

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Частина 1

Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій
при базових навантаженнях

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисциплін «Опір матеріалів», «Опір матеріалів
та основи будівельної механіки», «Основи теорії споруд»

*(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямками 6.060101 «Будівництво», 6.060102 «Архітектура»,
6.060103 «Гідротехніка (Водні ресурси)», 6.030601 «Менеджмент»
та слухачів другої вищої освіти спеціальностей «Промислове та
цивільне будівництво», «Міське будівництво і господарство»,
«Теплогазопостачання і вентиляція»)*

Харків
ХНАМГ
2012

УДК 620.10

Опір матеріалів. Ч. 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях (Конспект лекцій з дисциплін «Опір матеріалів», «Опір матеріалів та основи будівельної механіки», «Основи теорії споруд» для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.060102 «Архітектура», 6.060103 «Гідротехніка (Водні ресурси)», 6.030601 «Менеджмент» та слухачів другої вищої освіти спеціальностей «Промислове та цивільне будівництво», «Міське будівництво і господарство», «Теплогазопостачання і вентиляція») / За заг. ред. В. П. Шпачука; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х. : ХНАМГ, 2012. – 138 с.

Автори: В. П. Шпачук, Л. С. Андрієвська, Н. В. Середа, О. О. Чупринін

Рецензенти:

В. Л. Хавін, проф., канд. техн. наук, завідувач кафедри опору матеріалів (Національний технічний університет «ХП»);

Е. Д. Чіхладзе, проф., д-р. техн. наук, завідувач кафедри будівельної механіки (Українська державна академія залізничного транспорту).

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних і екологічних спеціальностей вузу при підготовці до занять, заліків та іспитів з курсу опору матеріалів.

Він містить основні питання опору матеріалів стержневих і балочних елементів конструкцій при навантаженнях: розтяг-стиск, згин, зсув і кручення.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 28.08.09 р

© В. П. Шпачук, Л. С. Андрієвська,
Н. В. Середа, О. О. Чупринін, 2012

ВСТУП

Опір матеріалів – це розділ механіки, якій вивчає інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій та споруд, їх взаємодію між собою та іншими конструкціями [1-3].

Основним елементом, що розглядає опір матеріалів, є брус (стержень, балка, вал) із прямолінійною віссю (прямолінійній брус), тобто тіло, у якого розмір в одному напрямку набагато більше двох інших розмірів.

Розрахунки на міцність полягають у визначенні, чи буде конструкція протистояти зовнішнім впливам, чи зруйнується під дією цих навантажень.

Метою розрахунків на жорсткість є визначення таких розмірів елементів конструкцій, при яких зміна розмірів і форми не перевищує заданих величин, що визначаються з умов експлуатації.

Стійкість конструкції – це її здатність зберігати свою форму рівноваги. У процесі експлуатації часто виявляється, що деформації багатьох конструкцій при дії деякого виду навантажень незначні, поки їхні величини менше деяких значень, що називаються критичними. При навантаженнях, що перевищують критичні значення, деформації конструкції різко зростають. І вона приймає іншу від первісної форму рівноваги, унаслідок чого руйнується або втрачає свої експлуатаційні характеристики. Розрахунок конструкції, що має метою не допустити втрати стійкості, називається розрахунком на стійкість.

Для того, щоб конструкція цілком відповідала вимогам міцності, жорсткості та стійкості, а отже була надійна в експлуатації, треба надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вона виготовляється, визначити відповідні розміри залежно від навантаження та його характеру. При проведенні розрахунків необхідно сполучити розглянуті вище характеристики з дешевиною, що є наслідком економії матеріалу.

Опір матеріалів – теоретично-експериментальна наука. Вона розробляє аналітичні методи розрахунку елементів конструкцій, а також експериментально вивчає механічні властивості матеріалів [4-5].

У опорі матеріалів задачі поділяють на прямі, зворотні і задачі оптимізації [6-8].

Пряма задача припускає, що відомо геометрію тіла (форма, розмір, умови закріплення), зовнішні навантаження на нього (зосереджені і розподілені), механічні властивості матеріалу. Вона складається у визначенні напружень, деформацій і переміщень у тілі.

Зворотна задача припускає, що цілком чи частково відомі напруження чи переміщення в тілі, при цьому необхідно визначити зовнішні навантаження, геометричні чи механічні характеристики тіла.

Завдання оптимізації полягає в тому, що необхідно підібрати зовнішні навантаження, геометричні чи механічні характеристики тіла таким чином, щоб вони відповідали деяким критеріям (максимальна несуча здатність, мінімальна вага, можливість використання більш дешевих матеріалів, і. т. ін.). Пошук оптимального рішення, як правило, припускає розв'язання деякої кількості прямих задач.

Основи опору матеріалів були закладені дослідженнями Галілея, Ньютона, Гука й отримали розвиток у працях таких видатних вчених, як Бернуллі, Лаплас, Лагранж, М. Є. Жуковській, С. П. Тимошенко. Наприкінці ХХ-го сторіччя величезний вклад у розвиток опору матеріалів внесли М. М. Беляєв, В. Г. Піскунов, В. І. Феодосьєв, Ю. Н. Шевченко та ін.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Основні гіпотези опору матеріалів

При дослідженні деформування конструкцій прийнято використовувати ряд припущень, що істотно спрощують проведення розрахунків. Ці припущення, як показують експерименти, можна використовувати при рішенні більшості практичних задач.

Приведемо основні гіпотези.

1. Матеріал конструкції є однорідним і суцільним.

Ця гіпотеза затверджує, що властивості матеріалу не залежать від розмірів і форми конструкції й однакові у всіх її точках. Дане допущення дозволяє не враховувати дискретну структуру матеріалу і розглядати нескінченно малий елемент конструкції (точку тіла).

2. Матеріал конструкції ізотропний.

Ця передумова припускає, що властивості матеріалу однакові у всіх напрямках. Дана гіпотеза використовується при рішенні більшості задач опору матеріалів.

3. Матеріал конструкції ідеально пружний.

Ідеальна пружність – це властивість матеріалу цілком відновлювати форму і розміри конструкції після того, як були усунуті причини, що викликали її деформування. Деформування ідеально пружних тіл залежить тільки від навантажень, і не залежить від того, у якій послідовності вони прикладені.

4. Деформації в точці прямо пропорційні напруженням в даній точці.

5. Результат впливу на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу кожного навантаження окремо.

6. Принцип Сен-Венана. Відповідно до нього, результат дії навантажень, прикладених до малої області тіла, швидко убуває в міру видалення від цієї області

1.2. Класифікація елементів конструкцій

У будівельних конструкціях об'єкти за геометричними характеристиками прийнято розподіляти на ряд типів:

Фундаменти (масиви) – тіла, у яких усі габаритні розміри одного порядку.

Пластини (плити) – тіла плоскої форми, у яких два габаритні розміри (довжина та ширина) великі в порівнянні з третім (товщиною).

Оболонки – тіла, обмежені криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної.

Стержень (брус), прямолінійний, криволінійний – тіло, у якого два габаритні розміри малі в порівнянні з третім (довжиною).

Серед прямолінійних стержнів розрізняють балки, стійки, колони, осі, вали. Криволінійні стержні – це арки, колісні ободи, вантажнопідйомні гаки та ін.

1.3. Зовнішні навантаження

Навантаження, що діють на конструкцію, є стосовно неї зовнішніми силами. Ці навантаження, прикладені до елементів конструкції, і розподілені деяким чином на ділянках її поверхні. Їх можна поділити на:

1. Зосереджені сили ($F[\text{кН}]$), моменти ($M[\text{кНм}]$).
2. Розподілені сили ($q[\text{кН/м}]$) та моменти ($m[\text{кНм/м}]$).

Крім того, навантаження можна розділити на постійні (які діють в усі часи існування конструкції) і тимчасові, діючі тільки визначений проміжок часу.

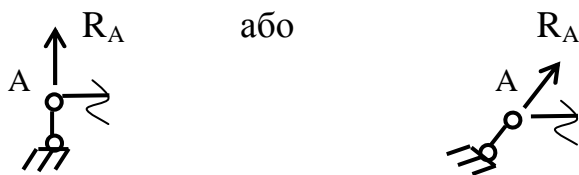
За характером впливу навантаження можна розділити на статичні і динамічні. Статичні, навантажують конструкцію поступово, під час експлуатації вони не змінюються або змінюються повільно. У цьому випадку всі її елементи знаходяться в рівновазі, а сили інерції відсутні чи ними можна знехтувати.

Якщо прискорення різних частин тіла істотно і силами інерції не можна знехтувати (зміна навантажень, а, отже, і швидкості елементів за невеликий період часу), то в цьому випадку вважається, що прикладені динамічні навантаження.

Опори та опорні реакції. Конструктивні форми опор дуже різноманітні. Для розрахунку їх схематизують у вигляді трьох основних типів:

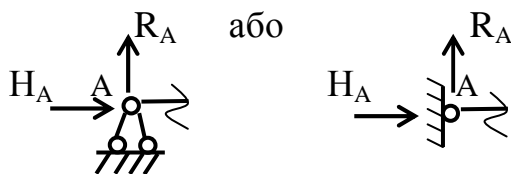
Шарнірно-рухома опора.

В ній виникає тільки одна складова реакції R_A , що спрямована уздовж опорного стержня.



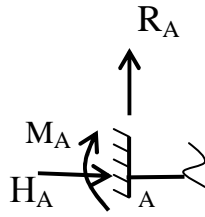
Шарнірно-нерухома опора.

У ній можуть виникати дві складові - вертикальна реакція R_A і горизонтальна H_A .



Затиснення (жорстке закріплення).

Де можуть бути три складові - вертикальна реакція R_A , горизонтальна H_A й опорний момент M_A .



Реакції в'язів належать до зовнішніх, що діють на елементи конструкції і визначаються з умови рівноваги конструкції або її окремих елементів. Усі реакції вважаються прикладеними у центрі ваги опорного перерізу [9].

1.4. Внутрішні зусилля

Зовнішнє навантаження викликає появу внутрішніх сил у елементах конструкції. Під внутрішніми силами ми будемо мати на увазі сили взаємодії між окремими елементами конструкції чи їхніми частинами. При цьому будемо вважати, що до навантаження тіла вони були відсутні. Внутрішні сили прийнято визначати методом перерізів.

Розглянемо рівновагу деякого елемента конструкції, на який діє система зовнішніх сил. Умовно розсічемо елемент поперечним перерізом. Сили взаємодії частин елемента будуть рівні за величиною і протилежні за напрямом. При цьому для кожної окремої частини тіла, що також повинні знаходитися в рівновазі, вони є зовнішніми, а для всього елемента – внутрішніми.

Зовнішні навантаження, які діють на частину елемента урівноважуються внутрішніми силами в перерізі. Зведемо систему внутрішніх сил до головного вектора $\bar{R} (N_x, Q_y, Q_z)$ й головного моменту $\bar{M} (M_x = M_{кр}, M_y, M_z)$ (рис. 1.1).

Таким чином, взаємодія будь-яких двох частин елементів конструкції цілком визначаються шістьма складовими, котрі називаються внутрішніми силовими факторами:

N_x - подовжня сила;

Q_y, Q_z - поперечні сили;

$M_{кр}$, - момент, що крутить;

M_y, M_z - згинальні моменти.

По аналогії розрізняють види навантаження.

Розтяг-стиск виникає, у випадку, коли з усіх внутрішніх силових факторів ненульовою буде тільки подовжня сила. Згин прямої балки відбувається в тому випадку, коли на неї діють зосереджені моменти чи зовнішні сили, перпендикулярні осі балки. У цьому випадку з усіх внутрішніх силових факторів в перерізі виникає тільки згинальний момент й поперечна сила. Кручення виникає при дії на вал зовнішніх сил, які утворюють момент, що крутить щодо осі вала. У цьому випадку з усіх внутрішніх силових факторів в перерізі буде тільки момент, що крутить. Деформація зсуву виникає, коли зовнішні сили зміщають два рівнобіжних плоских перетини відносно один одного при незмінній відстані між ними. У цьому випадку у внутрішніх перерізах виникають тільки поперечні сили.

У результаті одночасної дії на брус системи зовнішніх сил, окремі компоненти якої, викликають різні види деформування, загальна картина деформування буде більш складна, чим розглянуті вище прості види – розтяг і стиск, згин, крутіння і зсув. Багато елементів конструкцій, розрахункова схема, яких відповідає прямолінійному брусу, піддаються спільному впливу сил, що викликають різні види деформування: згин і розтяг-стиск, згин і крутіння, і інші сполучення розглянутих вище видів деформування. У цьому випадку при розрахунках розділяють різні види зовнішніх навантажень і розв'язують ці задачі окремо. Загальне рішення буде суперпозицією рішень окремих задач.

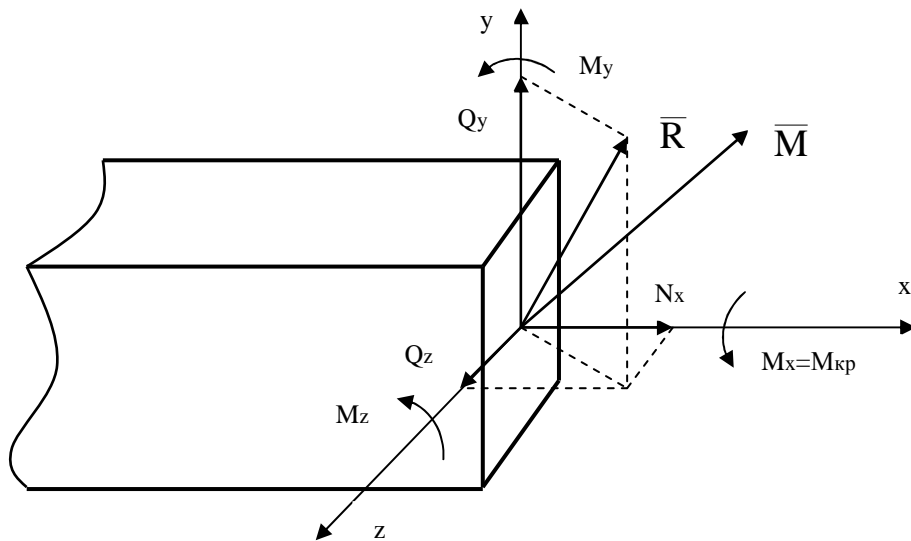


Рис. 1.1

Внутрішні сили і моменти в різних перерізах того самого елемента конструкції в загальному випадку будуть різні. Як змінюються внутрішні силові фактори уздовж стержня прийнято показувати епюрами – графіками, вісь абсцис, якого відповідає з осі стержня, а ординати відповідають величині силових факторів. Ці графіки будують за визначеними правилами:

1. Вісь епюри вибирають таким чином, щоб вона була рівнобіжна чи збігалася з віссю стержня.
2. Ординати відкладають у відповідному масштабі від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихують епюри, лініями, перпендикулярними до осі.
4. Крім того, в поле епюри в колі ставлять відповідній знак зусилля.

1.5. Напруження

Зовнішні зосереджені навантаження в дійсності не існують, а являють собою деяку ідеалізацію реального розподіленого навантаження. Аналогічно зосереджені внутрішні силові фактори, що характеризують

взаємодію між окремими частинами конструкції, є статичним еквівалентом внутрішніх сил, розподілених по площі перерізу.

Прикладені до тіла зовнішні сили викликають появу в тілі внутрішніх сил. У загальному випадку на кожній грані систему сил можна звести до головного вектора (ΔR - рівнодіюча внутрішніх сил на деякій площадці перерізу ΔA) і головного моменту. При досить малих розмірах цих граней, значення головного моменту буде близько до нуля, а середнє напруження:

$$p_{\text{cp}} = \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Більш зручним у практичному використанні є представлення взаємодії між частинами тіла через напруження в такий спосіб:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}, \quad (1.1)$$

Таким чином, напруженням наголошується внутрішня сила, яка віднесена до одиниці площі у даній точці перерізу. Вони вимірюються в одиницях сили, ділених на одиниці довжини у другому ступені ([кН/см²]).

Цю рівнодіючу можна розкласти на дві складові: нормальну ΔN і дотичну ΔQ . По цих складових визначають нормальні й дотичні напруження:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}, \quad (1.2)$$

де $\Delta Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}$ - сумарна поперечна сила.

Нормальні й дотичні напруження являють собою проекції повного напруження на нормаль і площину площадки відповідно (рис. 1.2). Повне напруження:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.3)$$

Величини нормального і дотичного напруження мають досить важливе значення, тому що вони визначають міцність конструкції, при цьому вони характеризують різні аспекти взаємодії частинок тіла. Нормальні напруження на площадці визначають інтенсивність сил відриву чи стиску частин тіла між собою, дотичні – інтенсивність сил, що зрушують сусідні елементи відносно один одного в площині перерізу. Значення напружень на кожній площадці тіла залежить від орієнтації перерізу, проведеного через цю крапку. Сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють на різних площадках, характеризує напружений стан у точці тіла.

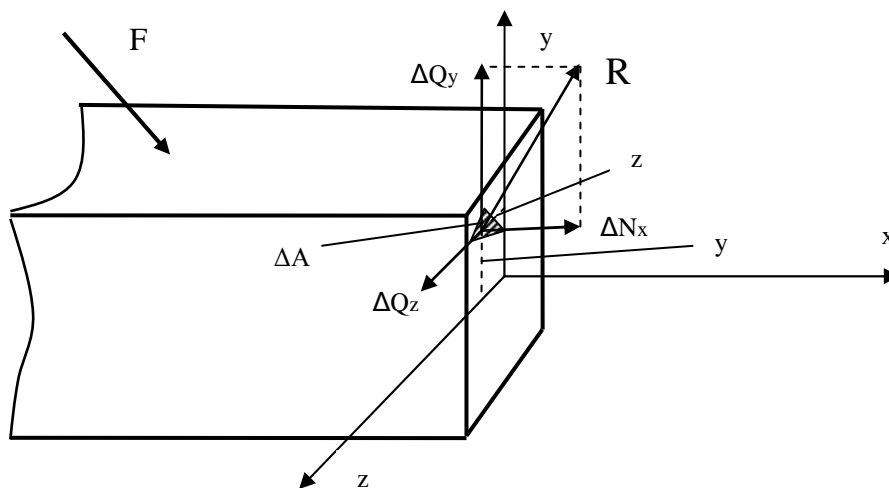


Рис. 1.2

Компоненти напружень у кожному перерізі безпосередньо зв'язані з внутрішніми силовими факторами, що діють у цьому перерізі. Для того щоб одержати ці залежності, розглянемо елементарну площадку ΔA (рис. 1.2), із діючими на цій площадці нормальними і дотичними напруженнями.

Розкладемо дотичні напруження на складові, рівнобіжні відповідним осям: τ_y, τ_z . На площадку ΔA діють елементарні сили $u\Delta A, \phi_y\Delta A, \phi_z\Delta A$, рівнобіжні відповідним осям. Проекції всіх елементарних сил і їхніх

моментів відносно осей визначають внутрішні силові фактори (рис. 1.1), яки при $\Delta A \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_A \sigma dA; \\
 Q_y &= \int_A \tau_y dA; \quad Q_z = \int_A \tau_z dA; \\
 M_x &= \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA; \\
 M_y &= \int_A \sigma z dA; \quad M_z = -\int_A \sigma y dA.
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

1.6. Деформації і переміщення

Під дією зовнішніх навантажень конструкція деформується – змінює свої форми і розміри. При цьому її точки деяким чином переміщуються.

Розглянемо пружне тіло, що у природному стані займало в просторі деяку область. Положення кожної точки цієї області в декартовій системі координат, визначається трьома координатами: x, y, z , крім того, її положення можна визначити вектором $\bar{r}(x, y, z)$ (рис. 1.3). Унаслідок прикладених до тіла зовнішніх впливів, тіло в загальному випадку змінить свою форму і переміститься в деяку іншу область, при цьому точки теж перемістяться.

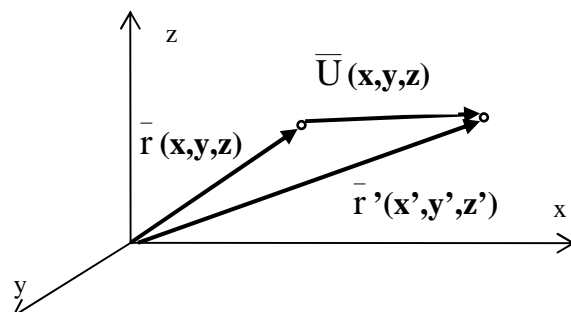


Рис. 1.3

Тепер їхні координати в декартовій системі координат зміняться, і положення точки буде визначатися деяким іншим вектором $\bar{r}'(x', y', z')$. Зміну положення точки визначимо вектором переміщення: $\bar{U}(U, V, W) = \bar{r}' - \bar{r}$. Координати цього вектора можна визначити в такий спосіб: $U = x' - x$, $V = y' - y$, $W = z' - z$.

Крім того, що в процесі деформування, точки змінюють своє положення, міняється відстань між ними. Це зміна, віднесена до первісної відстані між ними, називається деформацією (відносна лінійна деформація). Розглянемо деформацію деякого елемента ds . Квадрат довжини цього відрізка буде дорівнює: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, де dx, dy, dz - декартові координати відрізка. Деформація в напрямку s буде визначатися співвідношенням: $\epsilon_s = (ds_1 - ds) / ds$, де ds_1 - довжина розглянутого елемента після деформування. Квадрат цієї довжини можна визначити за формулою:

$$ds_1^2 = (1 + 2\epsilon_x)dx^2 + (1 + 2\epsilon_y)dy^2 + (1 + 2\epsilon_z)dz^2 + 2\gamma_{xy}dxdy + 2\gamma_{yz}dydz + 2\gamma_{xz}dxdz, \quad (1.5)$$

де ϵ - відносна лінійна деформація грані, рівнобіжної відповідній осі;

γ - зміна первісно прямого кута (кутова деформація) між гранями у відповідних напрямках.

Таким чином, знаючи вхідні у це вираження лінійні і кутові деформації у координатних напрямках, можна визначити деформації у будь-якому напрямку. За визначенням, лінійні деформації у відповідних напрямках будуть визначатися за формулами [10]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \Delta dx / dx = dU / dx; \\ \epsilon_y &= \Delta dy / dy = dV / dy; \\ \epsilon_z &= \Delta dz / dz = dW / dz. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тоді довжина деформованого відрізка в напрямку x дорівнює $dx\epsilon_x = dx' - dx \Rightarrow dx' = dx (1 + \epsilon_x)$. Аналогічно: $dy' = dy (1 + \epsilon_y)$, $dz' = dz (1 + \epsilon_z)$.

Сукупність лінійних деформацій у різних напрямках і кутових деформаціях у різних площинах, що проходить через розглянуту крапку, являють собою деформований стан у точці тіла.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

2.1. Відомості про будівельні матеріали

До основних матеріалів, із яких виготовляються будівельні конструкції, відносяться сталь, алюміній і його сплави, залізобетон, деревина, пластмаси та ін.

Сталлю називають сплав заліза з вуглецем і головними додачами марганцю, кремнію (вуглецева сталь). Для поліпшення її властивостей сталь легують додаючи хрому, нікелю, міді, молібдену, титану, ванадію, цирконію (легована сталь). Шкідливими домішками є сіра і фосфор.

Будівельні сталі застосовують переважно у вигляді прокатних профілів, листів; арматурні – у вигляді стержнів або дроту, одержуваного волочінням.

Алюміній і сплави відіграють другорядну роль і застосовуються в тих випадках, коли це економічно доцільно або неможливо застосування сталі. Алюміній легше за сталь майже в 3 рази, міцність його сплавів мало їй поступається, але модуль пружності також майже в 3 рази менше, що визначає велику його деформативність у конструкціях. Для будівельних конструкцій застосовують сплави алюмінію з міддю, із марганцем, магнієм, сплави з додачами цинку і міді.

Залізобетон – комплексний матеріал, що вдало сполучає два різнорідних матеріали: сталь і бетон. Тривала і надійна спільна робота сталі і бетону забезпечується їхніми фізико-механічними властивостями, а також виконанням правил сполучення цих матеріалів (при конструюванні залізобетонних елементів).

Бетон добре опирається стисканню і набагато гірше – розтягу. Тому у всіх залізобетонних конструкціях розтягнуті, а іноді і стиснуті від навантаження зони бетону посилюють сталлю, яка добре опирається розтягу-стиску.

Деревина – найдавніший будівельний матеріал. У головних елементах будівельних конструкцій використовують хвойну деревину, тому що вона містить менше дефектів, ніж листяна деревина, а також містить смоли, що чинить кращий опір зволоженню і загниванню. З хвойної деревини найбільш часто використають соснову деревину. Серед листяних порід виділяється дубова деревина, що має підвищену міцність і стійкість проти загнивання, але більшу вартість.

Пластмаси. Конструкційні пластмаси використовують у складі елементів несучих і огорожуючих конструкцій. З найбільш міцних склопластиків виконують елементи несучих конструкцій. Прозорі склопластики застосовують в елементах огорожуючих конструкцій будівель. Надлегкі пінопласти використовують у середніх прошарках легких покриттів і стін.

2.2. Експериментальні дослідження властивостей матеріалів

Щоб мати можливість судити про міцність конструкцій при навантаженні, потрібно вивчити головні властивості застосовуваних матеріалів і їхнє поведіння при збільшенні навантаження аж до руйнування. Для цього зразки матеріалу випробують у лабораторії на спеціальних машинах.

Металеві зразки для випробування на розтяг виготовляють у вигляді стержнів круглого або прямокутного перерізу. Круглі зразки мають на кінцях стовщення (головки), а плоскі – поширення. Цими кінцями зразки закладають у захвати випробувальної машини, після чого розтягують. Для одержання порівняльних результатів випробувань даного матеріалу, зроблених на різноманітних зразках, необхідно, щоб зразки мали певні співвідношення розмірів. Ці співвідношення і самі розміри встановлені стандартом (ДСТУ 1497-84).

Найбільш часто використовується циліндричний стандартний нормальний зразок (рис. 2.1). Діаметр перерізу d_0 такого зразка може бути взятий від 3 до 25 мм.

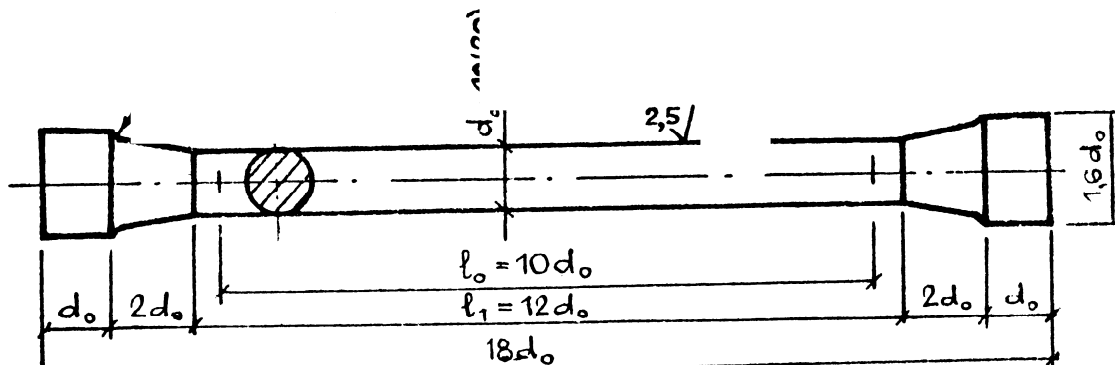


Рис. 2.1

Розрахункову довжину l_0 на зразках помічають рисками. Ця довжина повинна бути меншою, ніж відстань між кінцівками, щоб виключити вплив способу прикладання зовнішніх сил і концентрації напружень в місцях зміни перерізу. Зона цього впливу на підставі принципу Сен-Венана не перевищує меншого розміру перерізу [4].

Особливості поведінки зразка при випробуванні на розтяг наочно ілюструються діаграмою розтягу – графіком залежності між навантаженням F та абсолютним подовженням Δl . Для маловуглецевої сталі вона має вигляд, наведений на рис. 2.2.

На цій діаграмі можна відокремити три ділянки: лінійна АВ; горизонтальна CD й нелінійна DHG.

На ділянці АВ подовження Δl пропорційне навантаженню F , тобто дійсний закон Гука [2-3] так, що однаковим приростам ΔF навантаження відповідають однакові прирости Δl подовження зразка. Величина $F_{\text{пц}}$ визначає навантаження, що відповідає межі пропорційності. Дуже близьке

до нього значення $F_{пр}$, яке визначає межу пружної роботи матеріалу, тобто відсутні деформації пластичності.

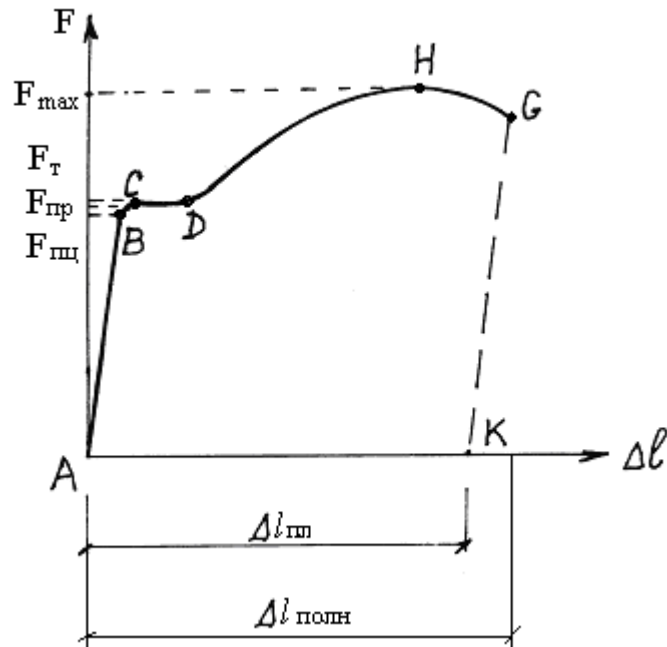


Рис. 2.2

На ділянці CD подовження Δl зростають при незмінному навантаженні. Таке явище, характерне для пластичних матеріалів, називається текучістю. Текучість – критичний стан матеріалу, при якому підвищується температура, змінюється електропровідність, магнітні властивості. F_T – навантаження, що відповідає межі текучості матеріалу.

Коли зона текучості минає, навантаження знову зростає до найбільшого навантаження F_{max} , після чого стрімко падає до миті розриву зразка (точки G). Падіння навантаження після досягнення F_{max} обумовлене тим, що в цей час на зразку утворюється місцеве звуження – так звана шийка (рис. 2.3). У результаті цього несуча здатність зразка знижується. На рис. 2.3 d – діаметр шийки.

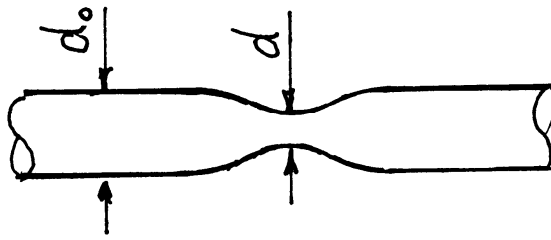


Рис. 2.3

Діаграма розтягу будується для даного зразка і її масштаб залежить від розмірів останнього. Потім на основі цієї діаграми будують діаграму напружень. Залежність між напруженнями:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (2.1)$$

де A_0 - площа поперечного перерізу зразка, і відносним подовженням

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.2)$$

Ця діаграма напружень є характеристикою матеріалу безвідносно до розмірів зразка (рис. 2.4). Вона містить, декілька характерних точок:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0} \quad - \text{ межа пропорційності (напруження, при якому}$$

порушується лінійна залежність між силою і деформацією);

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{A_0} \quad - \text{ межа пружності (напруження, при якому з'являються}$$

деформації пластичності);

$$\sigma_{\text{Т}} = \frac{F_{\text{Т}}}{A_0} \quad - \text{ межа текучості (напруження, які відповідають зоні}$$

текучості);

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_0} \quad - \text{ межа міцності (напруження, яки відповідають}$$

найбільшому навантаженню).

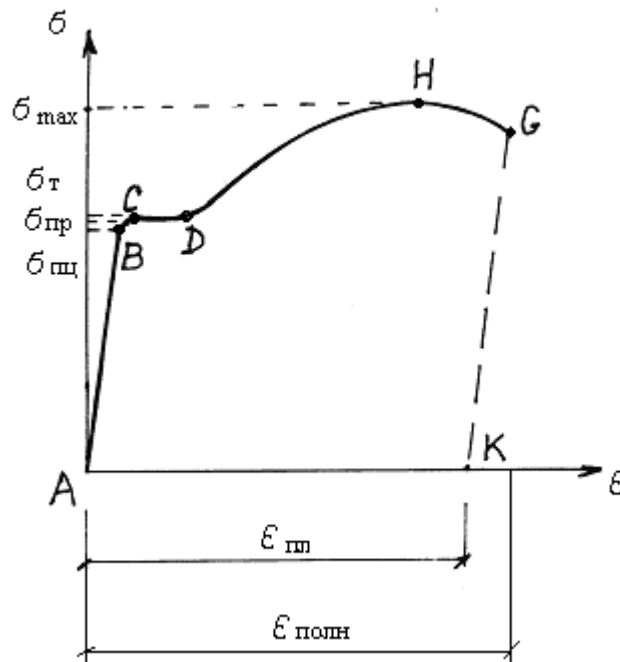


Рис. 2.4

Модуль пружності E , що характеризує пружні якості матеріалу, та справедливий коли напруження менше ніж межа пропорційності, визначають з формули для абсолютного подовження:

$$E = \frac{F l_0}{A_0 \Delta l}, \quad (2.3)$$

де F - навантаження в межах пропорційності;

l_0 - база вимірювального приладу;

Δl - подовження бази, що відповідає навантаженню F .

Замість абсолютного значення F для визначення модуля пружності можна взяти приріст навантаження ΔF , а також приріст подовження $\delta \Delta l$:

$$E = \frac{\Delta F \cdot \ell}{A_0 \delta \Delta \ell} \quad (2.4)$$

Чисельне значення модуля пружності E для найбільш часто застосовуваних у будівництві матеріалів наведено у табл. 2.1.

Якщо по кінцях прямого бруса прикладені сили, спрямовані уздовж його осі назустріч одна одній, то в брусі виникає стиск. Довжина бруса повинна бути більш ніж у п'ять-шість разів більше меншого з його поперечних розмірів, щоб не виникало поздовжнього згинання.

Таблиця 2.1 - Значення модулю пружності

Матеріал	E , кН/см^2
Сталь прокатна	$(2 - 2,1) \cdot 10^4$
Чавун сірий (білий)	$(1,15 - 1,6) \cdot 10^4$
Алюміній та його сплави	$0,7 \cdot 10^4$
Мідь, латунь, бронза	$(1,0 - 1,3) \cdot 10^4$
Бетон	$(0,04 - 0,4) \cdot 10^4$
Цегельна кладка	$(0,001 - 0,078) \cdot 10^4$
Деревина при розтягу (стиску)	
уздовж волокон	$(0,1 - 0,12) \cdot 10^4$
поперек волокон	$(0,004 - 0,01) \cdot 10^4$

Випробуванню на стискання піддають короткі зразки звичайно круглого або квадратного перерізу. Зразок поміщають між опорними плитами преса, що, зближуючись, стискають його (рис. 2.5). Але на результат досліду сильно впливає тертя, що виникає між основами зразка й опорними плитами преса. Стиснутий у поздовжньому напрямку зразок прагне розширитися в поперечних напрямках, проте у кінців зразка тертя перешкоджає такому розширенню.

Модуль пружності матеріалів зберігає ті самі визначення та позначення, що й при розтягу.

Отже, відносне покоротшання:

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}, \quad (2.5)$$

де h_0 та h - висота зразка відповідно до та після експерименту.

Відносне поперечне розширення:

$$\psi = \frac{A - A_0}{A_0}, \quad (2.6)$$

де A і A_0 - площі перерізу зразка відповідно після та до експерименту.

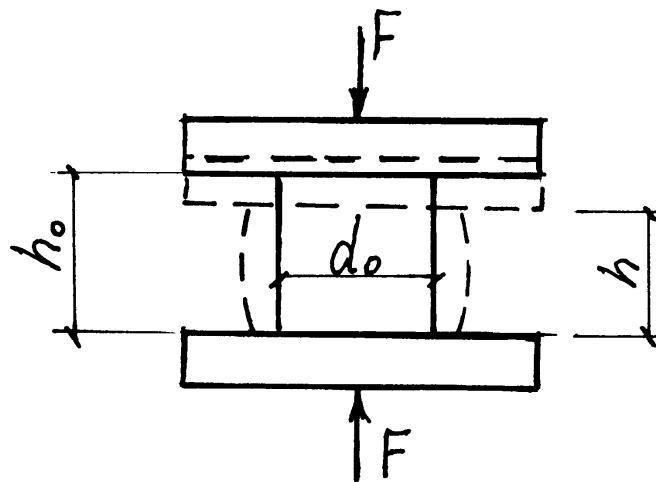


Рис. 2.5

З діаграми стиску м'якої сталі (рис. 2.6) видно, що в початковому періоді завантаження, як при розтягу, має місце пропорційність між силою і деформацією. Після досягнення навантаження, що відповідає межі пропорційності $F_{пц}$, лінійна залежність порушується: деформації зростають швидше, ніж навантаження. При подальшому збільшенні стискуючої сили зростання деформацій поступово стає повільним за рахунок збільшення перерізу зразка. Оскільки зразок під дією зростаючого

навантаження поступово розплющується, визначити руйнуюче навантаження неможливо. Тому випробування переривають при деякому навантаженні F_{\max} , обмежуючись вивченням поведінки та характеру деформацій пластичної сталі при стиску.

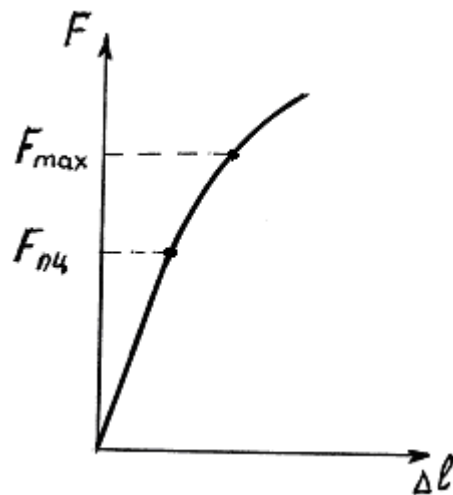


Рис. 2.6

Визначення напружень за формулою (2.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_0},$$

дає дуже умовні величини через неоднаковість перерізів зразка вздовж висоти. Межу пропорційності при стиску можна визначити так само, як і при розтягу (2.1):

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0}.$$

Випробування крихкого матеріалу (чавун) на стиск звичайно проводять на зразках циліндричної форми з відношенням висоти до діаметра у межах $h/d = 1 \dots 2$ (рис. 2.7).

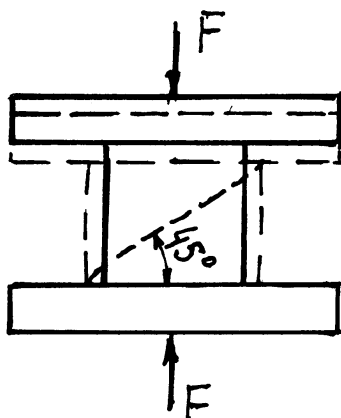


Рис. 2.7

Для таких крихких матеріалів, як камінь та бетон звичайно зразок беруть у вигляді куба. Крихкі матеріали (чавун, камінь, бетон та ін.) на стиск працюють значно краще, ніж на розтяг, тому вони використовуються саме в стиснутих елементах споруд. Отже випробування на стиск для таких матеріалів є основними.

На початку дії навантаження діаграма стиску чавунного зразка дуже близька до прямої (рис. 2.8). При збільшенні навантаження діаграма суттєво викривляється, зростання деформацій випереджає зростання навантаження. Руйнування зразка відбувається миттєво при навантаженні F_{\max} , вздовж похилих площин (рис. 2.7), кут яких з віссю зразка складає $\approx 45^\circ$. Цей кут нахилу площин руйнування близький до кута нахилу найбільших дотичних напружень.

Стиснутий зразок змінює попередню циліндричну форму на бочкоподібну, що свідчить про наявність невеликих пластичних деформацій.

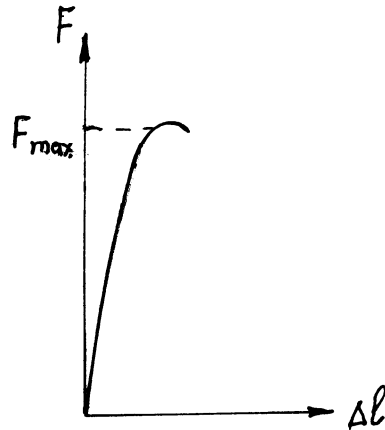


Рис. 2.8

Межу міцності чавуна визначають за формулою (2.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

Відзначимо, що діаграми стиску і розтягу крихких матеріалів мають однакову форму, але межа міцності при стиску (50-100 кН/см²) в декілька разів перевищує межу міцності при розтягу (21-32 кН/см²).

Розглянемо стиск деревини, яка відноситься до анізотропних матеріалів. Величина опору деревини перш за все залежить від того, як спрямоване навантаження відносно напрямку волокон: уздовж (рис. 2.9) або поперек (рис. 2.10). Випробування деревини на стиск звичайно проводять на зразках кубічної форми.

При стиску вздовж волокон руйнування відбувається після вичерпання міцності твердих пластинок при порівняно невеликих деформаціях. Як свідчить діаграма стиску (рис. 2.11), між навантаженнями і деформацією спостерігається пропорційність майже до руйнування.

При випробуванні на стиск поперек волокон (рис. 2.12) початок руйнування зразка помітити важко. Далі деревина ущільнюється, її опір збільшується, навантаження зростає. Тому за максимальне навантаження приймають або силу $F_{\text{пл}}$, що відповідає межі пропорційності, або близьку

до неї F_{max} . Остання відповідає навантаженню в час припинення експерименту, коли висота зразка при стиску зменшується приблизно на 1/3 від свого початкового значення. При стиску поперек волокон руйнуються м'які шари зразка.

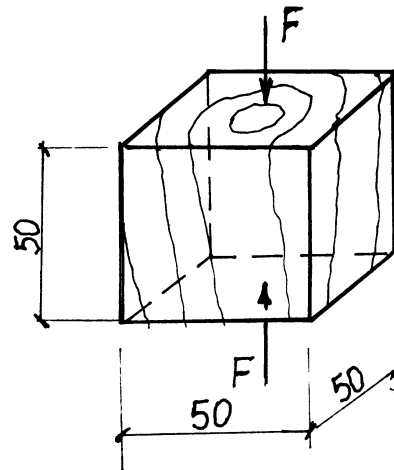


Рис. 2.9

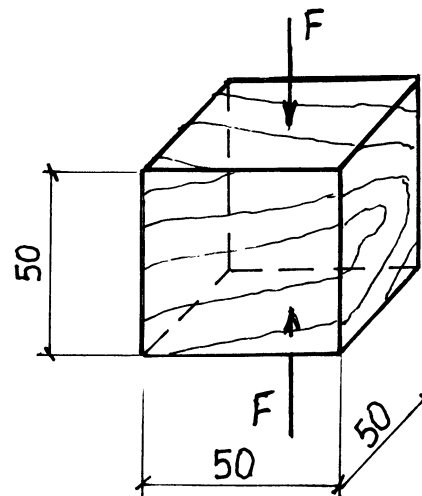


Рис. 2.10

У результаті випробувань визначається межа міцності деревини (сосна) при стиску її уздовж і поперек волокон за формулою (2.1):

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

Межа міцності деревини при стиску вздовж волокон приблизно в 10 разів більше межі міцності поперек волокон.

Міцність деревини залежить від її вологості. З підвищенням вологості опір деревини зменшується.

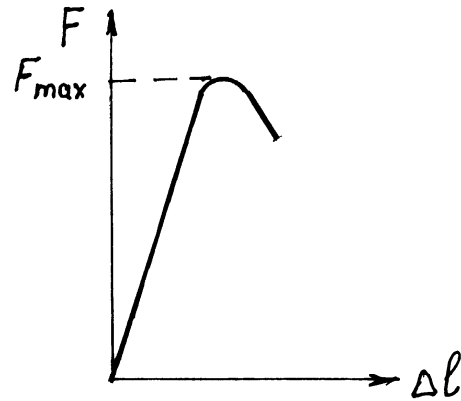


Рис. 2.11. Діаграма стиску деревини вздовж волокон

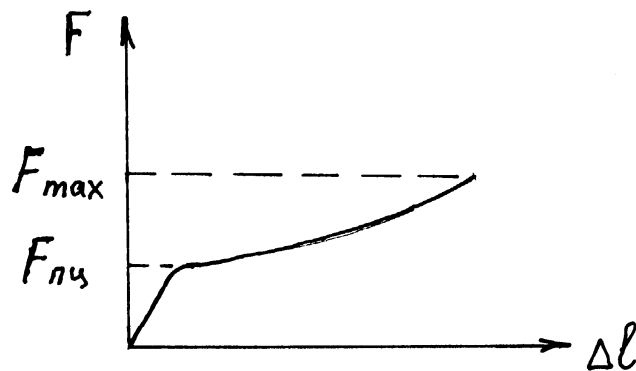


Рис. 2.12. Діаграма стиску деревини поперек волокон

2.3. Коефіцієнт поперечної деформації

Для розтягу використовують плоский сталевий зразок у вигляді смужки прямокутного перерізу. Щоб виключити вплив напруженого стану у місцях затиску зразка на показання тензометрів, вважають, що його

довжина повинна у чотири-п'ять разів перевищувати ширину (рис. 2.13). Тут позначено: 1 – тензометр, який замирює деформації вздовж напрямку дії навантаження (на поздовжній осі зразка), 2 – поперек дії навантаження.

Експериментально доведено, що при одночасному розтягу (стиску) сталевого стержня останній змінює свої розміри як у поздовжньому, так і в поперечному напрямках. При розтягу поздовжні його розміри збільшуються, а поперечні - зменшуються. Здатність матеріалу до деформування характеризується відносними деформаціями:

$$\text{поздовжньою} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

$$\text{та поперечною} \quad \varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_0},$$

де $\Delta l = l_1 - l_0$ - абсолютна поздовжня деформація, що визначається як різниця між довжиною l_1 стержня при її навантаженні і первісною довжиною l_0 ;

$\Delta b = b_1 - b_0$ - абсолютна поперечна деформація, що визначається як різниця між шириною b_1 стержня при дії навантаження та первісною шириною b_0 .

Модуль частки, одержаної поділенням відносної поздовжньої на відносну поперечну деформацію, називається коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона [2-4]:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.7)$$

Коефіцієнт Пуассона залежить виключно від пружних властивостей матеріалу і постійний для нього в межах лінійної пружності. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона цілком характеризують пружні властивості

матеріалу. Чисельне значення коефіцієнту Пуассона μ для найбільш часто застосовуваних у будівництві матеріалів наведено у табл. 2.2.

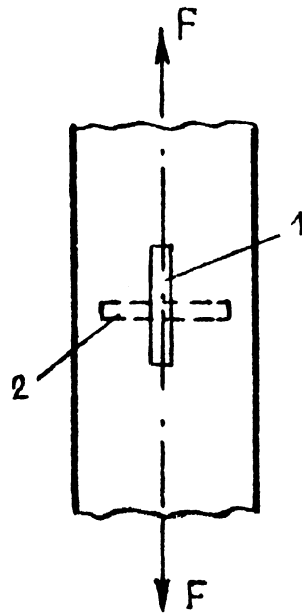


Рис. 2.13

Таблиця 2.2 - Коефіцієнт Пуассона

Матеріал	μ
Сталь прокатна	0,3
Чавун сірий (білий)	0,3
Алюміній та його сплави	0,31-0,35
Мідь, латунь, бронза	0,18
Бетон	0,16-0,2
Цегельна кладка	0,25
Деревина при розтягу (стиску)	
уздовж волокон	0,5
поперек волокон	0,02

2.4. Методи розрахунків конструкцій на міцність

Визначення напружень у конструкціях є основою розрахунків на міцність. При конструюванні розміри елементів конструкції повинні бути такими, щоб під дією зовнішніх навантажень вона не руйнувалася, при цьому в більшості випадків не слід допускати появи необоротних деформацій.

При деформуванні матеріалів, коли напруження не перевищують деяку величину, що називається границею пружності і позначається $\sigma_{пр}$, при розвантаженні тіло повністю відновлює свою форму та розміри (остаточні деформації не перевищують 0.02%). Необоротні деформації з'являються при деформуванні, коли напруження досягають деякої величини, що називається границею текучості і позначається σ_T - це таке напруження, при якому деформування тіла здійснюється при незмінному зусиллі. Руйнування настає в момент досягнення напруженнями свого максимального значення, що називається тимчасовим опором і позначається σ_{max} . Для того щоб конструкції працювали надійно, напруження не повинні перевищувати небезпечних величин.

Метод допустимих напружень.

При деформуванні пластичних матеріалів небезпечним напруженням вважається границя текучості, для крихких - тимчасовий опір. Для крихкого матеріалу в момент руйнування деформації можуть бути невеликими. Але ці напруження не можуть бути прийняті як допустимі. Для того, щоб конструкції експлуатувалися в безпечних умовах, величина напруження повинна бути зменшена деяким чином. Для цього вводиться коефіцієнт запасу в такий спосіб: $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$, де $[\sigma]$ - допустимі напруження, тобто максимальні напруження, які можна допустити при розрахунку конструкції, σ_0 - небезпечні напруження, n - коефіцієнт запасу міцності.

Небезпечні напруження (границя текучості чи тимчасовий опір) визначається опитним шляхом і є характеристикою матеріалу. Величина коефіцієнта запасу залежить від багатьох факторів - матеріалу, умов експлуатації, призначення конструкції.

Таким чином, умовою міцності елементів конструкції при розрахунках буде наступне співвідношення:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (2.8)$$

де σ - напруження, що виникає в елементах конструкції.

Незначне перевищення максимальних напружень над тими, що допускаються (до 5%), не небезпечно [2, 3].

Аналогічно вводиться умова міцності і для дотичних напружень, що виникають у конструкції:

$$\tau \leq [\tau], \quad (2.9)$$

де τ - дотичне напруження, що виникає в елементах конструкції.

Небезпечні напруження, як нормальні, так і дотичні, визначаються експериментальним шляхом, для цього досліджується розтяг-стиск і чистий зсув стержнів відповідно. Ці величини для різних матеріалів приводяться в довідниках. Як правило, для більшості конструкційних матеріалів спостерігається співвідношення

$$[\tau] = (0.5 \div 0.6)[\sigma].$$

Цей метод поки залишається головним при розрахунку механічних вузлів і елементів будівельних конструкцій.

Умова міцності визначається:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.10)$$

де σ_{\max} - найбільше напруження, що виникає в одній з точок небезпечного перерізу конструкції й визначається розрахунком;

$[\sigma]$ - допустиме для даного матеріалу напруження, отримане на підставі експериментальних досліджень, з урахуванням коефіцієнту запасу.

Значення коефіцієнта запасу залежить від матеріалу, призначення споруди, характеру дії навантаження та інших умов експлуатації. Він встановлюється нормами проектування. Головними чинниками, що

впливають на вибір його значення, є: відповідність механічних властивостей матеріалу конструкції й окремо випробуваних зразків; урахування конкретних умов роботи конструкції; ступень точності методу розрахунку та завдання зовнішнього навантаження; довговічність та відповідальність проекрованої споруди.

Для будівельних сталей значення коефіцієнту запасу міцності приймається $n = 1,4 - 1,6$, для крихких - $n = 2,5 - 3,5$, для деревини - $n = 3,5 - 6$.

Для деяких матеріалів значення допустимих напружень наведено у табл. 2.3.

Метод руйнуючих навантажень.

Метод допустимих напружень не завжди повністю характеризує умову руйнування конструкції в цілому. У ряді випадків за критерій руйнування більш доцільно приймати граничне навантаження, що може витримати конструкція, не руйнуючись і істотно не змінюючи свою форму.

При цьому умова міцності, яка полягає у тому, що граничне або руйнуюче навантаження не повинне перевищувати допустимого, має вигляд

$$F_{\max} \leq [F] = \frac{F_{\text{гран}}}{n}. \quad (2.11)$$

де F_{\max} - найбільше допустиме навантаження;

$[F]$ - допустиме для даної конструкції навантаження;

$F_{\text{гран}}$ - граничне або руйнуюче навантаження;

n – коефіцієнт запасу міцності, прийнятий таким же, як і в методі допустимих напружень.

Таблиця 2.3

Матеріал	Допустиме напруження, кН/см ²	
	Розтяг	Стиск
Сталь вуглецева легована	16 10-40	16 10-40
Чавун сірий	2.8-8	12-15
Мідь	3-12	3-12
Латунь	7-14	7-14
Бронза	6-12	6-12
Алюміній	3-8	3-8
Дюралюміній	8-15	8-15
Сосна уздовж волокон поперек волокон	0.7-1 -	1-1.2 0.15-0.2
Дуб уздовж волокон поперек волокон	0.96-1.3 -	1.3-1.5 0.2-0.35
Бетон	0.01-0.07	0.1-0.9
Камінь (кладка)	0.01-0.03	0.04-0.4
Цегла (кладка)	0.01-0.02	0.06-0.25

Для статично визначених систем, у яких внутрішні зусилля можливо визначити тільки за допомогою рівнянь рівноваги, цей метод збігається з методом за допустимими напружень.

Імовірнісний метод розрахунку.

Чисельні експериментальні дані переконливо свідчать про те, що границя міцності, границя текучості, пружності та інші механічні характеристики матеріалів мають дуже значній розкид. Наприклад, при визначенні границі міцності бетону на стиск однакові результати не одержуються навіть тоді, коли зразки виготовлені з бетонної суміші одного замісу. Це можливо пояснити тим, що міцність бетону є функцією багатьох чинників. Тому природно вважати границю міцності та інші характеристики випадковими значеннями.

Аналогічна ситуація має місце і для інших будівельних матеріалів: сталі, деревини, цегли, алюмінієвих сплавів та ін.

Найбільш повну інформацію про випадкове значення містить функція розподілу. Найбільш часто в якості розподілу міцності матеріалу використовуються: нормальний закон Гауса, розподіл Гумбеля-Вейбула, розподіл Персона III-го типу та логарифмічний розподіл.

У цьому методі розрахунок на міцність зводиться до перевірки виконання умови

$$\sigma < R. \quad (2.12)$$

де R – границя міцності або текучості матеріалу.

Границя міцності матеріалу R і напруження, які діють в конструкції є випадковими величинами, тому слід вимагати, щоб ця умова виконувалася з достатньою імовірністю, близькою до одиниці.

Для цього введемо випадкову величину

$$S = R - \sigma,$$

за допомогою якої умову міцності можна записати у вигляді:

$$S > 0. \quad (2.13)$$

Обернення S на нуль, тобто порушення умови (2.19) відповідає наступу граничного стану конструкції, а відповідно і її руйнуванню. При цьому ймовірність того, що величина S має додатне значення, називається можливістю безвідмовної роботи [10].

3. РОЗТЯГ І СТИСК

Центральним розтягом-стиском називається такий вид напружено-деформованого стану, коли в поперечному перерізі бруса виникає тільки подовжня (розтягуюча або стискаюча) сила, а всі інші силові фактори відсутні.

3.1. Поздовжня сила

Розглянемо деформування стержнів силою F , дія якої збігається з його віссю. На рис. 3.1 зображені прямі стержні, закріплені з одного боку, а з іншої навантажені силою спрямованою уздовж осі.

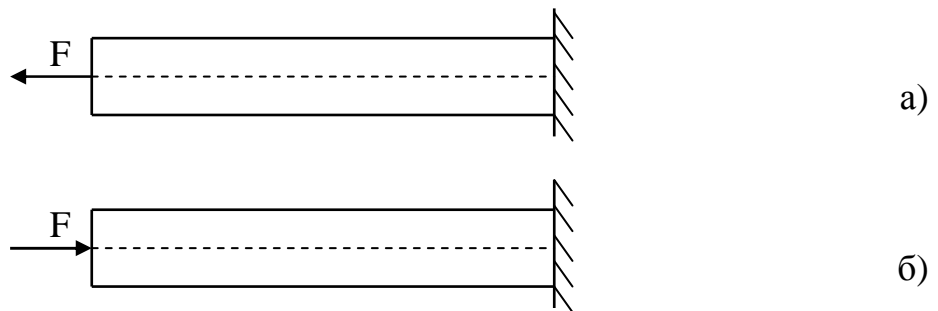


Рис. 3.1

В усіх поперечних перерізах стержня виникають тільки поздовжні сили – що розтягують (рис. 3.1,а) чи стискають (рис. 3.1,б) його. Будемо вважати поздовжні сили, що розтягують - додатними, а що стискають - від'ємні.

Поздовжні сили відповідно до загального правила визначення внутрішніх зусиль, знаходять методом перерізів. Наприклад, розглянемо стержень, наведений на рис. 3.2,а. Визначимо поздовжню силу N_1 в перерізі I-I стержня. Для цього розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини стержня, наведеної на рис. 3.3.

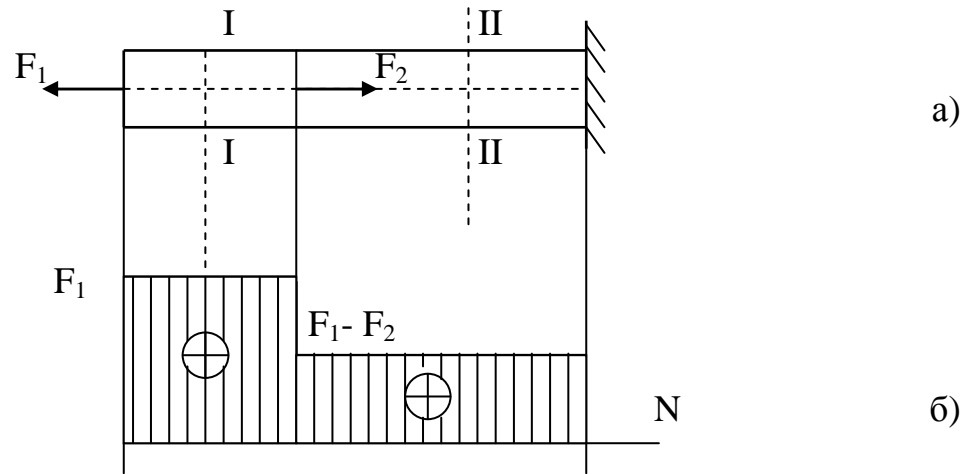


Рис. 3.2

Напрямок внутрішніх сил показуються в припущенні, що вони є додатними, тобто що розтягують. Якщо в результаті розрахунків внутрішня сила додатна, стержень розтягується, від'ємна – стискається.

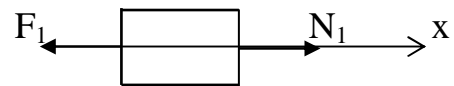


Рис. 3.3

$$\sum F_x = -F_1 + N_1 = 0,$$

звідси:

$$N_1 = F_1.$$

Для визначення внутрішнього зусилля у перерізі II-II стержня розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини:

$$\sum F_x = -F_1 + F_2 + N_2 = 0,$$

звідси:

$$N_2 = F_1 - F_2.$$

На рис. 3.2,б наведена епюра подовжньої сили N , побудована відповідно до загальних правил побудови епюр внутрішніх силових факторів (епюри побудовані в припущенні, що $F_1 > F_2$).

У перерізі, де уздовж осі прикладена зосереджена сила, значення подовжньої сили буде мінятися стрибкоподібно. Якщо на ділянці стержня не має зовнішніх сил, подовжня сила не змінюватиметься.

3.2. Напруження в стержнях при розтягу-стиску

При розрахунках на міцність крім внутрішніх сил, що діють у перерізі необхідно визначати і напруження в різних точках перерізу.

Подовжня сила, що виникає в поперечному перерізі стержня, є рівнодіючої внутрішніх нормальних сил, що діють на елементарних площадках, розподілених по площі перерізу. Вона зв'язана з нормальними напруженнями співвідношенням (1.4). Для визначення напружень у кожній точці необхідно знати закон розподілу напружень по перерізу стержня.

При спостереженні деформування стержня, навантаженого подовжніми силами, відзначено, що якщо нанести на його поверхню лінії, перпендикулярні осі, то ці лінії після додатка навантаження переміщуються паралельно первісному положенню, залишаються прямими і перпендикулярними осі стержня. Якщо припустити, що аналогічна картина спостерігається й усередині перерізу, то можна зробити висновок, що поперечний переріз стержня, плоский до деформування, залишається плоским і після нього, переміщуючись поступально уздовж осі стержня. Це припущення називається «гіпотезою плоских перерізів». Якщо розглядати деформування стержнів у припущенні про однорідність матеріалу, то можна зробити висновок, що однаковим подовженням відповідають однакові напруження. Таким чином, напруження в поперечних перерізах усіх волокон рівні між собою і, отже, у всіх точках поперечного перерізу стержня.

Тому що величина напруження в поперечному перерізі не змінюється, то в співвідношенні (1.4) напруження можна винести з-під знака інтегрування:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A, \quad (3.1)$$

відкіля (рис. 3.4):

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (3.2)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

Аналогічним чином визначають напруження і при стиску, при цьому вони, так само як і подовжня сила мають від'ємну величину.

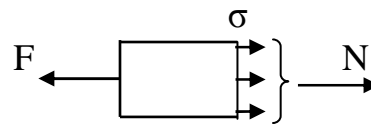


Рис. 3.4

Таким чином, у поперечних перерізах стержня при центральному розтязі чи стиску виникають рівномірно розподілені нормальні напруження, рівні відношенню подовжньої сили до площі поперечного перерізу стержня.

При цьому необхідно мати на увазі, що співвідношення (3.2) справедливе тільки для тих перерізів, що досить вилучені від місць прикладення зосереджених навантажень. Це впливає з принципу Сен-Венана. У близь цих місць розподіл напружень носить складний характер і його опис вимагає більш точних методів досліджень.

Визначимо тепер величини напружень, що виникають у похилих перерізах стержнів при розтягу-стиску. Розглянемо стержень, на котрий діють протилежно спрямовані сили, що розтягують. Проведемо переріз I-I під кутом α до поперечного перерізу, як показано на рис. 3.5,а, тобто поворот проти годинної стрілки від напрямку сили до нормалі n перерізу.

Розглянемо рівновагу правої частини (рис. 3.5,б). Напрямок вектора напружень буде збігатися з напрямком дії сили, що розтягує, а його результуюча буде дорівнювати F . Так як, внутрішні силові фактори рівномірно розподіляються по перерізу, то абсолютна величина вектора напружень дорівнює:

$$p = \frac{F}{A_\alpha},$$

де A_α - площа перерізу I-I.

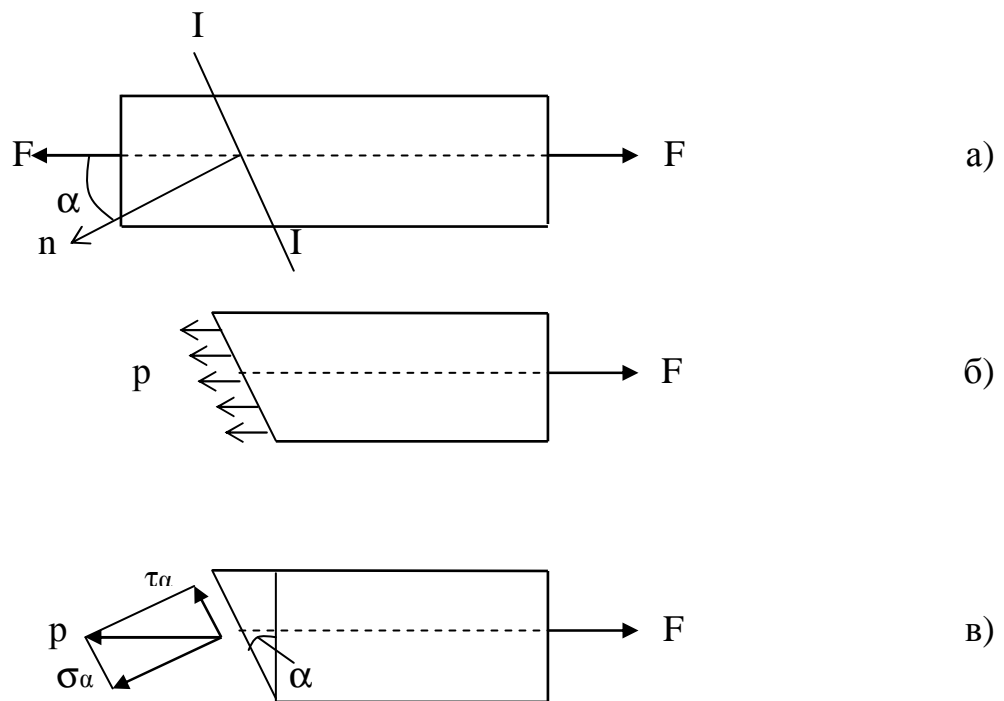


Рис. 3.5

Нормальні напруження у поперечному перерізі знайдемо зі співвідношення (3.2):

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0},$$

де A_0 – площа поперечного перерізу.

Площа похилого перерізу

$$A_0 = \frac{A}{\cos \alpha},$$

тоді:

$$p = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha}{A} = \sigma_0 \cos \alpha.$$

Вектор напружень являє собою рівнодіючу внутрішніх сил на елементарній площадці похилого перерізу площею ΔA_1 . Цю рівнодіючу можна розкласти на дві складові: нормальну і дотичну, як показано на рис. 3.5,в. Ці складові є нормальними і дотичними напруженнями:

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad (3.3)$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.4)$$

Дотичне напруження вважається позитивним, якщо його напрямок збігається з напрямком нормалі, поверненої на 90° по годинній стрілці.

Таким чином, при розтязі стержня подовжньою силою в ньому виникають одночасно нормальні і дотичні напруження і відповідні їм лінійні і кутові деформації. Вони будуть змінюватися в залежності від кута нахилу перерізу. Визначимо максимальні значення компонентів напружень. З виразу (3.3) випливає, що максимальне значення нормального напруження досягається при $\alpha=0^\circ$ і дорівнює:

$$\sigma_{\alpha \max} = \sigma_0. \quad (3.5)$$

При цьому, дотичні напруження в поперечному перерізі дорівнюють нулю, тому що, згідно (3.4):

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 0 = 0.$$

Максимальне по абсолютній величині значення дотичних напружень буде на площадках, нахилених під кутом 45° до поперечного перерізу, і дорівнюють половині максимального нормального напруження:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 90^\circ = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.6)$$

Нормальні напруження в цих перетинах також, згідно (3.3), будуть дорівнюють половині максимального нормального напруження:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cos^2 45^\circ = \sigma_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.7)$$

В поздовжніх перерізах (при $\alpha=90^\circ$) напруження відсутні.

3.3. Деформації і переміщення

При навантаженні тіла деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри. Розглянемо деформацію стержня постійного поперечного перерізу (рис. 3.6) під дією розтягу силою F .

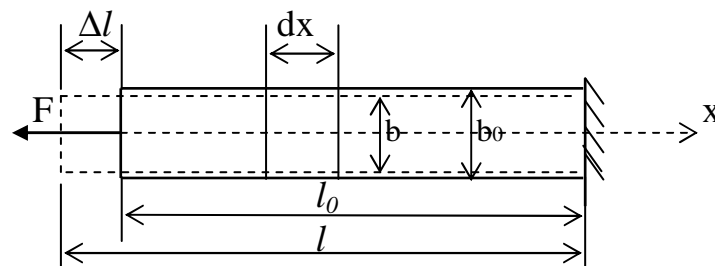


Рис. 3.6

Під дією сили F стержень подовжиться на величину Δl , що називається абсолютним подовженням. Досвіди показують, що поки навантаження на стержень не досягає визначеної межі (напруження не досягнуть межі пропорційності, що є характеристикою матеріалу),

абсолютна деформація прямо пропорційна силі, що розтягує F , довжині стержня l і обернено пропорційна площі поперечного перерізу A :

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}, \quad (3.8)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, що є характеристикою матеріалу.

Цей коефіцієнт називається модулем пружності чи модулем Юнга. А сама формула (3.8) зветься «закон Гука».

Це співвідношення можна перетворити в відносних величинах:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.9)$$

де $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - відносна лінійна деформація.

Співвідношення (3.8) і (3.9) можна використовувати для перебування абсолютної та відносної подовжньої деформації тільки в тому випадку, якщо поперечна сила в стержні і площа перетину уздовж його постійні. При подовжнім навантаженні розподілена по довжині стержня подовжня сила змінюється. Крім того, стержень може бути виконаний таким чином, що площа його поперечного перерізу буде мінятися. У такому випадку будемо вважати, що стержень складається з нескінченної кількості елементарних ділянок довжиною dx (рис. 3.6). Тому що на таких ділянках сила і площа перерізу міняється нескінченно мало, те до них можна застосувати закон Гука (3.8) у вигляді

$$\Delta dx = \frac{Ndx}{EA},$$

де N – подовжня внутрішня сила на ділянці dx .

Повна деформація стержня довжиною l буде (якщо вважати, що він виконаний з ізотропного матеріалу) сумі подовжень усіх нескінченно малих елементарних ділянок:

$$\Delta \ell = \frac{1}{E} \int_{\ell} \frac{N dx}{A}. \quad (3.10)$$

Переміщення всіх точок перерізу при розтязі-стиску уздовж осі, відповідно до гіпотези плоских перерізів, будуть однакові і дорівнюють абсолютній зміні довжини ділянки стержня між цим перерізом і закріпленим кінцем. Це називається подовжнім переміщенням і позначається U . Переміщення вважається позитивними, якщо воно по напрямку збігається з віссю x і негативним, якщо воно відбувається в протилежному напрямку.

Подовжнє навантаження стержнів, крім подовжніх деформацій, викликає і поперечні деформації. Співвідношення між ними є постійними для кожного матеріалу. При розтязі поперечні розміри зменшуються, при стиску – збільшуються, як показано на рис. 3.6.

Поперечні деформації визначаються, у такий само спосіб, як і подовжні. Абсолютною поперечною деформацією називається різниця поперечних розмірів після деформування і до нього:

$$\Delta b = b - b_0.$$

Відносна поперечна деформація дорівнює абсолютної поперечної деформації діленої на первісний розмір:

$$\epsilon_{\perp} = \frac{\Delta b}{b_0}.$$

При розтязі поперечні деформації від'ємні, при стиску – додатні. Для ізотропних матеріалів відносна поперечна деформація у всіх напрямках однакова. Вона зв'язана з подовжньою деформацією постійним відношенням (2.7):

$$\mu = \left| \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon} \right|,$$

де μ - коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина, що характеризує властивості матеріалу і визначається експериментально і для більшості конструкційних матеріалів знаходиться в межах $0.2 \leq \nu \leq 0.35$.

З урахуванням того, що знаки подовжньої і поперечної деформації протилежні, можна записати формулу для визначення поперечної деформації:

$$\varepsilon_{\perp} = -\mu\varepsilon. \quad (3.11)$$

Крім того, у наслідок зміни температури в елементах конструкцій з'являються *температурні деформації*.

Температура впливає лише на лінійні розміри тіла, при цьому його форма остається незмінною, тобто можна вважати, що кутові деформації відсутні.

Лінійна деформація змінюється, згідно з експериментальними даними за формулою

$$\varepsilon = \alpha\Delta t, \quad (3.12)$$

де α - коефіцієнт лінійного поширення матеріалу,

$\Delta t = t - t_0$ - зміна температури відносно тієї, при якій споруда була змонтована (t_0).

Чисельне значення коефіцієнт лінійного поширення α для найбільш часто застосовуваних у будівництві матеріалів наведено у табл. 1.1.

3.4. Врахування власної ваги

Власна вага конструкції є зовнішнім навантаженням, що розподілена по всьому об'єму тіла. При розрахунку деяких конструкцій власною вагою не можна зневажати.

Як враховується власна вага при розтязі-стиску стержнів, розглянемо на прикладі прямого стержня постійного поперечного перерізу великої

довжини, закріпленого верхнім кінцем і навантаженого на вільному кінці розтягуючою силою F (рис. 3.7,а).

Таблиця 3.1 - Коефіцієнт поширення матеріалу

Матеріал	α
Сталь прокатна	$(100 - 130) \cdot 10^{-7}$
Чавун сірий (білий)	$(80 - 140) \cdot 10^{-7}$
Алюміній та його сплави	$(240 - 260) \cdot 10^{-7}$
Мідь, латунь, бронза	$(160 - 220) \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(100 - 140) \cdot 10^{-7}$
Цегельна кладка	$(30 - 90) \cdot 10^{-7}$
Деревина	$(20 - 50) \cdot 10^{-7}$

Визначимо подовжню силу в поперечному перерізі на відстані x від краю (рис. 3.7,б). Тут $G(x)$ - вага відсіченої частини, $N(x)$ – внутрішня подовжня сила, що виникає в цьому перерізі. З умови рівноваги знаходимо внутрішню силу:

$$N(x) = F + \rho Ax ,$$

де ρ - об'ємна щільність матеріалу;

Ax – об'єм відсіченої частини стержня.

Це лінійна залежність подовжньої сили від координати перерізу. Мінімальне значення буде при $x=0$: $N(0)=F$, максимальне при $x=l$: $N(l)=F+\rho Al$. Ці значення наведені на епюрі (рис. 3.7,в).

Нормальні напруження в перерізі на відстані x від краю визначимо, поділивши значення подовжньої сили на площу перерізу. Зі співвідношення (3.2) знаходимо напруження в цьому перерізі:

$$\sigma(x) = \frac{F}{A} + \rho x .$$

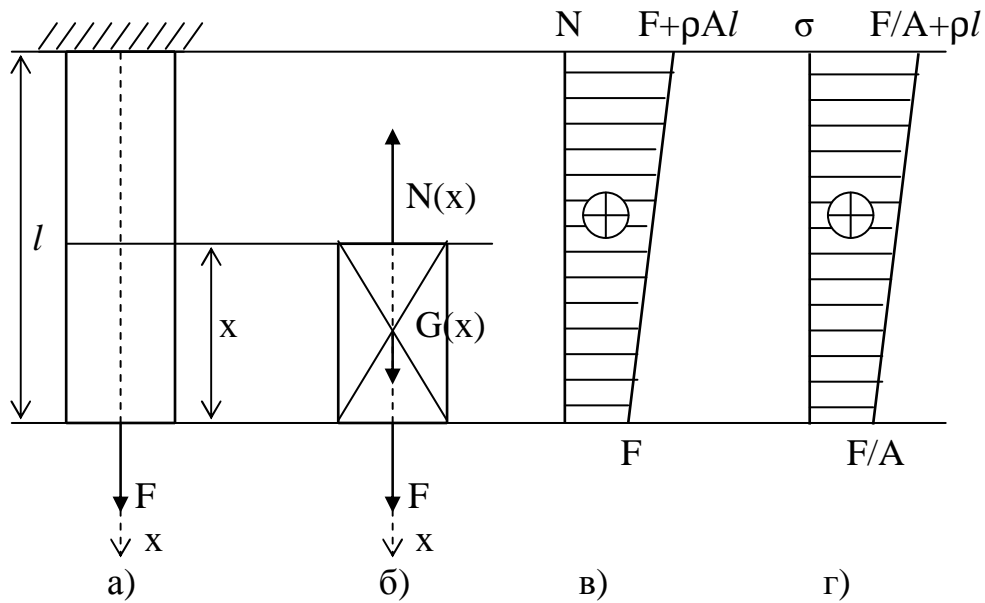


Рис. 3.7

Це лінійна залежність нормального напруження від координати перерізу. Мінімальне значення напруження буде при $x=0$: $\sigma(0) = \frac{F}{A}$, максимальне при $x=l$: $\sigma(l) = \frac{F}{A} + \rho l$. Ці значення наведені на епюрі (рис. 3.7,г).

Чисельне значення об'ємної щільності матеріалу для найбільш часто застосовуваних у будівництві матеріалів наведено в табл. 3.2.

Визначимо тепер деформацію цього стержня. З (3.10) знайдемо абсолютну поздовжню деформацію стержня:

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)dx}{EA} = \int_l \frac{Fdx}{EA} + \int_l \frac{\rho x dx}{E} = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho l^2}{2E},$$

або:

$$\Delta l = \frac{N_{cp} l}{EA}, \quad (3.13)$$

де N_{cp} - середнє значення поздовжньої сили в стержні, рівне:

$$N_{cp} = F + \frac{\rho A \ell}{2}.$$

У такий само спосіб, як і власна вага конструкції, при розрахунках враховуються й інші об'ємні сили, наприклад, сили інерції.

Таблиця 3.2 - Об'ємна щільність матеріалу

Матеріал	ρ , кН/м ³
Сталь прокатна	78
Чавун сірий (білий)	78-80
Алюміній та його сплави	27-32
Мідь, латунь, бронза	78-80
Бетон	50-60
Цегельна кладка	40-50
Деревина	7-9

3.5. Статично невизначені задачі

Стержні й стержневі конструкції, у яких внутрішні силові фактори від заданого навантаження можна визначити з рівнянь рівноваги, називаються статично визначними. Відповідно статично невизначеними називають стержні і конструкції, силові фактори в яких не можна визначити тільки з рівнянь рівноваги. Зусилля у стержнях статично визначних систем виникають тільки від зовнішніх навантажень. У статично невизначених стержнях і конструкціях внутрішні зусилля можуть виникати і при відсутності зовнішніх навантажень, наприклад, у результаті зсуву опор чи неточності виготовлення різних елементів.

Усі статично невизначені системи мають додаткові, чи «зайві» зв'язки у виді закріплень чи стержнів. Зайвими такі зв'язки називаються тому, що вони не є необхідними для рівноваги чи геометричної незмінюваності системи. Наявність таких зв'язків обумовлюється експлуатаційними факторами чи умовами міцності конструкцій.

Для розрахунку статично невизначених стержнів і стержневих конструкцій необхідно скласти додаткові рівняння – рівняння спільності деформацій, що враховують характер деформування системи під дією зовнішніх навантажень. Різниця між числом невідомих і числом рівнянь рівноваги визначає ступінь статичної невизначеності і відповідно число додаткових рівнянь, які необхідно скласти. Складання рівнянь спільності деформацій є найбільш важливим етапом у рішенні статично невизначених задач.

Як приклад, розглянемо розрахунок статично невизначеного стержня, навантаженого подовжньої силою, наведеного на рис. 3.8,а.

У розглянутому стержні всі навантаження діють уздовж осі стержня, тому на його закріплених кінцях будуть діяти тільки вертикальні складові реакцій R_A і R_B , як показано на рисунку. З рівняння рівноваги: $\sum F_x = 0$ одержуємо:

$$R_A + R_B = F.$$

У цьому рівнянні рівноваги дві невідомі сили, отже, задача один раз статично невизначена, і потрібно скласти одне рівняння спільності деформацій. Для цього розглянемо деформування приведенного стержня. Так як він з обох країв жорстко закріплений, те його сумарна абсолютна деформація буде дорівнювати нулю $\Delta l = 0$, а деформації кожної ділянки (рис. 3.8,б і рис. 3.8,в) запишемо за законом Гука (3.9):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{R_A l_1}{EA} - \frac{R_B l_2}{EA},$$

$$\frac{R_A l_1}{EA} - \frac{R_B l_2}{EA} = 0.$$

Це буде друге рівняння. Таким чином, для визначення реакцій опор R_A і R_B у нас є два рівняння з двома невідомими, з яких знаходяться невідомі сили:

$$R_A = \frac{l_2}{l_1 + l_2} F; \quad R_B = \frac{l_1}{l_1 + l_2} F.$$

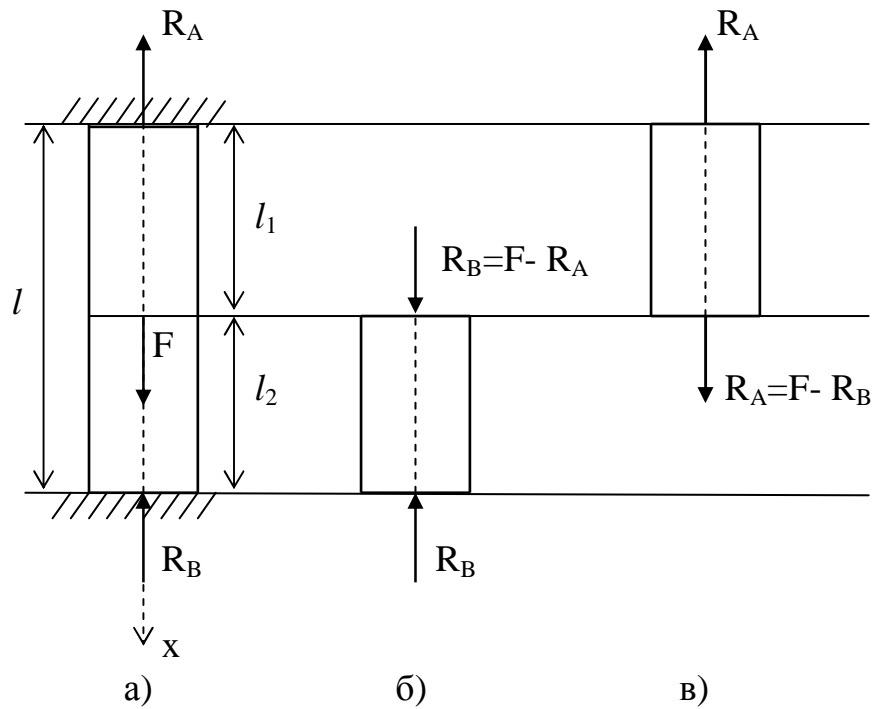


Рис. 3.8

Розглянемо ще один приклад розв'язання статично невизначених систем. На рис. 3.9,а наведена розрахункова схема статично невизначеної стержневої конструкції.

Запишемо умову рівноваги вузла А. Так як це система сил, що сходиться, то рівнянь рівноваги можна скласти тільки два - суми проекцій усіх сил на осі x і y :

$$\sum F_x = -N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - F = 0.$$

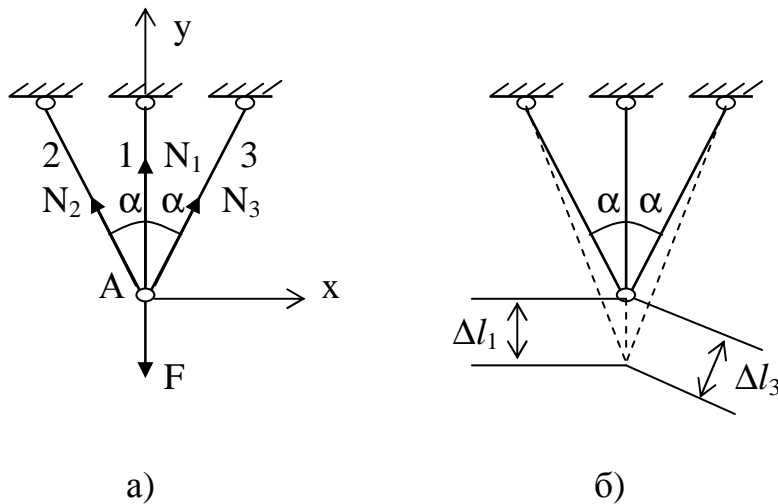


Рис. 3.9

У цих двох рівняннях рівноваги три невідомих зусилля, отже, задача один раз статично невизначена, потрібно скласти одне рівняння спільності деформацій. Перетворимо рівняння рівноваги в такий спосіб: із першого рівняння виходить $N_2 = N_3$. З обліком чого друге рівняння можна подати у вигляді

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = F.$$

Таким чином, у нас маємо одне рівняння з двома невідомими. Для того щоб одержати рівняння спільності деформацій, розглянемо деформування наведеної на рисунку конструкції. Так як, система симетрична щодо осі середнього стержня, то вузол А при деформуванні опуститься по вертикалі на деяку величину (рис. 3.9,б). На таку ж величину подовжиться і середній стержень (на рисунку Δl_1), бічні стержні так само подовжаться на Δl_3 і займуть положення, показане на рисунку штриховими лініями. Оскільки абсолютні деформації стержнів малі в порівнянні з їхніми геометричними розмірами, то кути між стержнями в первісному і деформованому стані будуть відрізнятися незначно і можна одержати рівняння спільності деформацій у такий спосіб:

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha.$$

Запишемо деформації стержнів за законом Гука (3.9):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}.$$

Підставимо ці деформації у попередній вираз:

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} \cos \alpha = \frac{N_2 l_2}{EA_2}.$$

Таким чином, одержано рівняння спільності деформацій. Остаточно для визначення внутрішніх зусиль у стержнях маємо два рівняння з двома невідомими. Розв'язання їх дає:

$$N_1 = \frac{F l_2 A_1}{l_2 A_1 + 2 \cos^2 \alpha l_1 A_2};$$
$$N_2 = \frac{F \cos \alpha l_1 A_2}{l_2 A_1 + 2 \cos^2 \alpha l_1 A_2}.$$

3.6. Приклади розрахунків

Приклад 1.

Знайти поперечні розміри сталевого стержня, що стискається силою 100 кН (рис. 3.10,а). Напруження що допускаються, $[\sigma]=16 \text{ кН/см}^2$. Поперечний переріз стержня являє собою прямокутник, у якого одна сторона у два рази більше іншої.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу лівої частини (рис.3.10,б):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - F = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$N = F.$$

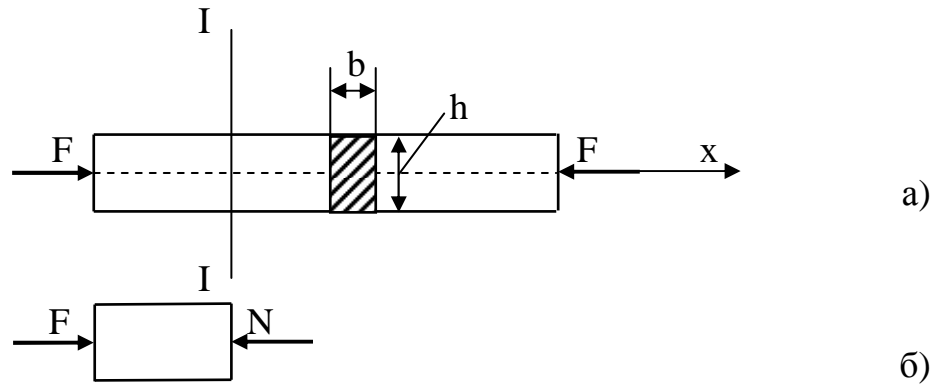


Рис. 3.10

Позначимо через b меншу сторону прямокутника, а через $h=2b$ - велику сторону. Тоді площа поперечного переріза буде $A=bh=2b^2$.

З умови міцності (2.8) визначимо площу перерізу стержня:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{100}{16} = 6.25 \text{ см}^2.$$

Звідси одержуємо:

$$2b^2=6.25 \Rightarrow b = \sqrt{6.25 \cdot 2} = 1.77 \text{ см};$$

$$h=2b=2 \cdot 1.77=3.54 \text{ см}.$$

Відповідь: $b=1.77$ см, $h=3.54$ см;.

Приклад 2.

Визначити розміри поперечних перерізів стержнів у конструкції, наведеної на рис. 3.11. Стержні виконані зі сталі, $[\sigma]=16$ кН/см². Перший стержень має круглий поперечний переріз, другий – квадратний.

Розв'язання.

Задачу розв'язуємо методом перерізів. Розглянемо статичну рівновагу вузла В. На нього діють сили, показані на рисунку.

Так як це система сил, що сходиться, то рівнянь рівноваги можна скласти тільки два:

$$\sum F_x = -N_1 \cos \alpha - N_2 = 0;$$

$$\sum F_y = N_1 \sin \alpha - F = 0.$$

Значення синуса і косинуса знайдемо як відношення відповідних катетів до гіпотенузи:

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0.8, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0.6.$$

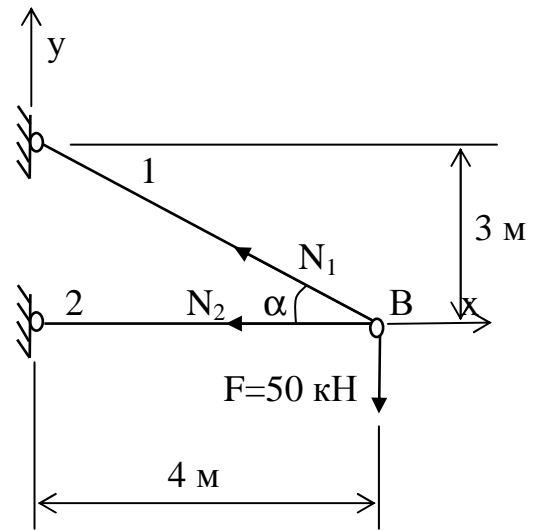


Рис. 3.11

Внутрішні сили в стержнях будуть:

$$N_1 = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{50}{0.6} = 83.33 \text{ кН}$$

$$N_2 = -N_1 \cos \alpha = -83.33 * 0.8 = -66.67 \text{ кН}$$

Перший стержень розтягається, другий – стискається.

З умови міцності визначимо площу перетину стержнів:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]},$$

Так як площа перерізу завжди додатна, то:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{83.33}{16} = 5.21 \text{ см}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{66.67}{16} = 4.17 \text{ см}^2.$$

Визначимо поперечні розміри стержнів. Перший стержень має

круглий поперечний переріз діаметром d . Так як $A = \frac{\pi d^2}{4}$ тоді:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5.21}{3.14}} = 2.58 \text{ см.}$$

Площа квадрату дорівнює $A = a^2$, де a – сторона квадрата, тоді:

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{4.17} = 2.04 \text{ см.}$$

З урахуванням того, що напруження не повинні перевищувати припустимі, отримані розміри перерізів варто округлити у велику сторону.

Відповідь: $d = 2.6$ см, $a = 2.1$ см.

Приклад 3.

Визначити граничну довжину вертикального мідного стержня, якщо допустимі напруження міді $[\sigma] = 10$ кН/см², а щільність $\rho = 89$ кН/м³.

Розв'язання.

Максимальна подовжня сила в стержні дорівнює його ваги. Вагу стержня визначимо, як добуток його об'єму на щільність:

$$N_{\max} = V\rho = \ell A\rho,$$

де ℓ – довжина стержня;

A – площа поперечного перерізу.

Максимальні напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{\ell A\rho}{A} = \ell\rho.$$

З урахуванням умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \ell\rho \leq [\sigma] \Rightarrow \ell \leq \frac{[\sigma]}{\rho} = \frac{10 \cdot 10^4}{89} = 1123 \text{ м,}$$

де множник 10^4 необхідний для того, щоб перевести напруження, що допускаються, у розмірність кН/м².

Відповідь: гранична довжина стержня $\ell_{\text{доп}} = 1123$ м.

4. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

При навантаженні конструкцій істотною роллю у розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість грають геометричні розміри і форма поперечних перерізів елементів конструкцій. Розглянемо деякі геометричні характеристики перерізів, найбільш часто використовувані при рішенні задач. Геометричні характеристики перерізів простої форми можна визначити за спеціальними формулами. Крім того, характеристики профілів стандартного прокату (куточки, двотаври, швелери) наведені в спеціальних таблицях, названих сортаментами (див. додатки).

4.1. Площа перерізу

Площа є найпростішою характеристикою поперечного перерізу. Якщо представити переріз, що складається з незліченної кількості елементарних площадок dA , тоді площа всього перерізу можна визначити співвідношенням (рис. 4.1):

$$A = \int_A dA. \quad (4.1)$$

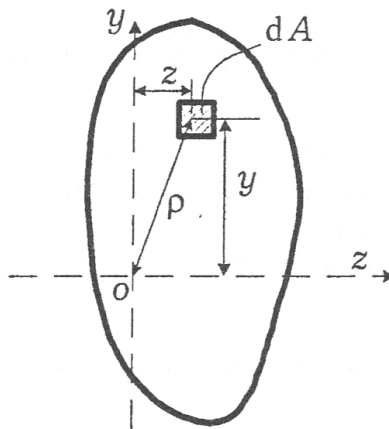


Рис. 4.1

Властивості площі перерізу:

- 1) площа перерізу завжди додатна;
- 2) площа складеного перерізу дорівнює сумі площ фігур її складових;
- 3) площа перерізу не залежить від системи координат.

4.2. Статичні моменти перерізу

Статичним моментом перерізу відносно деякої осі називається узята по всій його площі сума добутків елементарних площадок на відстані від цієї осі, наприклад, у площині yz :

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA; \\ S_y &= \int_A z dA, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно (рис. 4.1).

Для складного перерізу, що складає з n частин, вирази (4.5) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA = \sum_{i=1}^n S_z^i; \\ S_y &= \int_A z dA = \sum_{i=1}^n S_y^i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де S_z^i, S_y^i - статичні моменти i -тої частини перерізу відносно осей z і y відповідно.

Таким чином, статичний момент складного перерізу щодо якої-небудь осі дорівнює сумі статичних моментів усіх частин цього перерізу відносно цієї осі.

Залежність між статичними моментами перерізу щодо двох рівнобіжних осей (розташованих на відстані a друг від друга). Вираз статичних моментів щодо цих осей можна представити у вигляді (4.2):

$$S_z = \int_A y dA;$$

$$S_{z_1} = \int_A y_1 dA,$$
(4.4)

відкіля:

$$S_{z_1} = \int_A (y - a) dA = \int_A y dA - \int_A a dA = S_z - aA.$$

Остаточно можна записати:

$$S_{z_1} = S_z - aA.$$
(4.5)

Аналогічно, можна розглянути дві рівнобіжні осі y і y_1 , розташовані на відстані b одна від одної. У цьому випадку одержимо наступний вираз:

$$S_{y_1} = S_y - bA.$$
(4.6)

Використовуючи співвідношення (4.5) і (4.6) можна знайти положення осей z_C і осі y_C , щодо яких статичні моменти дорівнюють нулю:

$$S_z - y_C A = 0 ; S_y - z_C A = 0$$

або

$$y_C = S_z / A ; z_C = S_y / A .$$
(4.7)

Точка перетинання таких осей називається центром ваги перерізу. Осі, що проходять через центр ваги, називаються центральними осями. Щодо будь-якої центральної осі статичний момент дорівнює нулю.

Якщо переріз складається з декількох фігур, то

$$S_z = \sum_{i=1}^n y_C^i A_i ; S_y = \sum_{i=1}^n z_C^i A_i ,$$
(4.8)

де y_C^i і z_C^i – відстань до відповідних осей від центра ваги перерізу;

A_i - площа i -тої частини перерізу. Однак треба пам'ятати, що при використанні формул (4.8) необхідно враховувати знаки координат центрів ваги окремих частин цього перерізу.

Статичні моменти перерізу має наступні властивості:

- 1) статичний момент може бути як додатним, так і від'ємним. Крім того, він може дорівнювати нулю, якщо вісь проходить через центр ваги;
- 2) статичний момент складеного перерізу дорівнює сумі статичних моментів фігур її складових щодо відповідної осі;
- 3) статичний момент перерізу буде мінятися при зміні системи координат.

4.3. Моменти інерції перерізу

Осьовим, чи екваторіальним моментом інерції перерізу відносно деякої осі називають взяту по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї осі. Так, моменти інерції довільної фігури щодо осей zy (рис. 4.1):

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A z^2 dA, \end{aligned} \tag{4.9}$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

Осьовий момент інерції складного перерізу щодо будь-якої осі дорівнює сумі відповідних моментів інерції всіх частин цього перерізу відносно цієї осі.

Полярним моментом інерції перерізу відносно деякої точки (як правило, начало координат – перетинання осей y і z) називають узятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї точки:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.10)$$

де ρ – відстані до відповідної точки (рис. 4.1).

Порівнюючи співвідношення (4.9) і (4.10) можна установити, що сума осьових моментів інерції будь-якого перерізу щодо двох перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції щодо точки їхнього перетинання.

Дійсно, відстань від будь-якої крапки перерізу до початку координат можна визначити як:

$$\rho^2 = y^2 + z^2.$$

Отже

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

або

$$I_p = I_y + I_z. \quad (4.11)$$

Співвідношення (4.11) справедливе для будь-яких двох взаємно перпендикулярних осей, отже при всіх можливих поворотах осей відносно началу координат, сума осьових моментів інерції залишається величиною постійною і дорівнює полярному моменту інерції.

Відцентровим моментом інерції перерізу щодо двох взаємно перпендикулярних осей називають взятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на відстані до цих осей. Так, у площині yz :

$$I_{yz} = \int_A z y dA, \quad (4.12)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

У залежності від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним, або дорівнювати нулю. Осі, відносно яких

відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються головними осями інерції. Головні осі, що проходять через центр ваги, називають головними центральними осями. Якщо хоча б одна з осей є віссю симетрії перерізу, то ці осі є головними.

При визначенні моментів інерції фігур, що мають просту геометричну форму, можна користатися методом безпосереднього інтегрування виразів (4.9), (4.10) і (4.12).

Осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються центральними осями, а моменти інерції відносно цих осей називаються центральними моментами інерції. Розглянемо взаємозв'язок моментів інерції перерізу відносно центральних осей, і деяких інших, рівнобіжних їм.

Допустимо, що для якого-небудь перерізу осі y, z є центральний, відносно якої момент інерції I_y, I_z відомі. Потрібно визначити момент інерції перерізу відносно осей y_1, z_1 , рівнобіжних центральним, віддалених на відстані a та b (рис. 4.2). За визначенням, моменти інерції, щодо обох осей, знаходять в такий спосіб:

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad (4.13)$$

Відстань від усіх елементарних площадок до осей y_1, z_1 буде: $y_1 = y + a, z_1 = z + b$ (рис.4.2). Із співвідношень (4.13) одержимо:

$$I_{z_1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Перший доданок цього виразу є центральним моментом інерції I_z . Другий доданок дорівнює нулю, тому що інтеграл, який у нього входить, є статичним моментом перерізу відносно осі, що проходить через центр ваги (4.10). Третій доданок дорівнює добутку квадрата відстані між осями і площі перетину. Отже, можна записати:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A. \quad (4.14)$$

Аналогічно для іншої осі:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A, \quad (4.15)$$

Таким саме способом можна одержати співвідношення для відцентрового моменту інерції:

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA. \quad (4.16)$$

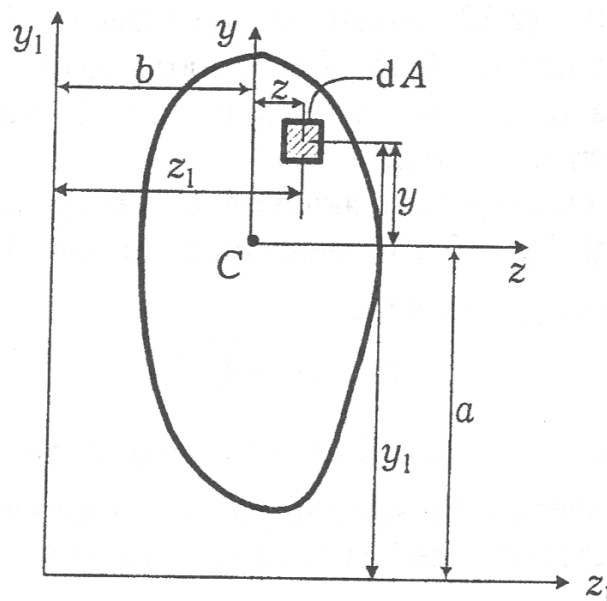


Рис. 4.2

Розглянемо зміни моментів інерції при повороті осей (рис. 4.3). Нехай відомі осьові й відцентрові моменти інерції довільного перерізу щодо координатних осей y і z (4.9), (4.10) і (4.12). Повернемо осі y і z на кут α проти годинникової стрілки, вважаючи кут повороту осей в цьому напрямку додатним, і знайдемо моменти інерції перетину щодо повернених осей:

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA; \quad I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1 z_1} = \int_A z_1 y_1 dA, \quad (4.17)$$

де y_1 і z_1 – координати елементарних частин цього перерізу в новій системі координат, які можна виразити через старі координати:

$$y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha;$$

$$z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

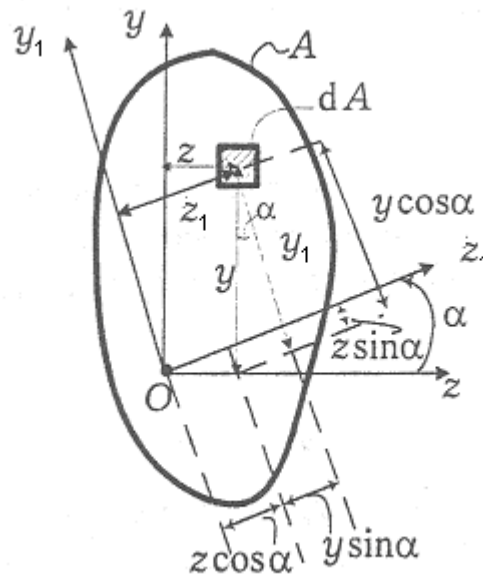


Рис. 4.3

Підставимо ці вирази у співвідношення (4.17):

$$I_{y_1} = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA =$$

$$\sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \sin 2\alpha \int_A yz dA;$$

$$I_{z_1} = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA =$$

$$\cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA - \sin 2\alpha \int_A yz dA;$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA =$$

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A yz dA + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA).$$

З урахуванням (4.9), (4.10) і (4.12), ці співвідношення можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{z_1 y_1} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ці формули дозволяють установити, як змінюються величини моментів інерції перерізу при повороті осей на деякий кут α . Для деяких значень цього кута осьові моменти інерції будуть досягати максимуму чи мінімуму.

Зі співвідношення (4.11) випливає, що коли осьовий момент інерції відносно деякої осі є максимальним, то осьовий момент інерції щодо перпендикулярної осі є мінімальним, тому що сума осьових моментів щодо двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції.

Для знаходження такого кута повороту осей, при якому значення осьових моментів інерції будуть екстремальними, досліджуємо функцію I_{z_1} на екстремум по α :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{z_1}}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} (I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} 2 \sin 2\alpha) = \\ &= -I_z 2 \sin \alpha \cos \alpha + I_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{yz} 2 \cos 2\alpha = \\ &= -(I_z - I_y) 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{yz} 2 \cos 2\alpha \end{aligned}$$

і дорівнюємо цей вираз нулю при $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} -(I_z - I_y) 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - I_{yz} 2 \cos 2\alpha_0 &= 0 \\ -(I_z - I_y) \sin 2\alpha_0 - I_{yz} 2 \cos 2\alpha_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тоді щодо кута α_0 :

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (4.20)$$

Отримане рівняння (4.20) значення кута α_0 визначає положення головних осей. Якщо кут α додатний, то систему координат треба повернути проти годинникової стрілки, щоб вона співпала з головними осями, якщо від'ємний – по годинникової стрілці.

Для визначення головних моментів інерції I_{\max} і I_{\min} розглянемо вираз (4.20), і, використовуючи тригонометричні перетворення, одержимо:

$$\begin{aligned} I_u = I_{\max} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right); \\ I_v = I_{\min} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

де u і v – головні центральні осі, щодо яких момент інерції перерізу максимальний і мінімальний відповідно.

Головні осі інерції можна одержати для будь-якої точки, взятої у площині перерізу. Але у практичних розрахунках використовуються тільки осі, що проходять через центр ваги перерізу. Такі осі називаються головними центральними осями інерції, а моменти відносно їх головними центральними моментами інерції.

Моменти інерції перерізу мають такі властивості:

- 1) осьові й полярні моменти інерції перерізів завжди додатні, відцентровий момент може бути як додатним, від'ємним, а відносно головних осей він дорівнює нулю;
- 2) моменти інерції складеного перерізу дорівнюють сумі моментів інерції фігур його складових;
- 3) осьові, полярні і відцентрові моменти інерції залежать від системи координат.

Розглянемо далі моменти інерції простих фігур.

Прямокутник (рис. 4.4), де b – ширина, h – висота прямокутника.

Розіб'ємо прямокутник на нескінченно малі елементи площі $b dy$. Момент інерції всього прямокутника відносно центральної осі z буде:

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.22)$$

Аналогічно відносно осі y :

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 h dz = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.23)$$

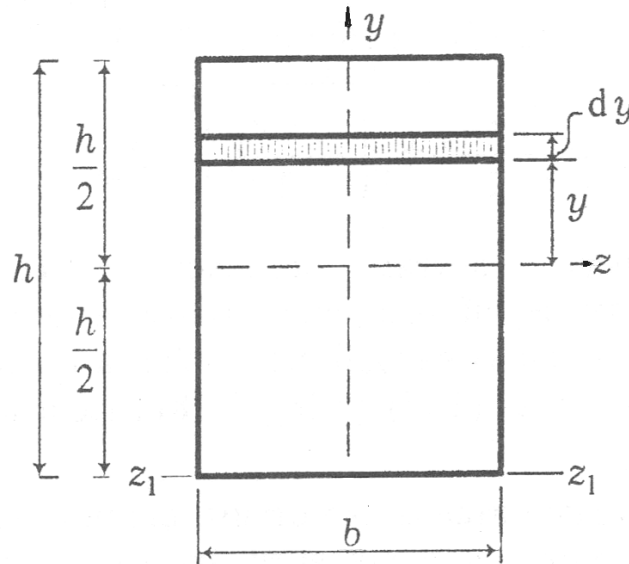


Рис. 4.4

Для осі, яка не проходить через його центр ваги, скористаємось формулою (4.14). Наприклад, для осі z_1 :

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Трикутник (рис. 4.5), де b – підстава, h – висота трикутника. По-перше розглянемо момент інерції відносно осі z_1 , яка проходить через його

вершину рівнобіжно основі. Розіб'ємо трикутник на нескінченно малі елементи площі $dy \frac{by}{h}$. Тоді

$$I_{z_1} = \int_0^h y^3 \frac{b}{h} dy = \frac{bh^3}{4}. \quad (4.24)$$

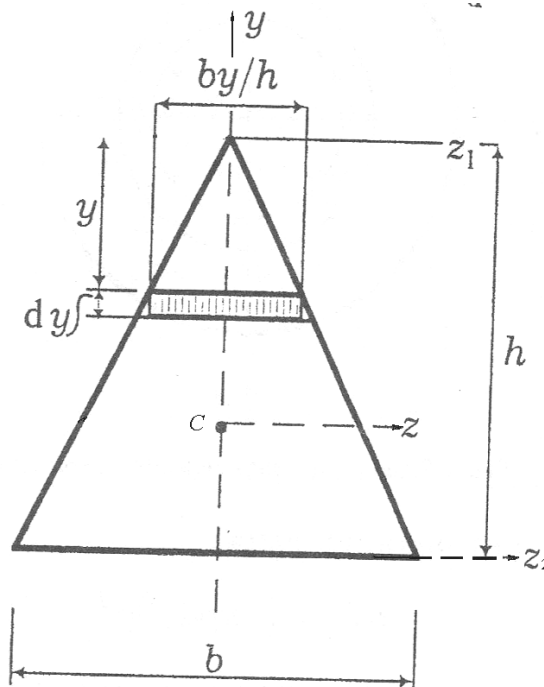


Рис. 4.5

Для визначення моменту інерції відносно центральної осі z , скористаємось формулою (4.14):

$$I_z = I_{z_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3}h \right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.25)$$

Також момент інерції відносно осі z_2 , яка проходить через його основу:

$$I_{z_2} = I_z + a^2 A = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \left(\frac{1}{3}h \right)^2 = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.26)$$

Круг. Для нього знайдемо спочатку полярний момент інерції відносно його центру ваги (рис. 4.6). Розглянемо нескінченно малі елементи площі $\rho d\rho$. Полярний момент інерції усієї площі круга буде:

$$I_p = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (4.27)$$

де $d = 2r$ - діаметр круга.

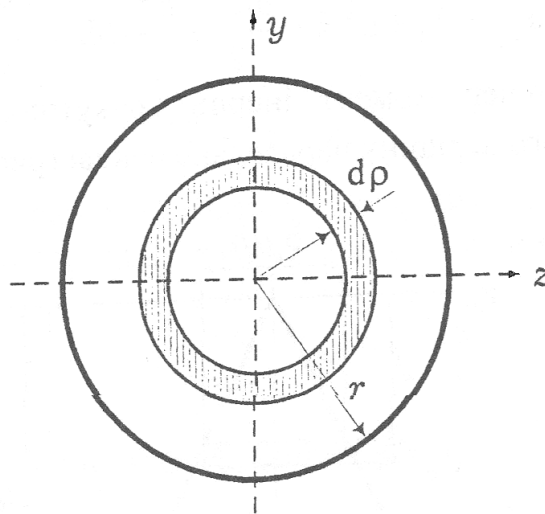


Рис. 4.6

Використовуючи формули (4.11), а також враховуючи те, що внаслідок симетрії $I_z = I_y$, знайдемо осьові моменти інерції:

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.28)$$

4.4. Приклади розрахунків

Приклад 1.

Визначити положення центра ваги перетину, показаного на рис. 4.7. Геометричні розміри, приведені на малюнку рівні: $a=4$ см, $b=6$ см, $h=3$ см.

Розв'язання.

Показана на рисунку вісь y , є віссю симетрії, отже, вона проходить через центр ваги перерізу, тобто координата центра ваги $z_c = 0$. Для визначення координати y_c скористаємося формулою (4.7).

Площі простих фігур:

$$A_1 = ab = 4 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{ah}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ см}^2.$$

Положення центрів ваги окремих фігур відносно довільно проведеної горизонтальної осі z_0 (див. рисунок):

$$y_{C_1} = \frac{b}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ см};$$

$$y_{C_2} = b + \frac{h}{3} = 6 + \frac{3}{3} = 7 \text{ см}.$$

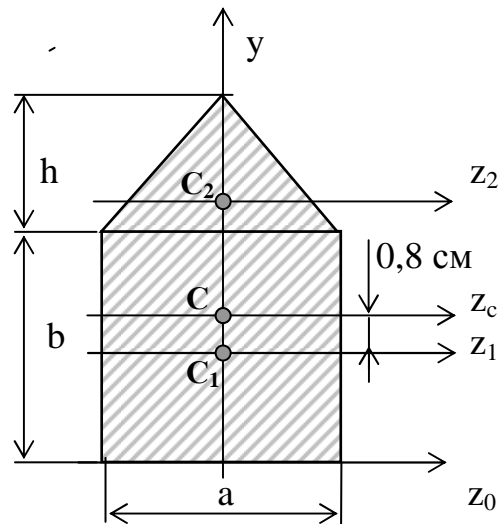


Рис. 4.7

Остаточно враховуючи (4.7) і (4.8), знайдемо координату y_c центру ваги:

$$y_c = \frac{\sum S_{z_0}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{24 \cdot 3 + 6 \cdot 7}{24 + 6} = 3.8 \text{ см}.$$

Відповідь: Центр ваги (точка C) перерізу співпадає з точкою перетину осей $y_c z_c$ і має координати $(0; 3,8)$.

Приклад 2.

Визначити моменти інерції перерізу, показаного на рис. 4.8 щодо осей z і y . $d=5$ см, $b=8$ см, $h=12$ см.

Розв'язання.

Показані на рисунку осі z , y - проходять через центр ваги перерізу і є осями симетрії, отже, це головні центральні осі.

Для визначення осьових моментів інерції скористаємося формулами (4.22) і (4.23), та віднімемо з моменту інерції прямокутника момент інерції круга (4.28):

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} =$$

$$= \frac{8 \cdot 12^3}{12} - \frac{3.14 \cdot 5^4}{64} = 1121 \text{ см}^4$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} - \frac{\pi d^4}{64} =$$

$$= \frac{8^3 \cdot 12}{12} - \frac{3.14 \cdot 5^4}{64} = 481 \text{ см}^4$$

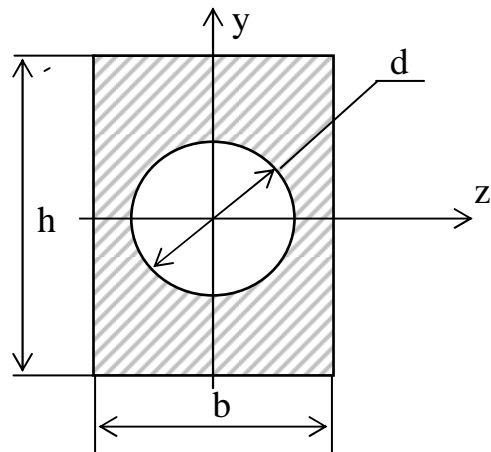


Рис. 4.8

Відповідь: Осьові моменти інерції перерізу щодо головних центральних осей z і y дорівнюють $I_z = 1121 \text{ см}^4$, $I_y = 481 \text{ см}^4$.

5. ЗГИН БАЛОК

Згин балок, пов'язаний з виникненням у поперечних перерізах згинальних моментів – моментів, щодо осі, розташованої у площині поперечного перерізу, що проходить через його центр ваги. Ці моменти діють у площині, перпендикулярній поперечному перерізу балки.

У залежності від напрямку згинаючого моменту розрізняють прямий і косий згини. Прямий згин виникає у випадку, коли дії згинальних навантажень збігається з однією із головних осей інерції. Тоді і згинальний момент у поперечному перерізі діє в площині, що проходить через одну з головних центральних осей інерції. На рис. 5.1 показаний випадок навантаження бруса, коли зовнішні сили розташовані у площині $u-x$, що збігається з головною віссю перерізу u . Деформації згину в цьому випадку відбуватися в площині дії моменту.

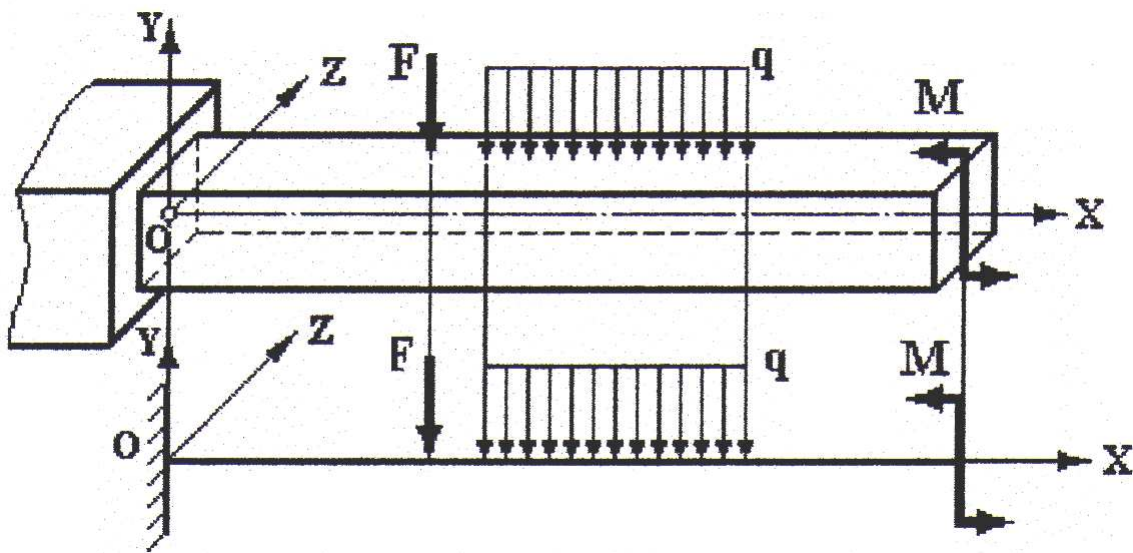


Рис. 5.1

Якщо площина дії згинальних моментів не збігається з жодною з головних осей, то таке деформування називається косим згином. У таких випадках усі зовнішні навантаження (сили і моменти) розкладають на дві

складові, таким чином косий згин розкладається на два прямих поперечних згину.

Якщо при згині в поперечному перерізі балки діє тільки згинальний момент, то таке деформування називається чистий згин. Коли крім згинаючого моменту в поперечному перерізі діє ще і поперечна сила, тоді такий вид деформування називається поперечний згин. Коли усі поперечні перерізи деякої ділянки балки знаходяться в стані чистого згину, тоді вся ця ділянка перебуває у стані чистого згину.

5.1. Внутрішні зусилля при згині

Зовнішні навантаження, що діють на елементи конструкції, викликають появу в ньому внутрішніх зусиль. При дії на брус зовнішніх навантажень, розташованих в одній площині (наприклад, ху, якщо вісь x збігається з віссю бруса), що проходить через вісь бруса, у кожному поперечному перерізі виникають внутрішні зусилля, що діють у тій же площині: подовжня сила, поперечна сила і згинальний момент.

Коли в перерізі виникає подовжня сила, тоді необхідно окремо розглядати дві задачі: розтяг-стиск і згин бруса, а потім одержати суперпозицію двох рішень. У такий само спосіб необхідно розглядати розв'язання двох окремих задач і у випадку, коли зовнішні сили діють у площині, що не містить у собі головні осі.

Надалі ми будемо розглядати задачу прямого згину. У цьому випадку в площині перерізу балки будуть наступні внутрішні зусилля: поперечна сила, що діє в площині перерізу ($Q=Q_y$) і проходить через його центр ваги і згинальний момент, перпендикулярний до поперечного переріза $M=M_z$, де z – вісь, щодо якої діє момент.

Згинальний момент M в поперечному перерізі бруса (рис. 5.2) вважається додатним, якщо на лівому торці правої частини балки він спрямований по годинниковій стрілці, а на правому торці лівої частини –

проти годинникової стрілки (або можна казати, що додатний момент є такий, котрий згинає балку нагору), як показано на рис. 5.2. При додатному згинальному моменті верхні волокна будуть стискуватися, нижні – розтягуватися.

При від'ємному згинальному моменті верхні волокна розтягуються, нижні – стискаються.

Поперечна сила Q позитивна, коли на правому торці лівої частини бруса вона спрямована зверху вниз, на лівому торці правої частини – знизу догори, як показано на рисунку.

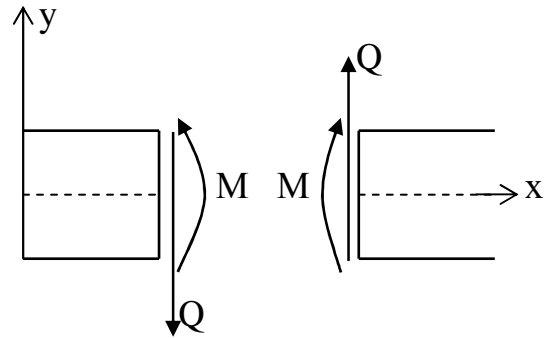


Рис. 5.2

Додатна поперечна сила прагне завжди обертати відсічену частину балки проти годинникової стрілки відносно центру ваги перерізу.

Згинальний момент і поперечна сила, що діють у перерізі, зв'язані з напруженнями, що виникають у ньому (1.4):

$$\begin{aligned} Q &= \int_A \tau_y dA; \\ M &= \int_A \sigma_z y dA. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для того щоб визначити проекції на будь-яку вісь внутрішніх силових факторів у перерізі, необхідно, як показано в п. 1.2, скористатися методом перерізів.

Проаналізуємо внутрішні силові фактори в поперечному перерізі балки при прямому поперечному згині, сформулюємо основні правила визначення сил і моментів при згині.

Розглянемо консольний брус із затисненим правим торцем та навантажений силами F_1 і F_2 (рис. 5.3). Нехай $F_1 > F_2$.

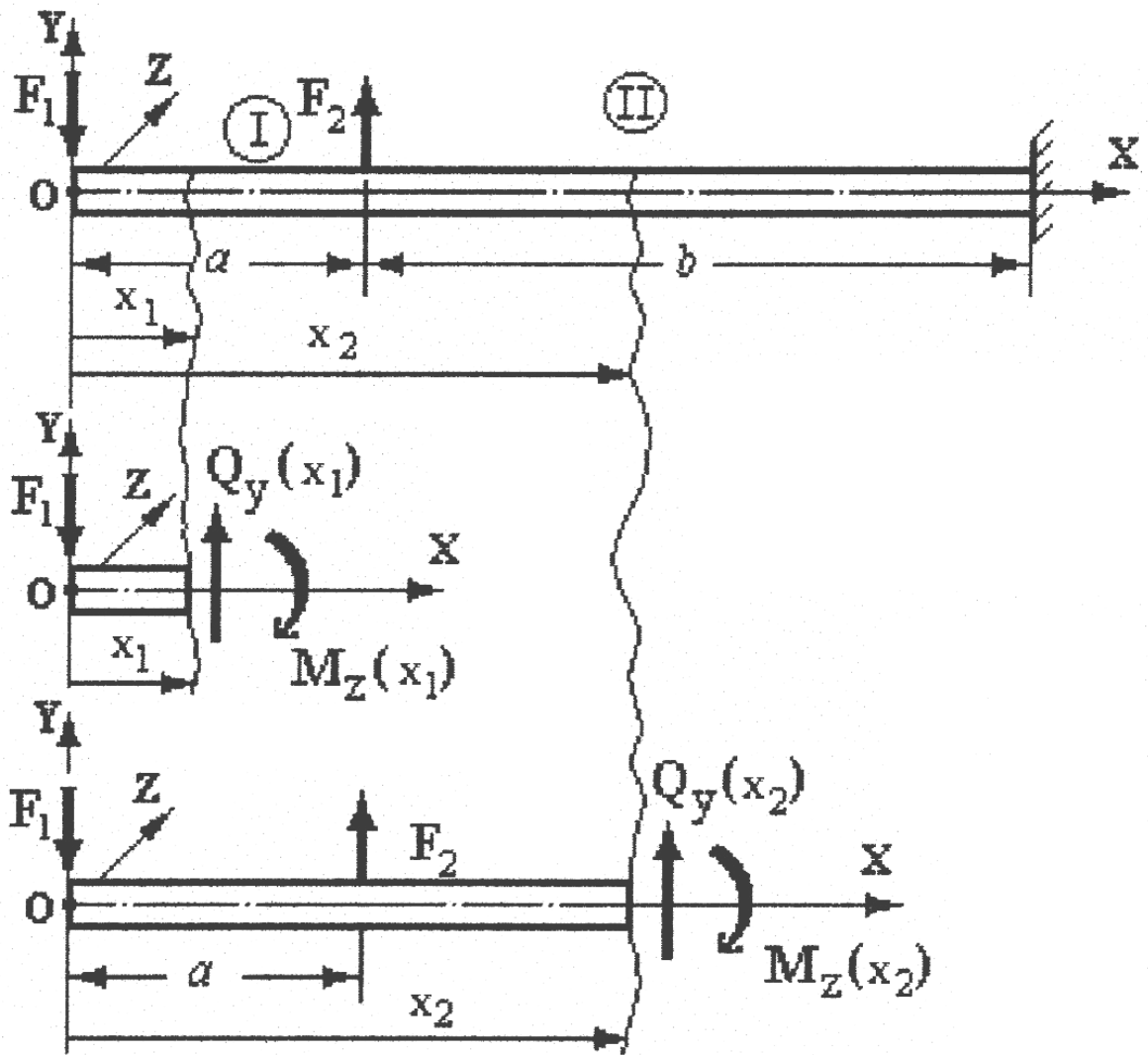


рис. 5.3

Згідно з методом виберемо переріз на першій і другій ділянках, покажемо відсічені частини, замінимо дію відкинутих частин на залишену внутрішніми силовими факторами Q_y і M_x . З умов статички (суми проекцій сил на вісь y і суми моментів щодо осі x , що проходить через центр ваги розглянутого перерізу) визначимо їхні значення:

1-а ділянка.

$$\begin{aligned} \sum F_i = -F_1 + Q_y(x_1) = 0, \text{ звідки} & \quad Q_y(x_1) = F_1; \\ \sum M_i = F_1 x_1 - M_z(x_1) = 0, \text{ звідки} & \quad M_z(x_1) = F_1 x_1. \end{aligned}$$

2-а ділянка.

$$\sum F_i = -F_1 + F_2 + Q_y(x_2) = 0, \text{ звідки} \quad Q_y(x_2) = F_1 - F_2;$$

$$\sum M_i = F_1 x_2 - F_2(x_2 - a) - M_z(x_2) = 0, \text{ звідки} \quad M_z(x_2) = F_1 x_2 - F_2(x_2 - a);$$

З цього методу випливає, що для визначення внутрішніх зусиль у перерізі, необхідно просумувати усі зовнішні сили та моменти, що діють на одну з частин, розташованих праворуч чи ліворуч від перерізу.

Використовуючи такі уявлення, сформулюємо наступні правила для визначення поперечної сили й згинального моменту при згині.

Поперечна сила $Q = Q_y(x)$ за величиною і знаком дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, прикладених до лівої частини балки, на головну центральну вісь у площині згину, проведenu в розглянутому перерізі, чи сумі проєкцій на ту ж вісь, взяту зі зворотним знаком, усіх зовнішніх сил, прикладених до правої частини балки. При цьому проєкції вважаються позитивними, якщо сили спрямовані по осі (догори):

$$Q = \sum_{\text{лев}} F_y = - \sum_{\text{прав}} F_y. \quad (5.2)$$

Правило знаків. Поперечна сила вважається додатною, якщо обертає розглянуту відсічену частину балки щодо центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, і від'ємною - якщо проти годинникової стрілки (рис. 5.4).

Згинальний момент $M = M_z(x)$ щодо головної центральної осі z поперечного перерізу за величиною і знаком дорівнює сумі моментів щодо цієї осі від усіх зовнішніх навантажень, прикладених до лівої частини балки, чи сумі моментів щодо тієї ж осі, взятої зі зворотним знаком, усіх моментів від зовнішніх навантажень, прикладених до правої частини. Моменти від зовнішніх навантажень додатними, якщо вони діють проти годинникової стрілки:

$$M = -\sum_{\text{лев}} M_z = \sum_{\text{прав}} M_z . \quad (5.3)$$

Правило знаків. Згинальний момент вважається додатним, якщо відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте внизу), та від'ємним - якщо навпаки. Таким чином, еюра згинальних моментів будується з боку розтягнутого волокна (рис.5.4).

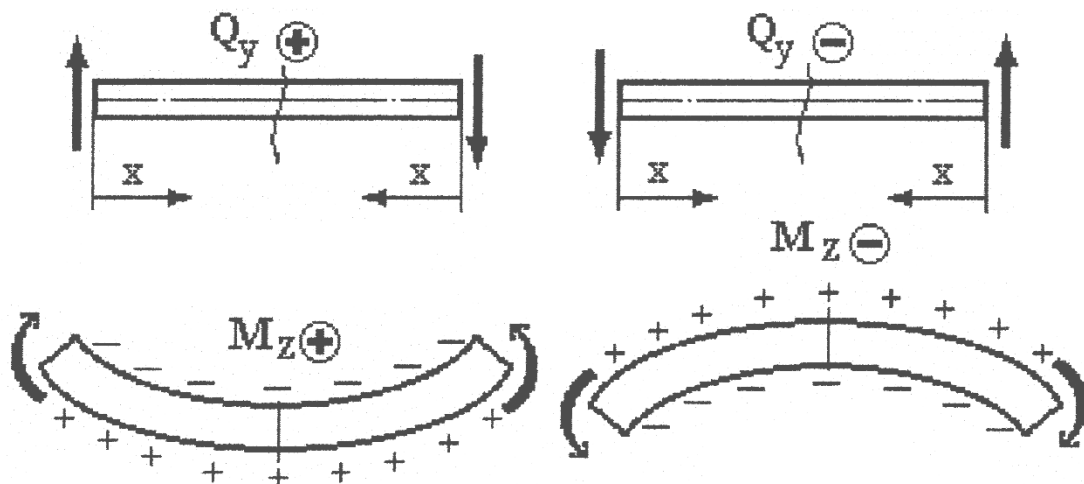


Рис. 5.4

При визначенні внутрішніх зусиль моменти і проекції сил необхідно визначати від усіх зовнішніх сил, прикладених до балки по одну сторону від розглянутого поперечного перерізу. У число цих сил треба включати і реакції опор, що виникають у закріплених точках перерізів. Ці реакції знаходяться з рівнянь рівноваги всієї балки з урахуванням усіх діючих на неї навантажень.

Балки, в яких загальне число реакцій більше числа рівнянь рівноваги, називаються статично невизначеними. Для таких балок реакції опор визначаються зі спільного розв'язання рівнянь рівноваги і рівнянь спільності деформацій, що описують умови деформування балок.

Величина внутрішніх зусиль у перерізах залежить від того, які і яким чином, прикладені навантаження, що діють на балку.

Для того щоб визначити ці залежності між зовнішніми навантаженнями і внутрішніми зусиллями, розглянемо балку, що знаходиться під дією деякої системи сил.

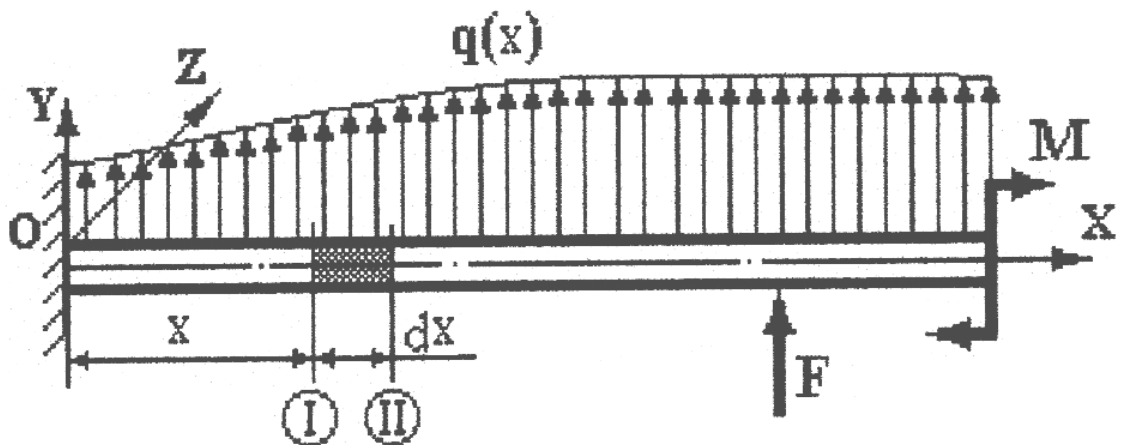


Рис. 5.5

Вимелемо елементарну ділянку балки довжиною dx (рис. 5.6), на яку діє тільки розподілене навантаження інтенсивністю q , що діє перпендикулярно до осі балки, й внутрішні зусилля. Розглянемо її рівновагу, на лівий торець цього елемента діють деякі внутрішні зусилля M і Q , на правий $M+dM$ і $Q+dQ$, де dM і dQ – збільшення величин внутрішніх силових факторів на ділянці dx .

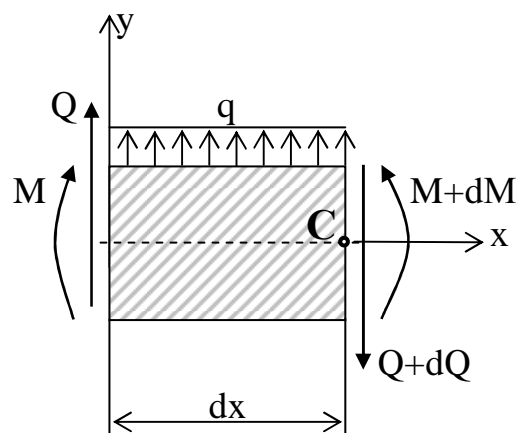


Рис. 5.6

Цей елемент, як і вся балка в цілому, повинен знаходитися в рівновазі:

$$\sum F_y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow qdx - dQ = 0,$$

відкіля:

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (5.4)$$

Таким чином, похідна від поперечної сили по довжині дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Тепер складемо рівняння рівноваги елемента щодо центра ваги перерізу (точка С) правого торця елемента:

$$\sum M_C = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0,$$

або:

$$Qdx + qdx \frac{dx}{2} - dM = 0.$$

Так як доданок $qdx \frac{dx}{2}$ має другий порядок мализни, на відміну від інших додатків, що мають перший порядок мализни, ним можна знехтувати:

$$Qdx - dM = 0,$$

або:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (5.5)$$

Таким чином, похідна від згинаючого моменту за довжиною дорівнює поперечній силі.

Підставляючи вираз (5.5) у залежність (5.4) одержуємо зв'язок другої похідної від згинального моменту за довжиною і інтенсивності розподіленого навантаження:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (5.6)$$

Співвідношення (5.4)-(5.6), справедливі в тому випадку, якщо вісь абсцис спрямована в праву сторону.

При розрахунках балок на згин необхідно знати розподіл внутрішніх зусиль у поперечних перерізах по її довжині. Цей розподіл прийнятий показувати у виді епюр. Епюри при згині будуються за загальними правилами аналогічно епюрам подовжньої сили при розтягу-стиску. Кожна ордината епюри M чи Q являє собою величину згинаючого моменту чи поперечної сили у відповідному перерізі балки. При побудові епюри сил прийнято додатні значення сили відкладати догори від осі епюри, а від'ємні – відповідно донизу. При побудові епюри згинальних моментів, навпаки – додатні значення відкладаються вниз, від'ємні – нагору.

Вид епюр поперечної сили і згинаючого моменту залежить від виду зовнішнього навантаження. Аналізуючи залежності (5.2)–(5.6) можна зробити наступні висновки, які можна використовувати при побудові й перевірці епюр:

1. У перерізі, до якого до балки прикладена зосереджена сила, значення поперечної сили Q зміниться стрибкоподібно на величину прикладеної сили. Коли зосереджена сила спрямована нагору, на епюрі Q є скачок догори, а коли сила спрямована вниз – скачок униз.
2. Якщо до балки прикладений зосереджений момент, значення згинаючого моменту M зміниться стрибкоподібно на величину прикладеного моменту. Коли зосереджений момент спрямований

- проти годинникової стрілки, на епюрі M мається скачок догори, а коли момент спрямований за годинникової стрілки – скачок униз.
3. Тангенс кута між дотичною до лінії, що обмежує епюру моментів M і віссю епюри, дорівнює поперечній силі Q .
 4. На ділянках балки, на яких поперечна сила додатна, згинальний момент зростає, а де вона від'ємна – убуває.
 5. Чим більше по абсолютній величині значення поперечної сили, тим крутіше лінія, що обмежує епюру згинальних моментів.
 6. На ділянці балки, де поперечна сила має постійне значення, епюра моментів обмежена прямою лінією.
 7. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили не має стрибка, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох сторін, сполучаються без перелому, тобто мають у точці сполучення загальну дотичну.
 8. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили має стрибок, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох сторін мають точку перелому, тобто не мають у точці сполучення загальної дотичної.
 9. На ділянках, де діє зовнішнє розподілене навантаження, згинальний момент досягає максимуму чи мінімуму в перерізах балки, де поперечна сила дорівнює нулю (дотична до лінії, що обмежує епюру моменту, при цьому в розглянутому перерізі буде рівнобіжна осі епюри).
 10. На ділянках, де діє розподілене навантаження, поперечні сили змінюються за довжиною балки по прямій, а епюри моментів обмежені кривою лінією.
 11. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, поперечні сили постійні, а епюри моментів змінюються за лінійним законом.

5.2. Напруження і деформації при згині

Розглянемо нормальні напруження, що виникають при чистому плоскому згині в поперечному перерізі балки. З усіх внутрішніх зусиль, що можуть виникати в перерізах, ненульовим буде тільки згинальний момент, щодо осі, перпендикулярної осі балки. Цей момент буде зв'язаний з нормальними напруженнями співвідношенням (5.1).

Розглянемо, як деформується балка в умовах чистого згину. Досвіди дослідження деформацій при згині балок, показують, що:

- 1) подовжні лінії викривляються по дузі кола;
- 2) поперечні лінії залишаються прямими і при цьому не змінюють свою довжину;
- 3) контури поперечних перерізів балки залишаються плоскими;
- 4) лінії контурів перерізів скрізь перетинаються під прямим кутом.

На підставі цих спостережень, можна зробити висновок, що при чистому згині поперечні перерізи балки залишаються плоскими і повертаються так, що залишаються нормальними до вигнутої осі балки (рис.5.7). Таким чином, при згині, як і при розтязі-стиску, справедлива гіпотеза плоских перерізів, що має назву „гіпотези Бернуллі”.

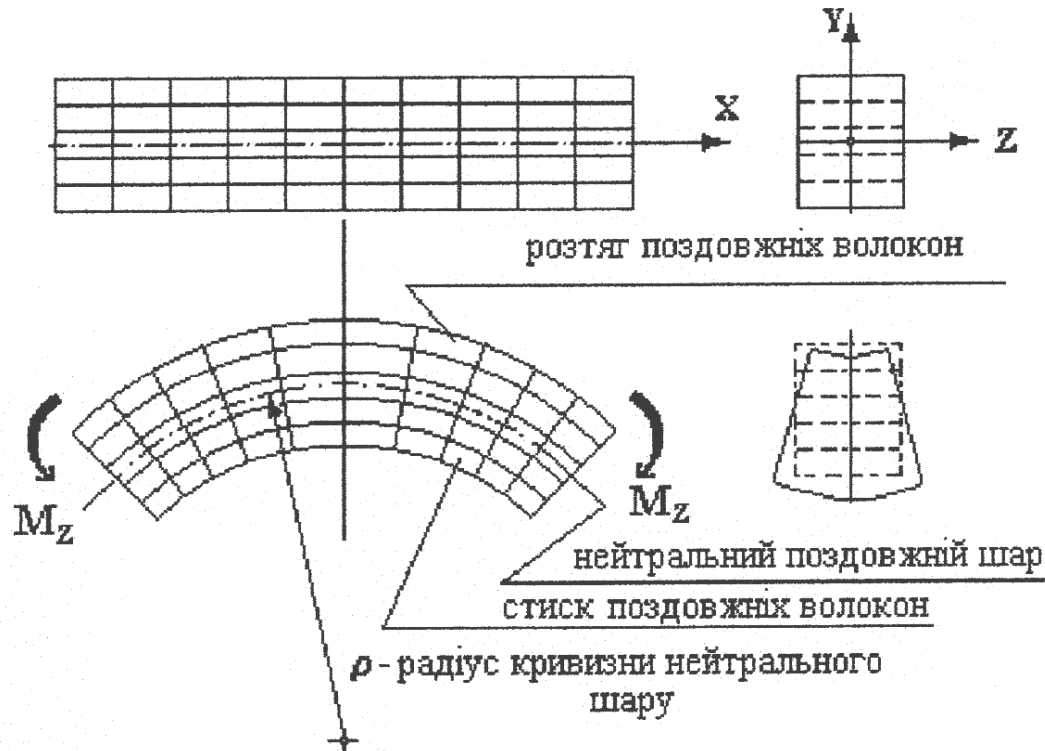


Рис. 5.7

Дослідження деформування балок в умовах згину показує, що при навантаженні балки від'ємним згинальними моментами верхні волокна балки подовжуються, нижні – коротшають, додатнім – навпаки. При цьому можна знайти волокна, довжина яких залишається незмінною. Сукупність таких волокон утворить деякий шар, що називається нейтральним. Кожен поперечний переріз перетинається з нейтральним шаром по прямій, що називається нейтральною лінією перерізу.

При плоскому згині нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, отже, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії у перерізі, при цьому вона перетинає центр ваги перерізу. Таким чином, нейтральна лінія збігається з головною центральною віссю перерізу і називається нейтральною віссю.

Використовуємо гіпотезу плоских перерізів для визначення нормальних напружень при чистому згині (рис.5.8). Для цього виділимо

елемент, обмежений двома поперечними перерізами, на відстані dx (рис. 5.9,а). Торцеві перерізи при деформуванні залишаються плоскими і при цьому повернуться на деякий кут $d\varphi$ (рис. 5.9,б).

Прямолінійний відрізок нейтрального шару A_0B_0 перетворюється в дугу A_1B_1 з радіусом ρ , при цьому він не змінить своєї довжини. Волокно AB , що знаходиться на відстані y від нейтрального шару перейде в дугу A_2B_2 радіуса $\rho+y$, при цьому він змінить свою довжину. Відносне подовження цього волокна буде

$$\varepsilon = \frac{A_2B_2 - AB}{AB}.$$

З урахуванням того, що

$$A_2B_2 = (\rho + y)d\varphi;$$

$$AB = A_0B_0 = dx = \rho d\varphi,$$

і скоротивши на $d\varphi$, одержуємо вираз для знаходження відносної деформації волокна на відстані y від нейтрального шару:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}.$$

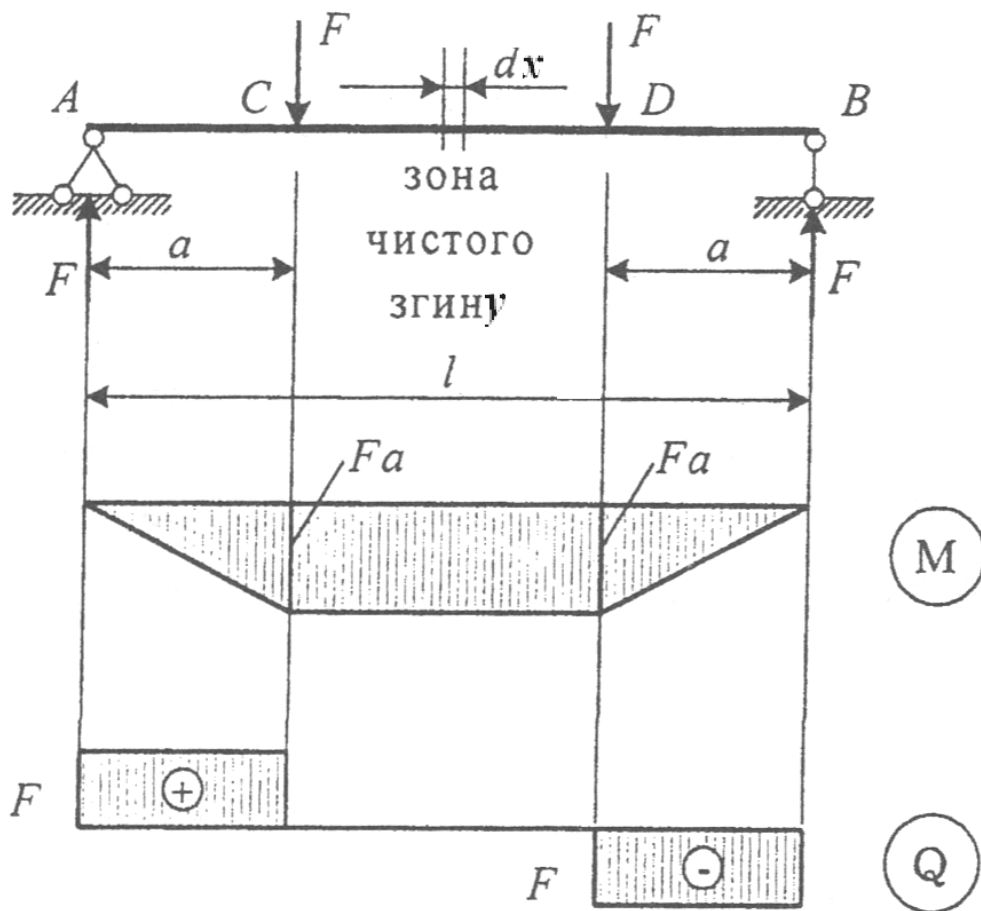


Рис. 5.8

Тепер розглянемо, в якому напруженому стані знаходиться досліджуване волокно АВ. У поперечних перерізах немає дотичних напружень, тому що при чистому згині відсутня поперечна сила. З урахуванням парності дотичних напружень їх немає й у перерізах, рівнобіжних осі балки. Нормальні напруження в перерізах, рівнобіжних осі балки, так само дорівнюють нулю, тому що, відповідно до гіпотези плоских перерізів, лінійні деформації у перпендикулярному осі напрямку відсутні. Таким чином, волокно АВ знаходиться в лінійному напруженому стані (розтяг-стиск). У цьому випадку напруження і відносні деформації зв'язані між собою за законом Гука (3.9): $\sigma = \epsilon E$. У результаті чого,

замінивши в цьому співвідношенні відносну деформацію, відповідно до отриманої залежності, маємо:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (5.7)$$

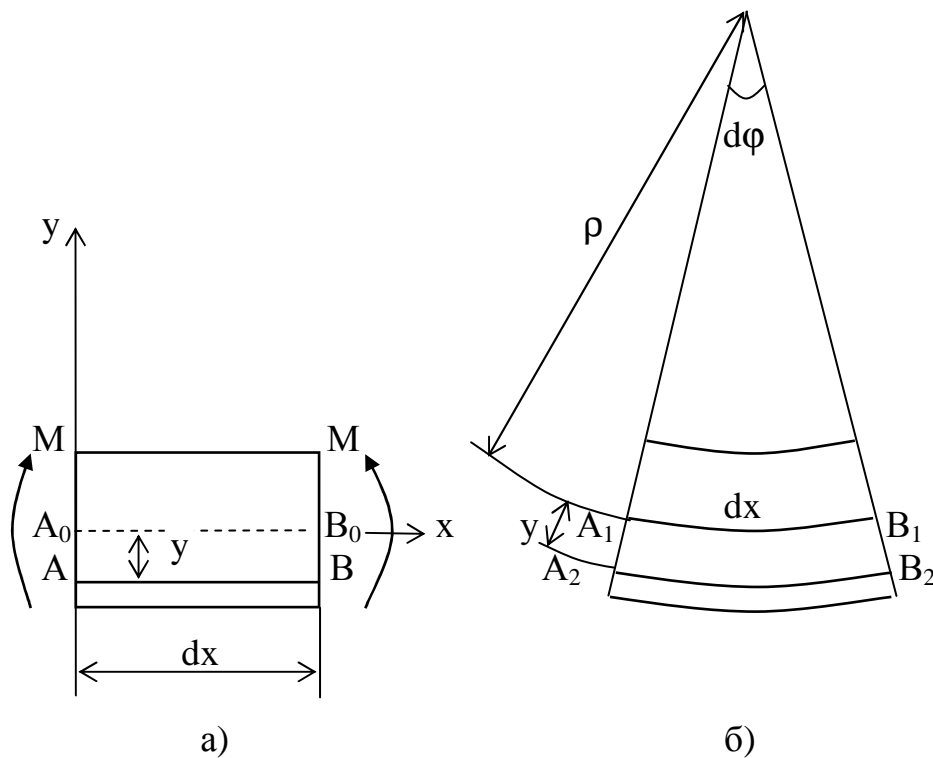


Рис. 5.9

Підставляючи отриману залежність (5.7) у друге рівняння співвідношення (5.1) і з огляду на те, що модуль пружності й кривина нейтральної осі постійні в розглянутому перерізі і їх можна винести за знак інтеграла, одержуємо:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M.$$

Так як відповідно до виразу (4.9) інтеграл $\int_A y^2 dA$ являє собою момент інерції перерізу щодо нейтральної осі (осі z) попереднє співвідношення можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (5.8)$$

Отриманий вираз зв'язує між собою кривину осі балки і згинальний момент, що діє в перерізі. Аналізуючи (5.8), можна зробити висновок, якщо балка виготовлена з однорідного матеріалу, і має постійний поперечний переріз, то при чистому згині вісь її викривляється по дузі кола. При цьому кривина і згинальний момент прямо пропорційні, а величина EI_z називається жорсткістю при згині.

Підставимо (5.8) в (5.7) і одержимо:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}. \quad (5.9)$$

Ця формула дозволяє знаходити нормальні напруження при чистому згині в будь-якій точці перерізу. У випадку прямого згину, коли деформування відбувається у площині головних центральних осей, індекс z в осьовому моменті інерції перерізу часто опускають.

Отримане співвідношення між нормальними напруженнями і згинальними моментами дозволяє зробити висновок, що яку б форму і розміри не мав поперечний переріз, напруження в точках, що знаходяться на нейтральній осі ($y=0$), дорівнюють нулю. Величина нормального напруження лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної осі. При цьому напруження не змінюються по ширині перерізу. Отже, максимальна і мінімальна величина нормальних напружень для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, буде збігатися з точністю до знака.

У розрахунках на міцність мають значення найбільші за абсолютною величиною значення напружень, які виникають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I},$$

де y_{\max} - відстань від нейтральної осі до найбільш віддалених точок перерізу.

З урахуванням (2.8), одержуємо умову міцності при чистому згині:

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ - допустимі напруження;

W_z - осьовий момент опору при згині щодо головної центральної осі – нейтральної осі при згині, який визначається відносно головних центральних осей і дорівнює відношенню осьового моменту інерції до відстані від цієї осі до максимально віддаленої від точки перерізу:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

У випадку прямого згину індекс z в моменті опору перерізу часто опускають.

З урахуванням цього умову міцності для балки при згині можна записати у вигляді

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (5.10)$$

де M_{\max} - максимальний згинальний момент, що виникає в балці під дією зовнішніх навантажень.

Усі формули для визначення відносних деформацій і нормальних напружень, наведені вище (5.7)-(5.10) отримані для чистого прямого згину балок. Практика показує, що при поперечному згині балок, коли в перерізі крім згинаючого моменту діє ще і поперечна сила, можна користатися формулами, отриманими для чистого згину. При цьому погрішність виявляється несуттєвою. Крім того, напруження, що обумовлені наявністю поперечної сили, можна досліджувати окремо.

При поперечному згині, крім нормальних напружень у поперечних перерізах балки виникають також і дотичні напруження. Якщо поперечний згин є *прямим*, то згинальний момент діє в площині, що збігається з однієї з головних площин балки. Поперечна сила при цьому, як правило, рівнобіжна площині дії згинаючого моменту, і проходить через центр ваги цього перерізу.

Поперечна сила зв'язана з дотичними напруженнями, що виникають у цьому перерізі, і визначається співвідношенням (1.4). У цьому випадку, дотичні напруження в поперечному перерізі балки при прямому згині (коли вважати, що всі зовнішні навантаження рівнобіжні осі y) мають один напрямок з поперечною силою і їх прийнято позначати без індексу, що позначає напрямок. Передбачається, що дотичні напруження по всій ширині перерізу в горизонтальному напрямку, рівнобіжному осі z , однакові, а їхня величина змінюється тільки за висотою перерізу і дорівнює, згідно с формулою Журавського [2, 6]:

$$\tau = \frac{QS^*}{Ib}. \quad (5.11)$$

де Q – поперечна сила, що виникає в розглянутому поперечному перерізі балки;

S^* – статичний момент щодо нейтральної осі частини перерізу, розташованого вище або нижче лінії, що проходить через точку, у якій визначаються дотичні напруження;

I – момент інерції всього поперечного перерізу щодо нейтральної осі;

b – ширина поперечного перерізу на тому рівні, де визначаються напруження.

Приведена формула Журавського (5.11), отримана їм у припущенні, що переріз являє собою вузький прямокутник (при $\frac{h}{b} > 2$, де h – висота

прямокутника, а b – його ширина), однак, як показує практика, її можна використовувати для будь-яких перерізів, крім тих місць у перерізі, де є вузькі прямокутники, розташовані перпендикулярно напрямку дії поперечної сили. Знак дотичних напружень у перерізі збігається зі знаком поперечної сили.

Максимальні дотичні напруження відповідно до отриманого співвідношення (5.11) будуть у точках, розташованих на нейтральній осі балки. Це твердження справедливе для всіх поперечних перерізів, крім, тих, в яких у районі нейтральної осі спостерігається різке збільшення ширини. Таким чином вираз для максимальних дотичних напружень має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max} .$$

З урахуванням (2.9), одержуємо умову міцності при прямому поперечному згині балок по дотичних напруженнях для балки, в якій виникає поперечна сила Q :

$$\frac{Q_{\max}}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max} \leq [\tau], \quad (5.12)$$

де $[\tau]$ - допустимі дотичні напруження;

Q_{\max} - максимальне значення поперечної сили, що діє в поперечних перерізах балки.

Формули для визначення дотичних напружень і підбору перерізу (5.11) і (5.12) отримані для прямого поперечного згину балок.

У точках поперечного перерізу балки, найбільш віддалених від нейтральної осі, дотичні напруження дорівнюють нулю. У цих точках відповідно нормальні напруження досягають максимального значення (5.9). А в точках, де нормальні напруження дорівнюють нулю (5.9),

відповідно дотичні напруження досягають максимальної величини (5.11). Отже, перевірка на міцність по нормальних і дотичних напруженнях при згині балок варто проводити окремо. При цьому в переважній більшості задач нормальні напруження істотно вище дотичних, тому основною формулою для розрахунків балок на міцність буде співвідношення (5.10).

Розподіл напружень, виникаючих у перерізах балки розглянемо на прикладах.

Прямокутний переріз. В перерізі діють згинальний момент M і поперечна сила Q , спрямовані, як показано на рис. 5.10. Поперечна сила Q , ширина перерізу $b=b_y$ та осьовий момент інерції $I = \frac{bh^3}{12}$ - конкретні постійні величини (рис. 5.10).

Нормальні напруження згідно з (5.9) змінюються за лінійним законом, максимальні значення їх будуть у точках перерізу, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M}{W}.$$

Дотичні напруження змінюються за таким же законом, що і статичний момент відсіченої частини площі.

Визначаємо дотичні напруження на рівні y . Площа відсіченої частини перерізу: $A^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{bh}{2} \left(1 - \frac{2y}{h} \right)$, положення її центра ваги

$y_c = \frac{h}{2} - \frac{h/2 - y}{2} = \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{4} \right) = \frac{h}{4} \left(1 + \frac{2y}{h} \right)$. Статичний момент відсіченої частини площі відносно осі z :

$$S^* = A^* \cdot y_c = \frac{bh}{2} \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \cdot \frac{h}{4} \left(1 + \frac{2y}{h} \right) = \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right].$$

Таким чином, дотичні напруження змінюються за законом квадратної параболі. Максимальні дотичні напруження виникають на нейтральній лінії, де нормальні напруження дорівнюють нулю. Для визначення τ_{\max} необхідно обчислити статичний момент половини площі перерізу, тоді:

$$\tau_{\max} \frac{QS_{\max}^*}{bI} = \frac{Qbh^2/8}{b bh^2/12} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}.$$

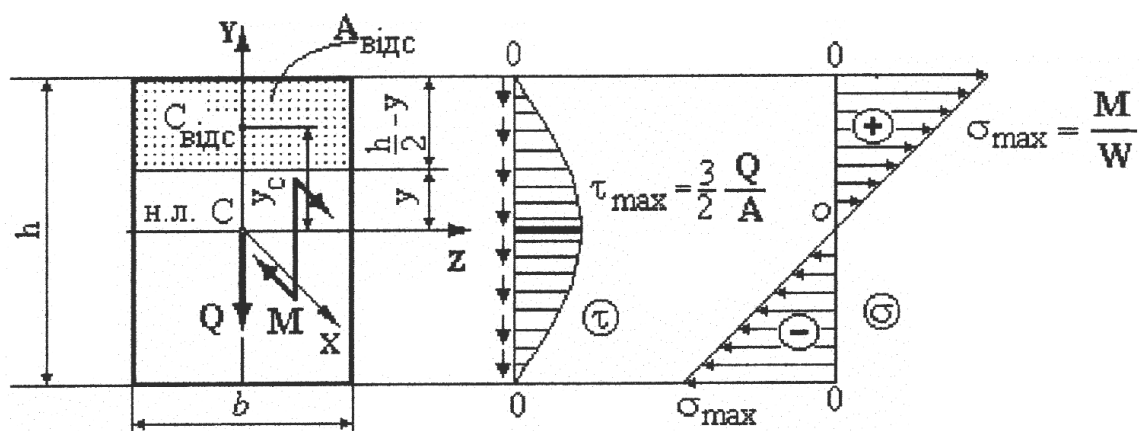


Рис. 5.10

Двотавровий переріз. У перерізі діють згинальний момент M і поперечна сила Q , спрямовані, як показано на рис. 5.11.

Нормальні напруження згідно з (5.9) змінюються за лінійним законом, максимальні значення їх будуть у точках перерізу, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M}{W}.$$

Дотичні напруження, використовуючи формулу Журавського визначимо в характерних точках.

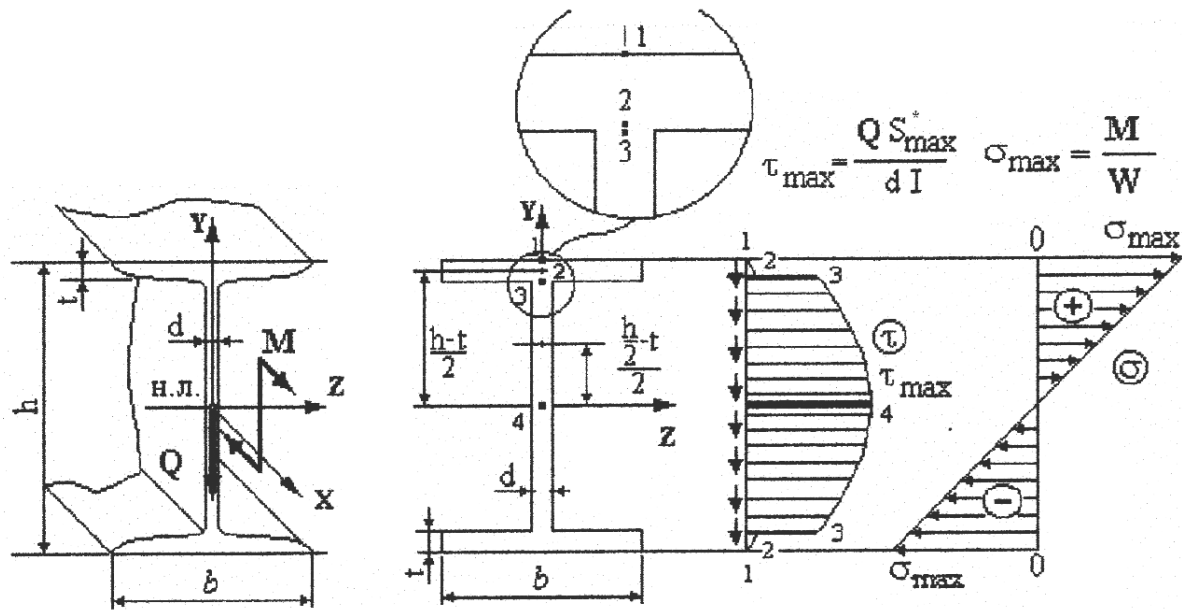


Рис. 5.11

Точка 1. $\tau_1=0$, так як $S^* = 0$ (вище рівня 1 відсічена площа відсутня).

Точки 2 і 3. Ці точки мають однакову координату y , але належать полці й стінці одночасно, тобто різній ширині $b_2=b$, $b_3=d$. Тому в місці переходу полки в стінку виникає скачок дотичних напружень.

$$\tau_2 = \frac{Q}{bI} bt \left(\frac{h-t}{2} \right) = \frac{Qt}{I} \left(\frac{h-t}{2} \right);$$

$$\tau_3 = \frac{Q}{dI} bt \left(\frac{h-t}{2} \right).$$

Точка 4:

$$\tau_4 = \tau_{\max} = \frac{Q}{dI} \left[bt \left(\frac{h-t}{2} \right) + d \left(\frac{h}{2} - t \right) \cdot \left(\frac{h/2 - t}{2} \right) \right] = \frac{QS_{\max}^*}{dI},$$

де S_{\max}^* - статичний момент відносно нейтральної осі половини площі перерізу, для стандартних профілів наведений у таблицях сортаменту (див. додаток). Зразковий графік розподілу дотичних напружень приведений на

рис. 5.11. Дійсний розподіл дотичних напружень трохи відрізняється від отриманого, тому що полиці мають ухили, а перехід від полиці до стінки здійснюється по радіусу кривини.

5.3. Балки, завантажені нерівномірно розподіленим навантаженням

У всіх балках, які були розглянуті, якщо було розподілене навантаження, воно не змінювалось продовж осі балці.

Розглянемо приклад побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів для балці, завантаженої нерівномірно розподіленим навантаженням (рис. 5.12).

Визначимо опорні реакції з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_A = R_B \cdot \ell - \frac{q\ell}{2} \frac{2\ell}{3} = 0;$$

$$R_B = \frac{q\ell}{3};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot \ell + \frac{q\ell}{2} \frac{\ell}{3} = 0;$$

$$R_A = \frac{q\ell}{6}.$$

При визначенні опорних реакцій розподілене навантаження було замінено рівнодіючою R (рис. 5.4), що дорівнює площі цього навантаження (площі трикутника) і прикладена в її центрі ваги.

Перевіримо правильність визначення реакцій:

$$\sum F_y = -\frac{q\ell}{6} - \frac{q\ell}{3} + \frac{q\ell}{2} = 0.$$

Отже опорні реакції знайдені правильно. Балка, яка розглядається, має одну ділянку. Складемо вирази Q і M , використовуючи метод перерізів. Для довільного перерізу x запишімо вирази Q і M , розглядаючи рівновагу лівої відсіченої частини балки:

$$Q = \frac{q\ell}{6} - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{\ell} = \frac{q}{6} \left(\ell - \frac{3x^2}{\ell} \right);$$

$$M = \frac{q\ell}{6} x - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{\ell} \frac{x}{3} = \frac{q \cdot x}{6} \left(\ell - \frac{x^2}{\ell} \right).$$

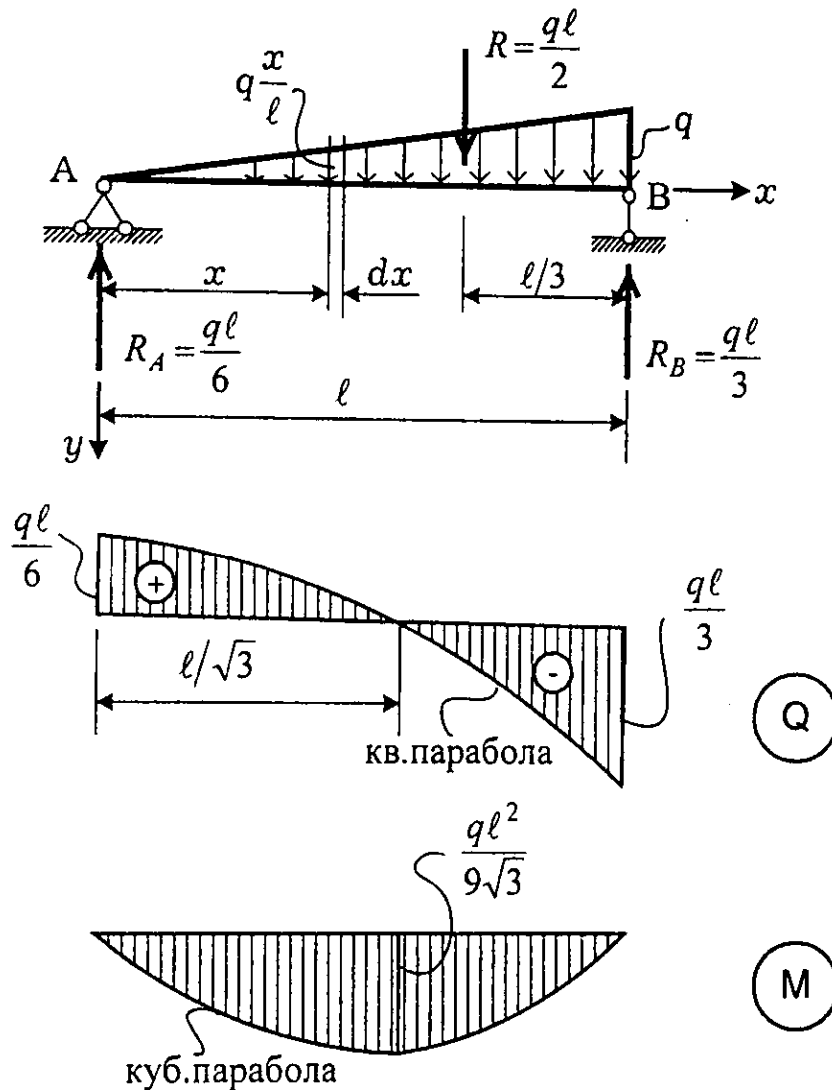


Рис. 5.12

Таким чином, поперечна сила змінюється за квадратичною залежністю, а згинальний момент за кубічною.

Побудуємо епюру Q , для цього обчислимо значення:

$$\text{при } x=0 \quad Q = \frac{q\ell}{6};$$

$$\text{при } x=l \quad Q = -\frac{q\ell}{3}.$$

Через них проведемо квадратичну параболу, звернену опуклістю нагору, тому що в перерізі А ($x=0$) знаходиться її вершина.

Побудуємо епюру М, для цього обчислимо значення згинального моменту на початку та кінці ділянки:

$$\text{при } x=0 \quad M = 0;$$

$$\text{при } x=l \quad M = 0.$$

На цій ділянці є характерний переріз, де $Q=0$, а згинальний момент має екстремальне значення (5.5) $M = M_{\text{екстр}}$. Знайдемо його:

$$Q = \frac{q}{6} \left(\ell - \frac{3x^2}{\ell} \right) = 0. \text{ Звідси, розв'язуючи квадратне рівняння знайдемо}$$

$$x = \frac{\ell}{\sqrt{3}}.$$

Визначаємо момент у цьому перерізі:

$$M = M_{\text{екстр}} = \frac{q \cdot \ell^2}{9\sqrt{3}}.$$

За обчисленими значеннями згинальних моментів будемо кубічну параболу з вершиною при $x = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ (дотична до епюри згинальних моментів в цьому перерізі паралельна осі балці).

5.4. Внутрішні зусилля в рамах

Стержнева система, елементи котрої (стійки – вертикальні і ригелі – горизонтальні) у всіх або деяких вузлах жорстко сполучені між собою, називаються *рамою*. Вісь таких систем являє собою ламану лінію. Якщо ламана лінія рами лежить в одній площині. То її називають плоскою.

Будемо розглядати плоскі рами, навантажені в її площині. Тоді внутрішні зусилля, які виникають в якому-небудь перерізі, можна звести до трьох величин: згинального моменту M , поперечної сили Q і подовжніх зусиль N .

Визначення поперечної сили в даному випадку розширюється, тому що у ламаного бруса сили не завжди перпендикулярні до осі. Отже поперечною силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на нормаль до осі бруса в тому перерізі, для якого визначається поперечна сила.

Подовжньою силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на дотичну до його осі.

Поняття “зліва”, “справа”, “донизу” й “вверх” при розгляді вертикальних елементів системи залежить від спостерігача. В опорі матеріалів, як правило, прийнято спостерігати з середини контуру, який утворює рама. Тоді правило знаків для згинальних моментів і поперечних сил залишається таким же як і при згині балок (рис. 5.1).

Подовжня сила, як і при розтязі-стиску стержнів, вважається додатною, якщо вона викликає розтяг стержня у перерізі, що розглядається, і від’ємною, якщо вона викликає стиск.

Крім перевірок з використанням диференціальних залежностей, при згині рам, необхідно ще перевірити рівновагу вузлів рами, тобто частин рами, отриманих проведенням перерізів, розташованих на нескінченно малих відстанях від точки з’єднання стержнів і окремих її частин.

5.5. Приклади розрахунків

Приклад 1.

Побудувати епюру внутрішніх зусиль для балки, приведеної на рис. 5.13,а і визначити максимальні значення внутрішніх зусиль, що діють у балці, якщо $F=40$ кН.

Розв'язання.

Розрахунок починаємо з визначення опорних реакцій R_A і R_B балки, яка є однопрогінною балкою. В даному випадку використаємо рівняння моментів сил відносно точок А і В балки [9]:

$$\sum M_A = R_B \cdot 6.4 - F \cdot 2.4 = 0; \quad R_B = \frac{F \cdot 2.4}{6.4} = \frac{40 \cdot 2.4}{6.4} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 6.4 + F \cdot 4 = 0; \quad R_A = \frac{F \cdot 4}{6.4} = \frac{40 \cdot 4}{6.4} = 25 \text{ кН}.$$

Для перевірки візьмемо суму проекцій сил на вісь y :

$$\begin{aligned} \sum F_y = R_A - F + R_B &= 0, \\ 25 - 40 + 15 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Реакції R_A і R_B визначено вірно. Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль балку розіб'ємо на ділянки. Межами ділянок повинні бути: точки прикладання зосереджених сил і моментів, а також початок і кінець розподілених навантажень. У нашому прикладі на балці таких ділянок – дві.

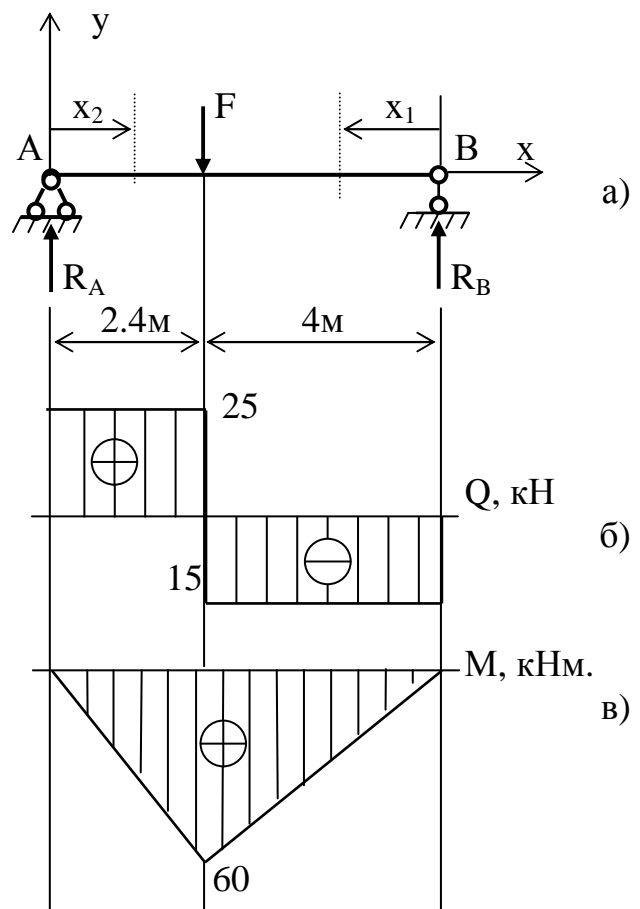


Рис. 5.13

Правила знаків для визначення внутрішніх зусиль наведено на рис. 5.4.

Спочатку побудуємо епюру поперечних сил, які дорівнюють алгебраїчній сумі проекцій лівих (правих) сил на нормаль до осі балки. Для цієї балки потрібно перерізи проводити двічі, на кожній ділянці окремо.

Потім розглядати ту частину умовно розрізаної балки, на котрій діє менше зовнішніх сил.

Для перерізів з координатами x_1 і x_2 отримаємо:

$$\text{при } 0 \leq x_1 \leq 4\text{м} \quad Q(x_1) = -R_B = -15 \text{ кН};$$

$$\text{при } 0 \leq x_2 \leq 2.4\text{м} \quad Q(x_2) = R_A = 25 \text{ кН}.$$

За одержаними значеннями на рис. 5.13,б побудовано епюру поперечної сили Q .

Побудуємо далі епюру згинальних моментів. При побудові епюрі врахуємо що на кожній ділянці згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів лівих (правих) сил відносно центру ваги перерізу.

Для прийнятих перерізів балки буде:

$$\text{при } 0 \leq x_1 \leq 4\text{м} \quad M(x_1) = R_B \cdot x_1 = 15x_1;$$

$$M(x_1=0) = 0; \quad M(x_1=4) = 15 \cdot 4 = 60 \text{ кНм};$$

$$\text{при } 0 \leq x_2 \leq 2.4\text{м} \quad M(x_2) = R_A \cdot x_2 = 25x_2;$$

$$M(x_2=0) = 0; \quad M(x_2=2.4) = 25 \cdot 2.4 = 60 \text{ кНм}.$$

На кожний з ділянок залежності $M(x_1)$ і $M(x_2)$ є лінійними. Тому з'єднуємо отримані точки прямими та будуємо епюру. Її наведено на рис. 5.13,в.

Відповідь: максимальні значення поперечної сили і згинального моменту: $Q_{\max} = 25 \text{ кН}$, $M_{\max} = 60 \text{ кНм}$.

Приклад 2.

Підібрати двотавровий переріз сталеві балки, приведеної на рис. 5.14,а з умови міцності. Допустимі напруження вважати рівними $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$, а зовнішні сили $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 25 \text{ кН}$.

Розв'язання.

Для побудови епюр поперечної сили Q і згинального моменту M визначимо реакції опор в точках B і C балки, яка є однопрогінною з двома консолями.

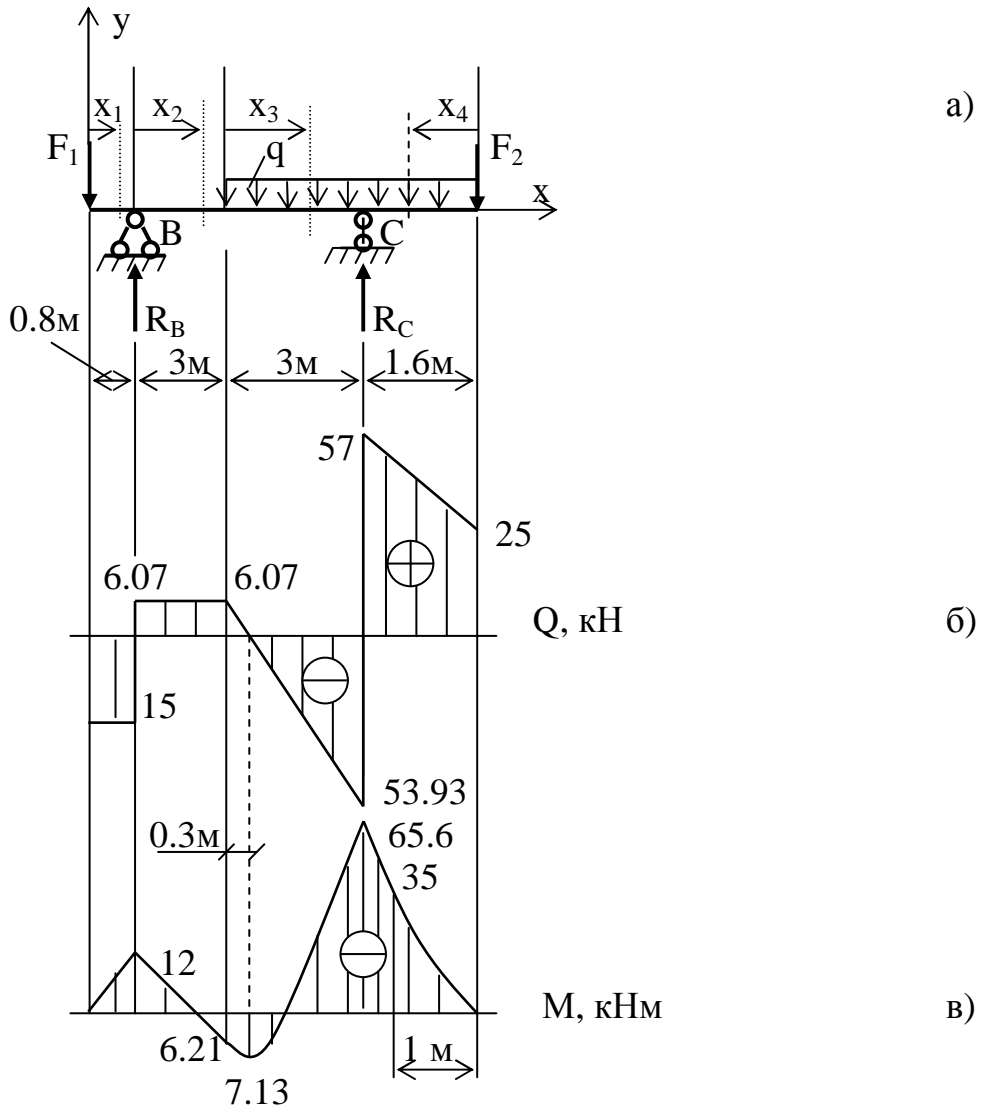


Рис. 5.14

При визначенні опорних реакцій використовуємо рівняння моментів сил відносно точок B і C :

$$\sum M_B = F_1 \cdot 0.8 - q \cdot 4.6 \cdot 5.3 + R_C \cdot 6 - F_2 \cdot 7.6 = 0;$$

$$R_C = \frac{-F_1 \cdot 0.8 + q \cdot 24.38 + F_2 \cdot 7.6}{6} =$$

$$= \frac{-15 \cdot 0.8 + 20 \cdot 24.38 + 25 \cdot 7.6}{6} = 110.93 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = F_1 \cdot 6.8 - R_B \cdot 6 + q \cdot 4.6 \cdot 0.7 - F_2 \cdot 1.6 = 0;$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot 6.8 + q \cdot 3.22 - F_2 \cdot 1.6}{6} =$$

$$= \frac{15 \cdot 6.8 + 20 \cdot 3.22 - 25 \cdot 1.6}{6} = 21.07 \text{ кН}.$$

Для перевірки складемо рівняння сил в напрямку осі у:

$$\sum F_y = -F_2 + R_B - q \cdot 4.6 + R_C - F_1 = 0,$$

$$-15 + 21.07 - 20 \cdot 4.6 + 110.93 - 25 = 0,$$

$$0 = 0.$$

З останньої тотожності випливає, що опорні реакції визначено правильно. Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль балку поділяємо на ділянки. У нашому прикладі на балці таких ділянок чотири. Спочатку побудуємо епюру поперечних сил. Для побудови епюри виконаємо чотири перерізи балки з координатами x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\text{для } 0 \leq x_1 \leq 0.8 \text{ м } Q(x_1) = -F_1 = -15 \text{ кН};$$

$$\text{для } 0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м } Q(x_2) = -F_1 + R_B = -15 + 21.07 = 6.07 \text{ кН};$$

$$\text{для } 0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м } Q(x_3) = -F_1 + R_B - qx_3 = -15 + 21.07 - 20x_3 = 6.07 - 20x_3,$$

$$Q(x_3=0) = 6.07 \text{ кН}, \quad Q(x_3=3) = 6.07 - 20 \cdot 3 = 53.93 \text{ кН};$$

$$\text{для } 0 \leq x_4 \leq 1.6 \text{ м } Q(x_4) = F_2 + qx_4 = 25 + 20x_4 = 25 + 20x_4,$$

$$Q(x_4=0) = 25 \text{ кН}, \quad Q(x_4=1.6) = 25 + 20 \cdot 1.6 = 57 \text{ кН}.$$

За одержаними даними будуємо епюру Q (рис. 5.14, б).

Далі будуємо епюру згинальних моментів.

Для наведених перерізів буде:

$$\text{для } 0 \leq x_1 \leq 0.8 \text{ м } M(x_1) = -F_1 \cdot x_1 = -15x_1 \text{ (залежність лінійна)},$$

$$\begin{aligned}
& M(x_1=0)=0, & M(x_1=0.8) &= -15 \cdot 0.8 = -12 \text{ кНм}; \\
\text{для } 0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м} & M(x_2) &= -F_1(x_2+0.8) + R_B x_2 = -15(x_2+0.8) + 21.07x_2 = \\
& &= 6.07x_2 - 12 \text{ (залежність лінійна)}, \\
& M(x_2=0) &= -12 \text{ кНм}, & M(x_2=3) &= 6.07 \cdot 3 - 12 = 6.21 \text{ кНм}; \\
\text{для } 0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м} & M(x_3) &= -F_1(x_3+3.8) + R_B(3+x_3) - q \frac{x_3^2}{2} = \\
& &= -15(x_3+3.8) + 21.07(3+x_3) - 20 \frac{x_3^2}{2} = \\
& &= 6.21 + 6.07x_3 - 10x_3^2 \text{ (залежність квадратична)}, \\
& M(x_3=0) &= 6.21 \text{ кНм}, \\
& M(x_3=3) &= 6.21 + 6.07 \cdot 3 - 10 \cdot 9 = -65.58 \text{ кНм}. \\
\text{для } 0 \leq x_4 \leq 1.6 \text{ м} & M(x_4) &= -F_2 \cdot x_4 - q \frac{x_4^2}{2} = -25x_4 - 20 \frac{x_4^2}{2} = \\
& &= -25x_4 - 10x_4^2 \text{ (залежність квадратична)}, \\
& M(x_4=0) &= 0, & M(x_4=1.6) &= -25 \cdot 1.6 - 10 \cdot 1.6^2 = -65.6 \text{ кНм}
\end{aligned}$$

Щоб побудувати епюру $M(x_3)$ на ділянці з розподіленням навантаженням, потрібно побудувати криву – другого порядку параболу. Для цього необхідно не менше трьох точок для $M(x_3)$. Дві з їх вже визначено: $M(x_3=0)=6.21$ кНм і $M(x_3=3)=-65.58$ кНм. Третє значення M визначимо для перерізу з координатою x_3^* , в якому поперечна сила дорівнює нулю:

$$Q(x_3^*) = 6.07 - 20x_3^* = 0.$$

$$\text{Звідси: } x_3^* = 6.07/20 = 0.3 \text{ м.}$$

Тоді:

$$M(x_3^*=0.3) = 6.21 + 6.07 \cdot 0.3 - 10 \cdot 0.3^2 = 7.13 \text{ кНм.}$$

На ділянці $0 \leq x_3 \leq 3\text{м}$ друга похідна $\frac{d^2M}{dx_3^2} = -20$, тобто від'ємна, тому в перерізі x_3 маємо найменше значення згинального моменту на ділянці.

Для четвертої ділянки епюра $M(x_4)$ також криволінійна. Тому на цій ділянці знову визначимо значення моменту $M(x_4)$ у трьох точках. Поперечна сила на ділянці не має значення $Q=0$, тому третю точку визвемо довільно, наприклад $x_4=1$:

$$M(x_4=1) = -25 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 = -35 \text{ кНм.}$$

Епюра M наведена на рис. 5.14, в.

Підберемо тепер переріз балки. Найбільший згинальний момент (за модулем), що виникає в балці, дорівнює $M_{\max} = 65.6 \text{ кНм} = 6560 \text{ кНсм}$. З умови міцності при згині (5.10):

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6560}{16} = 410 \text{ см}^3.$$

За сортаментом ДСТУ 8239-89 (див. додаток) приймаємо двотавр №30, для якого момент опору згину $W = 472 \text{ см}^3$.

Відповідь: Умові міцності відповідає сталева балка, що виготовлена з двотавру №30.

Приклад 3.

Схема навантаження і розміри балки наведено рис. 5.15, а. Необхідно підібрати поперечний переріз двотаврової сталевий балки при $[\sigma] = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$,

а також балки з деревини прямокутного та круглого перерізу при

$$[\sigma] = 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Розв'язання.

Визначимо опорні реакції балки в точках А і В:

$$\sum M_A = F \cdot 3.0 - q \cdot 5.0 \cdot 2.5 - M + R_B \cdot 5.0 = 0,$$

$$R_B = \frac{-20 \cdot 3.0 + 20 \cdot 5.0 \cdot 2.5 + 30}{5.0} = 44 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = F \cdot 8.0 - R_A \cdot 5.0 + q \cdot 5.0 \cdot 2.5 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 8.0 + 20 \cdot 5.0 \cdot 2.5 - 30}{5.0} = 76 \text{ кН.}$$

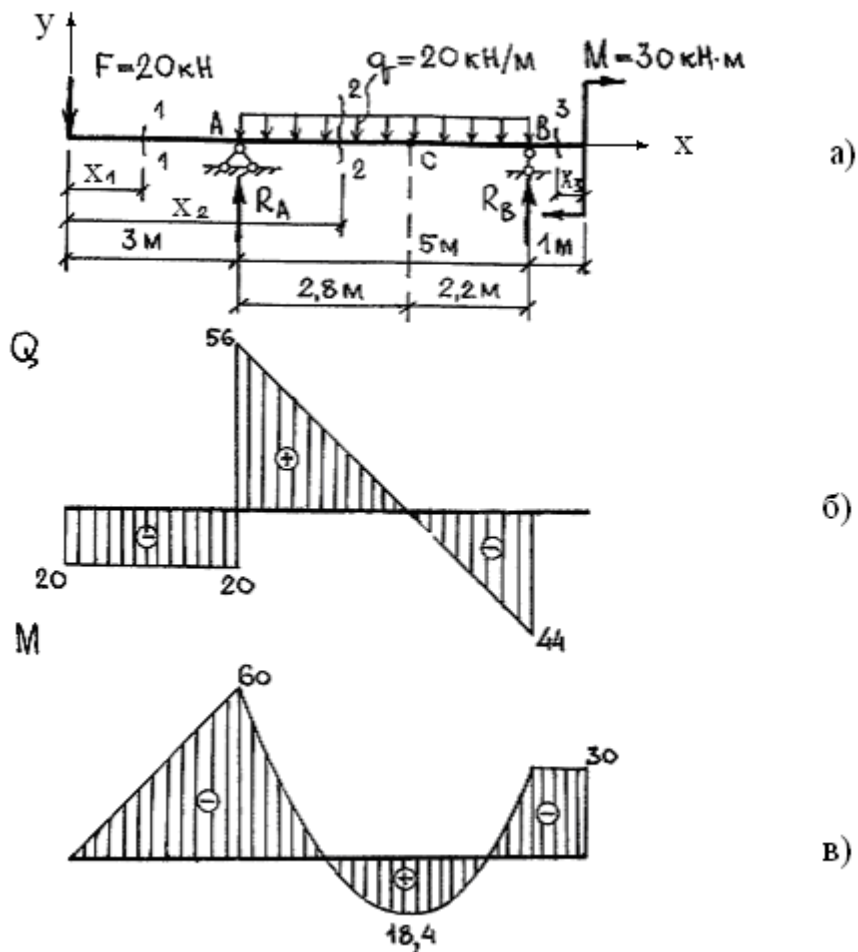


Рис. 5.15

Для перевірки складемо рівняння $\sum F_y = 0$,

$$-F + R_A - q \cdot 5.0 + R_B = -20 + 76 - 20 \cdot 5.0 + 44 = 0,$$

отже опорні реакції знайдені вірно.

Для визначення внутрішніх силових факторів Q і M розбиваємо балку на три ділянки з координатами x_1 , x_2 , x_3 і розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3 на них. Відкидаємо праві частини балки для перерізів 1-1 і 2-2 (ліву - для переріза 3-3) і розглядаємо рівновагу лівої (правої) частини цих балок.

Переріз 1-1, $0 < x_1 < 3,0$ м.

Розглядаючи рівновагу лівої частини балки одержимо:

$$Q(x_1) = -F = -20 \text{ кН.}$$

Із одержаного розв'язку можна зробити висновок, що поперечна сила на цій ділянці є постійною, тому її графічне зображення буде прямою лінією, паралельною осі x . Будуємо епюру $Q(x_1)$.

Згинальні моменти на ділянці одержимо, взявши суму моментів лівих сил відносно перерізу 1-1:

$$M(x_1) = -F \cdot x_1 \text{ (залежність лінійна).}$$

Відповідну епюру одержимо за значеннями моментів у двох точках:

при $x_1 = 0$ $M(x_1 = 0) = 0$;

при $x_1 = 3,0$ м $M(x_1 = 3,0) = -20 \cdot 3,0 = -60$ кНм

Будуємо епюру $M(x_1)$.

Переріз 2-2 $3,0 \text{ м} < x_2 < 8,0$ м.

Поперечна сила на цій ділянці описується рівнянням

$$Q(x_2) = -F + R_A - q(x_2 - 3,0)$$

і змінюється за лінійним законом:

при $x_2 = 3,0$ м $Q(x_2) = -F + R_A = -20 + 76 = 56$ кН;

при $x_2 = 8,0$ м $Q(x_2) = -F + R_A - q \cdot 5,0 = -20 + 76 - 20 \cdot 5,0 = -44$ кН.

Будуємо епюру $Q(x_2)$.

Згинальний момент на ділянці визначається виразом:

$$M(x_2) = -F \cdot x_2 + R_A(x_2 - 3,0) - q \frac{(x_2 - 3,0)^2}{2} \quad (\text{квадратна парабола})$$

при $x_2 = 3,0 \text{ м}$ $M(x_2) = -F \cdot 3,0 = -20 \cdot 3,0 = -60 \text{ кНм}$.

при $x_2 = 8,0 \text{ м}$ $M(x_2) = -F \cdot x_2 + R_A \cdot 5,0 - q \frac{5,0^2}{2} =$
 $= -20 \cdot 8,0 + 76 \cdot 5,0 - \frac{5,0^2}{2} = -30 \text{ кНм}$.

Максимальний згинаючий момент знаходиться в перерізі, де поперечна сила $Q(x_2)$. Виходячи з цього, одержуємо

$$Q(x_2^*) = -F + R_A - q(x_2 - 3,0) = -20 + 67 - 20(x_2 - 3,0) = 0, \quad x_2 = 5,8 \text{ м}$$

тому

$$M(x_2^* = 5,8) = -F \cdot x_2 + R_A(x_2 - 3,0) - q \frac{(x_2 - 3,0)^2}{2} =$$
$$-20 \cdot 5,8 + 76(5,8 - 3,0) - 20 \frac{(5,8 - 3,0)^2}{2} = 18,4 \text{ кНм}$$

Будуємо епюру $M(x_2)$ по трьох точках.

Переріз 3-3, $0 < x_3 < 1,0 \text{ м}$.

поперечна сила $Q(x_3) = 0$;

згинальний момент $M(x_3) = -M = -30 \text{ кНм}$

Будуємо епюри $Q(x_3)$ і $M(x_3)$.

Поперечні перерізи балки підбираємо за максимальним по модулю значенням згинального моменту, яке дорівнює 60 кНм.

Для сталеної балки:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6000}{16} = 375 \text{ см}^3$$

За сортаментом ДСТУ 8239-89 (див. додаток) вибираємо двотавр № 27а, для якого $W = 407 \text{ см}^3$.

Для дерев'яної балки прямокутного профілю при $h = 2b$:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6000}{1} = 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3.$$

Момент опору прямокутного перерізу

$$W = \frac{bh}{6} = \frac{h/2 \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12}.$$

Отже одержимо

$$\frac{h^3}{12} \geq 6 \cdot 10^3, \quad h \geq \sqrt[3]{12 \cdot 6 \cdot 10^3} = 41.6 \text{ см}, \quad b = h/2 = 41.6/2 = 20.8 \text{ см}.$$

Для дерев'яної балки круглого перерізу:

$$W = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Отже

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq 6 \cdot 10^3, \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^3}{3.14}} = 39.4 \text{ см}.$$

Відповідь: Умовам міцності відповідають для сталеві балки двотавр № 27а; для балки з деревини: прямокутний переріз з $h=41,6$ см, $b=20,8$ см; круглий переріз $d=39,4$ см.

Приклад 4.

Для рами, показаної на рис. 5.16, визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних і поздовжніх сил і згинаючих моментів.

Розв'язання.

Визначаємо опорні реакції, користуючись рівняннями статичної рівноваги:

$$\begin{aligned} \Sigma Z; \quad q \cdot 2,0 - F - H_B = 20 \cdot 2,0 - 10 - H_B = 0 \Rightarrow \\ H_B = 30 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \quad -q \cdot 2,0 \cdot 1,0 - M + R_B \cdot 3,0 - H_B \cdot 2,0 = \\ = -20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 - 50 + R_B \cdot 3,0 - 30 \cdot 2,0 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_B = \frac{20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 + 30 \cdot 2,0}{3,0} = 50 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = 0 & \quad -q \cdot 2,0 \cdot 3,0 - M + F \cdot 2,0 + R_A \cdot 3,0 = \\ & = -20 \cdot 2,0 \cdot 3,0 - 50 + 10 \cdot 2,0 + R_A \cdot 3,0 \Rightarrow \\ R_A & = \frac{20 \cdot 2,0 \cdot 3,0 + 50 - 10 \cdot 2,0}{3,0} = 50 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Одержані величини опорних реакцій мають додатні значення, тобто їх напрями співпадають з прийнятими.

Перевірка:

$$\Sigma y = 0; \quad -R_A + R_B = -50 + 50 = 0. \quad 0=0$$

Опорні реакції знайдені правильно.

Для визначення Q , N і M користуємось методом перерізів. Розбиваємо раму на чотири ділянки і розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 на них. Якщо на кожній з ділянок відкинути одну з частин рами, то рівновага частини, що залишиться, буде забезпечуватися відповідними поперечними і поздовжніми силами, згинаючими моментами.

Для усіх перерізів поперечну силу Q знаходимо з рівняння проєкцій сил на осі, перпендикулярні до відповідних стояків і ригелей, поздовжню силу N – з рівняння проєкцій сил на осі, паралельні відповідним стоякам і ригелям, а згинальний момент M – з рівняння суми моментів від усіх сил, що діють на залишену частину, відносно центра ваги відповідних перерізів.

Переріз 1-1 (ділянка I), $0 < z_1 < 2,0$ м,

$$Q_1 = -q \cdot z_1, \quad N = R_A, \quad M_1 = -\frac{q \cdot z_1^2}{2}.$$

На цій ділянці поперечна сила змінюється за лінійним законом, поздовжня сила має постійне значення і розтягує стержень, а згинаючий момент змінюється за законом квадратної параболи.

При $z_1 = 0$: $Q_1 = 0$; $N_1 = R_A = 50 \text{ кН}$; $M_1 = 0$;

При $z_1 = 2,0$ м: $Q_1 = -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН}$; $N_1 = R_A = 50 \text{ кН}$;

$$M_1 = -\frac{q \cdot 2,0^2}{2} = -\frac{20 \cdot 2,0^2}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

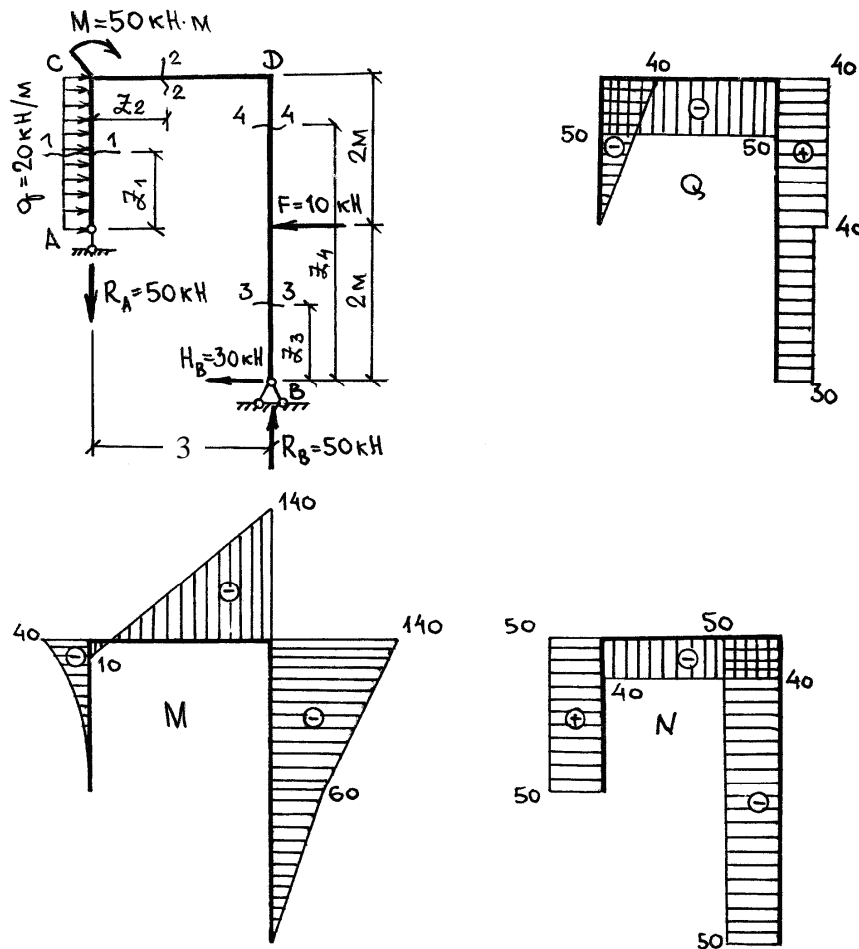


Рис. 5.16

Переріз 2-2 (ділянки 2), $0 < z_2 < 3,0 \text{ м}$,

$$Q_2 = -R_A, \quad N_2 = -q \cdot 2,0, \quad M_2 = -R_A \cdot z_2 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M.$$

На цій ділянці поперечна сила має постійне значення; поздовжня сила – також, а згинальний момент змінюється за лінійним законом.

$$\begin{aligned} \text{При } z_2 = 0: \quad Q_2 &= -R_A = -50 \text{ кН}, & N_2 &= -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН}, \\ M_2 &= -q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M = -20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 = 10 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } z_2 = 3,0 \text{ м}: \quad Q_2 &= -R_A = -50 \text{ кН}; & N_2 &= -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН}; \\ M_2 &= -R_A \cdot 3,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M = -50 \cdot 3,0 - 20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 = \\ &= -140 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Переріз 3-3, (ділянка 3) $0 < z_3 < 2,0$ м,

$$Q_3 = H_B; \quad N_3 = -R_B; \quad M_3 = -H_B \cdot z_3.$$

Поперечна і поздовжня сили на цій ділянці мають постійне значення; згинаючий момент змінюється за лінійним законом.

При $z_3 = 0$ $Q_3 = H_B = 30$ кН, $N_3 = -R_B = -50$ кН, $M_3 = 0$;

при $z_3 = 2,0$ м $Q_3 = H_B = 30$ кН, $N_3 = -R_B = -50$ кН,

$$M_3 = -H_B \cdot 2,0 = -30 \cdot 2,0 = -60 \text{ кНм.}$$

Переріз 4-4, (ділянка 4) $2,0$ м $< z_4 < 4,0$ м,

$$Q_4 = H_B + F, \quad N_4 = -R_B, \quad M_4 = -H_B \cdot z_4 - F \cdot (z_4 - 2).$$

На цій ділянці поперечна і поздовжня сили мають постійне значення; згинаючий момент змінюється за лінійним законом:

При $z_4 = 2,0$ м $Q_4 = H_B + F = 30 + 10 = 40$ кН, $N_4 = -R_B = -50$ кН,

$$M_4 = -H_B \cdot 2,0 = -30 \cdot 2,0 = -60 \text{ кНм.}$$

При $z_4 = 4,0$ м $Q_4 = H_B + F = 30 + 10 = 40$ кН, $N_4 = -R_B = -50$ кН,

$$M_4 = -H_B \cdot 4,0 - F \cdot 2,0 = -30 \cdot 4,0 - 10 \cdot 2,0 = -140 \text{ кНм;}$$

За результатами обчислень будуюмо епюри Q , N і M . приймаючи до уваги знаки знайдених величин.

При побудові епюр Q , N додатний напрям осі ординат обираємо вгору (тобто назовні контуру рами), при побудові епюри M – вниз, бо ця епюра будується на розтягнутих волокнах.

Як видно з прикладу, розрахунок рами пов'язаний з великими обчисленнями, що може привести до хибних результатів. Тому знайдені значення Q , N і M слід перевірити з використанням рівнянь, які не використовувались вище.

Перевірку правильності знайдених значень Q , N і M проводять за умови рівноваги усіх вузлів рами. Для цього треба вирізати вузли C і D ,

прикласти в перерізах вузлів зусилля Q , N і M з напрямками, що відповідають правилу знаків (рис.5.4).

Вузол C . Відзнакою цього вузла є наявність у ньому зовнішнього моменту $M = 50$ кНм. Прикладаємо його до вузла. Складаємо три умови рівноваги (рис. 5.17,а).

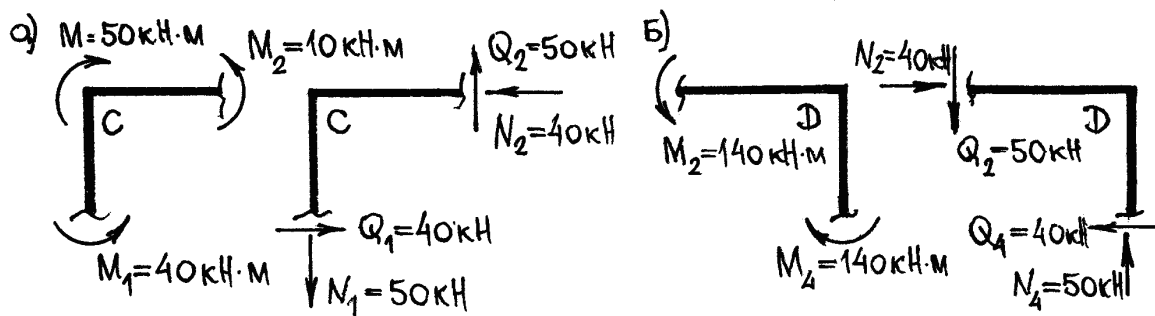


Рис. 5.17

$$\Sigma M_C = M_1 + M_2 - M = 40 + 10 - 50 = 0;$$

$$\Sigma z = Q_1 - N_2 = 40 - 40 = 0;$$

$$\Sigma y = -N_1 + Q_2 = -50 + 50 = 0.$$

Всі рівняння задовольняють вимогам рівноваги, тобто вузол C знаходиться в рівновазі.

Вузол D . Рівняння рівноваги для цього вузла (рис. 5.17,б):

$$\Sigma M_D = M_2 - M_4 = 140 - 140 = 0;$$

$$\Sigma z = N_2 - Q_4 = 40 - 40 = 0;$$

$$\Sigma y = -Q_2 + N_4 = -50 + 50 = 0.$$

Вузол D також знаходиться в рівновазі.

Можна зробити висновок, що зусилля Q , N і M визначені правильно.

6. ЗСУВ І КРУЧЕННЯ

6.1. Чистий зсув

У розрахунках деяких елементів конструкцій зустрічається вид навантаження, коли в перерізах діють тільки дотичні напруження. Такий напружений стан називається *чистим зсувом*. Він характеризується зміною спочатку прямих кутів – кутовою деформацією чи відносним зсувом.

Кутові деформації є наслідком дотичних напружень і зв'язані з ними функціональними залежностями. У межах пружності між відносним зсувом і дотичними напруженнями (рис. 6.1), що діють по гранях елемента, існує лінійна залежність. Ця залежність називається законом Гука при зсуві:

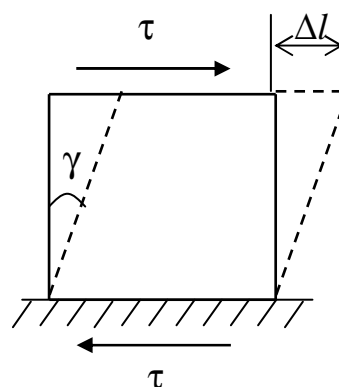


Рис. 6.1

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (6.1)$$

де G – модуль пружності другого роду (модуль пружності при зсуві). Він визначається дослідним шляхом і є характеристикою матеріалу;

γ - кутова деформація.

Співвідношення (6.1) можна подати у вигляді

$$\tau = G\gamma. \quad (6.2)$$

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності при зсуві і модулем пружності при розтягу-стиску існує зв'язок виду:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

де E – модуль пружності при розтягу-стиску;

μ - коефіцієнт Пуассона.

6.2. Розрахунок на зріз

Деформації зсуву в тілах спостерігаються в тих випадках, коли з усіх внутрішніх силових факторів, що діють у перерізі, ненульовими є тільки поперечні сили. На практиці зсув в чистому виді одержати важко, як правило, деформації зсуву супроводжуються іншими видами деформацій – стиском чи згином.

З достатнім ступенем наближення деформація зсуву практично може бути отримана у випадку, коли на брус із протилежних сторін на близькій відстані друг від друга діють дві рівні сили, перпендикулярні його осі і спрямовані в протилежні сторони, як показано на рис. 6.2. Руйнування брусу при такому типі навантаження називається зрізом.

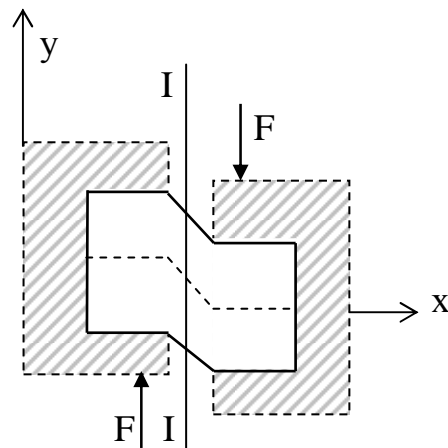


Рис. 6.2

Розглянемо внутрішні силові фактори, напруження і деформації, що виникають при навантаженні брусу в такий спосіб. У даному випадку з усіх внутрішніх факторів у розглянутому перерізі I-I ненульовим буде тільки поперечна сила Q_y , що відповідно до методу перерізів дорівнює всім силам у відкинутій частині. Надалі не будемо вказувати індекс при силі, що показує, в якому напрямку вона діє:

$$Q=F.$$

Припустимо, що величина дотичних напружень у поперечному перерізі не змінюється, тоді:

$$Q = \int_A \tau dA = \tau \int_A dA = \tau A, \quad (6.3)$$

відкіля:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \quad (6.4)$$

На практиці припущенням про рівномірність розподілу дотичних напружень користуються при розрахунках на зріз болтів, заклепувальних з'єднань, шпонок і інших деталей.

6.3. Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом

Крученням називається такий вид деформування, при якому з усіх внутрішніх силових факторів ненульовим є тільки момент що крутить, $M_{кр}$. Кручення прямого бруса відбувається при навантаженні його зовнішніми крутними моментами, площина дії яких перпендикулярна до подовжньої осі бруса. Бруси, що працюють на кручення, звичайно називають валами, осями.

Розглянемо круглий брус АВ, жорстко закріплений у площини MN, до вільного кінця якого прикладена пара сил, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі бруса (рис. 6.3).

Ця пара сил створює момент $M_{кр} = Fa$, що скручує брус. Досвід показує, що при закрученні на невеликий кут у межах пропорційності матеріалу діаметр бруса і його довжина не змінюються, вісь залишається прямою, а поперечний переріз плоским. Зміна форми відмічається твірними ab стержня, що із прямих ліній стають гвинтовими bb' (рис. 6.3). Тобто при крученні відбувається зсув поперечних перерізів бруса, кожний поперечний переріз повертається навколо осі x як жорсткий тонкий диск.

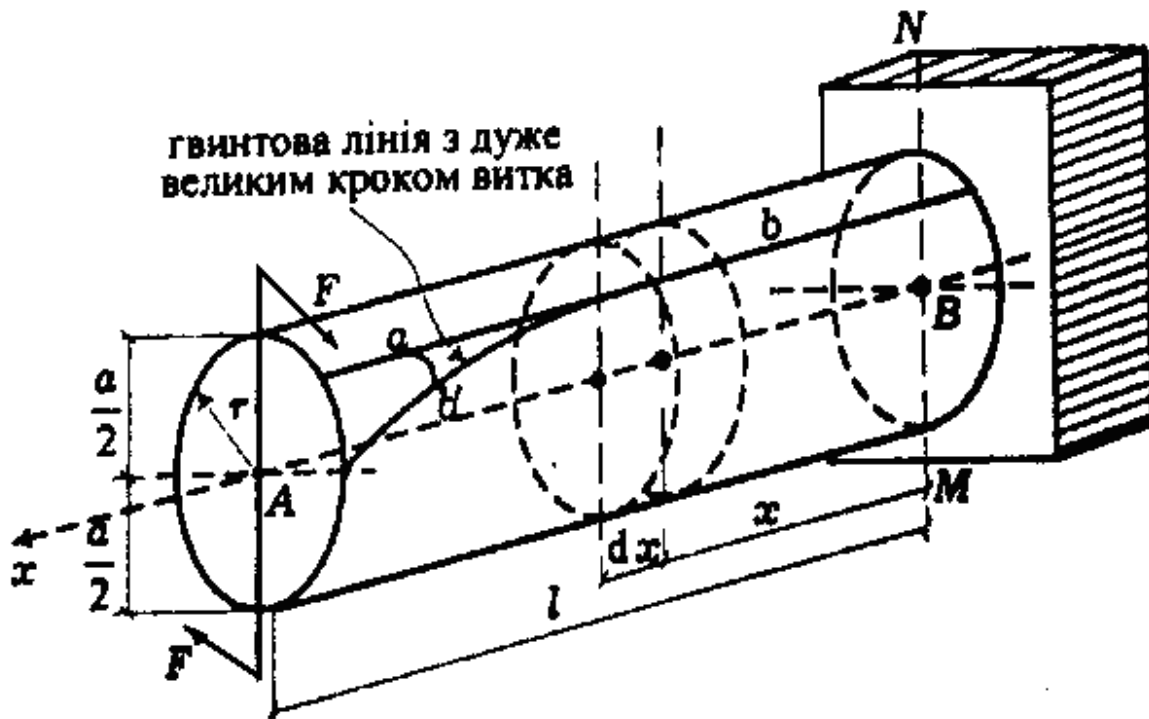


Рис. 6.3

6.4. Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент

Внутрішні крутні моменти в поперечних перерізах валу визначаються методом перерізів з умови рівноваги відсіченої частини валу:

$$\sum M_x = 0.$$

Крутний момент у довільному поперечному перерізі валу дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що скручують (включаючи і реакції закріплення), прикладених до нього по одну сторону від розглянутого перерізу.

У найпростішому випадку, коли вал, навантажений по краях тільки двома зовнішніми моментами, що рівні один одному за величиною і зворотними з напрямком, крутний момент у будь-якому поперечному перерізі валу за величиною дорівнює цим зовнішнім моментам.

У більш складних випадках, коли до вала прикладені кілька зовнішніх моментів, крутні моменти у поперечних перерізах будуть неоднакові на різних ділянках вала.

При розрахунках на міцність і жорсткість знак моменту, що крутить, не має особливого значення, однак для зручності прийняте наступне правило знаків: крутний момент, вважається додатним, якщо при погляді в торець відсіченої частини вала, зовнішній момент представляється спрямованим по годинниковій стрілці. Додатні і від'ємні напрямки моменту, що крутить, показані на рис. 6.4.

Зміну крутних моментів по довжині вала зручно представляти за допомогою епюр моментів, які будуються згідно загальним правилам.

При побудові епюр моментів варто мати на увазі, що в перерізі, у якому на вал діє зовнішній зосереджений момент, ордината епюри міняється стрибкоподібно на величину, рівну значенню цього моменту.

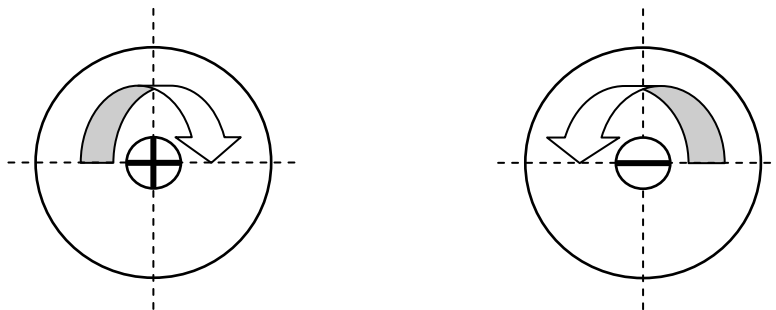


Рис. 6.4

Якщо прямий вал знаходиться у стані спокою чи рівномірного обертання, то алгебраїчна сума всіх зовнішніх моментів, прикладених до нього дорівнює нулю.

При розрахунку валів у ряді випадків величини зовнішніх моментів, що скручують, визначають за величиною споживаної потужності і по швидкості обертання вала. Якщо вал робить за хвилину n оборотів, то кут

повороту вала за 1 секунду, виражений у радіанах, дорівнює $\frac{n}{60} 2\pi = \frac{\pi n}{30}$.

Робота моменту, що скручує, $M_{\text{скр}}$ за 1 сек, тобто потужність N , що передається валом, дорівнює добутку величини моменту, що скручує, на кут повороту вала в радіанах за секунду:

$$N = \frac{M_{\text{скр}} \pi n}{30}.$$

Звідси, якщо потужність виражена в кНм, знаходимо:

$$M_{\text{скр}} = \frac{30N}{\pi n} \text{ (кНм)}. \quad (6.5)$$

Якщо потужність задана в кінських силах, то:

$$M_{\text{скр}} = 7.162 \frac{N}{n} \text{ (кНм)}. \quad (6.6)$$

Якщо потужність N задана в кіловатах, то з огляду на те, що 1 л.с.=0.736 кВт, одержимо:

$$M_{\text{скр}} = 9.736 \frac{N}{n} \text{ (кНм)}. \quad (6.7)$$

6.5. Напруження і деформації при крученні

Для того, щоб визначити напруження, які виникають у поперечних перерізах вала, розглянемо внутрішні зусилля, що виникають у цих перерізах при крученні. З усіх силових факторів ненульовим виявляється тільки крутний момент, відповідно до співвідношень (1.4), який можна визначити в такий спосіб, якщо сполучити систему координат з центром ваги перерізу:

$$M_{\text{кр}} = \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA = \int_A \tau \rho dA; \quad (6.8)$$

де τ - дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dA , напрямком якого є перпендикулярним до прямої, проведеної до цієї площадки від центра ваги перерізу, як показано на рис. 6.5;

ρ - відстань від центра перерізу до елементарної площадки dA .

Для того щоб з'ясувати геометричну картину деформування круглого вала при крученні, на його поверхню наносять сітку, що складається з ліній, рівнобіжних осі і ліній, що представляють рівнобіжні кола. При дії моменту, що скручує, твірні циліндра переходять у гвинтові лінії, з великим шагом; рівнобіжні кола не викривляються і відстань між ними не міняється; радіуси, проведені на торцях бруса, після деформування залишаються прямими. Припускаючи це приходимо до гіпотези плоских перерізів:

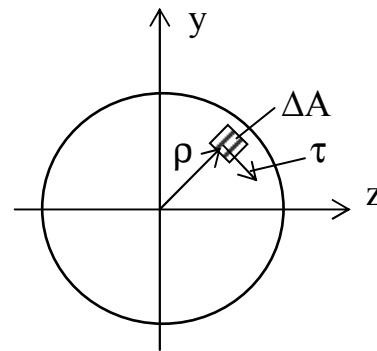


Рис. 6.5

1) поперечні перерізи вала, плоскі й перпендикулярні до його осі до деформування, залишаються плоскими і перпендикулярними до осі і після деформування, вони тільки повертаються на деякі кути навколо неї;

2) радіуси поперечних перерізів не викривляються і зберігають свою довжину;

3) відстані уздовж осі вала між поперечними перерізами у процесі деформування не змінюються.

Ці припущення справедливі (як показує практика і більш точні дослідження деформування) для брусів, що мають суцільний круглий чи кільцевий поперечний переріз.

Розглянемо деякий вал, навантажений моментом, що скручує, $M_{\text{скр}}$. Виділимо деяку ділянку вала (рис. 6.6), яка наведена на рис. 6.3, довжиною dx . Припустимо, кут повороту перерізу I-I, щодо нерухомої системи координат, буде φ , а кут повороту перерізу II-II, розташованого на відстані dx буде $\varphi+d\varphi$. Таким чином, кут закручування розглянутої ділянки буде $d\varphi$.

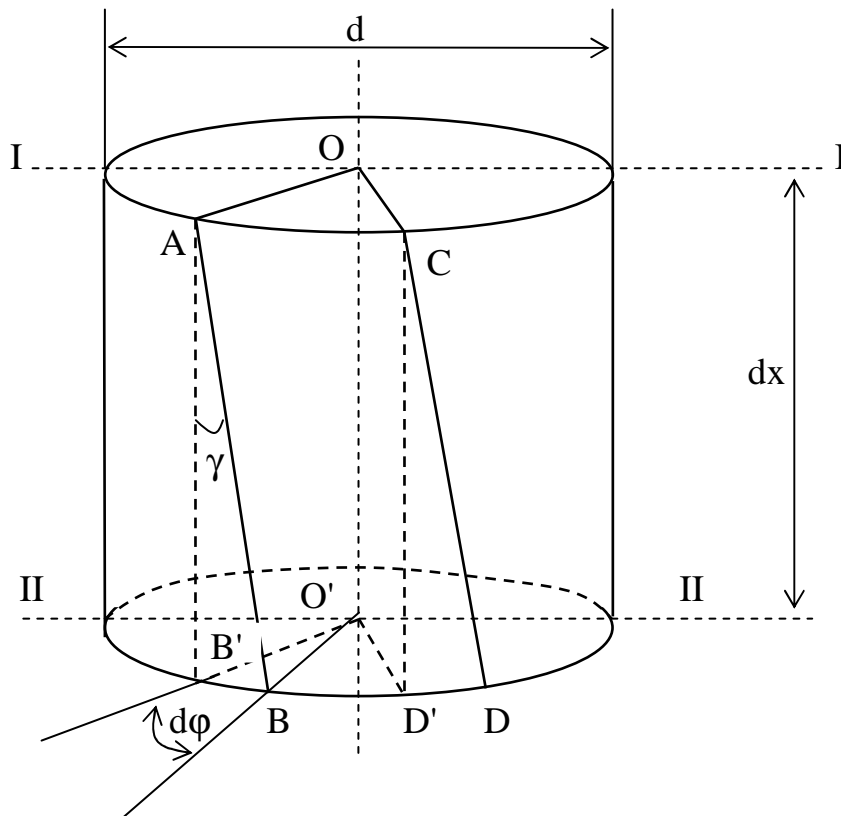


Рис. 6.6

Розглянемо деформування прямокутного елемента $AB'D'C$, виділеного в поверхні вала, як показано на рисунку. Так як радіуси залишаються прямими, то відрізок $O'B'$ повернеться в площині поперечного перерізу на кут закручування $d\varphi$ і займе положення $O'B$, а твірна AB' займе нове положення AB під кутом γ , аналогічно, твірна CD' займе положення CD .

Так як довжина цих відрізків не змінюється, деформування прямокутного елемента $AB'D'C$ полягає в зміні спочатку прямих кутів на величину γ , як наведено на рис. 6.7, а кутові деформації є наслідком дотичних напружень. Таким чином, розглянутий елемент знаходиться в умовах чистого зсуву і на його гранях діють дотичні напруження τ .

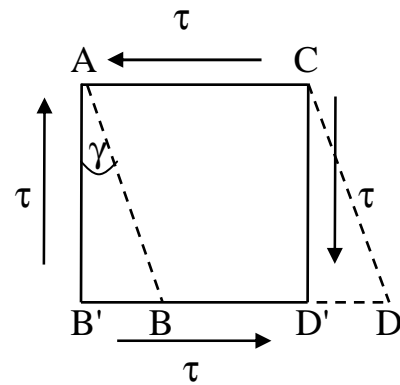


Рис. 6.7

З урахуванням цього кут γ є кутом зсуву і, з урахуванням його малості, дорівнює:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{B'B}{AB'}.$$

Оскільки що $AB' = dx$, а $BB' = R d\varphi$, кут зсуву на поверхні вала дорівнює:

$$\gamma = \vartheta R, \quad (6.9)$$

де $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$ - відносний, чи погонний кут закручування;

$R = \frac{d}{2}$ - радіус зовнішнього кола.

Аналогічно можна виділити такий само елемент усередині вала на довільній циліндричній поверхні радіуса r . У цьому випадку кут зсуву буде дорівнювати:

$$\gamma = \vartheta r. \quad (6.10)$$

Так як розглянутий елемент усередині вала на циліндричній поверхні радіусом r знаходиться у стані чистого зсуву, то співвідношення (6.10), з обліком (6.2) можна подати у вигляді:

$$\tau = G\vartheta\rho. \quad (6.11)$$

Зі співвідношень (6.10) і (6.11) випливає, що кути зсуву і дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом прямо пропорційно відстані від центра ваги перетину (рис. 6.8). Максимальні дотичні напруження будуть на зовнішній поверхні вала, де $\rho=R$:

$$\tau_{\max} = G\vartheta R. \quad (6.12)$$

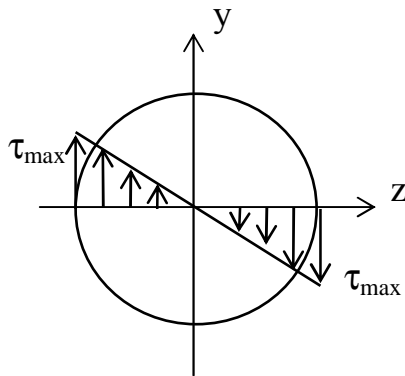


Рис. 6.8

Для того, щоб зв'язати внутрішні зусилля, що виникають у валу і його деформації, підставимо співвідношення (6.11) у (6.8) і з обліком (4.10):

$$M_{\text{кр}} = \int_A \tau\rho dA = G\vartheta \int_A \rho^2 dA = G\vartheta I_\rho, \quad (6.13)$$

де I_ρ - полярний момент інерції розглянутого перерізу.

Зі співвідношення (6.13) можна одержати формулу для визначення відносного кута закручування вала:

$$\vartheta = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_\rho}, \quad (6.14)$$

де GI_ρ - жорсткість вала при крученні.

Використовуючи вираз (6.14), можна визначити кут закручування φ двох перерізів, розташованих на відстані l відносно один одного:

$$\varphi = \int_0^l \vartheta dx = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GI_p} dx. \quad (6.15)$$

Якщо в межах розглянутої ділянки, крутні моменти і жорсткість не змінюється уздовж вала, то можна записати:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GI_p}. \quad (6.16)$$

Ця формула встановлює лінійний зв'язок між внутрішнім зусиллям при крученні (крутним моментом) і деформацією (кут закручування) і називається *законом Гука при крученні*. Формула справедлива у випадку, коли дотичні напруження не перевершують межі пружності.

Для визначення дотичних напружень у точках перерізу на відстані ρ від центра ваги підставимо у формулу (6.11) вираження відносного кута закручування (6.14):

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{I_p}. \quad (6.17)$$

Максимальне дотичне напруження, що діє на зовнішній поверхні вала, буде відповідно (6.12):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} R}{I_p} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (6.18)$$

де R - радіус круглого перерізу чи радіус зовнішнього кола кільцевого перерізу;

W_p - момент опору при крученні.

Момент опору при крученні дорівнює відношенню полярного моменту інерції до максимально вилученої від центру ваги точки перерізу ρ_{\max} :

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}}, \quad (6.19)$$

Для круглого перерізу:

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для кільцевого перерізу, із внутрішнім діаметром d і зовнішнім D буде дорівнює:

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4),$$

де $\alpha = \frac{d}{D}$.

З умови міцності найбільші дотичні напруження, що виникають, не повинні перевищувати допустимих напружень (2.9):

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.20)$$

Допустимі напруження $[\tau]$ при крученні, як і при розтягу-стиску, залежать від властивостей матеріалу і від прийнятого коефіцієнта запасу міцності:

$$[\tau] = \frac{\tau_0}{n},$$

де τ_0 - небезпечні напруження;

n – коефіцієнт запасу міцності, залежить від матеріалу, умов експлуатації, призначення конструкції та інших факторів.

Небезпечні напруження при крученні визначається дослідним шляхом і є характеристикою матеріалу. Для пластичних матеріалів, як правило, воно відповідає границі текучості, для крихких – межі міцності.

При розрахунку на міцність по заданих навантаженнях і геометричних характеристиках вала по формулі (6.18) визначаються найбільші дотичні напруження і порівнюються з допустимими (6.19). При цьому найбільші дотичні напруження визначаються в небезпечному перерізі, в якому крутний момент найбільший по абсолютній величині. Для визначення небезпечного перерізу зручно будувати епюру крутних моментів.

При підборі поперечного перерізу по заданому навантаженню із умови міцності визначається необхідна величина полярного моменту опору:

$$W_p = \frac{|M_{кр}|_{\max}}{[\tau]}, \quad (6.21)$$

де $|M_{кр}|$ - максимальне по абсолютній величині значення крутного моменту.

Розрахунок вала на жорсткість полягає в тім, щоб у ньому не виникали деформації більше припустимих, котрі визначаються умовами експлуатації.

Умова жорсткості вала при крутінні має вигляд

$$\vartheta_{\max} \leq [\vartheta], \quad (6.22)$$

де ϑ_{\max} - найбільший відносний кут закручування, що визначається за формулою (6.14);

$[\vartheta]$ - відносний кут закручування, що допускається (для різних елементів конструкцій $[\vartheta] = (0.2-5) \cdot 10^{-4}$ радіан на 1 см довжини).

6.6. Приклади розрахунків

Приклад 1.

Знайти необхідну висоту h голівки гладкого болта, приведеного на рис. 6.9, що сприймає навантаження $F=80$ кН. Болт виконаний зі сталі: $[\sigma]=16$ кН/см², $[\tau]=10$ кН/см².

Розв'язання.

З умови міцності при розтягу (2.8) з урахуванням співвідношення (4.2) визначимо площу A перерізу болта:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]},$$

відкіля, з урахуванням того, що $N=F$, одержуємо:

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]} = \frac{80}{16} = 5 \text{ см}^2.$$

Визначимо далі діаметр d болта, враховуючи, що $A = \frac{\pi d^2}{4}$:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5}{3.14}} = 2.53 \text{ см}.$$

Голівка болта піддається зрізу по поверхні циліндра, бічна поверхня якого дорівнює πdh . З умови міцності для дотичних напружень (2.9) з урахуванням співвідношення (6.4) визначимо необхідну площу бічної поверхні болта:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau], \quad A \geq \frac{F}{[\tau]}.$$

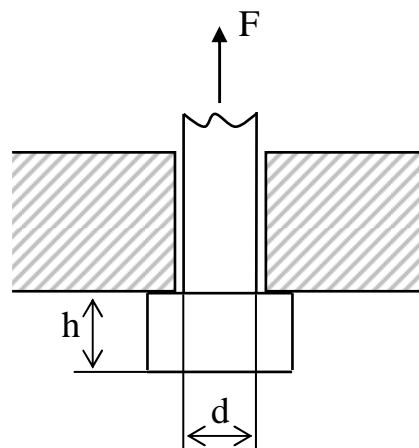


Рис. 6.9

Звідси

$$\pi dh \geq \frac{F}{[\tau]}, \quad h \geq \frac{F}{[\tau]\pi d} = \frac{80}{10 \cdot 3.14 \cdot 2.53} = 1 \text{ см.}$$

Відповідь: висота головки болта $h=1$ см.

Приклад 2.

Знайти діаметр заклепки d і ширину b полос, що з'єднуються, у заклепувальному з'єднанні (рис. 6.10). Навантаження $F=200$ кН. Заклепка і полоса товщиною $t=1$ см виконані зі сталі, $[\sigma]=16$ кН/см², $[\tau]=10$ кН/см².

Розв'язання.

Визначимо необхідний діаметр заклепки з умови міцності при зрізі (2.9) з урахуванням співвідношення (6.4). Для цього знайдемо необхідну площу зрізу заклепок:

$$A \geq \frac{F}{[\tau]} = \frac{200}{10} = 20 \text{ см}^2.$$

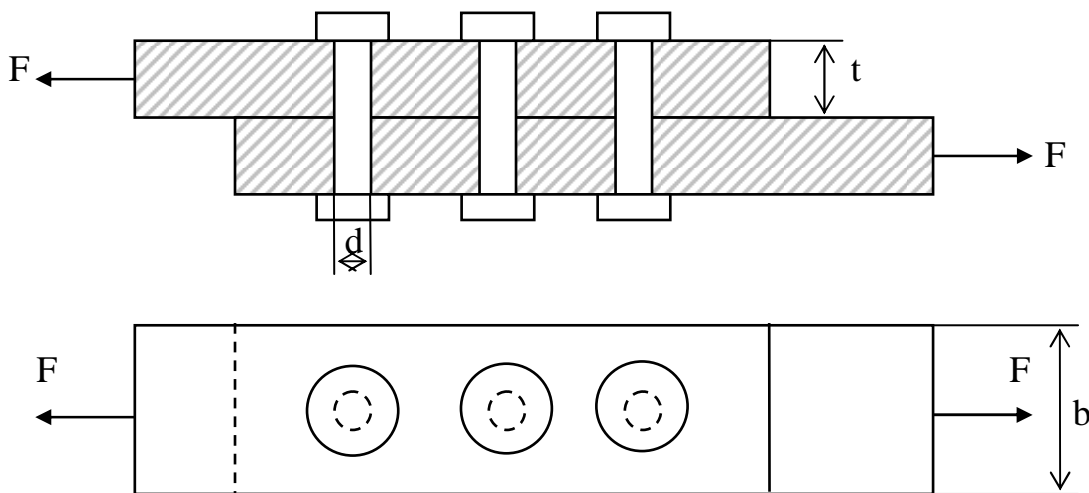


Рис. 6.10

Так як площа перерізу однієї заклепки $\frac{\pi d^2}{4}$, а число заклепок дорівнює трьом, отримаємо:

$$A = 3 \frac{\pi d^2}{4},$$

відкіля діаметр заклепки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{3\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20}{3 \cdot 3.14}} = 2.91 \text{ см.}$$

Площа полос, що з'єднуються, у найбільш вузькому поперечному перерізі дорівнює:

$$A = t(b-d).$$

З умови міцності при розтязі (2.8) і співвідношення (4.2) визначимо необхідну площу перерізу смуг, що з'єднуються:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{F}{16} = 12.5 \text{ см.}$$

Звідси:

$$t(b-d) = 12.5, \quad b = \frac{12.5}{t} + d = \frac{12.5}{1} + 2.91 = 15.41 \text{ см.}$$

Відповідь: діаметр заклепки $d=2.91$ см, ширина смуг $b=15.41$ см.

Приклад 3.

Визначити діаметр вала, що закручується моментом $M_{кр}=40$ кНм, якщо напруження, що допускаються, $[\tau]=8$ кН/см².

Розв'язання.

За формулою (6.21) знайдемо необхідний момент опору вала при крученні:

$$W_p = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{40 \cdot 100}{8} = 500 \text{ см}^3,$$

де множник 100 використовується для приведення моменту до кНсм.

Знайдемо діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 * 500}{3.14}} = 13.7 \text{ см.}$$

Відповідь: діаметр вала $d=13.7$ см.

Приклад 4.

Вал, кільцевого поперечного перерізу, у якого $\alpha = \frac{d_B}{d_H} = 0.8$,

закручується моментом. Визначити економію у вазі в порівнянні із суцільним валом тієї ж міцності.

Розв'язання.

За формулою (6.21) і, використовуючи співвідношення, знайдемо необхідний діаметр круглого вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \frac{M_{кр}}{[\tau]}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]} \frac{16}{3.14}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}}.$$

Площа перерізу круглого вала:

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \left(0.72 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2}{4} = 2.32 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2$$

Аналогічно знайдемо необхідний зовнішній діаметр вала кільцевого перерізу:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \frac{M_{кр}}{[\tau]}}{\pi(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]} \frac{16}{3.14(1 - 0.8^4)}} = 2.05 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}}.$$

Внутрішній діаметр вала буде:

$$d = \alpha D = 0.8 * 2.05 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} = 1.64 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}}.$$

Площа перерізу кільцевого вала дорівнює:

$$A_{\text{кол}} = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \left(2.05 \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}} \right)^2}{4} - \frac{3.14 \left(1.64 \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}} \right)^2}{4} =$$

$$= 3.3 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}} \right)^2 - 2.11 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}} \right)^2 = 1.19 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}} \right)^2.$$

Відношення ваг валів дорівнює відношенню їхніх площ перерізів, отже, економія у вазі буде визначатися відношенням:

$$\frac{A_{\text{кр}}}{A_{\text{кол}}} = \frac{2.32 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}} \right)^2}{1.19 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}} \right)^2} = \frac{2.32}{1.19} = 1.95.$$

Відповідь: вал кільцевого перерізу буде важити в 1.95 рази менше вала круглого перерізу з такою самою міцністю.

Приклад 5.

З умови міцності і жорсткості визначити діаметр суцільного вала круглого перерізу, наведеного на рис. 6.11,а.

Моменти, що передаються шківками: $M_1=40$ кНм, $M_2=80$ кНм, $M_3=180$ кНм, $M_4=60$ кНм. Допустимі дотичні напруження, $[\tau]=12$ кН/см²;

Кут закручування, що допускається, $[\vartheta]=5 \cdot 10^{-4}$ рад/см; модуль пружності при зсуві $G=8 \cdot 10^3$ кН/см².

Розв'язання.

Побудуємо епюру крутних моментів. Оскільки вал знаходиться в стані рівномірного обертання, то алгебраїчна сума всіх зовнішніх моментів, що скручують, прикладених до нього, дорівнює нулю:

$$\sum M_{\text{скр}} = M_1 + M_2 - M_3 + M_4 = 40 + 80 - 180 + 60 = 0.$$

Крутний момент у перерізах дорівнює сумі моментів у відкинутій частині. Порахуємо ці моменти, що виникають у перерізах різних ділянок вала, як показано на схемі:

на ділянці l_1 : $M_{кр1} = M_1 = 40$ кНм;

на ділянці l_2 : $M_{кр2} = M_1 + M_2 = 40 + 80 = 120$ кНм;

на ділянці l_3 : $M_{кр3} = M_1 + M_2 - M_3 = 40 + 80 - 180 = -60$ кНм.

Епюра крутних моментів наведена на рис. 6.11,б.

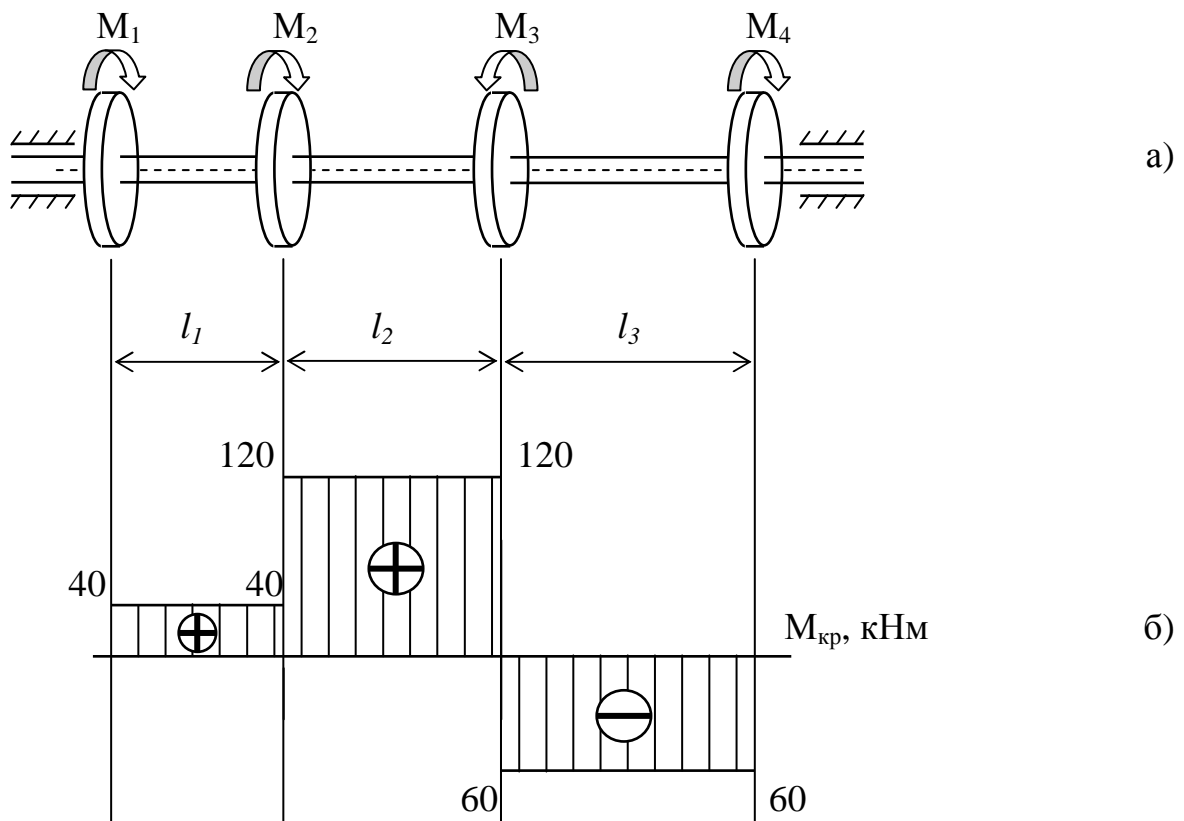


Рис. 6.11

Згідно з епюрою, максимальний крутний момент діє на другій ділянці
 З умови міцності за формулою (6.21) знайдемо необхідний діаметр круглого вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]} \frac{16}{3.14}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{120 \cdot 100}{12}} = 17.2 \text{ см.}$$

З умови жорсткості вала при крученні за формулою (6.22), знайдемо необхідний діаметр круглого вала:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_k}{G[\vartheta]\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 120 \cdot 100}{8000 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 3.14}} = 13.2 \text{ см}$$

З двох знайдених значень діаметрів необхідно прийняти більший. Ним буде діаметр, знайдений з умови міцності.

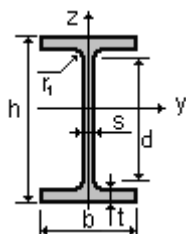
Відповідь: діаметр вала $d=17.2$ см.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. А. Горанский. Техническая механика. - М.: Сельхозгиз. 1959. - 463 с.
2. А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. Сопротивление материалов. - М.: «Высшая школа». 1975. - 654 с.
3. Н. М. Беляев. Сопротивление материалов. - М., Л.: ГИТТЛ, 1951. - 856 с.
4. Піскунов В. Г., Феодоренко Ю. М., Шевченко В. Ю. та ін. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. - К.: Вища школа. 1994. - 423 с.
5. Шутенко Л. М., Пустовойтов В. П., Засядько М. А. Опір матеріалів: Навч.-метод. посібник до лабораторних робіт. – Х: ХНАМГ, 2004. – 79 с.
6. Сопротивление материалов. / Под общ. ред. Г. С. Писаренко. – К: Вища школа. 1979. - 696 с.
7. Р. С. Кинасошвили. Сопротивление материалов. – М.: Физ-матгиз. 1960. - 387 с.
8. Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів: Навч. посібник – Х: УкрДАЗТ. 2002. – 362 с.
9. Шпачук В. П., Золотов М. С., Рубаненко О. І., Гарбуз А. О. Теоретична механіка: Статика. Конспект лекцій. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 95 с.
10. Шутенко Л. Н., Засядько Н. А., Чупрынин А. А. Основы теории упругости и пластичности: Уч. пособие для студентов строительных специальностей. – Х: ХНАГХ, 2007. – 135 с.

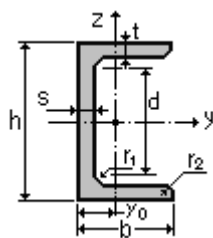
ДОДАТОК

Двотавр з нахилом полок за ДСТУ 8239-89



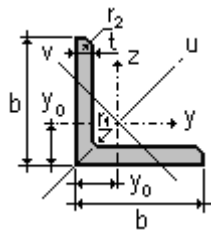
	h	b	s	t	r ₁	r ₂	A	P	I _y	W _y	i _y	S _y
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	T/M	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³
10	10.0	5.5	0.450	0.720	0.700	0.250	12.0	0.009	198.0	39.700	4.060	23.000
12	12.0	6.4	0.480	0.730	0.750	0.300	14.7	0.012	350.0	58.400	4.880	33.700
14	14.0	7.3	0.490	0.750	0.800	0.300	17.4	0.014	572.0	81.700	5.730	46.800
16	16.0	8.1	0.500	0.780	0.850	0.350	20.2	0.016	873.0	109.000	6.570	62.300
18	18.0	9.0	0.510	0.810	0.900	0.350	23.4	0.018	1290.0	143.000	7.420	81.400
20	20.0	10.0	0.520	0.840	0.950	0.400	26.8	0.021	1840.0	184.000	8.280	104.000
22	22.0	11.0	0.540	0.870	1.000	0.400	30.6	0.024	2550.0	232.000	9.130	131.000
24	24.0	11.5	0.560	0.950	1.050	0.400	34.8	0.027	3460.0	289.000	9.970	163.000
27	27.0	12.5	0.600	0.980	1.100	0.450	40.2	0.032	5010.0	371.000	11.200	210.000
30	30.0	13.5	0.650	1.020	1.200	0.500	46.5	0.037	7080.0	472.000	12.300	268.000
33	33.0	14.0	0.700	1.120	1.300	0.500	53.8	0.042	9840.0	597.000	13.500	339.000
36	36.0	14.5	0.750	1.230	1.400	0.600	61.9	0.049	13380	743.000	14.700	423.000
40	40.0	15.5	0.830	1.300	1.500	0.600	72.600	0.057	19062	953.000	16.200	545.000
45	45.0	16.0	0.900	1.420	1.600	0.700	84.700	0.067	27696	1231.00	18.100	708.000
50	50.0	17.0	1.000	1.520	1.700	0.700	100.00	0.078	39727	1589.00	19.900	919.000
55	55.0	18.0	1.100	1.650	1.800	0.700	118.00	0.093	55962	2035.00	21.800	1181.00
60	60.0	19.0	1.200	1.780	2.000	0.800	138.00	0.108	76806	2560.00	23.600	1491.00

Швеллер з нахилом полок за ДСТУ 8240-89



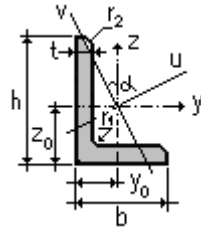
	h	b	s	t	r ₁	r ₂	A	P	I _y	W _y	i _y	S _y	y _o
	см	см	см	см	см	см	см ²	Т/М	см ⁴	см ³	см	см ³	см
8	8.00	4.0	0.45	0.74	0.65	0.25	8.98	0.007	89.4	22.4	3.160	23.300	1.310
10	10.0	4.6	0.45	0.76	0.70	0.30	10.9	0.009	174	34.8	3.990	20.400	1.440
12	12.0	5.2	0.48	0.78	0.75	0.30	13.3	0.010	304	50.6	4.780	29.600	1.540
14	14.0	5.8	0.49	0.81	0.80	0.30	15.6	0.012	491	70.2	5.600	40.800	1.670
16	16.0	6.4	0.50	0.84	0.85	0.35	18.1	0.014	747	93.4	6.420	54.100	1.800
18	18.0	7.0	0.51	0.87	0.90	0.35	20.7	0.016	1090	121.0	7.240	69.800	1.940
20	20.0	7.6	0.52	0.90	0.95	0.40	23.4	0.018	1520	152.0	8.070	87.800	2.070
22	22.0	8.2	0.54	0.95	1.00	0.40	26.7	0.021	2110	192.0	8.890	110.000	2.210
24	24.0	9.0	0.56	1.00	1.05	0.40	30.6	0.024	2900	242.0	9.730	139.000	2.420
27	27.0	9.5	0.60	1.05	1.10	0.45	35.2	0.028	4160	308.0	10.900	178.000	2.470
30	30.0	10.0	0.65	1.10	1.20	0.50	40.5	0.032	5810	387.0	12.000	224.000	2.520
40	40.0	11.5	0.80	1.35	1.50	0.60	61.5	0.048	15220	761.0	15.700	444.000	2.750

Куток рівнобокий за ДСТУ 8509-93



	b	t	r ₁	r ₂	A	I _y =I _z	W _y	i _y	I _u	i _u	I _v	W _v	i _v	I _{yz}	y _o	P
	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	T/M
L50x5	5.000	0.500	0.550	0.180	4.800	11.20	3.130	1.530	17.77	1.920	4.630	2.300	0.980	6.570	1.420	0.004
L63x5	6.300	0.500	0.700	0.230	6.130	23.10	5.050	1.940	36.80	2.440	9.520	3.870	1.250	13.70	1.740	0.005
L70x5	7.000	0.500	0.800	0.270	6.860	31.94	6.270	2.160	50.67	2.720	13.22	4.920	1.390	18.70	1.900	0.005
L75x6	7.500	0.600	0.900	0.300	8.780	46.57	8.570	2.300	73.87	2.900	19.28	6.620	1.480	27.30	2.060	0.007
L80x6	8.000	0.600	0.900	0.300	9.380	56.97	9.800	2.470	90.40	3.110	23.54	7.600	1.580	33.40	2.190	0.007
L90x6	9.000	0.600	1.000	0.330	10.61	82.10	12.49	2.780	130.0	3.500	33.97	9.880	1.790	48.10	2.430	0.008
L90x7	9.000	0.700	1.000	0.330	12.28	94.30	14.45	2.770	149.7	3.490	38.94	11.15	1.780	55.40	2.470	0.010
L100x7	10.00	0.700	1.200	0.400	13.75	130.6	17.90	3.080	207.0	3.880	54.16	14.13	1.980	76.40	2.710	0.011
L100x8	10.00	0.800	1.200	0.400	15.60	147.2	20.30	3.070	233.5	3.870	60.92	15.66	1.980	86.30	2.750	0.012
L110x8	11.00	0.800	1.200	0.400	17.20	198.2	24.77	3.390	314.5	4.280	81.83	19.29	2.180	116.0	3.000	0.013
L125x8	12.50	0.800	1.400	0.460	19.69	294.4	32.20	3.870	466.8	4.870	122.0	25.67	2.490	172.0	3.360	0.015
L125x9	12.50	0.900	1.400	0.460	22.00	327.5	36.00	3.860	520.0	4.860	135.9	28.26	2.480	192.0	3.400	0.017
L140x9	14.00	0.900	1.400	0.460	24.72	465.7	45.55	4.340	739.4	5.470	192.0	35.92	2.790	274.0	3.780	0.019
L140x10	14.00	1.000	1.400	0.460	27.33	512.3	50.32	4.330	813.6	5.460	211.0	39.05	2.780	301.0	3.820	0.021
L160x10	16.00	1.000	1.600	0.530	31.43	774.2	66.19	4.960	1229	6.250	319.4	52.52	3.190	455.0	4.300	0.025
L160x11	16.00	1.100	1.600	0.530	34.42	844.2	72.44	4.950	1340	6.240	347.8	56.53	3.180	496.0	4.350	0.027
L160x16	16.00	1.600	1.600	0.530	49.07	1175	102.6	4.890	1865	6.170	484.6	75.92	3.140	690.0	4.550	0.039
L180x11	18.00	1.100	1.600	0.530	38.80	1216	92.47	5.600	1933	7.060	499.8	72.86	3.590	716.0	4.850	0.030
L180x12	18.00	1.200	1.600	0.530	42.19	1316	100.4	5.590	2092	7.040	540.4	78.15	3.580	776.0	4.890	0.033
L200x12	20.00	1.200	1.800	0.600	47.10	1822	124.6	6.220	2896	7.840	749.4	98.68	3.990	1073	5.370	0.037
L200x14	20.00	1.400	1.800	0.600	54.60	2097	144.2	6.200	3333	7.810	861.0	111.5	3.970	1236	5.460	0.043
L200x25	20.00	2.500	1.800	0.600	94.29	3466	245.6	6.060	5494	7.630	1438	172.7	3.910	2028	5.890	0.074
L200x30	20.00	3.000	1.800	0.600	111.5	4019	288.5	6.000	6351	7.550	1698	193.0	3.890	2332	6.070	0.088
L220x16	22.00	1.600	2.100	0.700	68.58	3175	198.7	6.800	5045	8.580	1305	153.3	4.360	1869	6.020	0.054
L250x16	25.00	1.600	2.400	0.800	78.40	4717	258.4	7.760	7492	9.780	1942	203.4	4.980	2775	6.750	0.062
L250x20	25.00	2.000	2.400	0.800	96.96	5764	318.6	7.710	9159	9.720	2370	242.5	4.940	3395	6.910	0.076

Куток нерівнобокий за ДСТУ 8510-86



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm	cm	cm ⁴	
L25x16x3	2.50	1.60	0.30	1.16	0.70	0.43	0.78	0.22	0.19	0.44	0.13	0.16	0.34	0.42	0.86	0.22	0.392
L30x20x3	3.00	2.00	0.30	1.43	1.27	0.62	0.94	0.45	0.30	0.56	0.26	0.25	0.43	0.51	1.00	0.43	0.427
L30x20x4	3.000	2.000	0.400	1.860	1.610	0.820	0.930	0.560	0.390	0.550	0.340	0.320	0.430	0.540	1.040	0.540	0.421
L32x20x3	3.200	2.000	0.300	1.490	1.520	0.720	1.010	0.460	0.300	0.550	0.280	0.250	0.430	0.490	1.080	0.470	0.382
L32x20x4	3.200	2.000	0.400	1.940	1.930	0.930	1.000	0.570	0.390	0.540	0.350	0.330	0.430	0.530	1.120	0.500	0.374
L40x25x3	4.000	2.500	0.300	1.890	3.060	1.140	1.270	0.930	0.490	0.700	0.560	0.410	0.540	0.590	1.320	0.960	0.385
L40x25x4	4.000	2.500	0.400	2.470	3.930	1.490	1.260	1.180	0.630	0.690	0.710	0.520	0.540	0.630	1.370	1.220	0.281
L40x25x5	4.000	2.500	0.500	3.030	4.730	1.820	1.250	1.410	0.770	0.680	0.860	0.640	0.530	0.660	1.410	1.440	0.374
L40x30x4	4.000	3.000	0.400	2.670	4.180	1.540	1.250	2.010	0.910	0.870	1.090	0.750	0.640	0.780	1.280	1.680	0.544
L40x30x5	4.000	3.000	0.500	3.280	5.040	1.880	1.240	2.410	1.110	0.860	1.330	0.910	0.640	0.820	1.320	2.000	0.539
L45x28x3	4.500	2.800	0.300	2.140	4.410	1.450	1.480	1.320	0.610	0.790	0.790	0.520	0.610	0.640	1.470	1.380	0.382
L45x28x4	4.500	2.800	0.400	2.800	5.680	1.900	1.420	1.690	0.800	0.780	1.020	0.670	0.600	0.680	1.510	1.770	0.379
L50x32x3	5.000	3.200	0.300	2.420	6.180	1.820	1.600	1.990	0.810	0.910	1.180	0.680	0.700	0.720	1.600	2.010	0.403
L50x32x4	5.000	3.200	0.400	3.170	7.980	2.380	1.590	2.560	1.050	0.900	1.520	0.880	0.690	0.760	1.650	2.590	0.401
L56x36x4	5.600	3.600	0.400	3.580	11.370	3.010	1.780	3.700	1.340	1.020	2.190	1.130	0.780	0.840	1.820	3.740	0.406
L56x36x5	5.600	3.600	0.500	4.410	13.820	3.700	1.770	4.480	1.650	1.010	2.650	1.370	0.780	0.880	1.870	4.500	0.404
L63x40x4	6.300	4.000	0.400	4.040	16.330	3.830	2.010	5.160	1.670	1.130	3.070	1.410	0.870	0.910	2.030	5.250	0.397
L63x40x5	6.300	4.000	0.500	4.980	19.910	4.720	2.000	6.260	2.050	1.120	3.730	1.720	0.860	0.950	2.080	6.410	0.396
L63x40x6	6.300	4.000	0.600	5.900	23.310	5.580	1.990	7.290	2.420	1.110	4.360	2.020	0.860	0.900	2.120	7.440	0.393
L63x40x8	6.300	4.000	0.800	7.680	29.600	7.220	1.960	9.150	3.120	1.090	5.580	2.600	0.850	1.070	2.200	9.270	0.386
L65x50x5	6.500	5.000	0.500	5.560	23.410	5.200	2.050	12.080	3.230	1.470	6.410	2.680	1.070	1.260	2.000	9.770	0.576
L65x50x6	6.500	5.000	0.600	6.600	27.460	6.160	2.040	14.120	3.820	1.460	7.520	3.150	1.070	1.300	2.040	11.460	0.575
L65x50x7	6.500	5.000	0.700	7.620	31.320	7.080	2.030	16.050	4.380	1.450	8.600	3.590	1.060	1.340	2.080	12.940	0.571
L65x50x8	6.500	5.000	0.800	8.620	35.000	7.990	2.020	18.880	4.930	1.440	9.650	4.020	1.060	1.370	2.120	13.610	0.570
L70x45x5	7.000	4.500	0.500	5.590	27.760	5.880	2.230	9.050	2.620	1.270	5.340	2.200	0.980	1.050	2.280	9.120	0.406
L75x50x5	7.500	5.000	0.500	6.110	34.810	6.810	2.390	12.470	3.250	1.430	7.240	2.730	1.090	1.170	2.390	12.000	0.436
L75x50x6	7.500	5.000	0.600	7.250	40.920	8.080	2.380	14.600	3.850	1.420	8.480	3.210	1.080	1.210	2.440	14.100	0.435
L75x50x7	7.500	5.000	0.700	8.370	46.770	9.310	2.360	16.610	4.430	1.410	9.690	3.690	1.080	1.250	2.480	16.180	0.435
L75x50x8	7.500	5.000	0.800	9.470	52.380	10.520	2.350	18.520	4.880	1.400	10.870	4.140	1.070	1.290	2.520	17.800	0.430
L80x50x5	8.000	5.000	0.500	6.360	41.640	7.710	2.560	12.680	3.280	1.410	7.570	2.750	1.000	1.130	2.600	13.200	0.387
L80x50x6	8.000	5.000	0.600	7.550	48.980	9.150	2.550	14.850	3.880	1.400	8.880	3.240	1.080	1.170	2.650	15.500	0.386
L80x60x6	8.000	6.000	0.600	8.150	52.060	9.420	2.530	25.180	5.580	1.760	13.610	4.660	1.290	1.490	2.470	20.980	0.547
L80x60x7	8.000	6.000	0.700	9.420	59.610	10.870	2.520	28.740	6.430	1.750	15.580	5.340	1.290	1.530	2.520	24.010	0.546
L80x60x8	8.000	6.000	0.800	10.670	66.880	12.380	2.500	32.150	7.260	1.740	17.490	5.990	1.280	1.570	2.560	26.830	0.544
L90x56x5	9.000	5.600	0.550	7.860	65.280	10.740	2.880	19.670	4.530	1.580	11.770	3.810	1.220	1.260	2.920	20.540	0.384
L90x56x6	9.000	5.600	0.600	8.540	70.580	11.660	2.880	21.220	4.910	1.580	12.700	4.120	1.220	1.280	2.950	22.230	0.384
L90x56x8	9.000	5.600	0.800	11.180	90.870	15.240	2.850	27.080	6.390	1.560	16.290	5.320	1.210	1.360	3.040	28.330	0.380
L100x63x6	10.000	6.300	0.600	9.580	98.290	14.520	3.200	30.580	6.270	1.790	18.200	5.270	1.380	1.420	3.230	31.500	0.393
L100x63x7	10.000	6.300	0.700	11.090	112.860	16.780	3.190	34.990	7.230	1.780	20.830	6.060	1.370	1.460	3.280	36.100	0.392
L100x63x8	10.000	6.300	0.800	12.570	126.960	19.010	3.180	39.210	8.170	1.770	23.380	6.820	1.360	1.500	3.320	40.500	0.391
L100x63x10	10.000	6.300	1.000	15.470	153.950	23.320	3.150	47.180	9.990	1.750	28.340	8.310	1.350	1.580	3.400	48.600	0.387
L100x65x7	10.000	6.500	0.700	11.230	114.050	16.870	3.190	38.320	7.700	1.850	22.770	6.430	1.410	1.520	3.240	38.000	0.415
L100x65x8	10.000	6.500	0.800	12.730	128.310	19.110	3.180	42.960	8.700	1.840	25.240	7.260	1.410	1.560	3.280	42.640	0.414
L100x65x10	10.000	6.500	1.000	15.670	155.520	23.450	3.150	51.680	10.640	1.820	30.600	8.830	1.400	1.640	3.370	51.180	0.410
L110x70x6	11.000	7.000	0.650	11.450	142.420	19.110	3.530	45.610	8.420	2.000	26.940	7.050	1.530	1.580	3.550	46.800	0.402
L110x70x8	11.000	7.000	0.800	13.930	171.540	23.220	3.510	54.640	10.200	1.980	32.310	8.500	1.520	1.640	3.610	55.900	0.400
L125x80x7	12.500	8.000	0.700	14.060	226.530	26.670	4.010	73.730	11.890	2.290	43.400	9.960	1.760	1.800	4.010	74.700	0.407
L125x80x8	12.500	8.000	0.800	15.980	225.620	30.260	4.000	80.950	13.470	2.280	48.820	11.250	1.750	1.840	4.050	84.100	0.406
L125x80x10	12.500	8.000	1.000	19.700	311.610	37.270	3.980	100.470	16.520	2.260	59.330	13.740	1.740	1.920	4.140	102.000	0.404
L125x80x12	12.500	8.000	1.200	23.360	364.790	44.070	3.950	116.840	19.460	2.240	69.470	16.110	1.720	2.000	4.220	118.000	0.400
L140x90x8	14.000	9.000	0.800	18.000	363.680	38.250	4.470	119.790	17.190	2.580	70.270	14.390	1.580	2.030	4.490	121.000	0.411
L140x90x10	14.000	9.000	1.000	22.240	444.450	47.190	4.470	145.540	21.140	2.580	85.510	17.580	1.960	2.120	4.580	147.000	0.409
L160x100x9	16.000	10.000	0.900	22.870	605.970	56.040	5.150	186.030	23.960	2.850	110.400	20.010	2.200	2.240	5.190	194.000	0.391

	h	b	t	A	I _y	W _y	i _y	I _z	W _z	i _z	I _v	W _v	i _v	y _o	z _o	I _{yz}	tg
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm	cm	cm ⁴	
L160x100x10	16.000	10.000	1.000	25.280	666.590	61.910	5.130	204.090	26.420	2.840	121.160	22.020	2.190	2.280	5.230	213.000	0.390
L160x100x12	16.000	10.000	1.200	30.040	784.220	73.420	5.110	238.750	31.230	2.820	142.140	25.930	2.180	2.360	5.320	249.000	0.388
L160x100x14	16.000	10.000	1.400	34.720	897.190	84.650	5.080	271.600	35.890	2.800	162.490	29.750	2.160	2.430	5.400	232.000	0.385
L180x110x10	18.000	11.000	1.000	28.330	952.280	78.590	5.800	276.370	32.270	3.120	165.440	29.960	2.420	2.440	5.880	295.000	0.376
L180x110x12	18.000	11.000	1.200	33.690	1122.560	93.330	5.770	324.090	38.200	3.100	194.280	31.830	2.400	2.520	5.970	348.000	0.374
L200x125x11	20.000	12.500	1.100	34.870	1449.020	107.310	6.450	446.360	45.980	3.580	263.840	38.270	2.750	2.790	6.500	465.000	0.392
L200x125x12	20.000	12.500	1.200	37.890	1568.190	116.510	6.430	481.930	49.850	3.570	285.040	41.450	2.740	2.830	6.540	503.000	0.392
L200x125x14	20.000	12.500	1.400	43.870	1800.830	134.640	6.410	550.770	57.430	3.540	326.540	47.570	2.730	2.910	6.620	575.000	0.390
L200x125x16	20.000	12.500	1.600	49.770	2026.080	152.410	6.380	616.660	64.830	3.520	366.990	53.560	2.720	2.990	6.710	643.000	0.388

ЗМІСТ

	стор.
ВСТУП	3
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ	5
1.1. Основні гіпотези опору матеріалів	5
1.2. Класифікація елементів конструкцій	6
1.3. Зовнішні навантаження	6
1.4. Внутрішні зусилля	8
1.5. Напруження	10
1.6. Деформації і переміщення	13
2. ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ	16
2.1. Відомості про будівельні матеріали	16
2.2. Експериментальні дослідження властивостей матеріалів	17
2.3. Коефіцієнт поперечної деформації	28
2.4. Методи розрахунків конструкцій на міцність	30
3. РОЗТЯГ І СТИСК	36
3.1. Поздовжня сила	36
3.2. Напруження в стержнях при розтягу-стиску	38
3.3. Деформації і переміщення	42
3.4. Врахування власної ваги	45
3.5. Статично невизначені задачі	48
3.6. Приклади розрахунків	52
4. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРЕЗІВ	56
4.1. Площа перерізу	56
4.2. Статичні моменти перерізу	57
4.3. Моменти інерції перерізу	59
4.4. Приклади розрахунків	68

5. ЗГИН БАЛЮК	71
5.1. Внутрішні зусилля при згині	72
5.2. Напруження і деформації при згині	81
5.3. Балки, завантажені нерівномірно розподіленім навантаженням	93
5.4. Внутрішні зусилля в рамах	95
5.5. Приклади розрахунків	96
6. ЗСУВ І КРУЧЕННЯ	111
6.1. Чистий зсув	111
6.2. Розрахунок на зріз	112
6.3. Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом ..	113
6.4. Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент	114
6.5. Напруження і деформації при крученні	116
6.6. Приклади розрахунків	124
ЛІТЕРАТУРА	131
ДОДАТОК	132

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ШПАЧУК Володимир Петрович,
АНДРІЄВСЬКА Людмила Станіславівна,
СЕРЕДА Наталія Василівна,
ЧУПРИНІН Олександр Олексійович

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Частина 1

**Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій
при базових навантаженнях**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисциплін «Опір матеріалів», «Опір матеріалів
та основи будівельної механіки», «Основи теорії споруд»

Редактор *М.З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання *О. А. Балашова*

План 2010, поз. 85 Л

Підп. до друку 16.03.2010
Друк на ризографі.
Тираж 50 пр.

Формат 60*84/16
Ум.-друк. арк. 5,7
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011