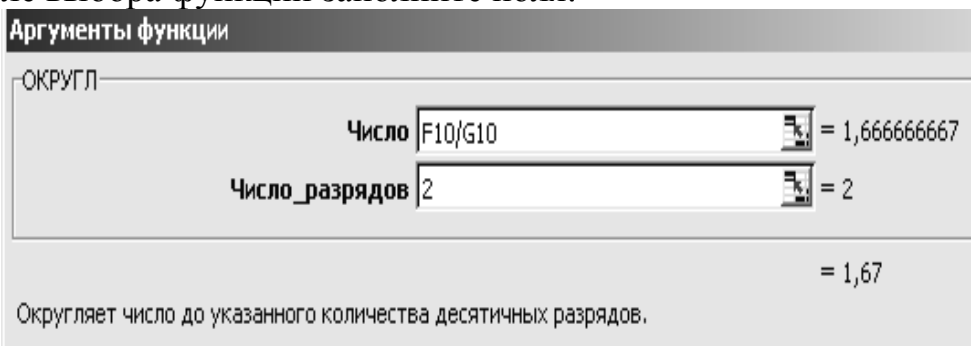



Рис. п.2 - Формирование аргумента функции округления

1. В поле "число" введите F10/G10, нажмите клавишу **Tab**.
2. В поле “количество _цифр” введите цифру **2** и нажмите клавишу **Enter**. Формула введена! (рис. п.2).

Установите табличный курсор в свободную ячейку. Для вызова мастера нажмите кнопочку $\boxed{f_x}$ на панели инструментов. Появится знакомое окно (рис 3.11). Слева перечислены категории функций, справа список для данной категории. Мастер позволяет изучить различные функции.

Пользователь может создавать **собственные** функции и программы с помощью встроенного языка объектно-ориентированного программирования **Visual Basic for Applications (VBA**).

Excel предоставляет достаточно полный набор математических функции, которые используются при решении достаточно сложных задач:

| Функция | Аргумент | Назначение |
|---|---|---|
| КОРЕНЬ() | число | Вычисляет квадратный корень |
| СТЕПЕНЬ() | показатель степени | выводит результат возведения в степень |
| РАДИАНЫ() | значение угла в градусах | преобразует градусы в радианы |
| ГРАДУСЫ() | значение угла в радианах | преобразует радианы в градусы |
| ПИ() | | выводит число π=3,14159265… |
| ЦЕЛОЕ() | число | округляет число до ближайшего меньшего целого |
| SIN() | угол в радианах | вычисляет синус угла |
| COS() | угол в радианах | вычисляет косинус угла |
| EXP() | число | вычисляет экспоненту аргумента |
| LN() | число | вычисляет натуральный логарифм |
| ABS() | число | выводит абсолютное значение аргумента |
| МОПРЕД() | массив, в котором хранится матрица | вычисляет определитель матрицы |
| МОБР() | массив, в котором хранится матрица | вычисляет транспонированную матрицу |
| МУМНОЖ() | два массива, в котором хранятся матрицы | вычисляет произведение матриц |
| ФАКТР() | Число | Вычисляет n! |

**Пример**. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Обозначим главную матрицу через А, а матрицу свободных членов через В. Тогда Матрица решений Х равна

$$\mathbf{X = A^{-1}B},$$

где $\mathbf{A^{-1}}$ – обратная матрица.

Следовательно, для того, чтобы решить систему уравнений составим две матрицы и введем формулы, которые определят транспонированную матрицу и произведение матриц. Для этого:

1. Составьте два массива для матриц А и В и **пометьте квадратную область**, начиная с ячейки Н2 по К5 (рис. п.3);

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Матрицы А | | | | | В | | Обратная | | | |
| 2 | 2 | 1 | -5 | 1 | | 8 | | | | | |
| 3 | 1 | -3 | 0 | -6 | | 9 | | | | | |
| 4 | 0 | 2 | -1 | 2 | | -5 | | | | | |
| 5 | 1 | 4 | -7 | 6 | | 0 | | | | | |

Рис п.3 - Подготовка данных

2. Нажмите $\boxed{f_x}$ и выберите из списка функцию **МОБР**(). Нажмите цветную кнопочку справа от поля "Массив" и пометьте числа матрица А, после чего нажмите **Enter** и **ОК**. В ячейке Н2 появится первый элемент обратной матрицы. Для отражения всех элементов нажмите клавишу **F2**, а затем **Enter** при нажатых одновременно клавишах **Ctrl** и **Shift**.
3. Задайте числовой формат ячеек данной области с двумя знаками после запятой.
4. Пометьте столбец ячеек с М2 по М5 и вызовите функцию **МУНОЖ**(). Пометьте массив 1 – обратную матрицу А, массив 2 – матрицу-столбец В. Нажмите ОК. Для отражения всех элементов матрицы решений Х нажмите клавишу F2, а затем Enter при нажатых одновременно клавишах Ctrl и Shift.

На рис п.4 представлен результат решения уравнения:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Матрицы А | | | | | В | | Обратная | | | | | Х |
| 2 | 2 | 1 | -5 | 1 | | 8 | | 1,33 | -0,67 | 0,33 | -1,00 | | 3 |
| 3 | 1 | -3 | 0 | -6 | | 9 | | -0,07 | 0,26 | 1,15 | -0,11 | | -4 |
| 4 | 0 | 2 | -1 | 2 | | -5 | | 0,37 | -0,30 | 0,26 | -0,44 | | -1 |
| 5 | 1 | 4 | -7 | 6 | | 0 | | 0,26 | -0,41 | -0,52 | -0,11 | | 1 |
| 6 | | | | | | | | | | | | | |

Рис.п.4 - Решение системы уравнений матричным методом

*П.6. Использование VBA для создания приложений*

Язык программирования **VBA** – **Visual Basic for Applications** встроен в MS Office. С помощью VBA можно создавать как простейшие функции и процедуры, так и приложения на базе Word, Excel, Access. В VBA применяется объектно-ориентированный подход к разработке приложений.

**6.1. Элементы языка VBA.** Для того чтобы из рабочей книги запустить редактор VBA, надо нажать клавиши Alt и F11. Появится окно, состоящее из главного меню, панели инструментов и нескольких окон. Это окна проекта, свойств и модуля. В последнем окне записывается текст программ. Модулей может быть несколько. Ниже представлена информация, необходимая для написания кодов процедур.

**6.1.1. Операторы языка.**

*Условный оператор*

| | |
|---|---|
| **If** условие **then**<br>**[**блок инструкций 1**]**<br>**else**<br>**[**блок инструкций 2**]**<br>**endif** | Если условие – истина (TRUE), то выполняется блок инструкций 1, в противном случае управление передается операторам второго блока. |

*Операторы циклов*

Использование циклов позволяет повторно выполнять набор инструкций, пока условие имеет значение истина -TRUE. Виды циклов:

| | |
|---|---|
| **While** ***условие***<br>[инструкции]<br><br>**Wend** | Если ***условие*** – истина, то выполняются инструкции до **Wend**. Затем управление возвращается к началу цикла и вновь проверяется ***условие***. Процесс повторяется, пока ***условие*** – TRUE. Если же ***условие*** не выполнено, то цикл прерывается и продолжается выполнение инструкций после Wend. |
| **Do** (while ***условие***)<br>[инструкции]<br>**Exit Do**<br>[инструкции]<br>Loop | Здесь ***условие*** – это необязательный элемент. Особенность – наличие оператора Exit Do, позволяющего выйти из цикла и передать управление инструкциям, стоящим после LOOP. |
| **For** сч=N1 **to** N2 [**Step** шаг]<br>[инструкции]<br>**Exit For**<br>[инструкции]<br>**Next** | Сч –счетчик – обязательный элемент, N1 – начало и N2-конец содержат соответствующие значения счетчика, шаг – элемент необязательный. Цикл работает до тех пор, пока счетчик не превысит конечное значение N2 |

**Пример**: Необходимо подсчитать сумму чисел от 1 до 100.

| 1 способ: | 2 способ | 3 способ |
|---|---|---|
| i=0<br>s=0<br>while i<100 | s=0<br>i=0<br>do | s=0<br>for i=1 to 100<br>s=s+i |

| | | |
|---|---|---|
| i=i+1<br>s=s+i<br>wend | i=i+1<br>s=s+i<br>if i>=100 then exit do<br>loop | next |

### 6.1.2. Подпрограммы и функции

При разработке приложений требуется выполнять одни и те же действия в различных модулях программы. Для таких случаев есть смысл написать специальные подпрограммы – процедуры или создать новую функцию, которая войдет в состав функций Excel.

| Оператор процедуры | Оператор функции |
|---|---|
| **SUB имя** ([список аргум])<br>[инструкции]<br>[Exit Sub]<br>[инструкции]<br>**END SUB** | **FUNCTION имя** (список аргум) [as тип]<br>[инструкции]<br>**имя= выражение**<br>[Exit Sub]<br>[инструкции]<br>**имя= выражение**<br>**END FUNCTION** |

Здесь имя – обязательный параметр, а список аргументов и тип функции может быть не указан.

### 6.1.3. Стандартные функции VBA, используемые далее

| Функция | Комментарий |
|---|---|
| **Val**(строка) | преобразует числа в строке в числовое значение |
| **Str**(число) | преобразует число в символьную строку |
| **Trim**(строка) | удаляет лишние пробелы из строки |
| **Len**(строка) | подсчитывает длину строки |
| **Mid**(строка,нн,дл) | выделяет из строки подстроку, начиная с позиции "**нн**", **дл**- длина подстроки |
| **Int**(число) | отбрасывает дробную часть числа и возвращает целую часть |
| **Abs(**число**)** | возвращает абсолютное значение числа |
| **Sqr(**число**)** | вычисляет квадратный корень из числа |
| **Month**(дата) | выделяет номер месяца |
| **Day**(дата) | выделяет день |
| **Year**(дата) | выделяет год |

## 6.2. Некоторые сведения об объектном программировании.

VBA включает средства, позволяющие работать с **объектами**. В качестве объекта можно рассматривать рабочую книгу Excel, рабочие листы, кнопки и раскрывающиеся списки и т.д. Параметры объекта, его характеризующие, называются **свойства**. Например, кнопка может быть определенного цвета и расположена в определенном месте листа или формы. Следовательно, есть набор свойств, которые определяют ее внешний вид и расположение. Объектом управляют с помощью **методов**. Метод – код программы, которая воздействует

на объект и его параметры. Программы начинают выполняться при возникновении **событий**. Событие представляет собой действие, распознаваемое объектом. Это может быть щелчок мышью по кнопке, выбор из списка, переключение на новый режим и т.д. Активизация метода может произойти без участия пользователя, например, при возникновении ошибок во время обработки информации. Чаще всего используются два события:

1. щелчок левой кнопкой мыши – **Click**;
2. двойной щелчок мыши –**DoubleClick**.

Если записать коды в соответствующие подпрограммы, то можно легко управлять приложением.

Важное понятие объектно-ориентированного программирования – **классы**. Класс – это шаблон, на основе которого создается объект. Класс хранит первоначальную информацию о свойствах и методах объекта. Объект, созданный на основе класса, называется **экземпляром** класса.

Основными объектами табличного процессора Excel являются объекты Application, Workbooks, Worksheets, Worksheets.Range. Обратим особое внимание на два объекта.

Семейство Worksheets (рабочие листы) включает множество объектов Worksheet (рабочий лист) в рабочей книге. Для того, чтобы сделать ссылку на определенный лист, например "лист 2", надо записать код Worksheets(“лист2”). Для того чтобы выбранный лист стал активным, надо записать команду:

**Worksheets(“лист2”).activate**

Можно указать только номер листа. Запись будет иметь вид:

**Worksheets(2).activate**

Чаще приходится использовать объект **RANGE**. Он представляет собой одну ячейку, строку, столбец, совокупность ячеек. Объект **Selection –** это любые выделенные ячейки тесно связан с объектом Range. В таблице представлены основные свойства объекта Range:

| Свойство | Комментарий |
|---|---|
| adress | Определяет адрес ячейки |
| cells() | Определяет заданную ячейку |
| name | Устанавливает имя диапазона |
| columns | Определяет совокупность столбцов диапазона |
| rows | Определяет совокупность строк диапазона |
| count | Определяет количество объектов в диапазоне |
| column | Определяет номер первого столбца диапазона |
| row | Определяет номер первой строки диапазона |
| top | Определяет расстояние от верхнего края 1 –ой строки до верхнего края диапазона |
| left | Определяет расстояние от левого края 1 –го столбца до левого края диапазона |
| value | Определяет или задает значение указанной ячейки |
| borders | Определяет границы и обрамление ячеек диапазона |

Свойства, которые мы будем использовать далее, в таблице выделены. Например, в ходе выполнения программы надо присвоить переменной **wdata** содержимое ячейки **B6**, в которой хранится дата. Код имеет вид:

wdata=Worksheets(“лист1”).range(“B6”).value

Можно использовать другое свойство:

wdata=Worksheets(1).cells(6,2).value

Здесь cell(6,2) – адрес ячейки B6 – 6-ая строка, 2-ой столбец.

### .6.3. Элементы управления

Помимо перечисленных объектов существуют так называемые элементы управления, встроенные в VBA. Они также являются объектами, то есть обладают свойствами, методами и событиями. Элементы управления создаются при помощи соответствующей панели инструментов (рис. п.5):

Рис.п.5 - Панель "Элементы управления"

Для вызова панели щелкните правой кнопкой мыши по любой из существующих панелей и выберите панель **"Элементы управления" (ЭУ)** из контекстного меню. Теперь можно легко размещать объекты управления на рабочем листе. Что же это за элементы? В таблице представлены основные характеристики:

| Название ЭУ | Имя в VBA |
|---|---|
| Кнопка | CommonButton |
| Флажок | CheckBox |
| Надпись | Label |
| Переключатель | OptionGroup |
| Список | Listbox |
| Раскрывающийся список | ComboBox |
| Выключатель | ToggleButton |
| Счетчик | SpinButton |
| Полоса прокрутки | ScrollBar |
| Поле редактирования | TextBox |

По кнопкам производится **только один щелчок ЛК (**событие Click**).** В результате выполняется заданная процедура. Для размещения элемента управления на рабочем листе надо щелкнуть по кнопочке, изображающей этот объект на панели ЭУ, поместить курсор мыши в нужное место листа и снова нажать ЛК, а затем (если необходимо) изменить размеры объекта.

Обратите внимание на три кнопочки, находящиеся слева на панели инструментов ЭУ: **режим конструктора, свойства и исходный текст**. Щелкнув по кнопочке "**Режим конструктора**", пользователь может приступить к внедрению упомянутых объектов, изменять их свойства, записывать код программ.

*Окно "Свойства" и редактор VBA можно вызывать по-другому. Достаточно щелкнуть правой кнопкой внутри внедренного объекта и выбрать соответствующий пункт из контекстного меню.*

**Пример**. Откройте рабочую книгу. Вызовите панель "Элементы управления", пометив ее в верхней части экрана так, чтобы в дальнейшем она не мешала бы вам. Щелкните по кнопочке "кнопка" панели ЭУ, затем щелкните в каком-либо месте листа. Появится объект "кнопка" (CommandButton1). Пометьте внедренный объект и щелкните по кнопочке "**свойства**" на панели ЭУ. Активизируется диалоговое окно (рис. п.6).

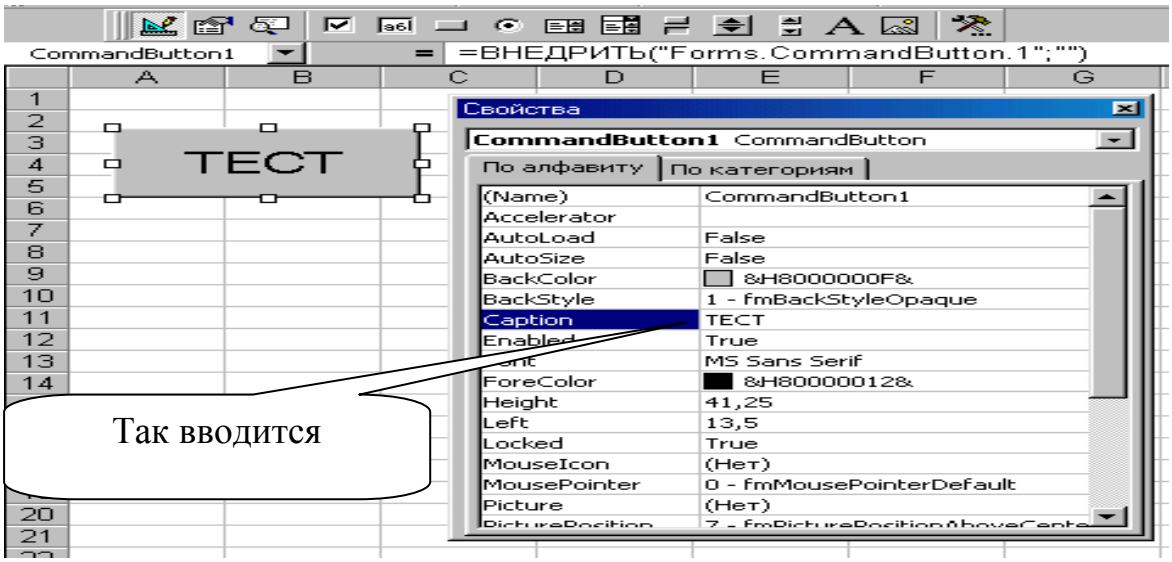



Рис.п.6 -. Окно свойств для объекта "кнопка"

Щелкните по пункту списка свойств **Caption** (заголовок) и введите название кнопки "ТЕСТ".

Основное событие для объекта "кнопка" - щелчок мышью, т.е. **Click**. Обрабатывается это событие при помощи процедуры Private Sub CommonButton1_Click(), которая записывается в окне редактора VBA. Составьте программу, которая выдает сообщение об успешном прохождении теста. Для этого щелкните дважды ЛК по кнопке "ТЕСТ"

Появится окно редактора кода. Введите код. Вид окна вместе с кодом показан на рис. п.7. Сохраните документ под каким-либо именем, например "ТЕСТ", и вернитесь в рабочий лист с внедренной кнопкой.

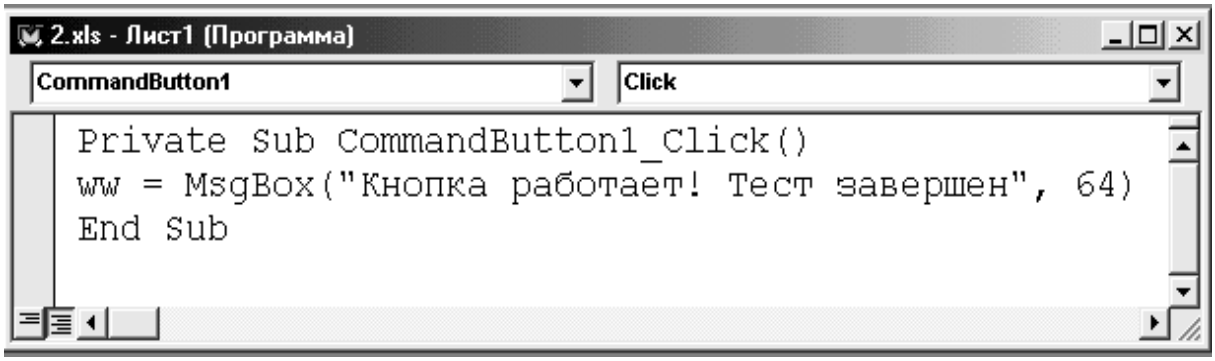



Рис.п.7 -. Текст кода процедуры Click

Щелкните по кнопочке "Выход из режима конструктора" (крайнею слева кнопку на панели ЭУ). Таким образом, внедренный объект – кнопка ТЕСТ го-

тов к использованию. Если нажать кнопку, то появится окно с сообщением: "Кнопка работает! Тест завершен".

Каждый элемент управления имеет как общие, так и индивидуальные свойства, управляется с помощью конкретных методов при наличии конкретных событий. Например, главное событие для кнопки – щелчок ЛК (Click). Список может реагировать на несколько событий. Например, отбор из списка может осуществляться как при щелчке ЛК по выбранному пункту, так и при двойном щелчке (DblClick). При изложении сложных примеров будут перечисляться упомянутые характеристики элементов управления.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**СТАНІШЕВСЬКИЙ Степан Олександрович**
**МОРДОВЦЕВ Сергій Михайлович**

Конспект лекцій
і завдання для практичних та самостійних занять
з дисципліни **«Чисельні методи»**
(для студентів 1 курсу заочної форми навчання за
напрямом підготовки 6.030601 -«Менеджмент»)

*( рос. мовою)*

В авторській редакції

Комп'ютерне верстання *С. М. Мордовцев*

План 2012, поз. 59 Л

| | |
|---|---|
| Підп. до друку 18.06.2012 | Формат 60х84 /16 |
| Друк на різографі. | Ум. друк. арк. 3,8 |
| Тираж 50 пр. | Зам. № |

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електрона адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.