УДК 378 : 658.012.011.5

Г.В.СТАДНИК, канд. экон. наук, Л.М.БУХАРИН, Ю.П.БАРХАЕВ,
И.И.МАКАРЕНКО, З.Г.МИРНО, В.И.ТОРКАТЮК, д-р техн. наук,
Н.П.ПАН, канд. техн. наук, Т.И.СВЕТЛИЧНАЯ
*Харьковская национальная академия городского хозяйства*

# ФОРМИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СОСТАВЛЕНИЯ СЕМЕСТРОВЫХ РАСПИСАНИЙ

Учебный процесс в высших учебных заведениях – это сложный комплексный процесс, в котором функционируют четыре основных подсистемы: профессорско-преподавательский состав, учащиеся, вспомогательный административно-обслуживающий персонал и учебно-аудиторно-лабораторная материальная база. Оптимизация взаимосвязи этих составляющих учебного процесса осуществляется по критерию функционирования расписания, которое составляется с учетом особенностей каждой составляющей.

Актуальность данной работы обусловлена тем, что одной из важнейших составляющих развития образования в Украине является модернизация сложившейся отраслевой модели управления системой высшего образования как целостной системы, способной концентрировать ресурсы в интересах удовлетворения разнообразных потребностей всех подразделений вуза. Прообразом такой системы является *семестровое расписание* вуза.

Проблеме выполнения учебного процесса в настоящее время посвящены многие работы [1-4]. Однако в них не нашли должного внимания проблемы, связанные с формированием расписания, что не соответствует современным задачам высшего образования Украины и требует дальнейшего исследования этой проблемы и выработки рекомендаций по их решению.

В связи с этим целью настоящей работы является разработка научно-обоснованных рекомендаций по совершенствованию процесса формирования и функционирования семестрового расписания в высших учебных заведениях Украины.

Расписание учебных занятий – документ, определяющий последовательность преподавания в течение каждого дня учебной недели предметов, предусмотренных учебным планом. От качества расписания в определенной мере зависит эффективность учебно-воспитательного процесса, создание условий для самостоятельной работы студентов и внеучебных занятий по интересам. Расписание, составленное с учетом педагогических и гигиенических требований, обеспечивает равномерное распределение учебной нагрузки студентов, соблюдение ими режима дня. Оно имеет большое значение также для рациональной организации труда преподавателей.

Учет многочисленных требований, предъявляемых к расписанию, роль расписания в жизни всего коллектива вуза определяют сложность работы по его составлению. С проектом расписания учебных занятий, подготовленным заместителем декана факультета по учебной работе, предварительно знакомят заведующих кафедрами и коллектив преподавателей. После внесения необходимых поправок расписание учебных занятий утверждается первым проректором вуза, объявляется всем преподавателям и студентам через вывешивание на видном месте. Кроме расписания учебных занятий, составляется график самостоятельной работы студентов, расписание консультаций, в том числе индивидуальных, расписание экзаменов.

При формировании расписания необходимо учитывать значительное число факторов, чтобы обеспечить многовариантность решений и индивидуализировать процесс обучения в соответствии с требованиями потребителя (рис.1).

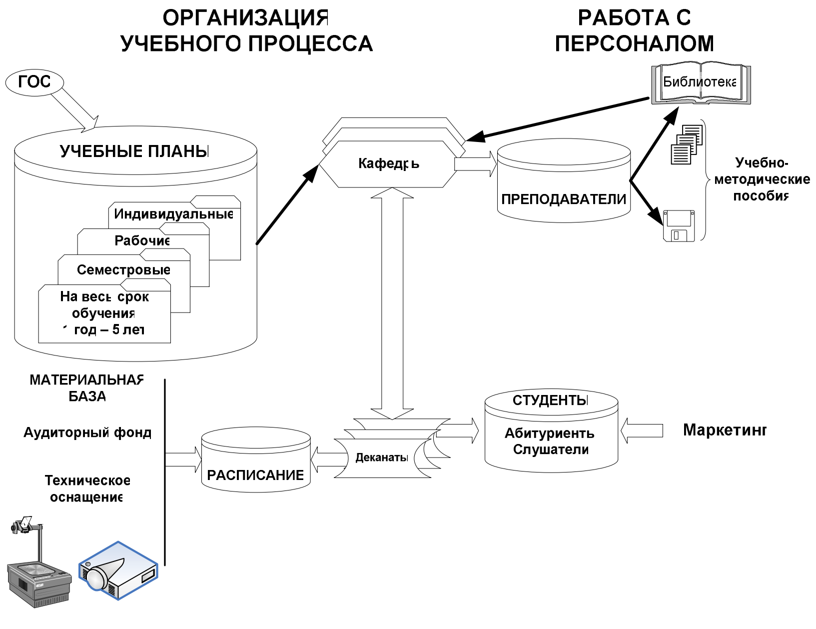


Рис. 1 – Роль и место расписания в общей системе организации учебного процесса

Основой организации учебного процесса являются государственные образовательные стандарты и разработанные на их основе учебные планы и рабочие программы.

Разработанная подсистема “Учебные планы” основана на возможности многовариантных решений и позволяет индивидуализировать процесс обучения в соответствии с требованиями потребителя.

Основная задача системы упростить контроль над учебным процессом, сделать его более гибким и управляемым, исключить ошибки, вызванные человеческим фактором, переложив рутинные задачи на систему. Один из вариантов работы по привязке учебных дисциплин к конкретному преподавателю представлен на рис.2.

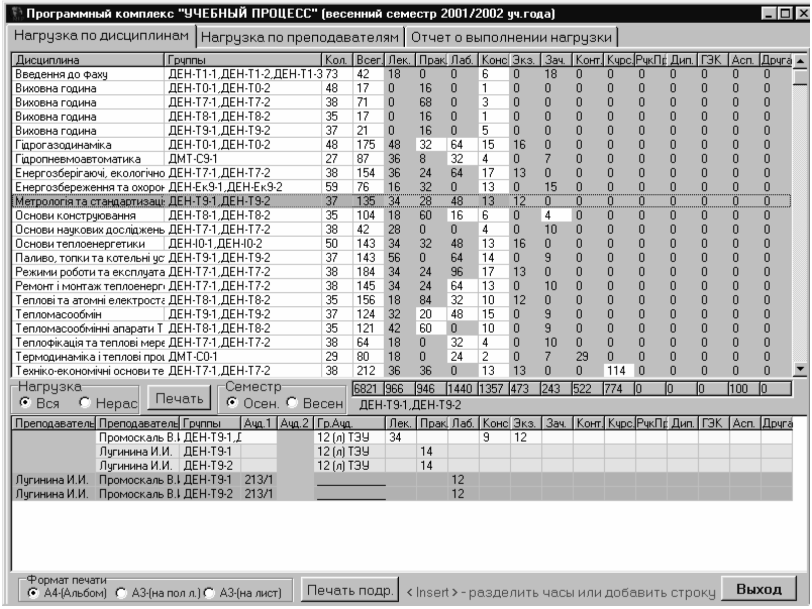


Рис. 2 – Привязка дисциплин к конкретному преподавателю

Процесс управления организацией учебного процесса на основе семестрового расписания предусматривает рациональное использование имеющихся в распоряжении высшего учебного заведения ресурсов.

Это, *во-первых*, материальная база, которая включает в себя аудитории общего назначения, аудитории, имеющие специальное техническое оснащение (аудио, видео проекторы), компьютерные классы с различным программным обеспечением, классы с доступом в Интернет, лингафонные кабинеты и учебные фирмы, а также технические средства, которые могут устанавливаться в аудиториях по заявкам. Эта информация сведена в базу данных (БД) по аудиторному фонду и соответствующим образом классифицирована. Информация об оснащенности и техническом состоянии поддерживается и актуализируется техническим отделом и имеет on-line доступ для специалиста по составлению расписания. Кроме того, она доступна менеджеру технического отдела, который по журналу «Оснащенность аудиторий» обеспечивает оснащение аудиторий мобильными техническими средствами (кодоскопы, видеодвойки и т.п.) и компьютерные классы требуемым на занятиях программным обеспечением.

*Во-вторых*, это профессорско-преподавательский состав. База данных (БД) преподавателей включает не только штатных преподавателей, но и совместителей, а также преподавателей и специалистов, потенциально имеющих возможность проводить учебные занятия в ХНАГХ. В дополнение к традиционным данным о преподавателях заносится информация об используемых ими информационных и технических средствах преподавания. Пример закладки по преподавателям представлен на рис.3.

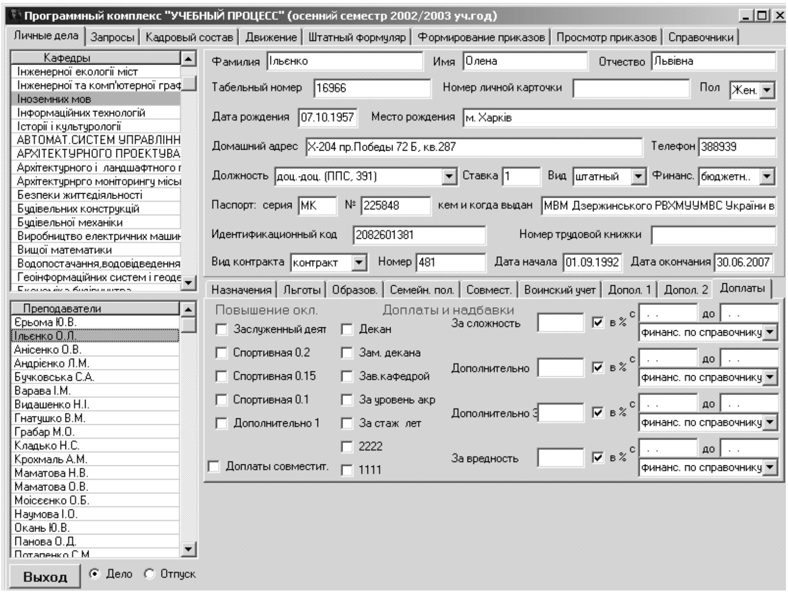


Рис. 3 – Данные об использовании преподавателем
информационных и технических средств

Как показали исследования [5-8], наиболее сложной с точки зрения разработки расписания является подсистема, предназначенная для автоматизации составления семестровых расписаний учебных занятий.

В настоящее время в ХНАГХ разработана новая система программ для автоматизации составления вузовских расписаний учебных занятий. Разработке указанной системы предшествовала большая работа по определению и исследованию математической модели задачи составления вузовских расписаний учебных занятий, в основу которой была положена геометрическая интерпретация постановки данной задачи. Цель данной публикации – позволить персоналу, занятому составлением и использованием расписания, глубже вникнуть в этот сложный процесс и по возможности принимать участие в повышении эффективности составления и использования расписания.

Геометрическая интерпретация задачи составления вузовских расписаний учебных занятий и соответствующая ей математическая модель заключается в следующем.

На рис.4 приведен макет расписания учебных занятий вуза, поясняющий сущность предлагаемой геометрической интерпретации. Макет расписания представляется в виде двумерной сетки, координатами единичных квадратов которой служат индексы $i$ $(i=\overline{1,\alpha})$ элементов множества учебных студенческих групп вуза $X=\{x_i\}$ и индексы $h,k$ $(h=\overline{1,\varphi};\ k=\overline{1,\gamma})$ элементов множества временных тактов периода расписания $T=<t_{1,1},t_{1,2},...,t_{hk},...,t_{\varphi\gamma}>$, где $t_{1,1}$ – понедельник, первая пара часов учебных занятий: $t_{hk}$ – день недели $h$, $k$-я пара часов и т.д.

В каждый единичный квадрат сетки расписания может быть "помещено" учебное занятие соответствующей учебной группы длительностью в одну пару часов.

Учебные занятия, нанесенные на сетку расписания, также можно интерпретировать как прямоугольники, размер которых по "горизонтальной" стороне определяется количеством ($\mu_L$) учебных студенческих групп, для которых одновременно проводится это занятие, а размер по "вертикальной" стороне – длительностью этого занятия ($\lambda_L$) в тактах (такт – интервал времени периода расписания, соответствующий паре часов учебных занятий). Множество учебных занятий, из которых состоит расписание, покрывает на сетке расписания поверхность $S$.

Прежде чем перейти к самой модели, укажем две принципиально различные возможности ее построения. Первая соответствует случаю,

когда поверхность $S$ задана еще до решения задачи, и тогда составление расписания сводится к нахождению покрытия поверхности $S$ прямоугольниками учебных занятий при заданных ограничениях на взаимное расположение прямоугольников на этой поверхности. Вторая – случаю, когда поверхность $S$ предварительно не задается, а получается в процессе составления расписания путем “складывания” ее из прямоугольников учебных занятий.

Второй случай более близок по технологии составления расписания к “ручным” методам и позволяет обойти некоторые геометрические трудности решения собственно задачи покрытия, однако принятие его для машинной реализации ставит весьма серьезную проблему обеспечения компактности расписания (исключение так называемых “окон” между занятиями), сужает возможность задания и усложняет реализацию выполнения предъявляемых к расписанию требований организационно-методического характера, существенно затрудняет возможность определения условий существования решения задачи распределения аудиторного фонда (задачи “посадки”).

От указанных недостатков свободен первый из приведенных случаев, соответствующий условиям, когда для каждой учебной студенческой группы на уровне исходных данных считается заданным множество временных тактов периода расписания, в которые должны быть назначены занятия этой учебной группы, причем количество выделяемых группе временных тактов в точности соответствует выраженной в тактах учебной нагрузке данной группы на период расписания. В этом случае большую часть оптимизирующих расписание требований можно задать до составления расписания путем формирования из фондов времени учебных групп фондов времени учебных занятий, удовлетворяющих предъявленным к ним требованиям.

Используемые в этих программах пошагового решения задачи функции предпочтения могут быть очень простыми, так как они не содержат аргументов, обеспечивающих в процессе составления расписания выполнение большинства из предъявляемых к расписанию требований, а лишь реализуют оптимальную стратегию распределения учебных занятий по тактам периода расписания, обеспеченным требуемыми ресурсами преподавателей и учебных помещений.

Предлагаемая математическая модель построена в соответствии с первым из рассмотренных выше случаев как более наглядным и удобным для машинной реализации.

Разработанная математическая модель может быть сформулирована в виде следующей задачи.

*Постановка задачи.* Найти покрытие (“замощение”) поверхности $S$, составленной из заданного подмножества $S$ множества единичных квадратов $\{S_{(hk),i}\}$, $h=\overline{1,\varphi}$, $k=\overline{1,\gamma}$, $i=\overline{1,\alpha}$ двумерной решетки $(hk)\times i$, прямоугольниками $b_l$ из множества

$$B=\{b_l\},\ l=\overline{1,\eta}$$

$$B=\bigcup_L B_L,\ L=\overline{1,\theta};\ \bigcap_L B_L=\varnothing;$$

$$\forall b_l\in B_L\ \ (\exists P_{b_l}=\left|L,i_L^H,S_L,\mu_L,\lambda_L,\nu_L,\vartheta_L,r_L\right|)$$

при следующих ограничениях:

1) $\sum_{h=1}^{\varphi}\sum_{k=1}^{\gamma}\beta(s_{(hk),i}=\sum_{L=1}^{\theta}\lambda_L\times\vartheta_L\times\beta_{(i)}$ для всех $i$,

где $\beta(s_{(hk),i})=\begin{cases}1,\text{если } s_{(hk),i}\in S\\ 0\ \text{в противном случае,}\end{cases}$

$$\beta(i)=\begin{cases}1,\text{если } i\in[i_L^H,i_L^H+\mu_L-1]\\ 0\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

2) $\sum_{k=1}^{\gamma}\sum_{l=1}^{\eta}\beta(s_{(hk),i}^l\times\beta(l)\le 1$ для всех $h$, $L$,

где $\beta(s_{(hk),i}^l)=\begin{cases}1,\text{если } b_l \text{ покрывает } s_{(hk),i}\\ 0\ \text{в противном случае,}\end{cases}$

$$\beta(l)=\begin{cases}1,\text{если } b_l\in B_L\\ 0\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

3) $\sum_{i=1}^{\alpha}\beta(s_{(hk),i}^l\times\beta(\nu)\times\mu_L-1\le\varsigma_{hk}^{\nu}$ для всех $\nu$, $h$, $k$,

где $\beta(\nu)=\begin{cases}1,\text{если } \nu=\nu_L\\ 0\ \text{в противном случае.}\end{cases}$

4) $\sum_{i=1}^{\alpha}\beta(s_{(hk),i}^l\times\beta(r)\times\mu_L^{-1}\le\rho_{hk}^r$ для всех $r,h,k$,

где $\beta(r)=\begin{cases}1, \text{если } r=r_L\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$

Здесь $B_L$ – множество прямоугольников $b_l$, представляющих множество учебных занятий одной учебной дисциплины; $P_{b_l}$ – вектор параметров, характеризующих прямоугольники $b_l \in B_L$; $S_L$ – подмножество единичных квадратов поверхности $S$, которые "разрешается" покрывать прямоугольниками $B_L$; $i_L^H$ – индекс начальной учебной группы потока; $\mu_L$ – "длина" прямоугольника $b_l \in B_L$; $\lambda_L$ – "ширина" прямоугольника $b_l \in B_L$; $\vartheta_L$ – количество прямоугольников $b_l$ в множестве $B_L$ (по числу раз проведения за период планирования соответствующей учебной дисциплины); $v_L$ – вид ресурса из группы v-ресурсов (учебные помещения), которыми должны быть обеспечены единичные квадраты $s_{(hk),i}$, чтобы их можно было покрыть прямоугольниками $b_l \in B_L$; $r_L$ – вид ресурса из группы $r$-ресурсов (преподаватели), которыми должны быть обеспечены единичные квадраты $s_{(hk),i}$), чтобы их можно было покрыть прямоугольниками $b_l \in B_L$; $\varsigma_{hk}^{v}$, $\rho_{hk}^{r}$ – элементы матриц наличия ресурсов, устанавливающие ограничения на количество прямоугольников, требующих ресурсы видов $v$, $r$ и покрывающих единичные квадраты "строки" $s_{hk}$ поверхности $S$ (в задаче составления вузовских расписаний $\varsigma_{hk}^{v}$ определяет, сколько имеется свободных учебных помещений вида $v$ в такт периода планирования $t_{hk}$; $\rho_{hk}^{r}$ может принимать значения 0 или 1 в зависимости от того, свободен или нет преподаватель $r$ в такт $t_{hk}$.

Анализ предложенной математической модели подтверждает ее адекватность формализованной постановке задачи составления вузовских расписаний учебных занятий и соответствие наложенных ограничений перечню основных требований, предъявляемых к расписанию и определяющих множество его допустимых вариантов.

Ограничение 1 определяет структуру исходных данных и применительно к задаче составления расписания выражает требование равенства суммарной длительности фонда учебного времени (выделенного учебной студенческой группе, т.е. количества единичных квадратов “столбца” $S^i$ поверхности $S$) величине учебной нагрузки данной группы на период расписания (количеству прямоугольников в множестве $B$, для которых $i \in [i_L^H, i_L^H + \mu_L - 1]$.

Ограничение 2 интерпретирует требование невозможности назначения одного и того же занятия более одного раза в один день. Ограничения 3 и 4 определяют условия взаимного расположения на поверхности $S$ прямоугольников, требующих однотипные ресурсы из группы $v$-ресурсов (учебные помещения) и из группы $r$-ресурсов (преподаватели).

Поскольку при составлении расписания учебных занятий возможны отступления от выполнения дополнительных (оптимизирующих) требований, то множество допустимых вариантов расписания определяется только перечнем основных требований. Поэтому при разработке математической модели задачи составления вузовских расписаний дополнительные требования не учитывались. Как указывалось выше, данная модель позволяет свести учет дополнительных требований к предварительному заданию подмножеств ($S_L$) единичных квадратов поверхности $S$, которые “разрешается” покрывать прямоугольниками учебных занятий $b_l \in B_L$. При подготовке к решению задачи составления вузовских расписаний заданию $S_L$ соответствует процедура формирования фондов времени учебных занятий.

Анализ предложенной математической модели позволяет выделить две основные задачи, решение которых необходимо получить в процессе составления расписания: нахождение покрытия (“замощения”) поверхности $S$ заданным набором прямоугольников; распределение двух групп неоднородных ограниченных ресурсов (учебных помещений и преподавателей).

Для создания эффективных машинных алгоритмов решения указанных задач необходимо знать и уметь проверять условия существования их решения, а также разработать методы их пошагового решения. Кроме того, при разработке практических алгоритмов решения задачи составления вузовских расписаний необходимо учитывать ее многокритериальный характер, что требует умения согласовывать индивидуальные стратегии пошагового решения отдельных подзадач в рамках единой стратегии решения всей задачи.

Ниже приведены основные результаты исследования отдельных подзадач, выполненного в ХНАГХ при разработке алгоритмов пошагового решения задачи составления вузовских расписаний.

*Особенности постановки задачи покрытия и условия существования ее решения*. Формализованная постановка исследуемой задачи покрытия, в отличие от исходной математической модели, не учитывает ограничений 2-4. Ограничения 3, 4, как было указано выше, задают условия решения задач распределения двух групп неоднородных ограниченных ресурсов (учебных помещений и преподавателей).

Ограничение 2 является специфическим ограничением задачи составления вузовских расписаний учебных занятий и незначительно сужает область существования решения рассматриваемой задачи. Отказ от учета ограничения 2 позволяет принять $\vartheta_L = 1$ для всех $L$. Такое упрощение, не снижая ценности результатов анализа, существенно увеличивает их общность.

Указанная задача покрытия произвольной поверхности заданным произвольным набором прямоугольников в общем виде является переменной задачей комбинаторной геометрии. Рассмотрение дополнительных ограничений и особенностей задачи составления вузовских расписаний учебных занятий позволяет перейти от изучения покрытия произвольной поверхности $S$ к изучению покрытия последовательности прямоугольников $S_J \left( S = \bigcup\limits_J S_J \right)$, что соответствует разбиению множества учебных групп вуза $X$ на подмножества “связанных” учебных групп $\bigcup\limits_J X_J = X$ (связанных вхождением в общие потоки). Покрытие каждого такого прямоугольника размером $\alpha_J \times \tau_J$ ($\alpha_J$ – количество учебных групп в подмножестве $X_J$; $\tau_J$ – учебная нагрузка групп подмножества $X_J$ в тактах) представляет собой независимую задачу, которая и была выбрана для изучения.

Дополнительные ограничения, наложенные на состав покрывающих прямоугольников, сводятся к следующим: множество прямоугольников $B$ состоит из прямоугольников единичной ширины $B_{\lambda_1} = \{b_l | \lambda_L = 1\}$ и прямоугольников двойной ширины $B_{\lambda_2} = \{b_l | \lambda_L = 2\}$; прямоугольники двойной ширины имеют единичную длину ( $\mu_L = 1$ ), а длина прямоугольников единичной ширины может быть любой ( $\mu_L = \overline{1, \alpha_J}$ ).

Приведенные ограничения сужают количество типов прямоугольников набора $B$ до количества, фактически имеющего место в задачах составления вузовских расписаний учебных занятий.

В качестве характеристики набора $B$, отражающей его структурный состав по количеству входящих в него прямоугольников различных геометрических типов, используется вектор параметров $P_B = \left| b_2^1, b_1^1, b_1^2, \ldots, b_{\lambda_L}^{\mu_L}, \ldots, b_1^{\alpha_J} \right|$, элементы которого ( $b_{\lambda_L}^{\mu_L}$ ) определяют, сколько прямоугольников размером $\mu_L \times \lambda_L$ входит в набор $B$. По параметру $i_L^H$ (см. обозначения параметров математической модели) множество прямоугольников $B$ разбивается на полную систему непересекающихся подмножеств, для которых введем обозначение $B^{i_L^H}$ .

Наложенные ограничения на неоднородность покрывающих прямоугольников позволяют доказать следующие теоремы о существовании решения исследуемой задачи покрытия.

*Теорема* 1. Прямоугольник $S$ размером $\alpha_J \times \tau_J$ может быть покрыт произвольным набором прямоугольников $B_{\lambda_1} = \{b_l | \lambda_L = 1\}$, удовлетворяющим ограничению 1.

*Доказательство*. Расположим на прямоугольнике $S$ произвольным образом все прямоугольники подмножества $B^1$ (рис.5). Очевидно, что существует $|B^1|!$ вариантов таких расположений. После выполнения этой операции полоса $S^1$ прямоугольника $S$ окажется покрытой, так как количество прямоугольников $|B^1|$ в подмножестве $B^1$ в соответствии с ограничением 1 равно количеству единичных квадратов полосы $S^1$.

Так как для полосы $S^2$ также выполняется ограничение 1, то количество единичных квадратов, оставшихся свободными на полосе $S^2$, равно количеству $|B^2|$ прямоугольников подмножества $B^2$. Если учесть, что к каждой свободной клетке полосы $S^2$ справа примыкают

($\alpha_J - 2$) свободных клеток (рис.6), а среди прямоугольников $B^2$ по условию задачи не может быть прямоугольников с $\mu_L > (\alpha_J - 1)$, можно утверждать, что все прямоугольники $B^2$ могут быть размещены на полосе $S^2$, причем количество вариантов этого размещения равно $|B^2|!$.

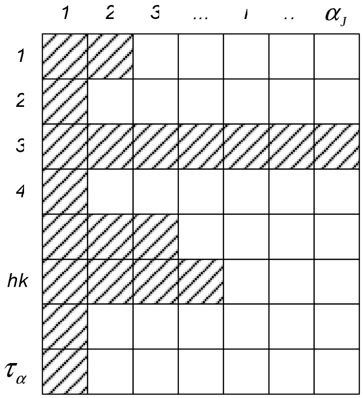


Рис.5 – Произвольное расположение прямоугольников

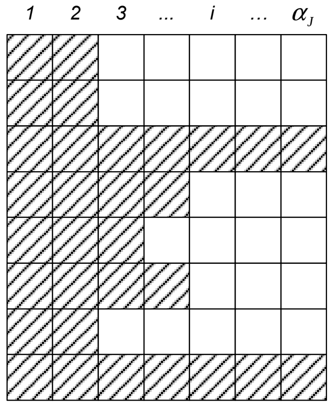


Рис.6 – Расположение клеток при упорядоченном примыкании

Аналогичные рассуждения справедливы и для каждой следующей полосы прямоугольника $S$ вплоть до полосы $S^{\alpha_J}$, возможность покрытия которой прямоугольниками $B^{\alpha_J}$ очевидна, так как $B^{\alpha_J}$ состоит из прямоугольников размером 1×1, причем в соответствии с ограничением 1 количество этих прямоугольников равно количеству оставшихся свободными единичных квадратов полосы $S^{\alpha_J}$ (рис.7). Теорема 1 доказана.

*Теорема* 2. Прямоугольник $S$ размером $\alpha_J \times \tau_J$ может быть покрыт произвольным набором прямоугольников $B = B_{\lambda_1} \bigcup B_{\lambda_2}$, удовлетворяющим ограничению 1, если для входящих в $B$ наборов $B = B^1_{\lambda_2}, B^2_{\lambda_2}, ..., B^{\alpha_J}_{\lambda_2}$ выполняются условия $\left|B^i_{\lambda_2}\right| \ge \left|B^{i+1}_{\lambda_2}\right|$, $i = \overline{1, (\alpha_J - 1)}$.

Доказательство теоремы 2 может быть проведено аналогично доказательству теоремы 1. Условие теоремы 2 гарантирует возможность размещения на каждой полосе $S^i$ прямоугольников из набора $B^i_{\lambda_2}$.

Определенные трудности решения задачи покрытия при машинном составлении расписаний учебных занятий связаны с тем, что во многих вузах страны расписание учебных занятий имеет периодичность, равную двум неделям. В этом случае при составлении расписания приходится решать задачу покрытия для прямоугольника $S_1$, соответствующего нечетной неделе, и для прямоугольника $S_2$, соответствующего четной неделе периода расписания.

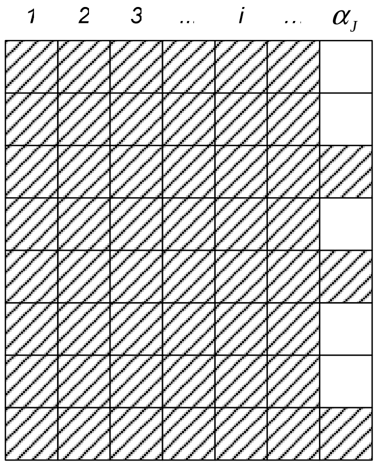


Рис.7 – Расположение клеток в случае, когда количество этих прямоугольников равно количеству оставшихся свободными единичных квадратов

В соответствии с требованиями, предъявляемыми к вузовским расписаниям, расписание учебных занятий на четную неделю должно по возможности быть таким же, как и расписание занятий на нечетную неделю. Естественно, что различия между расписаниями на обе недели обусловливаются наличием учебных занятий, для которых число раз проведения за две недели ( $\vartheta_L$ ) нечетно.

Для того, чтобы в этих условиях задача покрытия прямоугольников $S_1$ и $S_2$ имела решение, необходимо, во-первых, соответствующим образом распределить суммарную площадь полос $S^i$ прямоугольника $S$ между прямоугольниками $S_1$ и $S_2$ и, во-вторых, при назначении учебных занятий с нечетным $\vartheta_L$ соответствующим образом выбирать неделю для назначения “непарного” занятия.

Результаты анализа условий существования решения задачи покрытия в этом случае можно сформулировать в виде следующих рекомендаций, выполнение которых обеспечивает устранение возможных “отказов по непокрытию” при решении задачи составления вузовских расписаний учебных занятий на двухнедельный период.

Разница в количестве временных тактов нечетной ($\tau_1$) и четной ($\tau_2$) недель должна удовлетворять следующему условию

$$|\tau_1 - \tau_2| = \begin{cases} 0, \text{при } n = 2k_1, m = 2k_2 \\ 0, \text{при } n = 2k_1, n \neq 0, m = 2k_2 + 1 \\ 1, \text{при } n = 2k_1 + 1 \\ 2, \text{при } n = 0, m = 2k_2 + 1, \end{cases}$$

где $n$ – количество прямоугольников с нечетным $\vartheta_L$ и с $\lambda_L = 1$; $m$ – количество прямоугольников с нечетным $\vartheta_L$ и с $\lambda_L = 2$; $k_1$, $k_2$ – принимают любое натуральное значение.

При принятии решения о том, в такты какой из двух недель назначать проведение занятия с $\vartheta_L = 1$, предпочтение должно отдаваться непарному (“разбитому”) такту одной из недель.

*Методы пошагового решения задачи покрытия*. Методы пошагового решения задачи покрытия можно разделить на три группы: методы, реализуемые за счет принятия определенной стратегии выбора прямоугольников $b_l$ из множества *B*; методы, реализуемые за счет принятия определенной стратегии выбора строки $S_{hk}$ прямоугольника *S*, подмножество единичных квадратов которой покрывается очередным выбранным для назначения прямоугольником $b_l$; комбинированные методы, использующие обе стратегии.

Из методов первой группы рассмотрим: метод упорядоченного заполнения (МУЗ); модифицированный метод упорядоченного заполнения (ММУЗ); метод дополняющих покрытий (МДП); модифицированный метод дополняющих покрытий (ММДП); метод минимальных возможностей (ММВ).

*Метод упорядоченного заполнения* (МУЗ). Принцип метода упорядоченного заполнения следует непосредственно из идеи доказательства теоремы 1. Применительно к задаче составления вузовских описаний учебных занятий МУЗ требует специального упорядочения учебных групп внутри подмножеств $X_J$. Пусть $< x_1, x_2, ..., x_\alpha >$ – упорядоченное множество учебных групп, составляющих подмножество $X_J$, а $Q_J = \{q_j\}$, $j = \overline{1, q}$ – множество учебных потоков, составленных из учебных групп подмножества $X_J$. Упорядочим список учебных групп, входящих в поток $q_j$, по возрастанию их индекса в подмножестве $X_J$, тогда получим $X_{q_j} = < x_n, ..., x_m >$. Учебный поток будем называть “правильным”, если между индексами $n$ и $m$ и числом входящих в поток учебных групп $k$ соблюдается условие: $m = n + k - 1$.

В противном случае поток будем называть неправильным и степень его неправильности будем характеризовать показателем $\xi(q_j) = m - n - k + 1$.

В общем случае метод упорядоченного заполнения требует такого упорядочения учебных групп в подмножество $X_J$, которое отвечало бы минимуму показателя $\xi(Q_J) = \sum_{j=1}^{q} \xi(q_j)$.

Стратегия МУЗ требует на очередном $n$-м шаге выбора такого прямоугольника $b_l$, из множества неназначенных прямоугольников, который характеризуется минимальным значением функционала $F_b(n) = i_L^H$.

Если набор покрывающих прямоугольников не содержит прямоугольников с $\lambda_L = 2$, а подмножество $Q_J$ характеризуется значением показателя $\xi(Q_J) = 0)$, то в соответствии с доказательством теоремы 1 МУЗ обеспечивает решение задачи покрытия без отказов. На рис.8 приведен пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием МУЗ. На этом рисунке, как и на последующих, число внутри каждого из прямоугольников обозначает номер шага, на котором был назначен этот прямоугольник. Выбор строки $s_{hk}$ для назначения очередного прямоугольника проводился в соответствии с методом равновероятного выбора

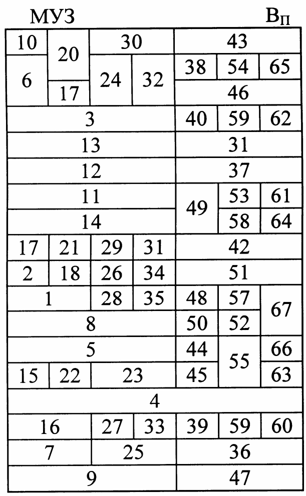


Рис.8 – Пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием МУЗ

(МРВ).

*Модифицированный метод упорядоченного заполнения* (ММУЗ). Если в составе покрывающих прямоугольников имеются прямоугольники с $\lambda_L = 2$, но их количество при переходе от набора $B^i$ к набору $B^{i+1}$ не возрастает, то в соответствии с теоремой 2 решение задачи существует и будет найдено, если при назначении прямоугольников с одинаковым значением показателя $i_L^H$ предпочтение будет отдаваться прямоугольникам с $\lambda_L = 2$. Отсюда получаем стратегию ММУЗ, заключающуюся в выборе на каждом шаге прямоугольника, характеризуемого минимальным значением функционала $F_b(n) = i_L^H + 1/\lambda_L$.

На рис.9 приведен пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием ММУЗ.

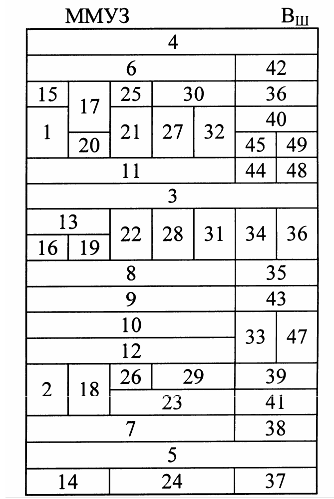

Рис.9 – Пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием ММУЗ

*Метод дополняющих покрытий* (МДП). Принцип метода дополняющих покрытий вытекает из анализа условий существования решения задач «забаррикадирования», рассматриваемых как отдельный класс задач комбинаторной геометрии. В задачах о «забаррикадировании» прямоугольника $S$ требуется указать, какое минимальное число прямоугольников $b_l$ одного вида можно так расположить на прямоугольнике $S$, чтобы не дать возможности разместить на этом прямоугольнике ни одного прямоугольника $b_l^*$ другого вида.

Естественно, что легче забаррикадировать прямоугольник $S$ от прямоугольников $b_l^*$ большей площади. Связывая площадь прямоугольника с его баррикадирующей способностью, получим стратегию МДП, требующую на каждом шаге выбирать для назначения прямоугольник максимальной площади $F_b(n) = 1/(\lambda_L \times \mu_L)$.

Учебные занятия обычно проводятся более одного раза за период планирования ($\vartheta_L > 1$). Такие учебные занятия представляются несколькими ( $\vartheta_L$ ) прямоугольниками, суммарная площадь которых равна $\lambda_L \times \mu_L \times \vartheta_L$ . Поэтому при составлении расписания учебных занятий значение $F_b(n)$ для МДП вычисляется по формуле $F_b(n) = 1/(\lambda_L \times \mu_L \times \vartheta_L)$.

Пример решения задачи, полученный с использованием МДП, приведен на рис.10.

*Модифицированный метод дополняющих покрытий* (ММДП). Показатель площади прямоугольников $b_l$ с $\lambda_L = 2$ не отражает действительной баррикадирующей способности этих прямоугольников, поэтому, как показывает эксперимент (табл.1, 2), МДП оказывается недостаточно эффективным для решения задач покрытия в случае, когда в состав набора покрывающих прямоугольников входят прямоугольники с $\lambda_L = 2$. Естественной модификацией МДП является такое изменение стратегии выбора, при котором прямоугольники $b_l$ с $\lambda_L = 2$ получили бы большее предпочтение, чем то, которое определяется МДП. В стратегии ММДП выражение для функционала $F_b(n)$ можно записать в виде: $F_b(n) = \dfrac{1}{\mu_L \times \vartheta_L \times C(\lambda_L)}$, где $C(\lambda_L) = \begin{cases} 1, \text{ если } \lambda_L = 1 \\ C, \text{ если } \lambda_L = 2 \end{cases}$ для ММДП $C \geq 2$. Для множества стратегий ММДП, отличающихся различным значением $C$, используется обозначение ММДПС. Тогда стратегию МДП можно обозначить как стратегию ММДП2. На рис.11 показан пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием ММДП4.

Следует заметить, что МДП интуитивно реализуется многими авторами программ для составления вузовских расписаний учебных занятий. Некоторые авторы сначала предлагают составлять расписание лекционных занятий, затем – лабораторных и семинарских. Это обстоятельство часто служит одним из оснований для отнесения предлагаемых алгоритмов к моделирующим деятельность диспетчера, поскольку такой же очередности в назначении учебных занятий обычно придерживаются диспетчеры учебных отделов вузов при составлении расписаний.

*Метод минимальных возможностей* (ММВ). Стратегия выбора очередного $b_l$ из набора $B$ при использовании этого метода заключается в выборе такого $b_l$, для назначения которого на данном шаге осталось наименьшее количество возможностей. Выражение для функционала $F_b(n)$ для ММВ можно записать в виде:

$$F_b(n) = \sum_{h=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\gamma} \beta(hk),$$

где $\beta(hk) = \begin{cases} 1, \text{если возможно назначение } b_l \text{ в } s_{hk}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

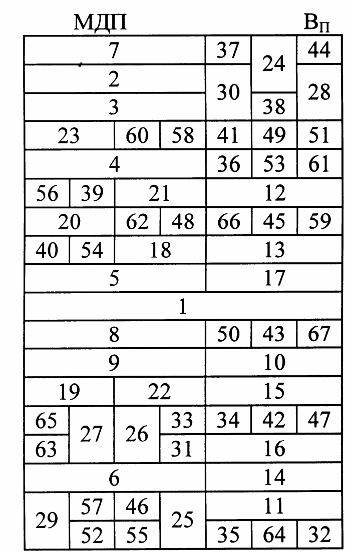


Рис.10 – Пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием МДП

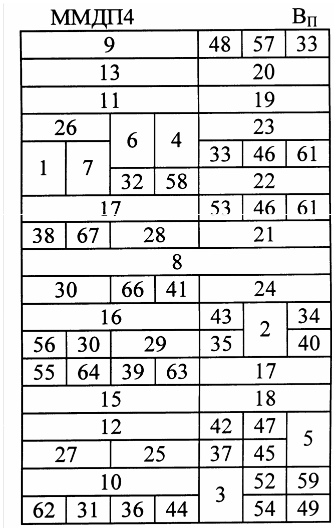


Рис.11 – Пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием ММДП4

ММВ самостоятельно используется редко, но может быть рекомендован для использования в сочетании с одним из принципов второй группы. Например, в сочетании с методом минимальных потребностей ММВ образует целостную стратегию решения задачи покрытия как задачи распределения ресурсов, когда в качестве ресурсов рассматриваются единичные квадраты прямоугольника $S$.

При решении задачи покрытия в процессе составления расписания учебных занятий необходимо для каждого набора $B_L$ учитывать, сколько возможностей, характеризуемых разным значением индекса $h$, осталось для назначения составляющих набор $B_L$ прямоугольников, и сопоставлять количество этих возможностей с параметром $\vartheta_L$ . В этом случае ММВ может быть реализован, например, с помощью функционала $F_b(n)=\left[\sum_{h=1}^{\varphi}\beta(h)\right]-\vartheta_L$ , где

$$\beta(h)=\begin{cases}1, \text{если в день } h \text{ есть хотя бы одна возможность для назначения } b_l,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Учет общего количества возможностей для назначения $b_l$ совместно с учетом распределения этих возможностей по дням недели можно реализовать с помощью функционала

$$F_b(n)=\left\{\left[\sum_{h=1}^{\varphi}\beta(h)\right]-\upsilon_L\right\}\times\sum_{h=1}^{\varphi}\sum_{k=1}^{\gamma}\beta(hk),$$

или с помощью функционала

$$F_b(n)=\alpha_1\times\left\{\left[\sum_{h=1}^{\varphi}\beta(h)\right]-\upsilon_L\right\}+\alpha_2\times\sum_{h=1}^{\varphi}\sum_{k=1}^{\gamma}\beta(hk),$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – весовые коэффициенты, значения которых могут быть выбраны в соответствии с методикой согласования индивидуальных стратегий.

Следующая группа методов реализуется за счет использования только стратегии выбора $s_{hk}$ при назначении произвольным образом выбранных из набора $B$ прямоугольников.

Часть методов данной группы, к которым относятся метод минимальных строк (ММС) и метод минимальных периметров (ММП), выражают простейшие эвристические принципы, которыми руководствуется и человек при решении подобных задач.

Особое место среди методов второй группы занимает метод минимальной потребности (ММПТ), являющийся реализацией стратегии пошагового решения задачи распределения неоднородных ограниченных ресурсов.

*Метод минимальных строк* (ММС). Стратегия ММС требует назначения очередного $b_l$ в такую строку прямоугольника $S$, наибольшее количество клеток которой было покрыто в процессе выполнения предыдущих шагов. Для назначения выбирается строка, характеризуемая минимальным значением функционала

$$F_{hk}(n) = \sum_{i=1}^{\alpha_J} \left[ \beta(s_{(hk),i}) - \beta(s^l_{(hk),i}) \right].$$

Пример решения на ЭВМ задачи покрытия с помощью ММС приведен на рис.12.

*Метод минимальных периметров* (ММП). “Длину” каждого из ребер единичных квадратов, ограничивающих произвольный прямоугольник на поверхности *S*, будем считать равной единице, если по этому ребру прямоугольник граничит с непокрытым единичным квадратом поверхности *S*, и равной нулю, если по данному ребру он граничит с уже покрытым квадратом. Тогда выражение для “периметра” произвольного прямоугольника поверхности можно записать в виде:

$$F_{hk}(n) = \sum_{i=i_L^H}^{i_L^H+\mu_L+1} \left( \overset{*}{s}_{(hk),i} + \overset{*}{s}_{(hk+\lambda_L),i} \right) + \\ + \sum_{i=hk}^{hk+\lambda_L+1} \left( \overset{*}{s}_{(hk),i_L^H-1} + \overset{*}{s}_{(hk),i_L^H+\mu_L} \right),$$

где $\overset{*}{s}_{(hk),i} = \beta(s_{(hk),i}) - \beta(s^l_{(hk),i})$.

Стратегия ММП заключается в выборе для назначения $b_l$ такой строки прямоугольника *S*, на которой прямоугольник $b_l$, покрывает равный ему по площади прямоугольник с минимальным периметром, т.е. в соответствии с минимумом функционала $F_{hk}(n)$. Пример полученного на ЭВМ решения с помощью ММП приведен на рис.13.

*Метод минимальной потребности* (ММПТ). Как уже указывалось, ММПТ реализует стратегию распределения ресурсов, причем в качестве единиц ресурсов рассматриваются единичные квадраты поверхности *S*, распределяемые между покрывающими прямоугольниками. При решении задач распределения ресурсов оптимальная стратегия заключается в назначении очередному “потребителю” такой единицы ресурса из множества возможных, которая характеризуется максимальным значением показателя $\psi_{hk}$, называемого коэффициентом обеспеченности $\psi_{hk} = \varsigma_{hk} / \Lambda_{hk}$, где $\varsigma_{hk}$ – количество одинаковых единиц ресурса, имеющихся в наличии (в данном случае $\varsigma_{hk}$ =1 для всех возможных для назначения выбранного прямоугольника строк

$s_{hk}$, поверхности $S$); $\Lambda_{hk}$ – параметр, характеризующий потребность в данных единицах ресурса со стороны всех еще неназначенных прямоугольников. Поскольку $\varsigma_{hk}=1$, стратегия ММПТ заключается в назначении очередного прямоугольника в строку $s_{hk}$ прямоугольника $S$, характеризуемого минимальным значением функционала $F_{hk}(n)=\Lambda_{hk}(n)$.

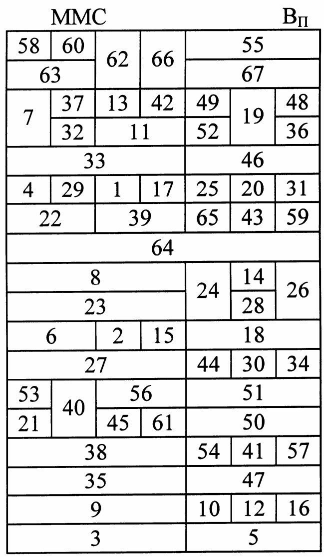


Рис.12 – Пример решения задачи покрытия на ЭВМ с помощью ММС

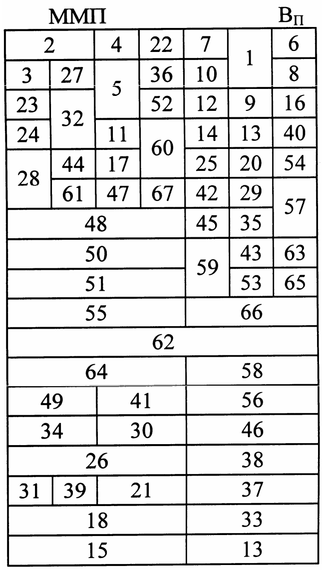


Рис.13 – Получение на ЭВМ решения с помощью ММП

Значение $\Lambda_{hk}(n)$ можно рассчитать в соответствии с выражением

$$\Lambda_{hk}(n)=\sum_{l=1}^{\eta}\frac{\beta(hk,b_l)\times\beta(hk,b_l^H)}{\sum\limits_{h=1}^{\varphi}\sum\limits_{k=1}^{\gamma}\beta(hk,b_l)},$$

где

$$\beta(hk,b_l)=\begin{cases}1, \text{если } b_{l_s} \text{ может быть помещен на строке } s_{hk} \text{ прямоугольника,}\\ 0 \text{ в противном случае;}\end{cases}$$

$b_l^H$ – прямоугольник из набора $B$, выбранный на данном шаге для назначения.

Пример решения задачи покрытия, полученный на ЭВМ с использованием ММПТ, приведен на рис.14.

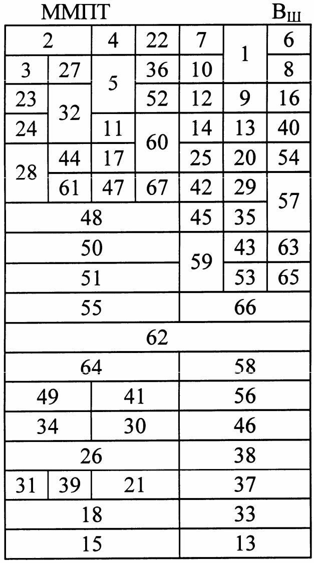


Рис.14 – Пример решение задачи покрытия на ЭВМ с использованием ММПТ

Все рассмотренные выше методы первой и второй групп могут использоваться для решения задачи покрытия в сочетании друг с другом, образуя множество комбинированных методов, отнесенных к третьей группе. Естественно ожидать, что эффективность комбинированных методов может существенно превосходить эффективность методов первой и второй групп (табл.1, 2). Однако комбинированные методы решения задачи покрытия значительно труднее согласуются со стратегиями решения других подзадач составления вузовских расписаний, чем методы первой и второй групп. Поэтому далее особый акцент сделан на оценку эффективности их раздельного применения.

*Эффективность методов пошагового решения задачи покрытия.* Для оценки сравнительной эффективности перечисленных методов решения задачи покрытия были проведены эксперименты, в ходе которых на ЭВМ многократно решалась задача покрытия прямоугольника $S$ одним из следующих трех наборов прямоугольников: $B^I$ – набор, отражающий состав учебных занятий для групп I-II курсов ХНАГХ, т.е. набор I-II курсов ($B^I = B_{\lambda_1}$); $B^{II}$ – набор III курса ($B^{II} = B_{\lambda_1} \bigcup B_{\lambda_2}$); $B^{III}$ – набор IV-V курсов ($B^{III} = B_{\lambda_1} \bigcup B_{\lambda_2}$, $\left|B_{\lambda_2}^{III}\right| > \left|B_{\lambda_2}^{II}\right|$).

Наборы прямоугольников $B^I$, $B^{II}$, $B^{III}$ удовлетворяют ограничению 1, причем для всех $B_L \subset B$ принято $\vartheta_L$ =1. Состав наборов $B^I$, $B^{II}$, $B^{III}$ по количеству входящих в них прямоугольников различных геометрических типов отражен в табл.3.

Таблица 1 – Формирование покрытия с помощью первой группы

| **Вариант исходных данных** | **Дополняющая стратегия** | **Стратегия выбора** $b_l$ ($F_b$) | | | **Стратегия выбора** $s_{hk}$ ($F_{hk}$) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **МРВ** | **МУЗ** | **МДП** | **ММС** | **ММП** |
| $B_1$ | МРВ | $\frac{27,14}{59,81}$ | $\frac{0,00}{0,00}$ | $\frac{0,00}{0,00}$ | $\frac{0,00}{0,00}$ | $\frac{0,95}{1,36}$ |
| $B_{П}$ | МРВ | $\frac{20,00}{27,56}$ | $\frac{2,22}{1,61}$ | $\frac{0,63}{1,61}$ | $\frac{4,44}{17,57}$ | $\frac{2,86}{3,17}$ |

Таблица 2 – Формирование стратегии выбора покрытия по второй группе

| | $A_{cp}$ / $D[A]$ | **Стратегия выбора** $b_l$ ($F_b$) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_{Ш}$ | **Стратегия выбора** $s_{hk}$ **(**$F_{hk}$**)** | $F_b$ / $F_{hk}$ | **МРВ** | **МУЗ** | **ММУЗ** | **МДП** | **ММДП4** | **ММВ** |
| | | МРВ | $\frac{21,75}{15,27}$ | $\frac{7,62}{4,43}$ | $\frac{0,00}{0,00}$ | $\frac{10,79}{10,48}$ | $\frac{21,11}{49,53}$ | $\frac{2,22}{1,01}$ |
| | | ММС | $\frac{4,76}{17,69}$ | — | — | — | $\frac{0,00}{0,00}$ | — |
| | | ММП | $\frac{4,60}{9,42}$ | — | — | — | $\frac{0,00}{0,00}$ | — |
| | | ММПТ | $\frac{5,56}{4,18}$ | — | — | — | — | $\frac{0,00}{0,00}$ |

Таблица 3 – Формирование покрытия с помощью первой группы

| $P_B$ | $b_2^1$ | $b_1^1$ | $b_1^2$ | $b_1^3$ | $b_1^4$ | $b_1^5$ | $b_1^6$ | $b_1^7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B^I$ | - | 63 | - | 3 | 3 | - | - | 6 |
| $B^{II}$ | 7 | 37 | 6 | 8 | 8 | - | - | 1 |
| $B^{III}$ | 14 | 10 | 13 | 2 | - | 7 | - | 3 |

Результаты выполненных экспериментов представлены в табл.1, 2, в графах которых над чертой указаны значения выборочных средних процентов “отказов”, характеризующих эффективность исследуемых методов решения, а под чертой – соответствующие значения выборочных дисперсий. В ходе экспериментов каждая из индивидуальных стратегий (методы первой и второй групп) дополнялась стратегией равновероятного выбора (МРВ).

Приведенные в табл.1, 2 результаты позволяют оценить эффективность применения каждой из исследованных стратегий для решения конкретных задач и сделать следующие выводы:

1. Полученные значения среднего количества отказов для стратегий МРВ-МРВ указывают на невозможность получения решения исследуемой задачи методом статистических испытаний.

2. Широко используемая в практике разработки алгоритмов составления вузовских расписаний стратегия МДП-МРВ оказывается эффективной лишь для решения задач составления расписаний занятий равной длительности (данные I-II курсов). Получить же решение задачи составления расписания для IV-V курсов (набор $B^{III}$ ) с использованием стратегии МДП-МРВ практически невозможно. Не дает ожидаемого эффекта и рекомендуемая многими авторами модификация МДП (см. результаты для стратегии ММДП4-МРВ).

3. Наиболее эффективной стратегией решения задачи покрытия применительно к составлению вузовских расписаний учебных занятий оказывается стратегия ММУЗ-МРВ (МУЗ-МРВ).

4. Стратегии МРВ-ММС и МРВ-ММП являются в большей степени, чем стратегия ММУЗ-МРВ, независимыми от структуры набора подрывающих прямоугольников и, хотя значения средних показателей эффективности для этих стратегий невысоки, они дают достаточно большой процент успешных решений (решений без отказов), что позволяет разрабатывать на основе их применения алгоритмы, используя которые можно за сравнительно небольшое число попыток получать компактные расписания при решении сложных задач.

5. Стратегия ММВ-ММПТ является универсальной, одной из самых эффективных и, наряду со стратегией МУЗ (ММУЗ), теоретически одной из наиболее обоснованных стратегий решения задач комбинаторной геометрии.

*Условия существования и метод пошагового решения задачи распределения неоднородных ограниченных ресурсов*. Задача распределения неоднородных ограниченных ресурсов изучалась в следующей постановке, соответствующей задаче распределения аудиторного фонда вуза при составлении расписания:

Дано:

- ✓ множество тактов периода планирования $S=\{s_{hk}\}$, $h=\overline{1,\varphi}$, $k=\overline{1,\gamma}$;
- ✓ множество неоднородных ограниченных ресурсов $Y=\{y_s\}$ ,

$s=\overline{1,\zeta}$, $Y=\bigcup\limits_{v} Y_v$, $v=\overline{1,\xi}$, характеризуемое “матрицей наличия” $\zeta=\left\|\zeta_{hk}^{v}\right\|$, элементы которой указывают, сколько единиц ресурса вида $v$ имеется в наличии в такт $s_{hk}$ периода планирования $T$;

- ✓ множество потребителей ресурсов $B=\{b_l\}$, $l=\overline{1,\eta}$; $B=\bigcup\limits_{L} B_L$, $L=\overline{1,\theta}$, $\bigcap\limits_{L} B_L=\varnothing$; $\forall b_l \in B_L$ $(\exists P_{b_l}=\left|S_L, v_L, \vartheta_L, \lambda_L\right|)$, где $S_L$ – подмножество тактов периода планирования, в которые потребитель может использовать требуемую единицу ресурса вида $v_L$.

Требуется каждому потребителю $b_l$ назначить единицу ресурса на непрерывное число $\lambda_L$ тактов $s_{hk} \in S_L$ периода планирования заданное число раз $\vartheta_L$.

Одна из особенностей исследуемой задачи, отличающая ее от большинства задач оптимального распределения ресурсов, рассматриваемых в литературе, состоит в том, что качество решения задачи (функция полезности) не зависит от того, заявки каких именно потребителей оказались выполненными, а зависит лишь от относительного количества выполненных в процессе решения заявок. Указанная особенность позволяет исследовать приведенную задачу для случая $\xi=1$, так как при отсутствии у потребителей индивидуальных функций полезности задачи распределения ресурсов различных видов ($v$) оказываются не связанными и могут решаться независимо друг от друга.

В качестве исходной для разработки условий существования решения исследуемой задачи использовалась теорема Холла [6] о существовании решения известной “задачи о свадьбах”. Эта теорема отвечает на вопрос о том, при каких условиях из некоторого конечного множества юношей и множества девушек можно составить пары из знакомых между собой юношей и девушек. Отношение знакомства в задаче о свадьбах задается указанием для каждого юноши перечня девушек, с которыми он знаком.

Очевидно, что в исследуемой распределительной задаче в качестве юношей выступают элементы множества потребителей ресурсов $b_l$ (учебные занятия), а в качестве “девушек” – единицы ресурсов (учебные помещения), распределенные по тактам периода планирования. Отношение “знакомства” задается указанием для каждого $b_l$ подмножества тактов $S_L$, в которые данный потребитель может получить требуемую единицу ресурса.

Упомянутая теорема Холла формулируется следующим образом: решение задачи о свадьбах существует тогда и только тогда, когда любые $k$ юношей из данного множества знакомы в совокупности по меньшей мере с $k$ девушками ($1 \le k \le m$, где $m$ – общее число юношей).

К сожалению, теорема Холла для задач большой размерности не позволяет осуществить непосредственную проверку условий существования решения исследуемой распределительной задачи, так как предполагает очень большое количество вычислений, быстро возрастающее с увеличением числа юношей и девушек. Если учесть, что в задаче распределения аудиторного фонда вуза число “юношей”, т.е. учебных занятий, измеряется сотнями, то становится ясно, что построить алгоритмы непосредственной проверки условий, указанных в теореме Холла, не представляется возможным. Поэтому предложенные для анализа условий существования решения задачи распределения аудиторного фонда выражения базируются на статистических оценках, определяющих потребность в каждой из единиц распределяемых ресурсов, и соотнесении показателей потребности к показателям наличия.

Разработанные условия существования решения исследуемой распределительной задачи в статистическом смысле удовлетворяют условиям теоремы Холла и подразделяются на интегральные (устанавливающие определенные соотношения между параметрами, характеризующими суммарное наличие ресурсов и потребность в них) и дифференциальные (устанавливающие соответствующие отношения в отдельности для каждого такта периода планирования).

Входящие в выражения для дифференциальных условий значения элементов матрицы потребности $\Lambda = \left\| \Lambda_{hk}^{\nu} \right\|$ подсчитываются в соответствии с выражением

$$\Lambda_{hk}^{\nu} = \sum_{L=1}^{Q} \frac{\nu_L \times \lambda_L \times \beta(\nu) \times \beta(s_{hk})}{\sum_{h=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\gamma} \beta(s_{hk})},$$

где $\beta(s_{hk}) = \begin{cases} 1, \text{если } s_{hk} \in S_L, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$ $\beta(\nu) = \begin{cases} 1, \text{если } \nu = \nu_L, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Предлагаемые для анализа условий существования решения задачи выражения записываются следующим образом:

$$\psi_\nu = \frac{\sum_{h=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\gamma} \zeta_{hk}^{\nu}}{\sum_{h=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\gamma} \Lambda_{hk}^{\nu}} \ge 1, \ \ \nu = \overline{1,\xi}; \qquad (1)$$

$$\psi_{hk}^{\nu} = \zeta_{hk}^{\nu} / \Lambda_{hk}^{\nu} \ge 1, \ \ \nu = \overline{1,\xi}, \ h = \overline{1,\varphi}, \ k = \overline{1,\gamma}; \qquad (2)$$

$$\Lambda_{hk}^{\nu} - \zeta_{hk}^{\nu} < 1, \ \ \nu = \overline{1,\xi}, \ h = \overline{1,\varphi}, \ k = \overline{1,\gamma}; \qquad (3)$$

$$\psi_\nu^0 = \frac{\sum_{h=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\gamma} \beta(\psi_{hk}^{\nu}) \times \Lambda_{hk}^{\nu}}{\sum_{h=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\gamma} \Lambda_{hk}^{\nu}} \ge 1, \ \ \nu = \overline{1,\xi}, \qquad (4)$$

где $\beta(\psi_{hk}^{\nu}) = \begin{cases} \psi_{hk}^{\nu}, \text{если } \psi_{hk}^{\nu} < [\psi_{hk}^{\nu}]_{\max}, \\ [\psi_{hk}^{\nu}]_{\max} \text{ в противном случае;} \end{cases}$

$$[\psi_{hk}^{\nu}]_{\max} = \frac{\sum_{L=1}^{\theta} \beta(s_{hk}) \times \beta(\nu)}{\Lambda_{hk}^{\nu}}.$$

Условие (1) встречается в работах, посвященных задаче составления вузовских расписаний учебных занятий и является необходимым, но недостаточным, так как не учитывает возможной неравномерности распределения значений $\Lambda_{hk}^{\nu}$ и $\zeta_{hk}^{\nu}$ по тактам периода планирования. Условие (2) является достаточным, однако при небольших значениях $\eta$ не позволяет достичь высокого значения показателя эффективности

$$Э_\nu^{\partial} = \frac{100 - Q_\nu}{\psi_\nu} \%,$$

где $Q_\nu$ – относительное количество отказов (%).

Задачи, удовлетворяющие условию (3), могут решаться с эффективностью 100% и, как показывает эксперимент, для задач с $\eta \ge 10$ выполнение условия (3) совместно с условием (1) является надежной гарантией существования решения.

Условие (4) совмещает в себе преимущества интегральных условий (невысокие требования к объему ОЗУ ЭВМ) и свободно от недостатка, свойственного условию (1), проявляющегося в отсутствии учета неравномерности распределений $\Lambda_{hk}^{v}$ и $\zeta_{hk}^{v}$ по тактам периода планирования. Исследование показало, что для задач с $\eta \ge 10$ выполнение условия (4) гарантирует существование решения задачи.

Для пошагового решения задачи распределения ресурсов предложена стратегия, заключающаяся в том, что потребителю, заявка которого выполняется на $n$-м этапе, назначается единица ресурса в такт, характеризуемый максимальным значением показателя

$$\psi_{hk}^{v}(n) = \zeta_{hk}^{v}(n) / \Lambda_{hk}^{v}(n). \tag{5}$$

Экспериментально показано, что для широкого класса исследуемых задач эффективность получаемых с помощью стратегии (5) решений не зависит от порядка формирования очереди их потребителей. Эксперименты по решению задач проводились на ПЭВМ Pentium-100, снабженных программными генераторами задач, исходные данные которых удовлетворяли заданным условиям в зависимости от выбранного режима работы.

*Согласование индивидуальных стратегий решения частных подзадач задачи составления вузовских расписаний.* При пошаговом решении задачи составления вузовских расписаний учебных занятий функции предпочтения

$$\begin{aligned} F_b &= F_b(b_l, n) \\ F_{hk} &= F_{hk}(s_{hk}, n) \end{aligned} \tag{6}$$

реализуют сложную стратегию выбора, агрегирующую множество индивидуальных стратегий решения отдельных подзадач. Каждая из индивидуальных стратегий реализуется с помощью индивидуальных функций предпочтения $f_i^b = f_i^b(b_l, n)$, $f_i^{hk} = f_i^{hk}(b_l, n)$. Выбор вида функций предпочтения (6), таким образом, сводится к выявлению индивидуальных предпочтений ( $f_i^b$, $f_i^{hk}$ ), обеспечивающих решение частных подзадач, и выявлению способа построения групповых предпочтений ( $F_b$, $F_{hk}$ ), агрегирующих индивидуальные.

Анализ известных математических моделей группового выбора показал, что наиболее обоснованным в теоретическом отношении принципом согласования является операция взятия взвешенной суммы индивидуальных показателей:

$$\begin{aligned} F_b &= \alpha_1^b \times f_1^b + \alpha_2^b \times f_2^b + ... + \alpha_n^b \times f_n^b, \\ F_{hk} &= \alpha_1^{hk} \times f_1^{hk} + \alpha_2^{hk} \times f_2^{hk} + ... + \alpha_n^{hk} \times f_n^{hk}. \end{aligned} \tag{7}$$

Среди множества принципов согласования, задаваемых вектором

$$P = \left| \alpha_1^b, \alpha_2^b, ..., \alpha_n^b, \alpha_1^{hk}, \alpha^{hk}_2, ..., \alpha^{hk}_n \right| \tag{8}$$

для составления расписаний учебных занятий используются следующие три группы:

✓ принципы согласования, задающие групповое предпочтение просто в виде взвешенной суммы;

✓ принципы согласования, реализующие “разделение обязанностей” между функциями $F_b$ и $F_{hk}$ (например, $F_b$ используется для решения задачи покрытия, а $F_{hk}$ – для решения задачи распределения ресурсов);

✓ принципы согласования, задающие отношение лексикографического порядка (ОЛП) на множестве выбираемых объектов.

Возможность задания ОЛП в виде $R_f$ от некоторой функции $f$ в соответствии с правилом

$$(a,b) \in R_f \leftrightarrow f(a) < f(b) \tag{9}$$

подтверждается следующей теоремой.

*Теорема* 3. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задаст отношение лексикографического порядка на множестве объектов $a \in A$, каждый из которых характеризуется множеством упорядоченных по важности показателей $(x_1, x_2, ..., x_n)$, измеряемых с шагом $\sigma$, если $\alpha_1 = 1$, а значения коэффициентов $\alpha_i$, начиная с $i$=3, удовлетворяют условию

$$\alpha_i \geq \alpha_{i-1} \frac{\overline{x_i} - 1}{\sigma}, \tag{10}$$

где $\overline{x_i}$ – предельное значение показателя $x_i$ $(x_i < \overline{x_i})$, а большее значение индекса $i$ соответствует более важному показателю.

Приведенная теорема позволяет использовать особенности вычисления на ЭВМ индивидуальных показателей для задания ОЛП с помощью $F_b$ и $F_{hk}$ в виде (7).

Индекс "важности" индивидуальных показателей $f_i$ рекомендуется определять в соответствии с минимумом показателя:

$$\xi_i = m_i / \beta_i , \tag{11}$$

где $\beta_i$ – коэффициент "важности" показателя $f_i$, определяемый, например, методом экспертных оценок, а $m_i$ – параметр, характеризующий число классов квазисерии, задаваемой показателем $f_i$ на множестве выбираемых объектов.

Количество индивидуальных показателей $l$, агрегируемых в групповое ОЛП, ограничено и должно удовлетворять следующему неравенству:

$$m_1 \times m_2 \times ... \times m_{l-1} < N , \tag{12}$$

где $N$ – количество выбираемых объектов.

Неравенство (12), критерий (11) и условия (10) полностью определяют методику задания коэффициентов $\alpha_i$ в функциях (7) для реализации ОЛП, являющегося основным принципом согласования индивидуальных стратегий решения частных подзадач из используемых в программе составления вузовских расписаний учебных занятий в системе "Расписание - ХНАГХ".

При разработке алгоритмов и программ автоматического составления расписаний блок вычисления значений функций предпочтения $F_b$ и $F_{hk}$ может быть реализован так, чтобы значения коэффициентов $\alpha_i^b$ и $\alpha_i^{hk}$ являлись внешними параметрами программы. Тогда программа составления расписания становится универсальной относительно используемых его принципов согласования индивидуальных стратегий. Это позволяет при выборе конкретного режима работы учитывать характеристики решаемой задачи и назначать лучшую из нескольких альтернативных стратегий решения каждой из ее подзадач. С другой стороны, становится возможной "наладка" каждого из режимов, т.е. такое изменение коэффициентов $\alpha_i^b$ и $\alpha_i^{hk}$, которое, не изменяя характера используемого принципа согласования, обеспечивает получение наилучших по качеству расписаний.

Приведенные результаты исследования математической модели задачи составления вузовских расписаний учебных занятий не охватывают, конечно, всех аспектов, связанных с разработкой математически обоснованных методов пошагового решения такой чрезвычайно сложной задачи, как задача составления вузовских расписаний учебных занятий, но дают представление о математическом аппарате, использованном при разработке ряда основных алгоритмов подсистемы “Расписание - ХНАГХ” корпоративной системы ХНАГХ.

Система “Расписание - ХНАГХ”, как и любая система масштаба предприятия, находится в постоянном развитии. В рамках поддержки учебного процесса факультетов возникла необходимость автоматизации составления расписания. Следует отметить, что задача составления расписания сама по себе интересна, и существует много способов и путей ее решения разными вузами. Особую ценность внедрение данной подсистемы представляет в рамках единой базы данных ERP-системы, когда все ресурсы (аудитории, ППС, оборудование и др.) взаимосвязаны.

В 2004 г. в рамках перехода на новую версию модуля “Управление учебным процессом в ХНАГХ” было осуществлено внедрение первой очереди подсистемы автоматизированного составления расписания со следующей функциональностью:

1. Ручной ввод или импорт из Excel файлов ресурсов, необходимых для расписания (группы, потоки, аудитории, типы аудиторий, преподаватели, учебные планы, готовые расписания).

2. Система позволяет задать блокировки на использование ресурсов в разрезе группы, курса, преподавателя, аудитории на конкретный день и пару.

3. Система позволяет делить простой семестровый РУП на части для итерационной генерации расписания.

4. Система позволяет создавать разные варианты расписания в зависимости от используемых настроек и учебных планов (рабочий учебный план, базовый учебный план и др.).

5. Система позволяет создавать расписания с учетом конкуренции по ресурсам.

6. Система позволяет вводить задания в расписание ручным способом в рамках группы.

В рамках второй очереди внедрения данной подсистемы “Расписание - ХНАГХ” предполагается внедрение оптимизатора расписания, позволяющего задавать критерии для автоматического формирования расписания:

- ✓ минимум “дыр” для групп;
- ✓ минимальная стоимость обучения (стоимость складывается из стоимости преподавателей и аудиторий);
- ✓ минимум “дыр” для преподавателей;
- ✓ минимум перемещения групп;

- ✓ минимальное число занятых аудиторий.

При этом каждому критерию можно будет задавать желательность или обязательность исполнения, а также важность по сравнению с другими.

Опыт внедрения первой очереди расписания показал:

1. Существенное увеличение производительности труда сотрудников учебной части при составлении расписания или внесении в него изменений.

2. Сокращение количества ошибок, связанных с конфликтами на занятость аудиторий, групп, преподавателей.

3. Сокращение затрат и ошибок, связанных с обменом и согласованием информации между различными участниками процесса формирования расписания.

4. Упрощение процедуры поиска конкретной информации и подготовка распечаток (отчетов) для преподавателей, групп и аудиторий.

5. Возможность учета большинства индивидуальных пожеланий преподавателей о времени проведения занятий.

6. Возможность хранения различных версий расписания и их анализа во временном ракурсе.

Особо хотелось бы отметить достоинства системы, основанные на ее интегрированности:

1. Информация обо всех преподавателях, задействованных в учебном процессе, берется из кадровой системы факультетов. В результате упрощается идентификация сотрудников, поиск необходимой информации об их персональных данных: полное имя и отчество, ученые степень, звание и должность, контактные телефоны (что особенно важно при учете и согласовании индивидуальных пожеланий).

2 Система очень хорошо проявила себя в ситуации изменения оргструктуры факультетов (появление в новом учебном году новой кафедры и дополнительных групп студентов). Обычно подобные изменения приводят к большому числу разночтений и изменений в уже готовом расписании. Средствами системы все изменения жестко контролировались, что позволило не только избежать ошибок и накладок, но и ускорило процесс доработки расписания.

Если оценивать систему со всех сторон, то нельзя не отметить и ряд недостатков, или правильней сказать, нереализованных пожеланий. На практике расписание составляется за очень короткие сроки и существует необходимость “ударного труда” в нерабочие часы и выходные. Естественным желанием диспетчера является работа с системой дома. В качестве возможного решения данной потребности пользователей обсуждается возможность в рамках дальнейшего развития системы настроить доступ сотрудников факультетов к системе через портал, разумеется, с соблюдением необходимых мер безопасности.

1.Торкатюк В.И., Дмитрук И.А., Трояновская О.Б., Токарь Л.А., Вышетравская А.С., Дриль Н.В., Горбачева Ю.И., Сухонос М.К. Реформирование высшего образования Украины и оновление его социальных идей на пути трансформации к Болонскому процессу // Стратегія посилення самостійної роботи студентів у контексті приєднання України до Болонського процесу: Матеріали Всеукр. наук.-метод. конф. – Харків: ХНАМГ, 2004. – 244 с.

2.Шутенко Л.М., Стадник Г.В., Соловйов О.В., Торкатюк В.І., Нохріна Л.А. Концептуальні проблеми формування безперервної економічної освіти в Україні за сучасних умов і перспективні напрямки її вдосконалення // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.40. – К.: Техніка, 2002. – С.146-164

3.Шутенко Л.М., Стадник Г.В., Торкатюк В.І. Проблеми і перспективні напрямки вдосконалення підготовки фахівців-економістів для будівельної галузі України // Академія будівництва України. Харківське територіальне відділення. Інформаційний бюлетень. – 2003. – №8. – С.23-24

4.Бархаєв Ю.П. “Вирощування” здатностей до самостійної роботи засобами інноваційної освітньої системи розвиваючого навчання студентів // Стратегія посилення самостійної роботи студентів у контексті приєднання України до Болонського процесу: Матеріали Всеукр. наук.-метод. конф. – Харків: ХНАМГ, 2004. – 244 с.

5.Крюков В.В., Шахгельдян К.И. Развитие информационной инфраструктуры вуза для решения задач управления: Особенности корпоративной инфраструктуры информационной среды вуза // Университетское управление. – 2004. – №4(32). – С.67-77

6.Созонов Б.А., Беспалов П.В., Беспалова Е.В., Власов В.П. Управление, экономика и прогнозирование высшего и среднего специального образования // Экспресс-информация. Вып.11. – М.: ОНИ, 1978. – 60 с.

7.Бочков В.Е., Демин Ю.Н., Хохлов Н.Г. О концепции создания и развития Университетского комплекса на основе интегрированной системы обучения в Московском государственном индустриальном университете // Университетский комплекс как важное и действенное средство непрерывности и преемственности образования в условиях его модернизации. – М.: МГПУ, 2003. – 116 с.

8.Крюков В.В., Майоров В.С., Шахгельдян К.И. Реализация корпоративной вычислительной сети вуза на базе технологии Active Directory // Труды Всерос. науч. конф. “Научный сервис в сети Интернет”. – Новороссийск, 2002. – С.253-255

*Получено 02.11.2005*

УДК 628.174 : 614.4

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-матем. наук
*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства*
С.В.ОЛЬШАНСКИЙ
*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*

## О НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПАДЕНИЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ

Предлагается решение нелинейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, описывающего падение капли с заданной начальной скоростью, построенное в специальных табулированных функциях. Обнаружено хорошее соответствие расчётных значений скорости падения частицы в различные моменты времени с известными опытными данными.