ного водоснабжения: Науч. тр. АКХ им. К.Д.Памфилова. Вып.155. – М.: ОНТИАКХ им. К.Д.Памфилова, 1978. – С.22-25.

3.Алиев Б.Т. Совершенствование методов эксплуатации систем водоснабжения зданий в условиях дефицита воды (на примере г. Баку): Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. – Л., 1990. – 18 с.

4.Свинцов А.П., Тарасюк Л.В., Мукарзель СА. Экспериментальная оценка нормативов водопотребления в жилых зданиях // Водоснабжение и санитарная техника. – М., 1998. – №8. – С.10-11.

5.Исаев В.Н. Эффективность водосберегающих мероприятий // Водоснабжение и санитарная техника. – М., 1998. – №1. – С.20-23.

Получено 23.12.2011

УДК 621.644.01

Т.А.ОБОЛЕНСКАЯ, В.И.ЛАЗАРЕНКО, кандидаты техн. наук,
А.С.ПИСАРЦОВ
Украинская инженерно-педагогическая академия, г.Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТРУБОПРОВОДАХ ПРИ ТРАНСПОРТИРОВКЕ ЖИДКИХ ЭНЕРГОНОСИТЕЛЕЙ

Исследовано применение метода подобия и размерностей в изучении диффузии вихрей в вязкой жидкости. Определено, что в единой универсальной системе единиц измерения численные значения всех количественных характеристик определяются однозначно их физической величиной.

Розглянуто застосування методу подібності та розмірності у вивченні дифузії вихрів у в'язкій рідині. Визначено, що в єдиній універсальній системі одиниць виміру числові значення всіх кількісних характеристик визначаються однозначно їх фізичною величиною.

In the examined application of method of similarity and dimensions in the study of diffusion of whirlwinds in a viscid liquid are article. It is determined that in the single universal of units the numeral values of all quantitative description are determined simply by their size.

Ключевые слова: диффузия, метод подобия, вязкая несжимаемая жидкость.

При изучении механических явлений, происходящих в трубопроводах, вводится ряд понятий, например, энергия, скорость, напряжения и т.п., которые характеризуют рассматриваемое явление и могут быть заданы и определены с помощью чисел. Возможность предварительного качественно-теоретического анализа и выбора системы определяющих безразмерных параметров дает теория размерности и подобия, которая может быть применена к изучению данного процесса.

Емцев Б.Т. считает, что в теории размерности и подобия устанавливаются условия, которые должны соблюдаться в опытах с моделями, и выделяются характерные и удобные параметры, определяющие основные эффекты и режимы процессов [1]. По мнению Ландау Л. и Лифши-

ца Е., наиболее существенные результаты исследований получаются путем комбинирования соображений теории размерности с общефизическими предположениями. Это особенно касается проблемы турбулентных движений жидкости, так как в этой области мы еще не имеем замкнутой системы уравнений, которые позволили бы сводить задачи механики к математическим задачам [2].

Соображения теории размерности могут оказать большую помощь при математическом решении некоторых физических задач. В качестве примера приложения теории размерности рассмотрим задачу о диффузии вихрей и вязкости несжимаемой жидкости в предположении, что движение жидкости плоскопараллельное и жидкость занимает всю плоскость.

Рассмотрим движение вязкой жидкости, считая это движение неустановившимся.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ жидкость движется потенциально везде, за исключением полюса O, представляющего собой след на плоскости движения бесконечного прямолинейного концентрированного вихря с циркуляцией Г.

Примем, что давление обладает осевой симметрией. Обозначим через Ω угловую скорость частиц жидкости.

Как известно, циркуляция по кругу радиуса R с центром в O равна:

$$\Gamma_R = 2\int_0^R \int_0^{2\pi} \Omega r\, dr\, d\Theta = 4\pi \int_0^R r\Omega(r)\, dr\,. \qquad (1)$$

В начальный момент времени для любого, в частности и для сколь угодно малого, круга имеем

$$\Gamma_R = \Gamma\,. \qquad (2)$$

Уравнение распространения вихрей в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{dt} = \nu\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right), \qquad (3)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости $\nu = \mu / \rho$. Задача заключается в определении величины Ω как функции от радиуса r и времени t.

Из поставленной задачи следует, что $\Omega = f(\Gamma, \nu, r, t)$.

Из линейности уравнения (3) и начального условия следует, что Ω пропорционально Γ, т.е.

$$\Omega = \Gamma f(\nu, r, t)\,. \qquad (4)$$

Безразмерная комбинация $\frac{\Omega \nu t}{\Gamma}$ должна выразиться как функция от единственной независимой безразмерной величины $\frac{r^2}{\nu t} = \xi$, которую можно составить из размеров параметров ν, r, t. Следовательно,

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t}\psi(\xi). \tag{5}$$

Из формулы (5) очевидно, что уравнение в частных производных (3) для функций Ω с двумя независимыми переменными *r* и *t* приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с одной неизвестной переменной ξ.

Подставляя выражение для Ω из (5) в уравнение (3), имеем:

$$\psi(\xi) + \xi\psi'(\xi) + 4[\psi'(\xi) + \xi\psi''(\xi)] = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\xi\psi + 4\xi\psi' = C.$$

Постоянная *C* равняется нулю для решения, в котором $\psi(0)$ и $\psi'(0)$ конечны. Интегрируя уравнения

$$4\frac{d\psi}{d\xi} + \psi = 0,$$

найдем

$$\psi = Ae^{-\frac{1}{4}}.$$

Для величины вихря Ω это дает:

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t}Ae^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

Постоянную *A* определяем из начального условия. Циркуляция по кругу радиуса *R* равняется:

$$\Gamma_R = 4\pi\frac{A\Gamma}{\nu t}\int_0^R re^{-\frac{r^2}{4\nu t}}dr = 8\pi A\Gamma\left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\nu t}}\right). \tag{6}$$

При *t = 0* для любого *R > 0* имеет:

$$\Gamma_R = 8\pi A\Gamma.$$

Начальное условие $\Gamma_R = \Gamma$ дает:

$$A = 1/(8\pi).$$

Окончательное решение задачи представляется формулой

$$\Omega = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \qquad (7)$$

Обозначим через b (r, t) скорость частиц жидкости. Движение жидкости обладает осевой симметрией, причем скорость частиц жидкости направлена перпендикулярно к радиусу-вектору, проведенному в рассматриваемую точку из полюса *O*.

Учитывая направление вектора скорости, получаем следующую связь между Γ_R и b:

$$\Gamma_R = 2\pi r b.$$

Воспользовавшись формулой (6), найдем закон распределения скорости по радиусу *r* и по времени *t:*

$$b = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right).$$

При $t = 0$ получается закон распределения скоростей, соответствующий точечному вихрю в идеальной жидкости. При $r > 0$ и $t = 0$ движение жидкости потенциально и вихри отсутствуют: при $r > 0$ и $t > 0$ движение жидкости вихревое в каждой точке жидкости. Формула (7) дает закон распространения – диффузия – вихрей. Эта формула показывает, что величина вихря в каждой точке возрастает с течением времени от нуля до максимума, равного $\frac{\Gamma}{2\pi r^2 e}$, и затем опять стремится к нулю.

Так как уравнение (3) линейное, то, исходя из полученного решения о распределении точечного вихря, можно построить методом суперпозиции решение задачи о симметричном движении при любом начальном распределении скоростей.

Найдем точные решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство.

Уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности можно написать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{b}\nabla\bar{b} = -grad\left(\frac{P}{\rho} - U\right) + \nu\Delta\bar{b} \\ &div\ b = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

В дальнейшем воспользуемся сферической системой координат.

Независимыми переменными и определяющими величинами будут:

$$r, \quad \theta, \quad \lambda, \quad v,$$

где r – расстояние рассматриваемой точки до полюса; θ – амплитуда; λ – долгота; v – коэффициент кинематической вязкости.

Искомыми величинами будут проекции скорости U_r, U_Θ, U_λ и динамическое давление, отнесенное к плотности, равное $\frac{P}{\rho} - U$.

Изучим решения уравнений (8), которые вполне определяются параметрами r, θ, λ, v, и еще только одной размерной постоянной A.

Пусть формула размерности для A имеет вид:

$$[A] = L^p L^q,$$

где p и q – некоторые постоянные.

При этом положении, очевидно, что все безразмерные комбинации из введенных величин будут функциями только трех отвлеченных параметров:

$$\Theta, \lambda, \pi = \frac{r^{p+2p} v^{-q}}{A}.$$

Тогда искомые функции можно представить в виде:

$$U_r = \frac{v}{r} f(\pi, \lambda, \Theta); \qquad U_\Theta = \frac{v}{r} \varphi(\pi, \lambda, \Theta);$$

$$U_\lambda = \frac{v}{r} \Psi(\pi, \lambda, \Theta); \qquad U - \frac{p}{r} = \frac{v^2}{r^2} F(\pi, \lambda, \Theta).$$

В такой форме можно представить и рассматривать самое общее решение уравнений (8).

Число независимых переменных сократится, если мы предположим, что $p + 2p = 0$.

Это условие обозначает, что размерность A представляет собой некоторую степень размерности коэффициента кинематической вязкости v.

Помимо этого предположения, примем еще, что изучаемые движения обладают осевой симметрией, так что переменная λ несущественна.

Из сделанных предположений вытекает, что для искомых величин должны быть справедливы формулы:

$$U_r = \frac{v}{r} f(\Theta), \quad U_\Theta = \frac{v}{r} \varphi(\Theta), \quad U_\lambda = \frac{v}{r} \Psi(\Theta), \quad U - \frac{p}{r} = \frac{v^2}{r^2} F(\Theta). \qquad (9)$$

Эти формулы устанавливают зависимость поля скоростей и давлений от переменной r. В этом случае из уравнений (8) для четырех функций f, φ, ψ, F получается система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f'' + f'(ctg\,\Theta - \varphi) + f^2 + \varphi^2 + \psi^2 - 2F = 0 \\ \varphi\varphi' - \psi^2 ctg\,\Theta - f' - F' = 0 \\ \psi'' - \varphi\psi' - \varphi\psi\, ctg\,\Theta + \psi' ctg\,\Theta - \frac{\psi}{\sin^2\Theta} = 0 \\ f + \varphi' + \varphi\, ctg\,\Theta = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

После исключения функции F и некоторых простых преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned} f'' + 2\psi(\psi' + \psi\, ctg\,\Theta) + (f'\, ctg\,\Theta)' - (\varphi f')' + 2ff'' + 2f' = 0 \\ \varphi(\psi' + \psi\, ctg\,\Theta) = (\psi' + \psi\, ctg\,\Theta)' \\ f = -(\varphi' + \varphi\, ctg\,\Theta) \end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Общее решение этой системы уравнений зависит от шести произвольных постоянных.

Перед изучением решений системы уравнений (11) отметим некоторые свойства рассматриваемых движений вязкости жидкости.

Дифференциальные уравнения для проекций линий тока на плоскость меридиана можно написать в виде:

$$\frac{dr}{U_r} = \frac{rd\Theta}{U_\Theta} \text{ или } \frac{dr}{f(\Theta)} = \frac{rd\Theta}{\varphi(\Theta)},$$

откуда

$$\ln\frac{r}{a} = \int \frac{f(\Theta)d\Theta}{\varphi(\Theta)},$$

где a – постоянная интегрирования.

На основании последнего уравнения системы (11) получим:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{\varphi\sin\Theta}. \qquad (12)$$

Из общих соображений теории размерности, а также непосредственно из уравнения (12) следует, что различные линии тока подобны между собой.

Обозначим через Q объемный расход жидкости и через $\overline{J}$ объемный поток количества движения сквозь замкнутую поверхность S, т.е.

$$Q = \int_S b_n d_\sigma, \qquad \overline{J} = \int_S \overline{b} b_n d_\sigma.$$

Размерности Q и J представляются формулами:

$$[Q] = L^3 T^{-1}, \qquad [J] = L^4 T^{-2}.$$

При стягивании поверхности S к полюсу в точку получим, что величины Q и $\overline{J}$ могут зависеть только от коэффициента v и от постоянной A, размерность которой выражается через размерность v. Так как размерность Q и v независимы, то очевидно, что расход равняется либо нулю, либо бесконечности. Размерность J выражается через размерность коэффициента v, поэтому величина J может быть конечной.

Иное положение имеет место при плоскопараллельных движениях. Если для плоскопараллельных движений после скоростей во всей плоскости зависит только от координат точки и от констант, имеющих размерность, зависящую от размерности коэффициента кинематической вязкости v, то в полярных координатах справедливы формулы, аналогичные формулам (9) (в этом случае r – радиус-вектор в плоскости движения).

Для плоскопараллельного движения расход и поток количества движения можно определить формулами:

$$Q = \int_L b_n dS; \qquad J = \int_L \overline{b} b_n dS,$$

где L – некоторый замкнутый контур, охватывающий начало координат. Размерности Q и J в этом случае представляются формулами:

$$[Q] = L^2 T^{-1}, \qquad [J] = L^3 T^{-1}.$$

Следовательно, плоские движения рассматриваемого типа могут характеризоваться конечным расходом, а соответствующие импульсы будут равняться нулю или бесконечности.

Это обстоятельство позволило Гамелю и ряду других авторов в задаче о движении жидкости в угле между двумя плоскостями получить точные решения уравнений Навье-Стокса путем сведения их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Переходим к рассмотрению решения системы уравнений (11).

Первое из уравнений (11) можно представить в виде:

$$\left[\frac{1}{\sin\Theta}\left(\frac{\Phi'}{\sin\Theta}\right)\right]=\frac{\left(\psi^2\sin\Theta\right)'}{\sin^2\Theta}, \tag{13}$$

где

$$\Phi=\left(\varphi'-\frac{1}{2}\varphi^2\right)\sin^2\Theta-\varphi\sin\Theta\cos\Theta. \tag{14}$$

Из уравнения (13) можно вывести следующий интеграл:

$$\psi^2\sin^2\Theta-\sin\Theta\left(\frac{\Phi'}{\sin\Theta}\right)+2\Phi+2\,ctg\,\Theta\cdot\Phi'=D, \tag{15}$$

где D –постоянная интегрирования.

Функция $\psi(\theta)$ определяет собой распределение составляющих скоростей, перпендикулярных к плоскости меридиана.

Нетрудно видеть, что при $\psi = 0$ или при $\psi sin\theta = const$ система уравнений (11) дает для определения функции f или φ одни и те же соотношения.

Условие $\psi=\dfrac{C}{\sin\Theta}$ дает $U_\lambda=\dfrac{C_v}{r\sin\Theta}$ поле скоростей для U_2 соответствует прямолинейному вихрю, совпадающему с осью симметрии.

Следовательно, уравнения движения будут удовлетворены, если к любому полю скоростей рассматриваемого типа мы добавим поле скоростей от прямолинейного вихря.

Если примем, что

$$\psi\sin\Theta=const, \tag{16}$$

то уравнение (13) можно проинтегрировать три раза, после чего решение задачи сведется к интегрированию уравнения Риккати:

$$\left(\varphi'-\frac{1}{2}\varphi^2\right)\sin^2\Theta-\varphi\sin\Theta\cos\Theta=M\cos2\Theta+N\cos\Theta+R, \tag{17}$$

где M, N, R – произвольные постоянные интегрирования.

Если положить $M = N = R = 0$, то уравнение (17) легко интегрируется и дает:

$$\varphi=\frac{2\sin\Theta}{A+\cos\Theta};\quad f=-2+\frac{2\left(A^2-1\right)}{\left(A+\cos\Theta\right)^2}, \tag{18}$$

где A – отвлеченная постоянная интегрирования. Решение (18) было изучено Ландау.

Нетрудно проверить, что для этого решения при $|A| > 1$ расход жидкости через поверхность, охватывающую начало координат, равен нулю, а при $|A| < 1$ – бесконечности.

Для потока проекции количества движения на ось симметрии сквозь любую сферу с центром в начале координат верна формула

$$J = \rho v^2 \left[8\left(A^2 - 1\right)\ln\frac{A-1}{A+1} + 8A - \frac{32A}{3\left(A^2-1\right)} + \frac{8A\left(3A^2-1\right)}{A^2-1} \right]. \qquad (19)$$

Следовательно, величина импульса J не зависит от радиуса сферы и дает механическую характеристику особой точки в начале координат.

Для этого течения уравнения линий тока имеют вид:

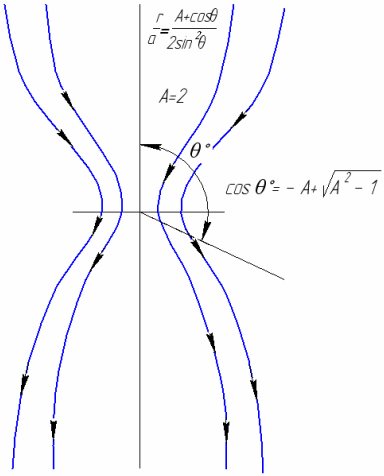
$$\frac{r}{a} = \frac{F + \cos\Theta}{2\sin^2\Theta}.$$

Для $A > 1$ форма линий тока показана на рисунке.

При удалении в бесконечность линии тока будут приобретать параболический характер. При движении вдоль линии тока радиус-вектор r достигает минимального значения при некотором значении $\Theta = \Theta^\circ$, определяемом соотношением

$$\cos\Theta^\circ = -A + \sqrt{F^2 - 1}.$$

Соответствующее движение можно рассматривать как движение вязкой жидкости, заполняющей все пространство, вызванное бесконечно тонкой струей в начале координат, бьющей из конца бесконечно тонкой трубки в направлении оси x с конечным импульсом.



Линии тока для источника нулевой мощности и конечного импульса в вязкой жидкости

Можно непосредственно указать ряд решений уравнения Риккати (17), соответствующих частным значениям постоянных M, N и R. Например, при $R = 1$, $N = 0$ и $M = 1/2$ имеем решение

$$\varphi = -\left(ctg\,\Theta + cth\frac{\Theta + \Theta_0}{2} \right),$$

где θ_0 – произвольная постоянная.

При $N=0,\ M=1/4-m^2uR=\dfrac{9}{4}-(m+1)^2$ имеем решение

$$\varphi=(2m-1)ctg\,\Theta-\frac{2\sin^{2m}\Theta}{\int\sin^{2m}\Theta d\Theta}\ \text{ и т.д.}$$

В общем случае уравнение Риккати (17) можно разрешить с помощью гипергеометрических функций.

С помощью подстановок

$$\varphi=-2\frac{y'(\Theta)}{y(\Theta)},\qquad \mu=\cos^2\frac{\Theta}{2}$$

уравнение (10) приводится к виду:

$$\frac{d^2y}{d\mu^2}+\frac{\dfrac{M+R-N}{2}+(N-4M)\mu+4\mu^2M}{4\mu^2(\mu-1)^2}. \tag{20}$$

Это уравнение легко интегрируется с помощью гипергеометрических функций; его общий интеграл можно написать в виде:

$$\begin{aligned}Y(\Theta)=\left(\cos\frac{\Theta}{2}\right)^{\gamma}\left(\sin\frac{\Theta}{2}\right)^{1+\alpha+\beta-\gamma}\left\{PF\left(\alpha,\beta,\lambda,\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)+\right.\\ \left.+Q\left(\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{1-\gamma}F\left(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)\right.,\end{aligned} \tag{21}$$

где постоянные α,β,γ связаны с *M*, *N* и *R* формулами:

$$M=\frac{1-(\alpha-\beta)^2}{4};$$

$$N=1-(\alpha+\beta)^2+2\gamma(\alpha+\beta-1);$$

$$R=\frac{3\left[1-(\alpha+\beta)^2\right]}{4}-\alpha\beta-2\gamma^2+2\gamma(\alpha+\beta+1).$$

Вместо *M*, *N*, *R* в качестве произвольных постоянных можно взять параметры α,β,γ.

Полученное решение для φ зависит от четырех произвольных постоянных, от трех параметров α,β,γ и от отношения $\dfrac{P}{Q}$.

При *M*=*N*=*R*=0 уравнение (20) вырождается в уравнение $y''(\mu)=0$, которое имеет только одну регулярную особую точку при

$\mu = \infty$. Соответствующее решение было рассмотрено выше.

Если $N = -4M = -\frac{4}{3}R$, то в уравнении (20) множитель $(\mu - 1)^2$ в знаменателе сокращается и остаются только две особые регулярные точки $\mu = 0$ и $\mu = \infty$. Уравнение (20) в этом случае переходит в уравнение Эйлера $\mu^2 \frac{d^2 y}{d\mu^2} + M_y = 0$, которое легко интегрируется.

В настоящее время в науке можно наблюдать тенденцию к введению такой системы единиц, которая позволяла бы установить единицы измерения, которые не могут быть утрачены, подобно эталонам для метра и килограмма – величин, являющихся по существу случайными величинами, не связанными с основными явлениями природы. Введение такой единственной системы единиц измерения, исключающей все другие системы единиц, равносильно полному устранению понятия размерности. В единой универсальной системе единиц измерения численные значения всех количественных характеристик определяются однозначно их физической величиной.

Более того, при конкретном изучении отдельных специальных классов явлений численные значения количественных характеристик часто выгодно выражать в виде отношения к задаваемым или наиболее характерным величинам по смыслу рассматриваемых частых задач. В разных случаях эти характерные основные величины могут быть различными.

1.Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1987. – 432 с.

2.Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сложных сред. – М.: Гостехиздат, 1953. – 320 с.

Получено 09.03.2012

УДК 679.14

А.Ф.СТРОЙ, д-р техн. наук
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка
ПІОТРОВСКІ ЕЖИ ЗБІГНЕВ, д-р техн. наук, ЕВА ЗЕНДЕР-ШВЕРЦ
Технологічний університет "Свентокшинська політехніка", м. Кельце (Польща)

РОЗРАХУНОК ПОВІТРООБМІНУ В ПРИМІЩЕННІ ПРИ ОДНОЧАСНІЙ ДІЇ ГРАВІТАЦІЙНОГО ТИСКУ, ТИСКУ ВІТРУ ТА ВЕНТИЛЯТОРА

Наведено методику розрахунку повітрообміну в приміщенні при одночасній дії гравітаційного тиску, тиску вітру та вентилятора. Розглянуто випадок, коли припливні отвори в приміщенні розташовані на різній висоті від підлоги.