

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. В. Якунін

**ВИЩА
МАТЕМАТИКА II**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

**для студентів заочної форми навчання за
напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”**

Харків ХНАМГ 2011

УДК 517.2+517.3+517.5+519.6+519.95

Якунін А. В.

Вища математика II: Конспект лекцій для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”. / А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 140 с.

Подано конспект лекцій, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання, зразками розв’язання типових задач і запитаннями для самоконтролю.

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц. М. П. Данилевський*

*Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 3 від 26.10.2011 р.*

© Якунін А. В., 2011
© ХНАМГ, 2011

Передмова

Конспект лекцій з навчальної дисципліни “Математика для економістів. Вища математика II” призначений для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”. При викладенні матеріалу головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу з об’єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються чітко і зважено, з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина матеріалу розрахована на самостійне опрацювання.

В основі підбору тематики, структури і стилю подання лежать цикли лекцій з даної дисципліни, що читаються на факультетах економіки і підприємництва, заочного навчання, післядипломної освіти і заочного навчання Харківської національної академії міського господарства.

Критичні зауваження і пропозиції щодо запропонованого конспекту лекцій надсилайте на кафедру вищої математики за адресою: 61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ, каф. ВМ;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

Змістовий модуль 1.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

1.1. Кратні інтеграли

1.1.1. Задача про об'єм циліндричного тіла. Подвійний інтеграл і його властивості

Нехай V – деяка замкнена обмежена просторова область (просторове тіло), а плоска область D_{xy} – її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 1). Область V називається *правильною (стандартною) в напрямі осі Oz* , якщо виконуються наступні умови: 1) межа L проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих; 2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній *поверхні входу* σ_1 і дальній *поверхні виходу* σ_2 ; 3) рівняння кожної з поверхонь σ_1 і σ_2 задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z , причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} і $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$.

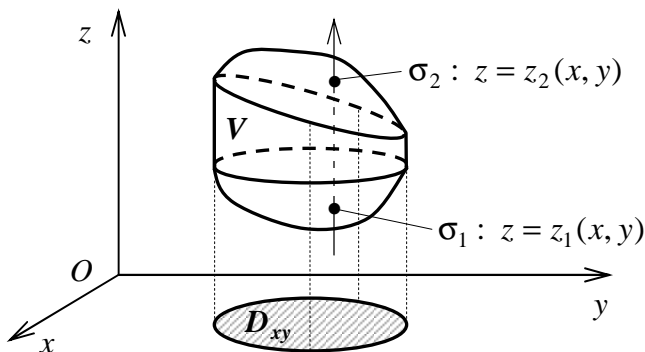


Рис. 1

Така просторова область V має вигляд вертикального циліндричного тіла, що обмежене знизу поверхнею входу $\sigma_1: z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею виходу $\sigma_2: z = z_2(x, y)$, а з боків – вертикальною циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz , а прямою служить межа L області D_{xy} , в яку проектується це тіло на координатну площину Oxy . Це вертикальне циліндричне тіло V як множину точок можна подати у вигляді

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}, V \xrightarrow{Oz} D_{xy} \right\}.$$

Аналогічно вводиться означення просторової області V , що **правильна (стандартна) в напрямі осі Ox чи Oy** , відповідно

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in D_{yz}, V \xrightarrow{Ox} D_{yz} \right\}$$

і

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z), (x, z) \in D_{xz}, V \xrightarrow{Oy} D_{xz} \right\}.$$

Область V може бути одночасно правильною в напрямі різних осей координат. Якщо просторова область V правильна в напрямі кожної з координатних осей Ox , Oy і Oz , то вона називається просто **правильною (стандартною)**. Прикладами такої області служать куля і прямокутний паралелепіпед, всі ребра якого паралельні осям координат.

Зауваження 1. Якщо область V – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують координатні чи їм паралельні площини.

Розглянемо окремий випадок правильної в напрямі осі Oz області V , яка обмежена знизу координатною площиною Oxy (тобто, спирається на свою проекцію D), а зверху – поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$ (рис. 2). Знайдемо об'єм V такого циліндричного тіла.

Для цього розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні частини D_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо площу майданчика D_i через ΔS_i , а його діаметр (довжину найбільшої хорди, яка з'єднає дві точки ме-

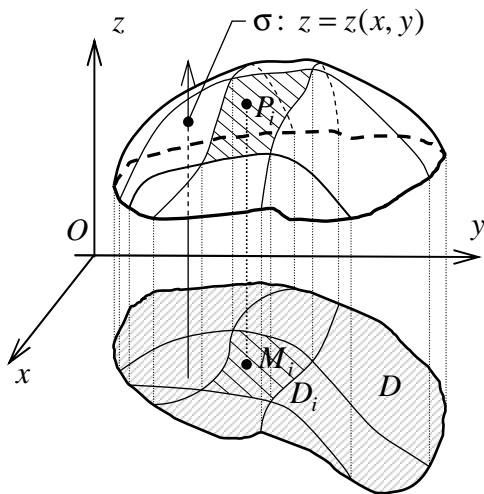


Рис. 2

жі області D_i) – через d_i , $i = \overline{1, n}$. Через межу кожної елементарної області D_i проведемо циліндричну поверхню з паралельними осі Oz твірними. Тоді тіло V розіб'ється на n циліндричних стовпчиків з основами D_i ($i = \overline{1, n}$), що обмежені зверху шматками поверхні $z = f(x, y)$ (на рис. 2 один з них виділений).

Візьмемо на кожному майданчику D_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і замінимо кожний стовпчик прямим циліндром з тією ж основою D_i і висотою $P_i M_i = z_i = f(x_i, y_i)$. Тоді для об'єму ΔV_i циліндричного стовпчика маємо $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Об'єм тіла V можна наближено подати так: $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ називається **інтегральною сумою функції $f(x, y)$ по області D** .

Одержана рівність тим точніша, чим менші розміри елементарних областей D_i і, відповідно, більша їх кількість n . Природно границю інтегральної суми при умові, що кожний майданчик D_i стягується в точку ($\max d_i \rightarrow 0$) і, відповідно, їх число n необмежено збільшується ($n \rightarrow \infty$), прийняти за об'єм V циліндричного тіла: $V = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття області D , якщо вона існує і не залежить від

способу поділу на елементарні майданчики D_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i)$ на них, називається **подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D** і позначається $\iint_D f(x, y) dS$ або $\iint_D f(M) dS$. Отже, за означенням

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i},$$

де x і y – **змінні інтегрування**; $f(x, y)$ – **підінтегральна функція**; dS – **елемент (диференціал) площі**; $f(x, y) dS$ – **підінтегральний вираз**; D – **область інтегрування**.

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x, y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D , верхньою – частина поверхні $z = f(x, y) \geq 0$, що проектується в D , а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz , і напрямною L – межею області D : $V = \iint_D f(x, y) dS$.

Зауваження 2. Процес побудови подвійного інтеграла по двовимірній області D аналогічний процедурі синтезу визначеного інтеграла функції однієї змінної по одновимірній області $[a; b]$. Спочатку область інтегрування довільним чином розбивається на частини, в кожній з яких береться довільна точка і в ній знаходиться значення функції. Потім знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області. У випадку однієї змінної такою мірою служить довжина Δx_i частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, а у випадку двох змінних – площа ΔS_i елементарного майданчика D_i . Наступні кроки знову однакові: утворюються інтегральні суми і знаходяться їхні границі, коли міра частин області інтегрування прямує до нуля. Тому *умови існування та основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям звичайного визначеного інтеграла*. Наведемо найважливіші з них.

Зауваження 3. *Умови існування та основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям звичайно-*

го визначеного інтеграла. Надалі будемо розглядати лише функції, які неперервні в області інтегрування, що гарантує існування подвійного інтеграла. (Хоча подвійний інтеграл може існувати не тільки для неперервних функцій).

1.1.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній системі координат

Безпосереднє знаходження подвійного інтеграла як границі інтегральної суми пов'язане зі значними труднощами. Набагато простіше перейти до обчислення так званого двократного повторного інтеграла – послідовного знаходження двох звичайних визначених інтегралів.

Зауваження 1. Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в декартовій прямокутній системі координат Oxy зручно розбивати область D координатною сіткою, утвореною прямими, які паралельні осям Ox і Oy (рис. 3). Тоді внутрішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i , Δy_i і його

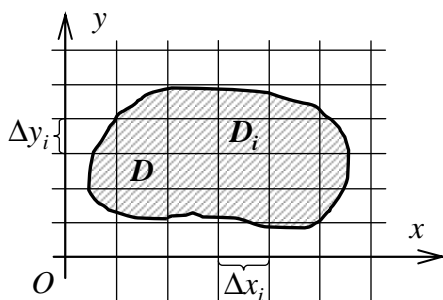


Рис. 3

площа $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $dS = dxdy$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

$$\iint_D f(x, y) dxdy.$$

Нехай функція $f(x, y)$ невід'ємна в обмеженій замкненій області D . Тоді подвійний інтеграл $V = \iint_D f(x, y) dxdy$ виражає об'єм V вертикального циліндричного тіла (рис. 4) з нижньою основою D , що обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$.

Обчислимо об'єм V по-іншому – методом паралельних перерізів. Припустимо, що область D – правильна в напрямі осі Oy (рис. 5) і може бути подана у вигляді

$$D : \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), x \in [a; b], D \xrightarrow{Oy} [a; b]\}.$$

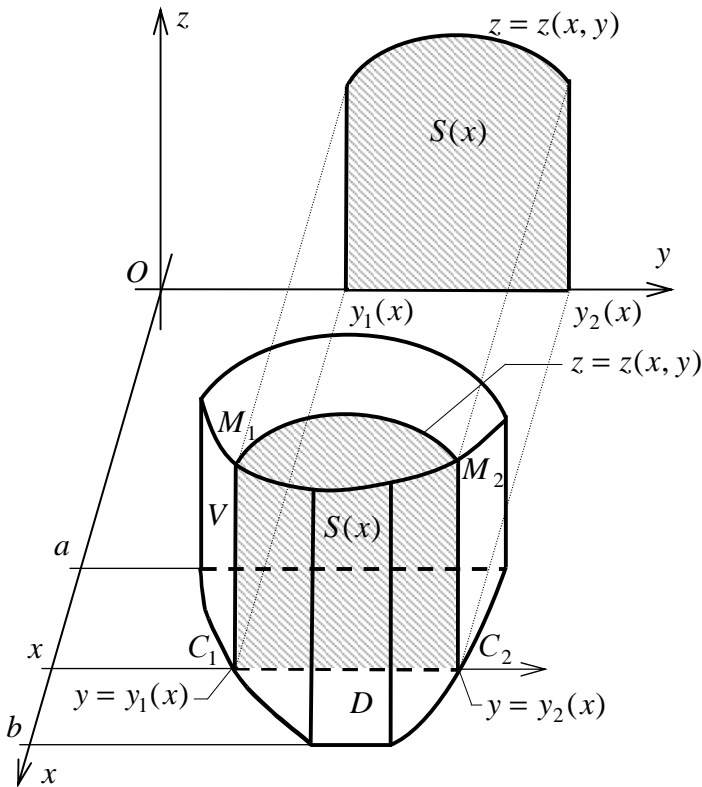


Рис. 4

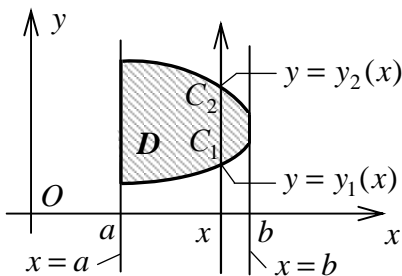


Рис. 5

Тоді проекцією тіла на вісь Ox є відрізок $[a; b]$. Об'єм V можна знайти так:
 $V = \int_a^b S(x) dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною $x = C = const$, перпендикулярною до осі Ox , а $x = a$ і $x = b$ – рівняння крайніх площин, між якими лежить дане тіло.

При перетині циліндричного тіла площиною $x = C$, де $C = const$ утворюється криволінійна трапеція $C_1M_1M_2C_2$ (рис. 4). Апліката $z = f(x, y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише однієї змінної y , причому аргумент y змінюється в межах від $y_{ex} = y_1(x)$ до $y_{eix} = y_2(x)$. Площа $S(x)$ фігури $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу:

$$S(x) = \int_{y_{ex}}^{y_{eix}} z dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad \text{Тоді } V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Порівнюючи два вирази для об'єму V , одержуємо формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла – послідовного обчислення двох звичайних одновимірних інтегралів. Це співвідношення звичайно записують у спрощеній формі

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.}$$

Зауваження 2. Одержана з геометричних міркувань формула залишається справедливою в загальному випадку інтегрованої функції $f(x, y)$.

Зауваження 3. Спочатку обчислюється **внутрішній інтеграл** $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ за **внутрішньою змінною** y в припущенні, що **зовнішня змінна** x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x .

Зауваження 4. **Зовнішні межі інтегрування** a і b – завжди сталі. Обчислюючи **зовнішній інтеграл** $\int_a^b S(x) dx$, дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

Зауваження 5. Внутрішні межі інтегрування $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями зовнішньої змінної x . В окремих випадках вони також можуть бути сталими. Наприклад, коли область інтегрування D – прямокутник зі сторонами $x = a$, $x = b$, $y = c$ і $y = d$, що паралельні осям координат, то всі межі інтегрування є сталими і подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Правило знаходження меж інтегрування для правильної в напрямі осі Oy області D :

1) Область D спроектувати паралельно осі Oy на вісь Ox і одержати відрізок $[a; b]$, $a \leq x \leq b$. Числа a і b – відповідно нижня і верхня межі у зовнішньому інтегралі за x . Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D , які лежать на вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$, що обмежують цю область.

2) Провести через будь-яку внутрішню точку x відрізка $[a; b]$ пробну пряму, паралельну осі Oy і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2 . Щоб визначити внутрішні межі інтегрування за y – ординати вказаних точок, необхідно розв'язати рівняння лінії входу і лінії виходу відносно y : $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що на відрізку $[a; b]$ обмежені і зберігають аналітичний вираз, – відповідно нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за y .

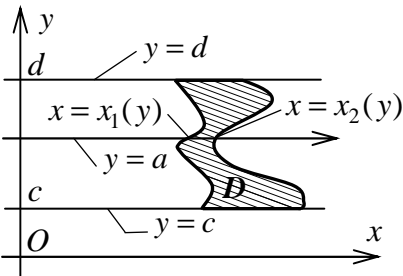


Рис. 6

Зауваження 6. Якщо область D – правильна в напрямі осі Ox (рис. 6) і може бути подана у вигляді

$$D : \left\{ (x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \right. \\ \left. y \in [c; d], D \xrightarrow{Ox} [c; d] \right\},$$

то справедлива формула (змінні x і y міняються ролями)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x . Обчислюючи його в межах від $x_1(y)$ до $x_2(y)$ (при цьому зовнішня змінна y вважається сталою), дістаємо деяку функцію $S(y)$ від однієї змінної y . Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d , одержуємо значення I подвійного інтеграла.

Зауваження 7. Якщо область D правильна в напрямках обох осей Ox і Oy , то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. Зрозуміло, що результати при цьому однакові, тобто *значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається *зміною порядку інтегрування*.

Зауваження 8. У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 9. Якщо область D не є правильною в напрямі жодної з осей Ox чи Oy , то її необхідно розбити на частини без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є правильною в напрямі Ox чи Oy . Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних частинних областях і додаючи результати, знайдемо шуканий подвійний інтеграл по всій області D . Звичайно, для розбиття використовуються лінії, що належать координатній сітці. Зокрема, у випадку прямокутних координат поділ області D на правильні частини здійснюють прямими, які паралельні осям Ox і Oy .

Приклад 1. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ вказано підінтегральну функцію $f(x, y)$ і область інтегрування D , яка

задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

- 1) Зобразити область інтегрування D .
- 2) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Oy , при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x і внутрішнім інтегруванням по y .
- 3) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Ox , при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по y і внутрішнім інтегруванням по x .

$$f(x, y) = 2xy; \quad D: xy = 2; x - 2y = 0; y - 2 = 0.$$

□ 1) Межа області D утворена трьома прямими. Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} xy = 2; & x = 2y; & y^2 = 1; & y_1 = -1; & y_2 = 1; & A(-1; -6); \\ x - 2y = 0; & 2y \cdot y = 2; & x_1 = -2; & x_2 = 2; & & B(1; 1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 2; & y = 2; \\ y - 2 = 0; & x \cdot 2 = 2; & x = 1 \end{cases} \quad C(1; 2);$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0; & y = 2; \\ y - 2 = 0; & x - 2 \cdot 2 = 0; & x = 4 \end{cases} \quad E(4; 2).$$

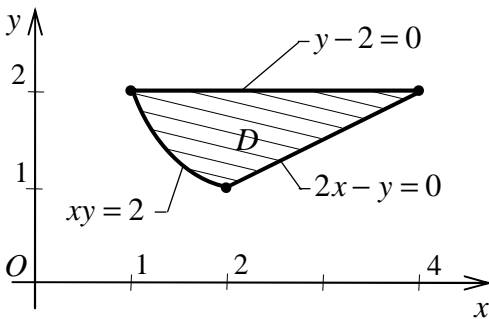


Рис. 7

Область D зображена штриховкою на рис. 7.

2) Спроектуємо область D паралельно осі Oy на вісь Ox і одержимо відрізок $[1; 4]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що об-

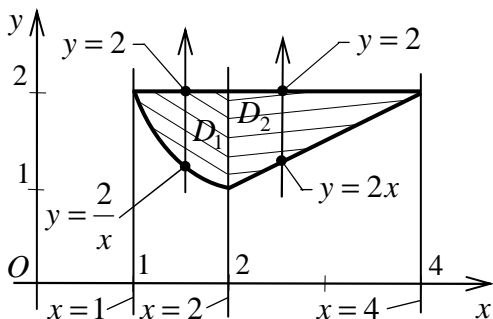


Рис. 8

ласть D – неправильна у напрямі осі Oy . Пряма $x=2$ розбиває цю область на дві правильні у напрямі осі Oy частини D_1 і D_2 . Відповідне подання відтворено на рис. 8. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= 2 \iint_{D_1} xy dx dy = 2 \iint_{D_1} xy dx dy + 2 \iint_{D_2} xy dx dy = \\ &= 2 \int_1^2 x dx \int_{2/x}^2 y dy + 2 \int_2^4 x dx \int_{x/2}^2 y dy = 2 \int_1^2 x \left((y^2/2) \Big|_{2/x}^2 \right) dx + \\ &+ 2 \int_2^4 x \left((y^2/2) \Big|_{x/2}^2 \right) dx = \int_1^2 (4x - 4/x) dx + \int_2^4 (4x - x^3/4) dx = \\ &= \left(2x^2 - 4 \ln |x| \right) \Big|_1^2 + \left(2x^2 - x^4/16 \right) \Big|_2^4 = 15 - 4 \ln 2. \end{aligned}$$

3) Спроектуємо область D паралельно осі Ox на вісь Oy і одержимо відрізок $[1; 2]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – правильна у напрямі осі Ox . Відповідне подання зображено на рис. 9. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

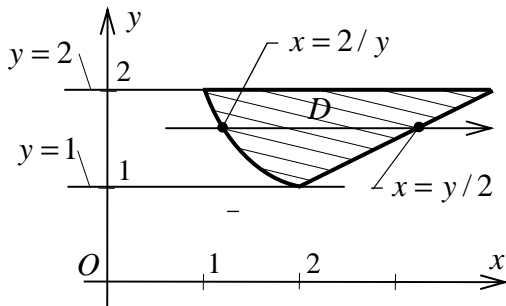


Рис. 9

Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= 2 \iint_D xy dx dy = \\ &= 2 \int_1^2 y dy \int_{2/y}^{y/2} x dx = \\ &= \int_1^2 y \left(x^2 \Big|_{2/y}^{y/2} \right) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 (4y^3 - 4/y) dy = \left(y^4 - 4/y \right) \Big|_1^2 = 15 - 4 \ln 2. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. У заданих повторних інтегралах змінити порядок інтегрування:

$$\text{а) } I = \int_0^1 dx \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{-1}^{-\ln x} f(x, y) dy;$$

$$\text{б) } I = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin(y/2)} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_{\sqrt{2}}^{\arccos(y/2)} f(x, y) dx.$$

□ а) Використовуючи зазначені межі інтегрування, для кожного з двох повторних інтегралів-доданків запишемо рівняння ліній, що обмежують відповідні області D_1 і D_2 , та зобразимо їх в одній системі координат Oxy (рис. 10):

$$D_1: x=0; x=1; y=-1; y=-\sqrt{1-x^2};$$

$$D_2: x=1; x=e; y=-1; y=-\ln x.$$

З рис. 10 видно, що D_1 і D_2 можна об'єднати в одну область $D = D_1 \cup D_2$. У зазначених повторних інтегралах області D_1 і D_2 розглядаються як правильні в напрямі осі Oy .

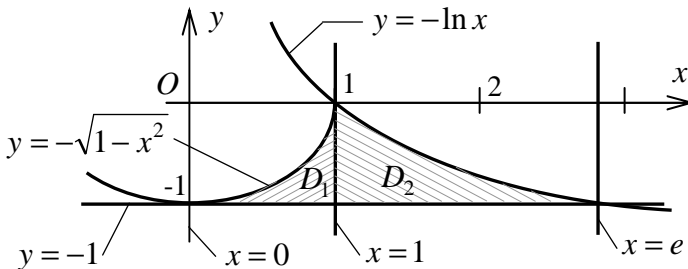


Рис. 10

Для зміни порядку інтегрування об'єднану область D треба подати як правильну в напрямі осі Ox , при необхідності розбиваючи на правильні у вибраному напрямі частини. У даному випадку

область D – правильна в напрямі осі Ox :
 $D: y = -1; y = 1; y = 0; x = \sqrt{1 - y^2}; x = e^{-y}$. Відповідне зображення відтворено на рис. 11. Тоді

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{e^{-y}} f(x, y) dx.$$

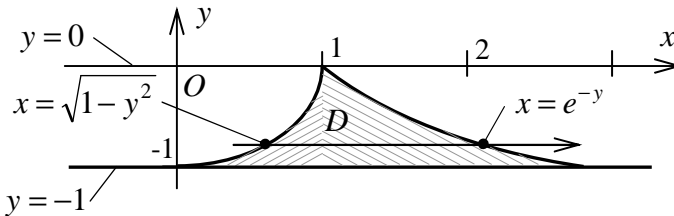


Рис. 11

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$I = \int_0^{\pi/4} dx \int_{2\sin x}^{2\cos x} f(x, y) dy. \quad \blacksquare$$

1.1.3. Задача про масу просторового тіла. Потрійний інтеграл і його властивості

Нехай у тривимірному просторі задана замкнена обмежена область (просторове тіло) V , яка суцільно заповнена речовиною з об'ємною густиною $\mu = f(x, y, z)$. Знайдемо масу m цього тіла V .

Для цього розіб'ємо область V сіткою довільних кусково-гладких поверхонь на елементарні частини V_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо об'єм комірки V_i через ΔV_i , а її діаметр (довжину найбільшої хорди, що з'єднує дві точки межі області V_i) – через d_i , $i = \overline{1, n}$. У кожній комірці V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Можна наближено вважати, що густина в межах елементарної області V_i однакова і дорівнює значен-

ню $\mu_i = f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ у виділеній точці. Тоді для маси Δm_i комірки V_i справджується наближена рівність $\Delta m_i \approx \mu_i \Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$. Відповідно маса m всього тіла V наближено визначається за формулою $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ називається **інтегральною сумою функції $f(x, y, z)$ по області V** .

Природно границю інтегральної суми при умові, що кожна комірка V_i стягується в точку ($\max d_i \rightarrow 0$) і, відповідно, їх число n необмежено збільшується ($n \rightarrow \infty$), прийняти за масу m тіла V :

$$m = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття тривимірної області V , якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні комірки V_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$ у них, називається **потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області V** :

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i},$$

де x, y і z – змінні інтегрування; $f(x, y, z)$ – підінтегральна функція; dV – елемент (диференціал) об'єму; $f(x, y, z) dV$ – підінтегральний вираз; V – область інтегрування.

Таким чином $\boxed{m = \iiint_V \mu(x, y, z) dV}$ (фізичний зміст потрійного інтеграла).

Якщо в потрійному інтегралі підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x, y, z) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме об'єму області інтегрування V : $\boxed{V = \iiint_V dV}$ (геометричний зміст потрійного інтеграла).

1.1.4. Обчислення потрійного інтеграла у прямокутній системі координат

Нехай у тривимірному просторі визначена декартова прямокутна система координат $Oxyz$. Оскільки потрійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в цій системі координат зручно розбивати область V координатною сіткою, утвореною площинами, які паралельні координатним площинам. Тоді внутрішня елементарна комірка V_i є прямокутним паралелепіпедом зі сторонами Δx_i , Δy_i і Δz_i . Його об'єм $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$. Відповідно диференціал об'єму набуває вигляду $dV = dx dy dz$ і подвійний інтеграл можна подати у формі $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

Нехай тривимірна область V – правильна в напрямі осі Oz (є вертикальним циліндричним тілом, зображеним на рис. 1), і може бути подана у вигляді

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}, V \xrightarrow{Oz} D_{xy} \right\}.$$

Тоді справедлива формула

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz}$$

за якою спочатку обчислюється внутрішній одновимірний інтеграл по z , а потім зовнішній подвійний інтеграл по x, y .

Якщо при цьому плоска область D_{xy} , що служить проекцією тіла V на площину Oxy , є правильною в напрямі осі Oy (рис. 5) і може бути подана у вигляді

$$D_{xy} : \left\{ (x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), x \in [a; b], D_{xy} \xrightarrow{Oy} [a; b] \right\},$$

то приходимо до формули

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz}$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження 1. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній z при фіксованих зовнішніх змінних x і y . Потім знаходиться проміжний інтеграл по y при фіксованому x . В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по x .

Зауваження 2. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області V відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та її форми, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x, y, z)$.

Зауваження 3. Якщо область V – неправильна, то її треба розбити на правильні частини.

Приклад. Для потрійного інтеграла $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ вказано підінтегральну функцію $f(x, y, z)$ й область інтегрування V , яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

- 1) Зобразити тіло V у прямокутній системі координат $Oxyz$ як правильну в напрямі осі Oz просторову область.
- 2) Подати його проекцію D_{xy} як правильну в напрямі осі Oy плоску область, при необхідності розбиваючи на частини, і зробити відповідний рисунок.
- 3) За результатами пунктів 1) і 2) перейти до повторного інтеграла і обчислити його значення.

а) $f(x, y, z) = 7(1 - x/4)(3y^2 + 4z)$;

$V: z - y^2 = 0; x + 4y - 4 = 0; x = 0; z = 0;$

б) $f(x, y, z) = x + y + z;$

$V: x + y + z = 1; x = 0; y = 0; z = 0.$

□ а) Область інтегрування V є вертикальним циліндричним тілом, а його проекцією на координатну площину Oxy є плоска область D_{xy} . На рис. 12 це тіло V подано як правильну в напрямі осі Oz просторову область, що обмежена знизу координатною площиною $z = 0$ (поверхня входу), зверху – параболічним циліндром

ром $z = y^2$ (поверхня виходу), а з боків – координатною площиною $x = 0$ і вертикальною площиною $x + 4y - 4 = 0$. Відповідно на

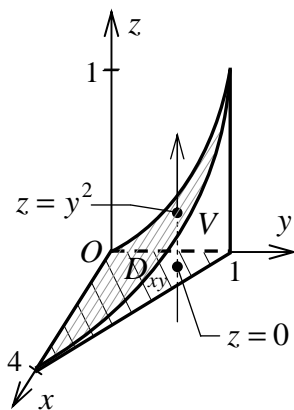


Рис. 12

рис. 13 проекцію D_{xy} відтворено як правильну в напрямі осі Oy плоску область, яка обмежена знизу віссю Ox (лінія входу $y = 0$), зверху – похилою прямою $y = 1 - x/4$ ((лінія виходу), а з боків – вертикальними прямими $x = 0$ і $x = 4$. Тоді потрібний інтеграл переходом до повторного обчислюється так:

$$I = 7 \iiint_V (1 - x/4)(3y^2 +$$

$$+ 4z) dx dy dz = 7 \int_0^4 (1 - x/4) dx \int_0^{1-x/4} dy \int_0^{y^2} (3y^2 + 4z) dz =$$

$$= 7 \int_0^4 (1 - x/4) dx \int_0^{1-x/4} (3y^2 z + 2z^2) \Big|_0^{y^2} dy = 7 \int_0^4 (1 - x/4) dx \int_0^{1-x/4} (3y^4 +$$

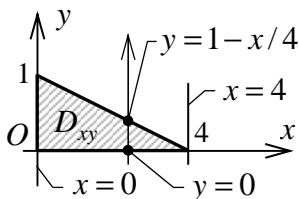


Рис. 13

$$+ 2y^4) dy = 7 \int_0^4 (1 - x/4) dx \int_0^{1-x/4} 5y^4 dy =$$

$$= 7 \int_0^4 (1 - x/4) y^5 \Big|_0^{1-x/4} dx =$$

$$= 7 \int_0^4 (1 - x/4)^6 dx = -4 \cdot (1 - x/4)^7 \Big|_0^4 = 4$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $I = 1/8$. ■

1.1.5. Застосування кратних інтегралів

Площа плоскої фігури. Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x, y) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D :

$$S = \iint_D dx dy.$$

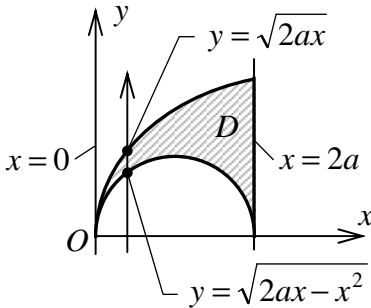


Рис. 14

Приклад 1. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D , що обмежена півколом $y = \sqrt{2ax - x^2}$, дугою параболу $y = \sqrt{2ax}$ і прямою $x = 2a$ ($a > 0$).

□ На рис. 14 область D подана як правильна в напрямі осі Oy .
Тоді

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} dy = \int_0^{2a} (\sqrt{2ax} - \sqrt{2ax-x^2}) dx = \int_0^{2a} \sqrt{2ax} dx - \\ &- \int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2} dx = \sqrt{2a} \cdot (2/3)x^{3/2} \Big|_0^{2a} - \int_0^{2a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx = \\ &= \left| x-a = a \sin t; dx = a \cos t dt; t = \arcsin(x/a-1); \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= -\pi/2; t_2 = \pi/2; \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = a \cos t \Big| = \sqrt{2a} \cdot (2/3) \sqrt{8a^3} - \\ &- a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = (8/3)a^2 - (1/2)a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{8}{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \cdot (t + (1/2)\sin 2t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{(16-3\pi)}{6}a^2 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Об'єм тіла. Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V , яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z = z_1(x, y)$ і

виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy} . Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$V = \iint_{D_{xy}} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy.$$

Зауваження 1. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy , то його об'єм обчислюється за аналогічною формулою відповідно

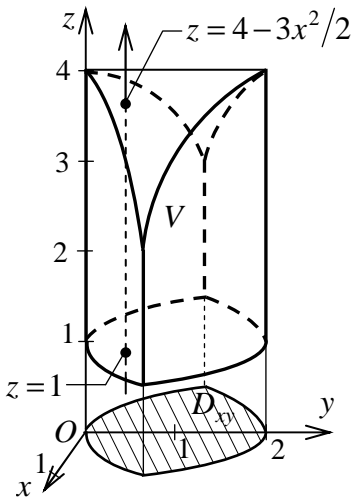


Рис. 15

$$V = \iint_{D_{yz}} (x_2(x, y) - x_1(x, y)) dy dz$$

і

$$V = \iint_{D_{xz}} (y_2(x, y) - y_1(x, y)) dx dz.$$

Приклад 2. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла V , що обмежене параболічними циліндрами $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $z = 4 - 3x^2/2$ і площиною $z = 1$.

□ На рис. 15 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz . Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} , що зображена на рис. 16

як правильна в напрямі осі Oy . Тоді

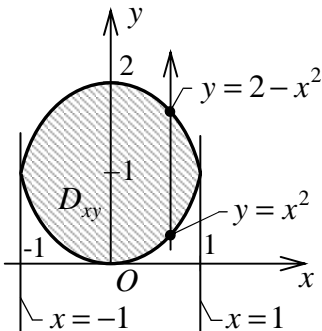


Рис. 16

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_{xy}} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (4 - 3x^2/2 - 1) dx dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (2 - x^2) dx \int_{x^2}^{2-x^2} dy = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (2 - \\ &x^2) \cdot y \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = (3/2) \int_{-1}^1 (2 - x^2)(2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -x^2 - x^2) dx = 3 \int_{-1}^1 (x^4 - 3x^2 + 2) dx = \\
 & = 3 \cdot (x^5/5 - x^3 + 2x) \Big|_{-1}^1 = 7 \frac{1}{5} \text{ (куб. од.)}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Зауваження. Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об'єм просторової області V також можна обчислити за формулою

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx dy dz.$$

Приклад 3. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла V , що обмежене гіперболічним параболоїдом $z = xy$, координатною площиною $z = 0$ і площиною $2x + y - 2 = 0$.

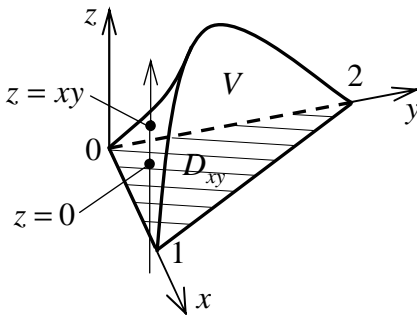


Рис. 17

□ На рис. 17 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz . Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} , що зображена на рис. 18 як правильна в напрямі осі Oy . Тоді

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{xy} dz =
 \end{aligned}$$

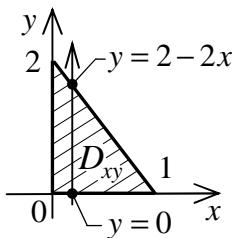


Рис. 18

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} z \Big|_0^{xy} dy = \int_0^1 x dx \int_0^{2-2x} y dy = \\
 &= \int_0^1 x (y^2/2) \Big|_0^{2-2x} dx = \int_0^1 (2x - 4x^2 + 2x^3) dx = \\
 &= (x^2 - 4x^3/3 + x^4/2) \Big|_0^1 = 1/6. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

1.2. Криволінійні інтеграли

1.2.1. Скалярне поле. Задача про масу дуги.

Криволінійний інтеграл за довжиною

Нехай у деякій області D простору задано скалярну функцію трьох змінних $u = f(M) = f(x, y, z)$. Тоді кажуть, що в області D задане просторове скалярне поле $u = f(M)$.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$, яка визначена у плоскій області D , задає плоске скалярне поле $z = f(x, y)$.

Поле – це функція $u = f(M)$, що розглядається разом з її областю визначення D . (Фізичний зміст функції багатьох змінних).

Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Нехай у деякій області D координатної площини Oxy задано неперервне плоске скалярне поле $\mu = f(x, y)$. Припустимо, що в цій області D лежить кусково-гладка матеріальна крива L . Нехай неперервна функція $\mu = f(x, y)$ визначає лінійну густину розподілу маси вздовж кривої L . Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} (рис. 19).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних частин Δl_i , $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i . Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню

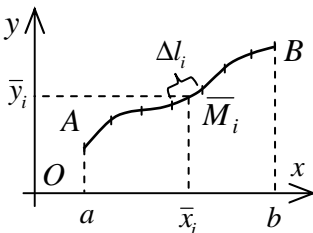


Рис. 19

$f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$. Тоді

$\Delta m_i \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i$ – маса елементарної дуги Δl_i . А маса всієї дуги L_{AB} :

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i.$$

Одержана сума називається **інте-**

гральною для функції $f(x, y)$ по довжині дуги L_{AB} .

$$\text{Очевидно, що } m = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i.$$

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається **криволінійним інтегралом за довжиною (криволінійним інтегралом першого роду)** і позначається:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i,$$

де dl – **диференціал (елемент) довжини дуги**.

Таким чином, $m = \int_{L_{AB}} \mu dl = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ (фізичний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB} : $l = \int_{L_{AB}} dl$ (геометричний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 1. При $f(x, y) \geq 0$ криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 20) з напрямною L_{AB} і паралельними осі Oz твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x, y)$:

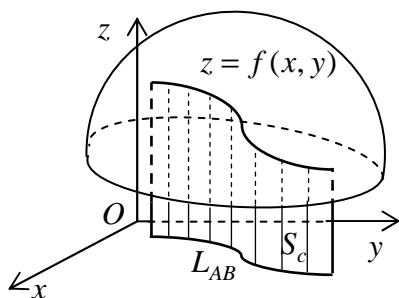


Рис. 20

$$S_c = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl.$$

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D , що містить в собі кусково-гладку криву L , то існує криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ (достатні умови існування криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 3. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напрямку руху по дузі: $\int_{L_{BA}} f(x, y) dl = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl$. Інші властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла.

Зауваження 4. Поняття криволінійного інтеграла за довжиною поширюється на випадок дуги L_{AB} просторової лінії L , розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f(x, y, z)$:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta l_i.$$

1.2.2. Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$, тобто коли параметр t змінюється на відрізьку $[\alpha; \beta]$, біжуча точка $(x(t); y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B . Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L e^y \operatorname{tg} x dl$, якщо $L: x = \arctg t$; $y = \ln(1+t^2)$; $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

□ Обчислимо:

$$x' = \frac{1}{1+t^2}; \quad y' = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dl = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} dt = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2} dt.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_L e^y \operatorname{tg} x \, dl &= \int_0^{\sqrt{2}} e^{\ln(1+t^2)} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t) \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2} dt = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4t^2} t \, dt = \\ &= \left| u = 1+4t^2; \, du = 8t \, dt; \, u_1 = 1; \, u_2 = 9 \right| = (1/8) \int_1^9 u^{1/2} du = \\ &= (1/12) u^{3/2} \Big|_1^9 = 13/6. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Випадок 2. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Тоді $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$. Відповідно

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x, y) \, dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.}$$

Приклад 2. Обчислити $I = \int_{AB} \frac{xy \, dl}{24 - 5x^2 - 8y^2}$, якщо AB є чвертю еліпса $x^2/4 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

$$\square \, AB: y = (1/2) \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2; \quad y' = -(1/2)x / \sqrt{4 - x^2};$$

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = (1/2) \left(\sqrt{16 - 3x^2} / \sqrt{4 - x^2} \right) dx;$$

$$I = \int_0^2 \frac{x(1/2)\sqrt{4-x^2}}{24-5x^2-8 \cdot (1/4)(4-x^2)} \cdot \frac{\sqrt{16-3x^2}}{2\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x dx =$$

$$= (1/8) x^2 \Big|_0^2 = 1/2. \quad \blacksquare$$

Випадок 3. Якщо просторова дуга L_{AB} задана параметричними рівняннями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то відповідний криволінійний інтеграл за довжиною обчислюється так:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x, y, z) \, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.}$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int_L (x^2 - y^2)z^{-3} dl$ за довжиною дуги гвинтової лінії $L: x = 2e^t \cos t; y = 2e^t \sin t; z = e^t, 0 \leq t \leq \pi/4$.

$$\square x' = 2(e^t \cos t - e^t \sin t); y' = 2(e^t \sin t + e^t \cos t); z' = e^t;$$

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = 3e^t dt;$$

$$f(x, y, z) = \left((2e^t \cos t)^2 - (2e^t \sin t)^2 \right) (e^t)^{-3} = 4e^{-t} \cos 2t;$$

$$I = 4 \int_0^{\pi/4} 4e^{-t} \cos 2t \cdot 3e^t dt = 6 \cdot \sin 2t \Big|_0^{\pi/4} = 6. \quad \blacksquare$$

1.2.3. Векторне поле. Задача про роботу векторного поля. Криволінійний інтеграл за координатами

Якщо кожній точці $M(x, y, z)$ деякої області D простору поставлений у відповідність вектор $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ - скалярні функції, то говорять, що задано **просторове векторне поле**.

У випадку плоскої області D і двовимірного вектора $\vec{F}(M)$, що лежить у площині цієї області, говорять про **плоске векторне поле**. Зокрема, якщо область D лежить на координатній площині Oxy , то розглядається плоске векторне поле $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $P = P(x, y)$ і $Q = Q(x, y)$.

Задача про роботу векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Нехай під дією змінної сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ матеріальна точка M рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L . Необхідно обчислити роботу \tilde{A} , яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AB} від початкової точки A до кінцевої точки B (рис. 21).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i , $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ з абсцисами

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$. Розглянемо елементарну дугу Δl_i , якій відповідає вектор переміщення $\vec{\Delta l}_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили

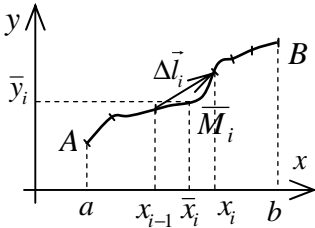


Рис. 21

$\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F} = \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$.

Елементарна робота $\Delta \tilde{A}_i$ на ділянці Δl_i визначається скалярним добутком

$$\Delta \tilde{A}_i \approx \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \vec{\Delta l}_i = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i.$$

Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках Δl_i , $i = \overline{1, n}$ і скласти суму, то $\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{A}_i \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \vec{\Delta l}_i = \sum_{i=1}^n (P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i)$.

Одержана сума називається *інтегральною* для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ по напрямленій дузі L_{AB} .

Очевидно, що
$$\tilde{A} = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{A}_i.$$

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n (P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i)$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається **криволінійним інтегралом за координатами (криволінійним інтегралом другого роду)** і позначається

$$\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i),$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Криволінійний інтеграл за координатами у векторному полі також називається **циркуляцією вектора \vec{F} по дузі L_{AB}** і позначається

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta \vec{l}_i,$$

де $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ – **вектор диференціала (елемента) довжини плоскої дуги**.

Таким чином,
$$\tilde{A} = \int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l}$$

(фізичний зміст криволінійного інтеграла за координатами).

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так

$$\oint_L \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

причому початкова точка вибирається довільно і вказується напрям обходу. Якщо напрям обходу замкненого контуру L явно не зазначено, то приймається додатний напрям, при якому область, обмежена контуром, залишається зліва – рух проти годинникової стрілки.

Зауваження 1. Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\oint_{L_{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l} = \oint_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

де $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – **вектор диференціала (елемента) довжини просторової дуги**.

Криволінійний інтеграл за координатами визначається підінтегральним виразом, довжиною і формою кривої інтегрування та її напрямом.

Зауваження 2. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак

$$\int_{L_{BA}} \vec{F} d\vec{l} = - \int_{L_{AB}} \vec{F} d\vec{l}.$$

Це впливає з означення, оскільки при цьому вектор $d\vec{l}$, а відповідно і його проєкції dx , dy і dz , змінюють знак. Інші властивості криволінійного інтеграла за координатами аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

1.2.4. Обчислення криволінійного інтеграла за координатами

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами здійснюється зведенням його до одновимірному інтегралу методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах у параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тоді $dx = x'(t)dt$; $dy = y'(t)dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Приклад 1. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = (x/y)\vec{i} + 2\vec{j}$ по дузі циклоїди $L: x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$, $\pi/3 \leq t \leq \pi/2$.

$$\square \quad dx = (1 - \cos t) dt; \quad dy = \sin t dt; \quad \int_L \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_L (x/y) dx +$$
$$+ 2 dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} [(t - \sin t)/(1 - \cos t)](1 - \cos t) + 2 \sin t dt =$$
$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} (t - \sin t + 2 \sin t) dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} t dt + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin t dt =$$
$$= (1/2)t^2 \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - \cos t \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 5\pi^2/72 + 1/2. \quad \blacksquare$$

Випадок 2. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Можна використати попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$$\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases} \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} dy = y'(x) dx \\ dx = dx \end{cases} \quad \text{і маємо}$$

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

$$= \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx.$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^5/y)\vec{j}$ по дузі кубічної параболи $L: y = x^3$, $1 \leq x \leq 2$.

□ $L: y = x^3, 1 \leq x \leq 2; y' = 3x^2; dy = 3x^2 dx;$

$$\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_L 2xy dx + (x^5/y) dy = \int_1^2 [2x x^3 + (x^5/x^3) \times$$

$$\times 3x^2] dx = 5 \int_1^2 x^4 dx = x^5 \Big|_1^2 = 31. \quad \blacksquare$$

Випадок 3. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі $x = x(t); y = y(t); z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$. Тоді $dx = x'(t) dt; dy = y'(t) dt; dz = z'(t) dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy +$$

$$+ R(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

Приклад 3. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = xz\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y - 2)\vec{k}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1, 0, -3)$ та $B(2, -2, 0)$.

□ Знайдемо канонічні рівняння прямої AB :

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{-2-0} = \frac{z+3}{0+3}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$x = t + 1; \quad y = -2t; \quad z = 3t - 3; \quad dx = dt; \quad dy = -2dt; \quad dz = 3dt.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо на відрізку L_{AB} $1 \leq x \leq 2$, то $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l} &= \int_{L_{AB}} xz \, dx + 2y \, dy + (x + y - 2) dz = \\ &= \int_0^1 [(t+1)(3t-3) + 2(-2t) \cdot (-2) + (t+1-2t-2) \cdot 3] dt = \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 3 + 8t - 3t - 3) dt = 3 \int_0^1 t^2 dt + 5 \int_0^1 t dt - 6 \int_0^1 dt = \\ &= t^3 \Big|_0^1 + (5/2) \cdot t^2 \Big|_0^1 - 6t \Big|_0^1 = -2/5. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.5. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. (Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом). Нехай задано плоске векторне поле $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ де $P = P(x, y)$ та $Q = Q(x, y)$ - функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y$ і $\partial Q/\partial x$. Якщо L - замкнена лінія, що обмежує однозв'язну область D , то

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

(формула Гріна).

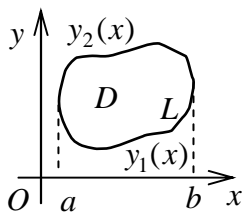


Рис. 22

□ Обмежимося розглядом області D , правильної в напрямі осі Oy (рис. 22). Обчислимо

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b (P(x, y_2(x)) - \end{aligned}$$

$$-P(x, y_1(x)) dx = -\int_b^a P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx =$$

$$= -\oint_L P(x, y) dx. \text{ Аналогічно } \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dx.$$

Склавши відповідні вирази, маємо

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \blacksquare$$

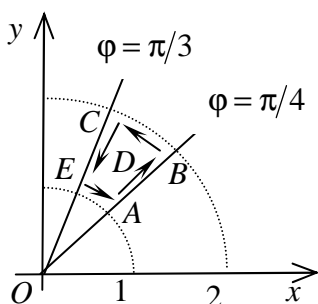


Рис. 23

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити циркуляцію $I = \oint_L \ln(x^2 + y^2) dx + 2 \operatorname{arctg}(y/x) dy$, якщо L - замкнений контур $ABCE$, утворений колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ та прямими $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, де $x > 0$, $y > 0$ (рис. 23).

□ У прийнятих позначеннях

$$P(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$$

$$Q(x, y) = 2 \operatorname{arctg}(y/x).$$

Знайдемо $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}.$

Тоді за формулою Гріна

$$I = \oint_L \ln(x^2 + y^2) dx + 2 \operatorname{arctg}(y/x) dy = -4 \iint_D \frac{y dx dy}{x^2 + y^2},$$

де область D обмежена контуром L .

Перейдемо до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, де $1 \leq \rho \leq 2$, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/3$. Отже,

$$I = -4 \iint_D \frac{y dx dy}{x^2 + y^2} = -4 \iint_D \frac{\rho \sin \varphi}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = -4 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi \int_1^2 d\rho =$$

$$= -4 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \rho_1^2 \sin \varphi \, d\varphi = 4 \cos \varphi \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 - 2\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

1.2.6. Застосування криволінійних інтегралів

За допомогою криволінійного інтеграла за довжиною можна обчислити довжину дуги і площу циліндричної поверхні.

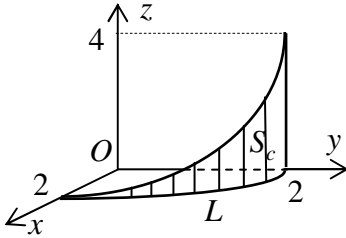


Рис. 24

Приклад 1. Обчислити площу S_c частини параболічного циліндра $y = \sqrt{4-2x}$, $0 \leq x \leq 2$, що розміщена між площиною $z = 0$ і циліндром $z = y^3/2$ (рис. 24).

$$\square L: y = \sqrt{4-2x}, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$y' = -1/\sqrt{4-2x};$$

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}} \, dx; \quad S_c = \int_L \frac{y^3}{2} \, dl = \frac{1}{2} \int_0^2 (\sqrt{4-2x})^3 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}} \, dx = \int_0^2 (2-x)\sqrt{5-2x} \, dx = \left| 5-2x = u^2; \quad x = (5-u^2)/2; \right.$$

$$dx = -u \, du; \quad u = \sqrt{5-2x}; \quad u_1 = \sqrt{5}; \quad u_2 = 1 \Big| = \int_{\sqrt{5}}^1 (2 - (5-u^2)/2) u \times$$

$$\times (-u \, du) = (1/2) \int_{\sqrt{5}}^1 (u^2 - u^4) \, du = (1/2) \int_{\sqrt{5}}^1 u^2 \, du - (1/2) \times$$

$$\times \int_{\sqrt{5}}^1 u^4 \, du = (1/6) \cdot u^3 \Big|_{\sqrt{5}}^1 - (1/10) \cdot u^5 \Big|_{\sqrt{5}}^1 = (25\sqrt{5} + 1)/15. \quad \blacksquare$$

Маса плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y)$ визначається за формулою $m = \int_L \mu(x, y) \, dl$. Якщо густина стала $\mu_0 = const$, то $m = \mu_0 \int_L dl$.

Приклад 2. Обчислити масу m плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y)$:

а) $L: y = 2x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1; \quad \mu(x, y) = y/\sqrt{1+9x};$

б) $L: x = 3\cos t; y = 3\sin t, 0 \leq t \leq \pi/2; \quad \mu(x, y) = 6xy^2.$

□ а) $L: y = 2x^{3/2}; y' = 3x^{1/2}; dl = \sqrt{1+(y')^2} dx = \sqrt{1+9x} dx;$

$$m = \int_L \mu(x, y) dl = \int_L \left(y/\sqrt{1+9x} \right) dl = \int_0^1 \left(2x^{3/2}/\sqrt{1+9x} \right) \times \\ \times \sqrt{1+9x} dx = 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = (4/5) \cdot x^{5/2} \Big|_0^1 = 4/5;$$

б) Розв'язати самостійно. ■

Нехай замкнений контур L обмежує однозв'язну область D .
За формулою Гріна

$$\oint_L -y dx + x dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy = \iint_D (1+1) dx dy = \\ = 2 \iint_D dx dy = 2S_D. \quad \text{Звідси} \quad \boxed{S_D = (1/2) \oint_L -y dx + x dy},$$

де S_D – площа плоскої області D , що обмежена контуром L . Таким чином, за допомогою криволінійного інтеграла за координатами можна обчислити площу плоскої області.

Приклад 3. За допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої області D , що обмежена осями координат $x = 0, y = 0$ і дугою астроїди $x = 4\cos^3 t, y = 4\sin^3 t$, розміщеною в першому квадранті ($x \geq 0, y \geq 0$) (рис. 25).

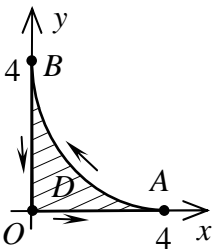


Рис. 25

□ Контур L_{OABO} , що обмежує область D , складається з трьох ділянок OA, AB і BO . Відповідно розіб'ємо криволінійний інтеграл:

$$S_D = (1/2) \oint_{L_{OABO}} -y dx + x dy = \\ = (1/2) \left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} \right).$$

Тоді $OA: y = 0, x_1 = 0, x_2 = 4; dy = 0;$

$$\int_{OA} -y dx + x dy = \int_0^4 (-0 + x \cdot 0) dx = 0;$$

$$\begin{aligned}
AB: x &= 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t, t_1 = 0, t_2 = \pi/2; \\
dx &= -12 \cos^2 t \sin t dt; dy = 12 \sin^2 t \cos t dt; \int_{AB} -y dx + x dy = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-4 \sin^3 t \cdot (-12) \cos^2 t \sin t + 4 \cos^3 t \cdot 12 \sin^2 t \cos t \right) dt = \\
&= 48 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \\
&= 6 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = 6t \Big|_0^{\pi/2} - (3/4) \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} = 3\pi; \\
BO: x &= 0, y_1 = 4, y_2 = 0; dx = 0; \int_{BO} -y dx + x dy = \int_4^0 (-y \cdot 0 + \\
&+ 0) dx = 0. \text{ Отже, } S_D = (1/2)(0 + 3\pi + 0) = 3\pi/2. \blacksquare
\end{aligned}$$

1.3. Степеневі ряди

1.3.1. Функціональні ряди. Степеневі ряди та їх збіжність

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, визначені на деякій непорожній множині D зміни аргументу x .

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з **області визначення** D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається **точкою збіжності** чи **точкою розбіжності** функціонального ряду.

Множина D_s всіх точок збіжності називається **областю збіжності** функціонального ряду. Очевидно, що D_s є деякою підмножиною області визначення D : $D_s \subseteq D$.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x : $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що **функція** $S(x)$ **розвивається (розкладається) в ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **абсолютно збіжним** в деякій області D_a , якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a; b]$.

Рівномірною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається невід'ємне число

$$\rho_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Нехай відрізок $[a; b]$ міститься в області визначення D функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Цей ряд називається **рівномірно збіжним** на відрізку $[a; b]$ до суми $S(x)$, якщо виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(S, S_n) = 0.$$

Теорема Вейерштрасса (достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду). Якщо для всіх значень x з деякого відрізка $[a; b]$ члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного знакочередного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на цьому відрізку $[a; b]$.

Найбільш важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

де x – дійсна змінна (**аргумент**); x_0 – дійсне фіксоване число

(центр розвинення або опорна точка); $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – дійсні сталі (коефіцієнти).

При $x_0 = 0$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ за степенями x . До цього спрощеного вигляду довільний степеневий ряд зводиться лінійною заміною $x - x_0 = t$.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$ – центр розвинення. Детальніші відомості про збіжність дає наступна

теорема Абеля. а) Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при деякому $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x , для яких $|x| < |x_1|$. б) Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається при деякому $x = x_2$, то він розбігається при всіх значеннях x , для яких $|x| > |x_2|$.

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо x_1 – точка збіжності ряду, то весь інтервал $(-|x_1|; |x_1|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 26). Якщо x_2 – точка розбіжності ряду, то півпрямка $(-\infty; |x_2|)$ зліва від точки $-|x_2|$ і півпрямка $(|x_1|; +\infty)$ справа від точки $|x_2|$ (рис. 26) складаються з точок розбіжності цього ряду. Зближуючи $|x_1|$ і $|x_2|$ простим перебором значень x між ними, звужуватимемо зону невизначеності $(-|x_2|; -|x_1|) \cup (|x_1|; |x_2|)$ і дістанемо:

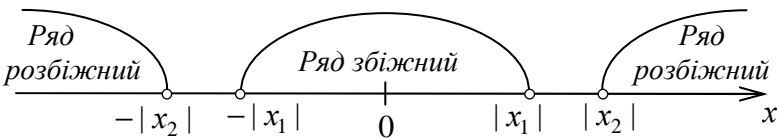


Рис. 26

існує таке невід'ємне число R , яке називається **радіусом збіжності** степеневому ряду, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 27). Симетричний інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності** степеневому ряду. Його довжина дорівнює подвоєному радіусу.

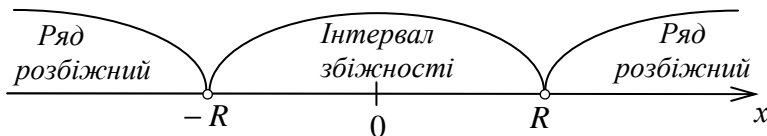


Рис. 27

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, область збіжності степеневому ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 2. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R = 0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ ($R = +\infty$).

Зауваження 3. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ за степенями двочлена $x - x_0$ знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0 .

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневому ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш “сильні” ознаки.

Приклад 1. Знайти інтервал і область збіжності даного степеневому ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^{6n}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n n! (x-2)^{n+5}}{3^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n \sqrt{\ln(4n)}}.$$

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}} = \frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}} : \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} \right| = \frac{|x-1|^3}{8} \times$$

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+9} = \frac{|x-1|^3}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+5/n}{4+9/n} = \frac{|x-1|^3}{8}; \quad \frac{|x-1|^3}{8} < 1;$$

$$|x-1|^3 < 8; \quad |x-1| < 2; \quad -2 < x-1 < 2; \quad -1 < x < 3.$$

Таким чином, $(-1; 3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R = (3 - (-1))/2 = 2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x = -1$ маємо знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбниці. (Переконайтеся в цьому самостійно).

При $x = 3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. (Переконайтеся в цьому самостійно).

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-1; 3)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x+4)^n}{n^{6n}} \right|} = |x+4| \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^6 = 0$$

Оскільки $0 < 1$ при всіх дійсних значеннях x , то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ і його радіус збіжності $R = +\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = (-1)^n n! (x-2)^{n+5} / 3^n; \quad u_{n+1} = (-1)^{n+1} (n+1)! \times \\ \times (x-2)^{n+1+5} / 3^{n+1} = (-1)^{n+1} n! (n+1)(x-2)^{n+6} / 3^{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n! (n+1)(x-2)^{n+6} / 3^{n+1}}{(-1)^n n! (x-2)^{n+5} / 3^n} \right| = \\ = \frac{|x-2|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 2; \\ +\infty & \text{при } x \neq 2. \end{cases}$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка $x = 2$ і його радіус збіжності $R = 0$.

г) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Кінці інтервалу збіжності дослідити за інтегральною ознакою. Відповідь: $(-1; 1)$ – інтервал і область збіжності). ■

Наведемо основні властивості степеневих рядів:

1) *Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[a; b]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R; R)$.*

2) *Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ неперервна на інтервалі збіжності $(-R; R)$.*

3) *Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[a; b]$, який належить інтервалу збіжності $(-R; R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

$$[a; b] \subset (-R; R).$$

4) Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності $(-R; R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R; R).$$

Зауваження 5. При диференціюванні чи інтегруванні степеневого ряду інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

Зазначені властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад 2. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, інтервал збіжності якого $(-1; 1)$.

□ Нехай $S(x)$ – сума даного ряду. Тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n / (2n+1) \right) (x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Одержаний ряд геометричної прогресії з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$ при $x \in (-1; 1)$ є збіжним, оскільки $|q| < 1$. Знайдемо його суму: $S'(x) = 1/(1+x^2)$.

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0; x] \subset (-1; 1)$, дістанемо:

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x dx / (1+x^2) = \arctg x, \quad |x| < 1. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти область збіжності та суму степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

□ (Розв'язати самостійно, використовуючи почленне інтегрування).

Відповідь: $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = (2x-x^2)/(1-x)^2, \quad |x| < 1. \quad \blacksquare$

1.3.2. Ряди Тейлора і Маклорена.

Розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена

В області збіжності сумою степеневого ряду є деяка функція. Вище висвітлені основні властивості та на прикладах розглянуті деякі способи знаходження цієї функції в скінченному вигляді.

Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти його коефіцієнти.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

У цьому разі кажуть, що **функція $f(x)$ розвинена (розкладена) в степеневий ряд** в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Знайдемо коефіцієнти цього ряду через значення самої функції $f(x)$ та її похідних у центрі розвинення x_0 . Для цього послідовно диференціюватимемо ряд і підставлятимемо в ліву та праву частини одержаних розкладів значення $x = x_0$, а потім розв'язуватимемо знайдені вирази відносно шуканих коефіцієнтів:

$$f(x_0) = a_0 = 1 \cdot a_0 = 0! a_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0)/0!;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + n a_n(x - x_0)^{n-1} + \dots;$$

$$f'(x_0) = a_1 = 1 \cdot a_1 = 1! a_1 \Rightarrow a_1 = f'(x_0)/1!;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 1 \cdot 2a_2 = 2! a_2 \Rightarrow a_2 = f''(x_0)/2!;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \dots;$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3! a_3 \Rightarrow a_3 = f'''(x_0)/3!;$$

... ..

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2a_n + (n+1)n\dots 2a_{n+1}(x - x_0) + \dots;$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\dots 2a_n = n!a_n \Rightarrow a_n = f^{(n)}(x_0)/n!;$$

... ..

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів, дістанемо **ряд Тейлора** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо **ряд Маклорена** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Зауваження. Після побудови для даної функції $f(x)$ її ряду Тейлора треба знайти його область збіжності та встановити, чи збігається він саме до цієї функції $f(x)$.

Єдиність розвинення функції в ряд Тейлора виражає наступна теорема. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ можна подати у вигляді ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ за степенями двочлена $x-x_0$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Розвинення функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена.

За **способом безпосередньої побудови** для даної функції $f(x)$ здійснюють наступне:

- а) знаходять похідні $f'(x)$, $f''(x)$..., $f^{(n)}(x)$, ...;
- б) обчислюють значення похідних у заданій точці $x = x_0$;
- в) записують шуканий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(x_0)/n!) (x-x_0)^n$;
- г) знаходять інтервал і область його збіжності;

д) визначають проміжок, в якому виконуються умови теореми 2 чи теореми 3 з попереднього пункту 1.5.3. Якщо такий проміжок існує, то в ньому дана функція $f(x)$ і сума її ряду Тейлора співпадають, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right) (x - x_0)^n$.

Згідно теореми про єдиність розвинення, ряд Тейлора чи ряд Маклорена для даної функції $f(x)$ не залежить від способу його побудови. Тому на практиці частіше застосовують **спосіб формальних перетворень** – без знаходження виразів для похідних довільного порядку, а за допомогою формальних перетворень уже відомих (стандартних) розвинень. Тоді залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку.

У наступній таблиці подані ряди Маклорена і області їх збіжності для деяких елементарних функцій. Вони використовуються як **стандартні розвинення** при знаходженні степеневих рядів для інших функцій. (Виведення цих співвідношень здійсніть самостійно).

№ п/п	Функція та її розвинення в ряд Маклорена
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
4	$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, \quad x \in [-1; 1],$ де $\begin{cases} (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \\ (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \end{cases}$
5	$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1; 1]$
6	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1]$

7	$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in (-1; 1)$
8	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$ $= 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, x \in (-1; 1)$
8a	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1; 1)$
9	$sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in R$
10	$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in R$

Приклад 1. Розкласти в ряд Маклорена дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x) = \cos^2 x$; б) $f(x) = 12/(x^2 - 2x - 3)$.

□ а) Спосіб I – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що входять у ряд Маклорена $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = \cos^2 x; \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x = \sin(2x + (\pi/2) \cdot 2); \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x = 2 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 3); \quad f''(0) = -2;$$

$$f'''(x) = 2^2 \sin 2x = 2^2 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 4); \quad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = 2^3 \cos 2x = 2^3 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 5); \quad f^{(4)}(0) = 2^3;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin(2x + \frac{\pi}{2}(n+1)); \quad f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \sin(\frac{\pi}{2}(n+1));$$

.....

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і дістанемо

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \underbrace{1}_{u_0} + \underbrace{0}_{u_1} - \underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2} + \underbrace{0}_{u_3} + \underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4} + \dots + \\ &+ \underbrace{\frac{2^{n-1} \sin((\pi/2) \cdot (n+1))}{n!} x^n}_{u_n} + \dots = \left| \begin{array}{l} u_n = \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m}, \quad n = 2m; \\ u_n = 0, \quad n = 2m+1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right| = \\ &= 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots + \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m} + \dots = \\ &= |n = m| = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n 2^{2n-1} / (2n)! \right) x^{2n}. \end{aligned}$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \right| = 4x^2 \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 / ((2n+1)(2n+2)) \right) = 0 < 1, \quad x \in R. \end{aligned}$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення даної функції, основними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x) = \cos^2 x$ у вигляді:

$$f(x) = \cos^2 x = (1 + \cos 2x) / 2 = 1/2 + (1/2) \cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Дістанемо:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = 1 -$$

$$-\frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty; +\infty)$ знайдена вище.

б) (Розв'яжіть самостійно). Відповідь:

$$\frac{12}{x^2 - 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1}{3^n} x^n, \quad x \in (-1; 1), \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Розкласти в ряд Тейлора дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x) = 1/(4x - 5)$ за степенями двочлена $x - 3$;

б) $f(x) = \cos(\pi x/4)$ за степенями двочлена $x + 2$.

□ а) Спосіб I – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x-3)^n = f(3) + \frac{f'(3)}{1!} (x-3) + \frac{f''(3)}{2!} (x-3)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x-3)^n + \dots$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = 1/(4x - 5); \quad f(3) = 1/7;$$

$$f'(x) = -1 \cdot 4/(4x - 5)^2; \quad f'(3) = -1 \cdot 4/7^2;$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 4^2/(4x - 5)^3; \quad f''(3) = 1 \cdot 2 \cdot 4^2/7^3;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! 4^n / (4x - 5)^{n+1}; \quad f^{(n)}(3) = (-1)^n n! 4^n / 7^{n+1};$$

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і дістанемо:

$$\frac{1}{x-5} = \frac{1}{7} - \frac{1 \cdot 4/7^2}{1!} (x-3) + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4^2/7^3}{2!} (x-3)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^n n! \cdot 4^n / 7^{n+1}}{n!} (x-3)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1} (x-3)^{n+1}}{7^{n+2}} : \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}} \right| =$$

$$= (4/7) |x-3| < 1; \quad -7/4 < x-3 < 7/4; \quad 5/4 < x < 19/4.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(5/4; 19/4)$ маємо ряди $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(5/4) = (1/7) \sum_{n=0}^{\infty} 1$ і $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(19/4) = (1/7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, $(5/4; 19/4)$ – область збіжності одержаного ряду.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Спочатку подамо функцію $f(x) = 1/(4x-5)$ через нову змінну $z = x-3$ – відхилення від центру розвинення $x = x_0 = 3$:

$$x = z + 3; \quad f(x) = \frac{1}{4(z+3)-5} = \frac{1}{4z+7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+4z/7}.$$

Скористаємося рядом

$$1/(1+x) = 1-x+\dots+(-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1),$$

в якій замість x підставимо $4z/7$. Отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+4z/7} = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4z/7)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n z^n}{7^{n+1}}.$$

Поклавши $z = x-3$, повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}$.

Його область збіжності $(5/4; 19/4)$ знайдена вище.

б) (Розв'яжіть самостійно).

Відповідь:

$$\cos \frac{\pi x}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} (x+2)^{2n+1}}{(2n+1)! 4^{2n+1}}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad \blacksquare$$

1.3.3. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

У наближених обчисленнях степеневі ряди застосовують, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв'язування диференціальних рівнянь.

Наближене обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд в деякому інтервалі $(a; b)$, що містить точку x_0 , то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене – частковій сумі $S_n(x_0)$: $f(x_0) \approx S_n(x_0)$. Абсолютна похибка $\Delta = |f(x_0) - S_n(x_0)|$ характеризує точність наближення. Вона дорівнює модулю залишку ряду $\Delta = |R_n(x_0)|$.

Треба також враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених в $S_n(x_0)$ членів ряду.

Приклад 1. Обчислити наближено значення $\sin 12^\circ$ з точністю до $\varepsilon = 0,0001$.

□ Скористаємося розвиненням функції $\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R,$$

де покладемо $x = 12^\circ = \pi/15 = 0,2094393$ і дістанемо знакопчерговий ряд

$$\sin 12^\circ = \sin \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\pi^3}{15^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{15^5 \cdot 5!} + \dots + \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{15^{2n+1} \cdot (2n+1)!} + \dots$$

Для заданої точності $\varepsilon = 0,0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0,0001/2 = 0,00005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів,

щоб при заміні суми $f(x_0)$ ряду частковою сумою $S_n(x_0)$ отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0,00005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниці $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. Тоді

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| = \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \varepsilon_1 = 0,00005; \quad \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 0,00005.$$

Розв'яжемо цю нерівність методом підбору:

$$n = 0: |u_1| = (\pi/15)^3 / 3! = 0,0015312 > \varepsilon_1 = 0,00005;$$

$$n = 1: |u_2| = (\pi/15)^5 / 5! = 0,000003 \leq \varepsilon_1 = 0,00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду u_0 і u_1 .

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \leq \varepsilon_2 = 0,00005; \quad 10^{-k} \leq 0,00005; \quad k \geq \lg 20000; \quad k = 5.$$

Таким чином

$$\sin 12^\circ \approx S_1 = \pi/15 - (\pi/15)^3 / 3! = 0,20944 - 0,00153 = 0,20791.$$

Остаточно $\sin 12^\circ \approx 0,2079$. ■

Наближене обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, який не береться в елементарних функціях або складний і незручний для безпосередніх обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, інтервал збіжності якого охоплює відрізок інтегрування $[a; b]$. Тоді на цьому відрізку ряд можна почленно проінтегрувати, використавши відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибка обчислень визначається так само, як і при знаходженні значень функцій.

Приклад 2. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4 (e^{x^2} - 1) dx$ з точністю до $\varepsilon = 0,0001$.

□ Формула Ньютона – Лейбниці тут не застосовна, тому що

первісна від $f(x) = x^4(e^{x^2} - 1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x , де замість x підставимо x^2 , потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4 :

$$\begin{aligned} x^4(e^{x^2} - 1) &= x^4\left(1 + x^2/1! + x^4/2! + \dots + x^{2n}/n! + \dots\right) - 1 = \\ &= x^6/1! + x^8/2! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Оскільки $[0; 1/2] \subseteq (-\infty; +\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0; 1/2]$. Дістанемо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} \left(x^6/1! + x^8/2! + x^{10}/3! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots\right) dx = \\ &= \left(\frac{x^7}{1! \cdot 7} + \frac{x^9}{2! \cdot 9} + \frac{x^{11}}{3! \cdot 11} + \dots + \frac{x^{2n+5}}{n! \cdot (2n+5)} + \dots\right) \Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{1! \cdot 7 \cdot 2^7} + \\ &+ 1/(2! \cdot 9 \cdot 2^9) + 1/(3! \cdot 11 \cdot 2^{11}) + \dots + 1/(n! \cdot (2n+5) \cdot 2^{2n+5}) + \dots \end{aligned}$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0,0001$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0,0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0,0001/2 = 0,00005.$$

Спочатку оцінимо n -й залишок:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)! \cdot (2n+7) \cdot 2^{2n+7}} + \frac{1}{(n+2)! \cdot (2n+9) \cdot 2^{2n+9}} + \\ &+ \frac{1}{(n+3)! \cdot (2n+11) \cdot 2^{2n+11}} + \dots = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{2n+7}} \left(\frac{1}{2n+7} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2(n+2)(2n+9)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)} + \dots \right) < \\ &< \frac{1}{2^{2n+7} (n+1)! \cdot (2n+7)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, ..., що стоять у знаменниках другого, третього, ... дробів, замінено на менший вираз $2n+7$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=1/2$. Її сума $S=1/(1-1/2)=2$. Тоді

$$R_n < 1/\left(2^{2n+7}(n+1)!(2n+7)\right) \cdot 2 < 1/\left(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)\right).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n < 1/\left(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)\right) \leq \varepsilon_1 = 0,00005 :$$

$$n=1: R_1 < 1/\left(2^8 \cdot 2! \cdot 9\right) = 0,000217 > \varepsilon_1 = 0,00005 ;$$

$$n=2: R_2 < 1/\left(2^{10} \cdot 3! \cdot 11\right) = 0,000015 < \varepsilon_1 = 0,00005 .$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \leq \varepsilon_2 = 0,00005 ; 10^{-k} \leq 0,00005 ; k \geq \lg 20000 ; k = 5 .$$

$$\text{Таким чином } I \approx S_2 = \frac{1}{1! \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{1}{2! \cdot 9 \cdot 2^9} = 0,00112 +$$

$$+ 0,00011 = 0,00123 . \quad \text{Остаточо } I \approx 0,0012 . \quad \blacksquare$$

Наближене розв'язування диференціальних рівнянь. Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається або досить складно, його розв'язок $y = y(x)$ можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв'язуванні задачі Коші:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0 :

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots,$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)$, $n = 2, 3, \dots$ знаходиться **методом послідовного диференціювання**

чи *методом невизначених коефіцієнтів*. Суть цих методів розглянемо на прикладах.

Зауваження 1. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду, а також яка похибка цього розв'язку, тут не розглядаються.

Приклад 3. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших чотирьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^2 - x^3$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

□ Застосовуємо метод послідовного диференціювання.

Шукаємо розв'язок $y = y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші чотири члени.

За умовою $y(1) = 2$. Підставляючи $x = 1$ і $y = y(1) = 2$ у диференціальне рівняння $y' = y^2 - x^3$, знаходимо $y'(1) = 2^2 - 1^3 = 3$.

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по x і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$ і $y'''(1)$:

$$y'' = 2y y' - 3x^2; \quad y''(1) = 2 \cdot y(1) \cdot y'(1) - 3 \cdot 1^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 = 9;$$

$$y''' = 2(y' y' + y y'') - 6x = 2(y')^2 + 2y y'' - 6x;$$

$$y'''(1) = 2(y'(1))^2 + 2y(1) \cdot y''(1) - 6 \cdot 1 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 9 - 6 = 42.$$

$$\text{Отже, } y(x) = 2 + (3/1!)(x-1) + (9/2!)(x-1)^2 + (42/3!)\times \\ \times (x-1)^3 + \dots = 2 + 3(x-1) + (9/2)(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + \dots \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших трьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^2 - 64 \ln(1 + x/2)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 4$.

□ Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

Шукаємо розв'язок $y = y(x)$ у вигляді степеневого ряду

$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ з центром розвинення у початковій точці $x = 0$. Тут згідно умови задачі явно виписані перші три члени з невідомими коефіцієнтами a_n , $n = 0, 1, 2$.

З початкової умови $y(0) = 4$ дістаємо $a_0 = y(0) = 4$. Тоді розв'язок $y = y(x)$ набуває вигляду: $y(x) = 4 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

Далі диференціюємо цей розв'язок: $y'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots$

Використовуючи стандартне розвинення для $\ln(1+x)$, в якому замінюємо x на $x/2$, дістаємо степеневий ряд з центром в тій же початковій точці $x = 0$ для функції $\ln(1+x/2)$ в правій частині:

$$\ln(1+x/2) = x/2 - x^2/(2^2 \cdot 2) + \dots = x/2 - x^2/8 + \dots,$$

де відповідно до умови задачі явно виписані тільки перші члени до степеня x^2 включно.

Отримані вирази підставляємо в диференціальне рівняння:

$$a_1 + 2a_2x + \dots = (4 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^2 - 64 \cdot ((1/2)x - (1/8)x^2 + \dots);$$

$$a_1 + 2a_2x + \dots = 16 + a_1^2x^2 + a_2^2x^4 + 8a_1x + 8a_2x^2 +$$

$$+ 2a_1a_2x^3 + \dots - 32x + 8x^2 - \dots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & a_1 = 16; \\ x & 2a_2 = 8a_1 - 32; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

Звідси знаходимо: $a_1 = 16$; $a_2 = 4a_1 - 16 = 4 \cdot 16 - 16 = 48$.

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістаємо: $y(x) = 4 + 16x + 48x^2 + \dots$ ■

Зауваження 2. Цими ж методами можна наближено розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків.

1.4. Ряди Фур'є

Функціональні ряди використовуються для подання довільної функції $f(x)$ у вигляді $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, де $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... – система відомих (*базисних*) функцій; a_n ($n = 0, 1, \dots$) – сталі коефіцієнти.

Розглянуті вище степеневі ряди (ряди Тейлора чи Маклорена) дозволяють подавати функції, що безліч разів диференційовні, тобто дуже гладкі. Крім того, у загальному випадку а) швидкість збіжності (кількість членів, які треба залишити для досягнення заданої точності наближення) значно зростає при віддаленні від центру розвинення; б) n -а часткова сума S_n ряду Тейлора чи Маклорена не є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед поліномів n -го степеня.

Для розвинення розривних функцій чи функцій з розривами похідних потрібні інші функціональні ряди. Необхідність усунення зазначених та інших недоліків обумовлює переважне використання рядів з ортогональними базисними функціями.

1.4.1. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є

Функції $f(x)$ і $g(x)$, що неперервні на відрізку $[a; b]$, називають *ортогональними* на цьому відрізку, якщо виконується умова

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Скінченну чи нескінченну систему функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., які неперервні на відрізку $[a; b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називають *ортогональною* на цьому відрізку, якщо всі зазначені функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ A_n \neq 0, & m = n \end{cases} \quad (m = 0, 1, \dots; n = 0, 1, \dots).$$

Теорема. Система тригонометричних функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

ортогональна на відрізку $[-\pi; \pi]$, довжина якого дорівнює її спільному періоду $T = 2\pi$.

□ Враховуючи співвідношення $\sin nx = 0$ і $\cos nx = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), безпосереднім обчисленням можна показати, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0; \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0; \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n); \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n). \blacksquare$$

Зауваження 1. Тригонометрична система має значне застосування, оскільки описує поширені у різних сферах коливальні процеси. Хоча існує багато інших ортогональних систем функцій. Зокрема, часто використовуються системи ортогональних многочленів.

За наведеною вище ортогональною тригонометричною системою складемо відповідний **тригонометричний ряд**:

$$a_0/2 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

де a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) – сталі коефіцієнти.

Примітка. Для скорочення запису, за знаком підсумовування \sum зовнішні дужки часто опускають.

Оскільки базисні тригонометричні функції мають спільний період $T = 2\pi$, то сума ряду теж періодична з періодом $T = 2\pi$.

Нехай $f(x)$ – задана 2π -періодична функція. Знайдемо такі конкретні значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$), щоб справджувалося розвинення:

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}. \quad (1)$$

Будемо припускати, що цей розклад і одержані з нього далі ряди можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi; \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. При обчисленнях використаємо значення інтегралів, записаних при доведенні попередньої теореми.

Інтегруючи ряд для $f(x)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (a_0/2) \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx .$$

Звідси

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (a_0/2) \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi ; \quad \boxed{a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx} . \quad (2)$$

Помноживши обидві частини (1) на $\cos mx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi; \pi]$, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= (a_0/2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx . \end{aligned}$$

Звідси при $m = n$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi$;

$$\boxed{a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx , \quad n = 1, 2, \dots} . \quad (3)$$

Аналогічно, помноживши ряд (1) на $\sin mx$ і проінтегрувавши в межах від $-\pi$ до π , знайдемо

$$\boxed{b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx , \quad n = 1, 2, \dots} . \quad (4)$$

Числа a_0 , a_n , b_n ($n = 1, 2, \dots$), які обчислюються за формулами (2) – (4), називаються **коефіцієнтами Фур'є** функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (1), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають **рядом Фур'є** цієї функції.

Зауваження 2. Інтегрالي у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку $[a; a + 2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$.

Теорема Діріхле (достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є). Якщо функція $f(x)$ має період $T = 2\pi$ і на відрізку $[-\pi; \pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок $[-\pi; \pi]$ можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є

збігається на всій числовій осі, причому сума ряду $S(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює їй самій $S(x) = f(x)$, а у кожній точці розриву x_0 функції $f(x)$ – середньому арифметичному односторонніх границь при $x \rightarrow x_0$ зліва та справа

$$S(x_0) = (1/2) \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right).$$

При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Отже, у ряд Фур'є можна розвивати функції достатньо загального вигляду. Графік суми ряду $S(x)$ є сукупністю дуг кривих та ізольованих точок. Він майже всюди співпадає з графіком самої функції $f(x)$, за винятком її точок розриву першого роду, де сума ряду приймає згладжене значення, що дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь. Як приклад, на рис. 28 зображено графік деякої кусково-монотонної 2π -періодичної функції $f(x)$, а на рис. 29 – графік суми $S(x)$ її ряду Фур'є.

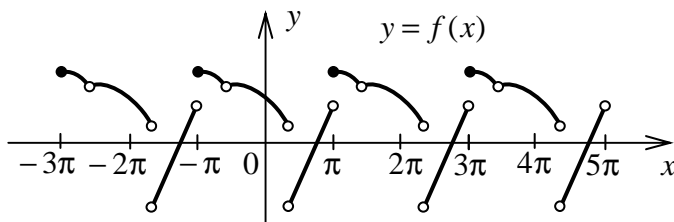


Рис. 28

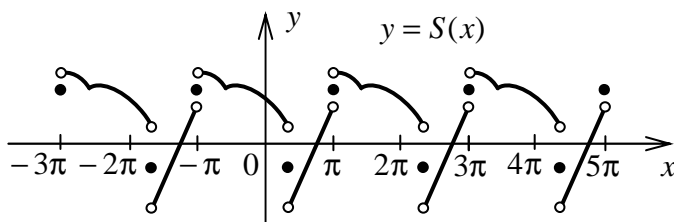


Рис. 29

Зауваження 3. Швидкість збіжності ряду Фур'є тим більша, чим гладкіша функція $f(x)$.

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичні функції:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x^2/\pi, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0; \\ -\pi, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

□ а) Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле (рис. 30), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$\begin{aligned} a_0 &= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (1/\pi) \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (x^2/\pi) dx \right) = \\ &= (1/\pi^2) (x^3/3) \Big|_0^{\pi} = \pi/3; \quad a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= (1/\pi) \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} (x^2/\pi) \cos nx dx \right) = (1/\pi^2) \times \\ &\times \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x dx; \\ dv = \cos nx dx; \quad v = (1/n) \sin nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi^2} \times \end{aligned}$$

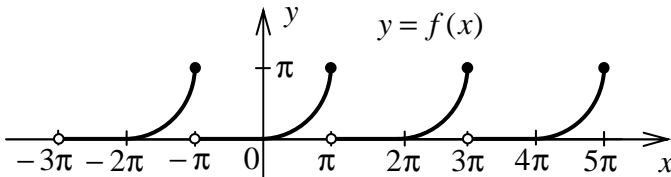


Рис. 30

$$\begin{aligned} &\times \left(\frac{x^2}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = -\frac{2}{\pi^2 n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= \left| u = x; \quad du = dx; \quad dv = \sin nx dx; \quad v = -(1/n) \cos nx \right| = \\ &= -\frac{2}{\pi^2 n} \left(-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = -\frac{2}{\pi^2 n} \left(-\pi(-1)^n/n + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1/n^2) \sin nx \Big|_0^\pi = 2(-1)^n / (\pi n^2); \quad b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx \, dx = \\
& = (1/\pi) \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx \, dx + \int_0^\pi (x^2/\pi) \sin nx \, dx \right) = (1/\pi^2) \times \\
& \times \int_0^\pi x^2 \sin nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x \, dx; \\ dv = \sin nx \, dx; \quad v = -(1/n) \cos nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi^2} \times \\
& \times \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x \cos nx \, dx \right) = -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi^2 n} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \\
& = \left| u = x; \quad du = dx; \quad dv = \cos nx \, dx; \quad v = (1/n) \sin nx \right| = (-1)^{n+1} / n + \\
& + \frac{2}{\pi^2 n} \left(x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^\pi = \\
& = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi^2 n^3} ((-1)^n - 1) = \frac{(-1)^{n+1} \pi^2 n^2 + 2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^3}.
\end{aligned}$$

Розвинення заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} \pi^2 n^2 + 2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^3} \sin nx \right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x \neq (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. У точках $x = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ функція $f(x)$ терпить розриви першого роду (скінченні стрибки висотою π). У цих точках сума ряду

$$S((2n+1)\pi) = (1/2) (f((2n+1)\pi - 0) + f((2n+1)\pi + 0)) = \pi/2.$$

Значимо, що сума $S(x)$ є розривною функцією, хоча всі члени ряду неперервні (у точках розриву $x = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ порушена рівномірна збіжність ряду).

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n - \pi - 1}{\pi n} \sin nx \right). \quad \blacksquare$$

1.4.2. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

Для парних і непарних функцій справедливі наступні твердження:

1) Добуток двох парних чи двох непарних функцій є парною функцією. Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.

2) Інтеграл по симетричному відрізку $[-a; a]$, $a > 0$ від парної функції $f(x)$ дорівнює подвоєному інтегралу по правій половині цього проміжку $[0; a]$: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$. Інтеграл по симетричному відрізку $[-a; a]$, $a > 0$ від непарної функції $f(x)$ дорівнює нулю: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичну парну функцію $f(x)$. Оскільки $\cos nx$ і $\sin nx$ – відповідно парна ч непарна функції, то добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ також відповідно є парною і непарною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi; \pi]$, дістанемо:

$$a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (2/\pi) \int_0^{\pi} f(x) dx ; \quad (1)$$

$$a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = (2/\pi) \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx ; \quad (2)$$

$$b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 .$$

Тоді ряд Фур'є для парної функції набуває вигляду

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx . \quad (3)$$

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичну непарну функцію $f(x)$. Тоді добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ відповідно є непарною і парною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi; \pi]$, дістанемо:

$$a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 ; \quad a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 ;$$

$$b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = (2/\pi) \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (4)$$

Ряд Фур'є для непарної функції набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (5)$$

Значимо, що ряди (1) – (3) і (4), (5) відображають характер функції $f(x)$. Ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси (парні функції), а ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси (непарні функції).

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичні функції:

$$\text{а) } f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0; \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

□ Задані функції задовольняють умовам теореми Діріхле, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Оскільки функція $f(x)$ парна (рис. 31), то, користуючись формулами (1) – (3), дістанемо:

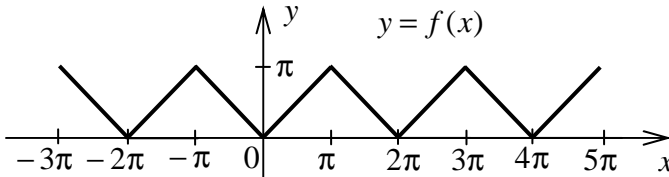


Рис. 31

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi; & a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m, \, m = 1, 2, \dots; \\ -\frac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n = 2m-1, \, m = 1, 2, \dots; \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

б) Функція $f(x)$ непарна (рис. 32). Згідно з формулами (4) і (5) маємо:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-1) \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m, m = 1, 2, \dots; \\ -\frac{4}{\pi(2m-1)}, & n = 2m-1, m = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}. \quad \blacksquare$$

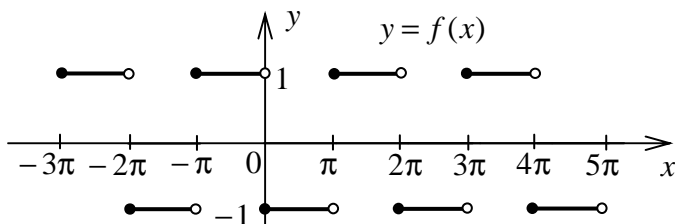


Рис. 32

1.4.3. Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом

Нехай $2l$ -періодична функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$ довжиною в період $T = 2l$, $l > 0$ і на цьому відрізку задовольняє умовам теореми.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x = lt/\pi$ і розглянемо періодичну функцію $\varphi(t) = f(lt/\pi)$ з періодом $T = 2\pi$, що визначена на відрізку $[-\pi; \pi]$. Розвинемо її в ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt); \quad a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt;$$

$$a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt; \quad b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt.$$

Повернемося до змінної x і дістанемо шукане розвинення:

$$t = \frac{\pi x}{l}; \quad dt = \frac{\pi}{l} dx; \quad \boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right);}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.}$$

Зауваження 1. Розвинення парних та непарних періодичних функцій з періодом $T = 2l$, $l > 0$ відповідно у ряди косинусів і синусів набувають наступного вигляду.

а) Для парної $2l$ -періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l};}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots}$$

б) Для непарної $2l$ -періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots}$$

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є періодичні функції, що задані на відповідному відрізку $[-l; l]$ довжиною в період $T = 2l$, $l > 0$. Знайти значення суми ряду $S(0)$ і $S(l/2)$:

$$а) f(x) = |\sin x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2; \quad б) f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0; \\ x - 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

□ Задані функції задовольняють умовам теореми Діріхле, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Функція $f(x)$ парна і має півперіод $l = \pi/2$ (рис. 33). Її можна подати у вигляді ряду косинусів. Дістанемо:

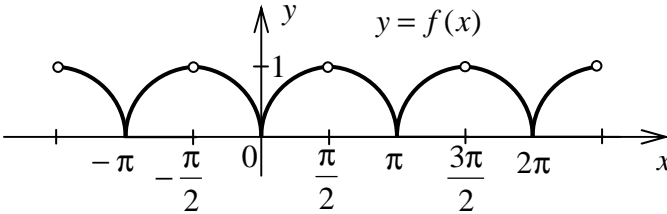


Рис. 33

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{4}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos \frac{n\pi x}{\pi/2} dx = \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x) dx = -\frac{2}{\pi(1+2n)} \times \\ &\times \cos(1+2n)x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi(1-2n)} \times \cos(1-2n)x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi(1+2n)} + \\ &+ \frac{2}{\pi(1-2n)} = \frac{2(1-2n+1+2n)}{\pi(1+2n)(1-2n)} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}; \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \right) \cos \frac{n\pi x}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

У точках $x=0$ і $x=l/2=\pi/4$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(0) = f(0) = 0; \quad S(\pi/4) = f(\pi/4) = |\sin(\pi/4)| = \sqrt{2}/2.$$

б) Функція $f(x)$ непарна і має півперіод $l=1$ (рис. 34). Її можна розкласти в ряд синусів. Одержимо:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{1} \int_0^1 (x-1) \sin \frac{n\pi x}{1} dx = \\ &= \left| u = x-1; \quad du = dx; \quad dv = \sin n\pi x dx; \quad v = -(1/(n\pi)) \cos n\pi x \right| = \end{aligned}$$

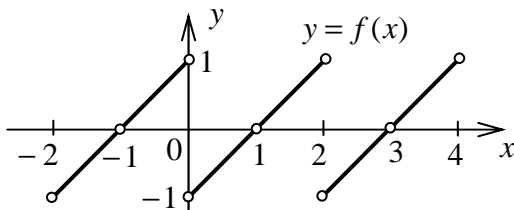


Рис. 34

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(-\frac{x-1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx \right) = -\frac{2}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi x \Big|_0^1 = \\
 &= -\frac{2}{n\pi}; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi x}{1} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.
 \end{aligned}$$

При $x = 0$ дана функція $f(x)$ має скінченний стрибок, тому

$$S(0) = (1/2) \left(\lim_{x \rightarrow -0} (x+1) + \lim_{x \rightarrow +0} (x-1) \right) = (1/2)(1-1) = 0.$$

У точці $x = l/2 = 1/2$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(1/2) = f(1/2) = 1/2 - 1 = -1/2. \quad \blacksquare$$

1.4.4. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

Часто виникає необхідність розвинути в ряд Фур'є неперіодичну функцію $f(x)$, задану на скінченному проміжку $[a; b]$.

Побудуємо довільним способом періодичну кусково-монотонну функцію $f_*(x)$ з періодом $T \geq b - a$, що збігається з $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Наприклад, введемо допоміжну функцію

$$f_*(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & -l \leq x < a; \\ f(x), & a \leq x \leq b; \\ \varphi_2(x), & b < x \leq l, \end{cases}$$

де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – довільні функції, що задовольняють умовам

теореми Діріхле. (Поза відрізком $[a; b]$ поведження функції $f_*(x)$ не має значення). Продовжимо її періодичним способом з періодом $T = 2l \geq b - a$ на всю числову вісь. (Геометрично для цього потрібно виконати перенесення графіка функції $f_*(x)$ паралельно осі Ox праворуч і ліворуч на відстані $T, 2T, \dots, nT, \dots$).

Отриману $2l$ -періодичну функцію можна подати рядом Фур'є. На відрізку $[a; b]$ його сума співпадає з даною функцією $f(x)$ у всіх її точках неперервності, а в точках розриву всередині проміжку $[a; b]$ і на його кінцях вона дорівнює півсумі односторонніх границь. Тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є на відрізку $[a; b]$.

Зауваження. При різному виборі періоду $T = 2l \geq b - a$ і різних функціях $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ одержуємо різні розвинення однієї й тієї ж заданої функції $f(x)$, $x \in [a; b]$ в ряд Фур'є. Відкривається можливість вибирати краще за тими чи іншими критеріями розвинення. Наприклад, використовувати розклад, у якому коефіцієнти за модулем спадають швидше або обчислюються простіше.

Розглянемо детальніше поширений випадок, коли неперіодична функція $f(x)$ задана на відрізку $[0; l]$, $l > 0$. Випадки довільного проміжку $[a; b]$ зводяться до нього лінійною заміною аргументу $t = x - a$.

Можна безпосередньо проміжок $[0; l]$ взяти за період $T = l$ і побудувати для $f(x)$ повний ряд Фур'є, проте при цьому доведеться обчислювати всі коефіцієнти a_0 , a_n і b_n .

Можна вчинити інакше: вибрати довільну кусково-монотонну функцію $\varphi(x)$ на відрізку $[-l; 0]$ і визначити на всьому симетричному проміжку $[-l; l]$ допоміжну функцію

$$f_*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а потім поширити її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Далі знову для $f(x)$ побудувати ряд Фур'є, але тепер з іншим періодом $T = 2l$.

На практиці найчастіше перевага надається парному чи непарному продовженню функції $f(x)$, $x \in [0; l]$ на проміжок $[-l; 0]$, що приводить до неповного ряду Фур'є.

а) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0; l]$ парним способом на проміжок $[-l; 0]$ (геометрично для цього потрібно симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно осі Oy) (рис. 35), прийнявши

$$f_*(x) = \begin{cases} f(-x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Дістанемо розвинення в ряд косинусів:

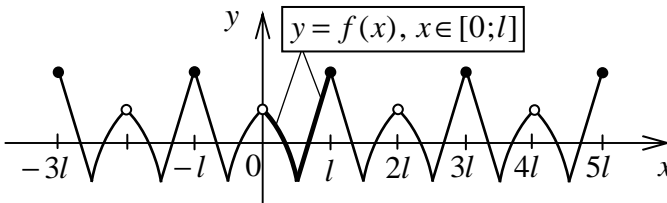


Рис. 35

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0; l]; \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f_*(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_*(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

б) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0; l]$ непарним способом на відрізок $[-l; 0]$ (геометрично для цього потрібно центрально симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно початку координат O) (рис. 36), вважаючи

$$f_*(x) = \begin{cases} -f(-x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на

всю числову пряму. Одержимо розвинення в ряд синусів:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0; l];$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_*(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

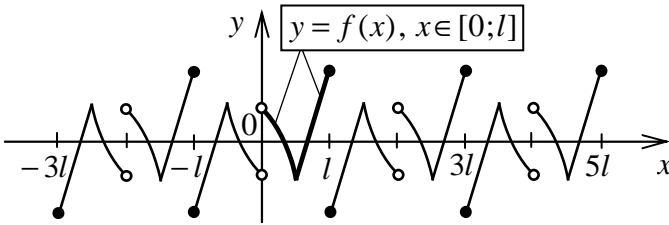


Рис. 36

Приклад. Кожну з даних функцій, визначених на відповідному відрізку $[0; l]$, розвинути в ряд косинусів і ряд синусів:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1; \\ 2, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4-x, & 0 < x < 2; \\ x, & 2 < x < 3. \end{cases}$$

□ Задані функції задовольняють умовам теореми Діріхле, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Маємо $l = 2$. При парному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд косинусів:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2x dx + \int_1^2 2 dx \right) = x^2 \Big|_0^1 + 2x \Big|_1^2 = 3;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\ &= 2 \cdot x \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + 2 \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2 \pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right);$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

При непарному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд синусів:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= 2 \cdot x \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{-2}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2} dx + 2 \cdot \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} (-1)^n + \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} =$$

$$= \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m, m = 1, 2, \dots; \\ \frac{8(-1)^{m+1}}{\pi^2 (2m-1)^2}, & n = 2m-1, m = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \frac{17}{6} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + (-1)^n - 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \cos \frac{n\pi x}{3};$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(4n\pi - 3n\pi(-1)^n - 6 \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \sin \frac{n\pi x}{3}. \blacksquare$$

1.5. Контрольні запитання

1. Наведіть означення подвійного інтеграла.
2. У чому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла?
3. Яка плоска область D називається правильною (стандартною) у напрямі осі Ox ? У напрямі осі Oy ?
4. Задати аналітично як множину точок плоску область D , що правильна у напрямі осі Ox ? У напрямі осі Oy ?
5. Як обчислюється подвійний інтеграл у прямокутних координатах? Наведіть приклад області інтегрування D , якій відповідають сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у прямокутних координатах.
6. Як знайти межі інтегрування при переході від подвійного до двократного повторного інтеграла?
7. Наведіть означення потрійного інтеграла.
8. У чому полягає фізичний зміст потрійного інтеграла?
9. Яка тривимірна область V називається правильною (стандартною) у напрямі осі Oz ? Осі Oy ? Осі Ox ?
10. Як обчислюється потрійний інтеграл у прямокутних координатах?
11. Як обчислити площу замкненої обмеженої плоскої області D за допомогою подвійного інтеграла?
12. Як обчислити об'єм правильного в напрямі осі Oz просторового тіла V за допомогою подвійного інтеграла?
13. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислити масу плоскої пластини D з відомою поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$?
14. Як обчислити об'єм просторового тіла V за допомогою потрійного інтеграла?
15. Що називається функціональним рядом? Що таке його точка збіжності і точка розбіжності? Область збіжності?
16. Який функціональний ряд називається абсолютно збіжним?
17. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним?
18. У чому полягає ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду?
19. Який функціональний ряд називається степеневим?
20. У чому полягає теорема Абеля про збіжність степеневому ряду?

21. Що таке інтервал збіжності степеневому ряду? Чим область збіжності може відрізнятися від інтервалу збіжності?
22. Яким може бути радіус збіжності степеневому ряду?
23. Як досліджується збіжність степеневому ряду на кінцях інтервалу збіжності?
24. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
25. Який вигляд мають ряди Тейлора і Маклорена?
26. У чому полягає теорема про єдиність розвинення функції в ряд Тейлора?
27. Які основні способи побудови розкладу функцій у ряди Тейлора і Маклорена?
28. Наведіть приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень значень функцій, визначених інтегралів і розв'язування диференціальних рівнянь.
29. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?
30. Яка пара функцій називається ортогональною на відрізку?
31. Яка система функцій називається ортогональною на відрізку?
32. Що називається рядом Фур'є за тригонометричною системою функцій?
33. Як обчислюються коефіцієнти Фур'є для 2π -періодичної функції?
34. Сформулюйте теорему Діріхле, що виражає достатню ознаку розвинення функції в ряд Фур'є.
35. Як записується неповний ряд Фур'є для 2π -періодичної парної функції? Для 2π -періодичної непарної функції? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цих випадках?
36. Як записується ряд Фур'є для періодичної функції з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цьому випадку?
37. Як будується періодичне продовження функції, що задана на скінченному проміжку?
38. Як будується парне (непарне) періодичне продовження функції, що задана на відрізку $[0; l]$? Як записується відповідний ряд косинусів (ряд синусів)? За якими формулами обчислюються коефіцієнти отриманого розвинення?

Змістовий модуль 2.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

2.1. Загальне поняття про чисельні методи. Наближені числа. Похибки та їх обчислення

2.1.1. Загальне поняття про чисельні методи

Дослідження того чи іншого соціально-економічного процесу математичними методами розпочинається з побудови відповідної математичної моделі – його формалізованого опису мовою математики.

Під *математичною моделлю* процесу розуміють систему математичних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь і нерівностей і т.п.), які визначають характеристики стану і властивості цього об'єкта і його функціонування залежно від параметрів компонентів, вхідних збуджень і часу.

Для кожної математичної моделі формулюється *математична задача*: встановлюють, які характеристики моделі є вхідними змінними, які – параметрами, а які – вихідними змінними. Проводиться аналіз поставленої задачі з точки зору існування, єдиності та стійкості розв'язку.

Розв'язок задачі називається *стійким* за вхідними даними, якщо він неперервно залежить від них, тобто, малій зміні вхідних даних відповідає мала зміна розв'язку.

Математична задача поставлена *коректно (правильно)*, якщо виконано наступні три умови: 1) розв'язок існує при довільних допустимих вхідних даних; 2) розв'язок єдиний; 3) розв'язок стійкий по відношенню до малих змін вхідних даних.

Якщо хоча б одна з цих умов не справджується, то задача називається *некоректною*.

Наприклад, задача обчислення визначеного інтеграла – коректна, а задача обчислення похідної – некоректна (не виконується третя умова).

Для поставленої математичної задачі вибирається метод її розв'язування. У багатьох випадках знайти її точний розв'язок досить важко або взагалі не вдається, що вимагає застосування на-

ближених методів.

Під **чисельними (обчислювальними) методами** розуміють наближені процедури, що дозволяють одержувати розв'язок у вигляді набору конкретних числових значень.

Розрізняють прямі та ітераційні обчислювальні методи.

Метод називається **прямим**, якщо він дозволяє одержувати розв'язок після виконання скінченного числа елементарних операцій. Інколи прямі методи називають **точними**, маючи на увазі, що при відсутності похибок у вхідних даних і при виконанні елементарних операцій результат буде точним. Проте при комп'ютерній реалізації методу неминучі похибки заокруглення і, як наслідок, наявність обчислювальної похибки.

Далі розглядатимемо **ітераційні методи**, суть яких полягає в побудові послідовних наближень до розв'язку задачі. Спочатку вибирають одно чи декілька початкових наближень, а потім послідовно, використовуючи знайдені раніше наближення і однотипну процедуру розрахунку, будують нові наближення. У результаті такого ітераційного процесу теоретично можна побудувати нескінченну послідовність наближень. Якщо ця послідовність збігається (що не гарантовано), то говорять, що ітераційний метод **збіжний**. Окремий крок ітераційного процесу називається **ітерацією**.

Проте практичні обчислення не можуть тривати нескінченно довго. Тому необхідно задати **критерій закінчення** ітераційного процесу, що зв'язаний з вимогами точності наближення.

Для вибраного обчислювального методу складається **алгоритм** – послідовність виконання необхідних арифметичних і логічних операцій. Алгоритм, що реалізує ітераційний метод, повинен бути рекурсивним і складатися з відносно невеликих блоків, які багаторазово виконуються для різних вхідних даних.

Правильність вибору методу безпосередньо залежить від знання і розуміння особливостей і обмежень, властивих чисельним методам, що реалізовані у відповідному програмному пакеті.

Ітераційний процес називається **однокроковим**, якщо для обчислення чергового наближення x_k використовується тільки одне попереднє наближення x_{k-1} , і **t -кроковим**, якщо для обчислення чергового наближення x_k використовуються t попередніх наближень $x_{k-m}, x_{k-m+1}, \dots, x_{k-1}$.

Чисельні методи характеризуються:

– різною **швидкістю збіжності**, тобто числом ітерацій, виконання яких необхідне для отримання заданої точності розв'язку;

– різною **стійкістю**, тобто збереженням достовірності розв'язку під час подальших ітерацій (при цьому чим точніше задаються числа для обробки, тим точніший одержується результат, і для довільної точності результату можна вказати таку точність вхідних і проміжних даних, що метод приведе до результату саме з цією заданою точністю;

– різною **точністю** одержуваного розв'язку в разі виконання однакового числа ітерацій або циклів обчислень.

Говорять, що **метод має p -й порядок збіжності**, якщо $|x_k - X| \leq C |x_{k-1} - X|^p$, де x_{k-1} і x_k – послідовні наближення, отримані в ході ітераційного процесу, X – точний розв'язок, C – додатна константа, що не залежить від номера ітерації k .

Говорять, що **метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $q < 1$** , якщо для всіх k справедлива оцінка $|x_k - X| \leq C q^k$.

2.1.2. Наближені числа. Похибки та їх класифікація. Абсолютна та відносна похибки

Наближеним числом x називається таке, що несуттєво відрізняється від точного числа X і замінює останнє в обчисленнях.

При розв'язанні прикладних задач, в основному, використовуються дійсні числа. У пам'яті комп'ютера вони зберігаються у **формі з плаваючою точкою**. Десяткове число x у цій формі записується так $x = \pm t \cdot 10^n$, де t і n – відповідно **мантиса** числа і його **порядок**. Наприклад, число $x = 358,5$ можна записати в одному з таких виглядів: $3585 \cdot 10^{-1}$, $3.585 \cdot 10^2$ чи $0.3585 \cdot 10^3$. Останній запис, де мантиса подана у вигляді $t = 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, $\alpha_1 \neq 0$, називається **нормалізованою формою числа з плаваючою точкою**. Звичайний запис числа у вигляді 358.5 називається **формою з фіксованою точкою** і в комп'ютерах використовується тільки на етапах введення і виведення. Зберігання й обробка дійсних чисел здій-

снюється саме у формі з плаваючою точкою.

Відхилення дійсного X значення від наближеного x називається *похибкою*.

Основна задача теорії похибок – знаходження області невизначеності результату.

Чисельне розв'язування задач супроводжується похибками, викликаними наступними причинами:

1) створенням математичної моделі (будь-яка модель має свій ступінь адекватності об'єкту дослідження);

2) отриманням вхідних даних, оскільки вони є результатом або вимірювань (отже, виникають вимірювальні похибки), або розв'язування деяких допоміжних задач;

3) застосуванням наближеного методу, оскільки отримання точного розв'язку вимагає необмеженої або неприйнятно великої кількості елементарних операцій, а в багатьох випадках і просто неможливо;

4) використанням обчислювальної техніки (неточності при вводити-виводі даних до комп'ютера і при виконанні математичних операцій, що обумовлено обмеженістю його розрядної сітки).

Відповідно до цих джерел похибки можна поділити на три групи:

1) **неусувні похибки**, що включають **похибки моделі** та **вхідних даних**;

2) **похибки методу** (наприклад, замінюють інтеграл сумою, затратну для оперування функцію – многочленом, похідну – скінченною різницею і т.п., обмежують максимальну кількість ітерацій);

3) **похибки обчислень** (заокруглювання під час обчислень, локальні відсікання, похибки зображення чисел у комп'ютері).

Зауваження 1. Неусувну похибку і похибку методу необхідно контролювати, щоб не здійснювати розрахунки з надмірною точністю. Похибку методу треба вибирати так, щоб вона була не більш, ніж на порядок менша неусувних, оскільки велика похибка методу знижує точність розв'язку, а мала вимагає значного збільшення об'єму обчислень.

Зауваження 2. Обчислювальні похибки тільки накопичуються, незалежно від типу виконуваної операції. При цьому частково взаємно компенсуються, оскільки мають різні знаки. Точність проведення розрахунків на комп'ютері можна регулювати програмно.

Нехай X – точне значення деякої величини, а x – її відоме наближене значення.

Під **похибкою** наближеного числа x розуміють величину, що характеризує точність наближення і дорівнює різниці між відповідним точним числом X та його наближенням x : $\Delta x = X - x$.

У більшості випадків знак похибки Δx невідомий, тому вводиться поняття **абсолютної похибки** Δ_x як модуля похибки Δx : $\Delta_x = |\Delta x| = |X - x|$.

Як правило, точне значення X невідоме й абсолютну похибку Δ_x знайти неможливо. Тому для оцінки зверху Δ_x використовується поняття **граничної абсолютної похибки** Δ_x^* , яка визначається з нерівності $\Delta_x \leq \Delta_x^*$.

Нехай $X \neq 0$. Важливою характеристикою точності наближення є абсолютна похибка, що припадає на одиницю величини числа X , – **відносна похибка** δ_x . Вона дорівнює відношенню абсолютної похибки Δ_x до модуля точного числа X : $\delta_x = \Delta_x / |X|$.

Зауваження 3. Для $X = 0$ відносна похибка невизначена.

Верхньою оцінкою для δ_x служить **гранична відносна похибка** δ_x^* , що визначається з нерівності $\delta_x \leq \delta_x^*$.

Звідси $\Delta_x / |X| \leq \delta_x^*$; $\Delta_x \leq |X| \delta_x^*$. Отже, можна покласти $\Delta_x^* = |X| \delta_x^*$. Оскільки $X = x$ з достатньою для практики точністю, то звичайно приймають $\Delta_x^* = |x| \delta_x^*$. Аналогічно $\Delta_x = |x| \delta_x$.

Нехай для визначеності $\Delta_x^* < |X|$. Тоді $\delta_x = \Delta_x / |X| \leq \Delta_x^* / (|x| - \Delta_x^*)$. Тобто можна покласти $\delta_x^* = \Delta_x^* / (|x| - \Delta_x^*)$. Як правило, $\Delta_x^* \ll |x|$, тому на практиці звичайно користуються формулою $\delta_x^* = \Delta_x^* / |x|$. Аналогічно $\delta_x = \Delta_x / |x|$.

Зауваження 4. Абсолютна похибка є розмірною величиною, а відносна – безрозмірною, її часто виражають у відсотках.

2.1.3. Форми запису наближених даних

Будь-яке додатне число x можна подати у вигляді скінченного чи нескінченного десяткового дробу

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots,$$

де $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$ – цифри у запису числа x , причому $\alpha_1 \neq 0$; m – старший десятковий розряд числа x .

Усі десяткові знаки $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$ такого подання наближеного числа x називаються його *значущими цифрами*. Іншими словами, *значущими цифрами* наближеного числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва, включаючи всі нулі справа, що є представниками збережених розрядів. Решта нулів, що входять у його запис та служать лише для позначення його десяткових розрядів, не зараховуються до значущих цифр.

Наприклад, у числах 4,570315, 0,007214, 0,03105800, 2730000, 0,30400 · 10⁶ тільки підкреслені цифри є значущими.

Точність подання наближеного числа x залежить від кількості його значущих цифр.

Значуща цифра α_i називається *вірною (правильною) у вузькому сенсі*, якщо абсолютна похибка Δ_x^* числа x не перевищує половини одиниці $(m - i + 1)$ -го розряду, що відповідає цій цифрі. У противному разі цифра α_i називається *сумнівною*.

Якщо цифра α_n вірна, то усі попередні до неї цифри теж вірні. Отже, при умові

$$0,5 \cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1},$$

за визначенням, перші n значущих цифр $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ є вірними у вузькому сенсі, а всі інші – сумнівними. При цьому можна покласти

$$\Delta_x^* = 0,5 \cdot 10^{m-n+1}.$$

Зауваження. Якщо додатне наближене число x має n вірних значущих цифр у вузькому сенсі $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, то за граничну відносну похибку δ_x^* можна взяти

$$\delta_x^* = 0,5 \cdot 10^{1-n} / \alpha_1.$$

Точне число X через його наближення x можна записати у різному вигляді:

– з використанням межових значень $x_1 \leq X \leq x_2$, де $x_1 = x - \Delta_x^*$ і $x_2 = x + \Delta_x^*$, наприклад, $1,351 \leq X \leq 1,357$;

– з використанням абсолютної похибки $X = x \pm \Delta_x^*$, наприклад, $X = 1,354 \pm 0,003$, тобто $1,354 - 0,003 \leq X \leq 1,354 + 0,003$;

– з використанням відносної похибки $X = x(1 \pm \delta_x^*)$, наприклад, $X = 1,354(1 \pm 0,002)$ або $X = 1,354(1 \pm 0,2\%)$.

Приклад. Скільки вірних значущих цифр у вузькому сенсі має дане число x , якщо:

а) $x = 14,3820$ і $\Delta_x^* = 0,06$; б) $x = 8,677193$ і $\Delta_x^* = 3 \cdot 10^{-4}$;

в) $x = 0,046719$ і $\Delta_x^* = 0,008$; г) $x = 103,265(1 \pm 0,000076)$;

д) $x = 0,096027$ і $\Delta_x^* = 0,006$; е) $x = 1373,174(1 \pm 0,00082)$.

□ а) Маємо $0,5 \cdot 10^{-1} < \Delta_x^* = 0,6 \cdot 10^{-1} \leq 0,5 \cdot 10^0$. Отже, у вузькому сенсі у числа x вірними є дві значущі цифри 1,4, а цифри 3,8,2,0 – сумнівні.

б) Оскільки $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0,3 \cdot 10^{-3} \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$, то x у вузькому сенсі має вірні три значущі цифри після коми, тобто вірними будуть чотири значущі цифри 8,6,7,7, а цифри 1,9,3 – сумнівні.

в) Маємо $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0,8 \cdot 10^{-2} \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$. Отже, у вузькому сенсі у числа x немає ні однієї вірної значущої цифри, всі вони сумнівні.

г) Гранична відносна похибка $\delta_x^* = 0,000076$, тоді гранична абсолютна похибка $\Delta_x^* = |x| \delta_x^* = 103,265 \cdot 0,000076 = 0,0078$. Оскільки $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0,78 \cdot 10^{-2} \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$, то у вузькому сенсі $x = 103,265$ має чотири вірні значущі цифри 1,0,3,2, а цифри 6,5 – сумнівні.

(Завдання д) і е) розв'язати самостійно). ■

2.1.4. Похибки округлення

В обчислювальному пристрої числа наводять з обмеженою кількістю розрядів, максимальне число яких визначається довжиною його розрядної сітки.

Заокруглюванням називається заміна числа наближеним числом з меншою кількістю значущих цифр. При цьому виникає **похибка округлення**. Щоб вона була мінімальною, треба застосовувати наступне **правило симетричного заокруглювання**:

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, менше 5, то попередня до нього цифра не змінюється;

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює або більше 5, то попередня до нього цифра збільшується на 1.

При використанні цього правила **абсолютна похибка округлення** $\Delta_{x_{окр}}$ числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$$

до p значущих цифр не перевищує половини одиниці розряду останньої залишеної цифри α_p , тобто за **граничну абсолютну похибку округлення** $\Delta_{x_{окр}}^*$ можна взяти $\Delta_{x_{окр}}^* = 0,5 \cdot 10^{m-p+1}$.

Під час заокруглювання наближеного числа x_1 отримуємо нове наближене число x_2 , абсолютна похибка Δ_{x_2} якого визначається за формулою:

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2_{окр}},$$

де Δ_{x_1} – абсолютна похибка числа x_1 ; $\Delta_{x_2_{окр}} = |x_1 - x_2|$ – абсолютна похибка округлення числа x_2 .

Аналогічною формулою зв'язані граничні значення цих похибок:

$$\Delta_{x_2}^* = \Delta_{x_1}^* + \Delta_{x_2_{окр}}^*.$$

Зауваження 1. При заокруглюванні цілого числа відкинуті знаки не можна замінити нулями, а потрібно застосовувати множення на відповідний степінь 10.

Зауваження 2. У деяких випадках також застосовують **заокру-**

глювання з недостачею, коли зайві цифри просто відкидаються, і заокруглювання з надлишком, коли остання справа залишена цифра збільшується на одиницю.

Приклад 1. Нехай а) $x_1 = 7,8497621$ і б) $x_1 = 348,453275$.

Заокруглити ці числа, відкидаючи послідовно t ($t = 1, 2, 3, \dots$) останні цифри.

□ Відповідно дістанемо:

а) $x_2 = 7,849762$ і б) $x_2 = 348,45328$ ($t = 1$); а) $x_2 = 7,84976$

і б) $x_2 = 348,4533$ ($t = 2$); а) $x_2 = 7,8498$

і б) $x_2 = 348,453$ ($t = 3$); а) $x_2 = 7,850$ і б) $x_2 = 348,45$ ($t = 4$);

а) $x_2 = 7,85$ і б) $x_2 = 348,5$ ($t = 5$); а) $x_2 = 7,8$

і б) $x_2 = 348$ ($t = 6$); а) $x_2 = 8$ і б) $x_2 = 3,5 \cdot 10^2$ ($t = 7$);

а) $x_2 = 1 \cdot 10^1$ і б) $x_2 = 3 \cdot 10^2$ ($t = 8$). ■

Приклад 2. Округлити сумнівні цифри даного числа x_1 і знайти абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки результату x_2 :

а) $x_1 = 34,124 \pm 0,021$; б) $x_1 = 91,735(1 \pm 0,0000082)$.

□ а) Наближене число x_1 має три вірні цифри: 3, 4, 1, тому що $0,005 < \Delta_{x_1} = 0,021 \leq 0,05$. Використовуючи правило заокруглювання, знайдемо наближене значення x_2 , зберігаючи вірні десяткові знаки: $x_2 = 34,1$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2 \text{ окр}}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2 :

$$\Delta_{x_2 \text{ окр}} = |x_1 - x_2| = |34,124 - 34,1| = 0,024; \quad \Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2 \text{ окр}} = 0,021 + 0,024 = 0,045; \quad \delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |x_2| = 0,045 / |34,1| = 0,0013.$$

Оскільки $0,005 < \Delta_{x_2} = 0,045 \leq 0,05$, то всі значущі цифри числа x_2 вірні. Отже, $x_2 = 34,1 \pm 0,045$.

б) Оскільки відносна похибка $\delta_{x_1} = 0,0000082$, то абсолютна

похибка $\Delta_{x_1} = |x_1| \delta_{x_1} = 91,735 \cdot 0,0000082 = 0,00075$. Значить, число $x_1 = 91,735$ має чотири вірні значущі цифри: 9, 1, 7 і 3, тому що $0,5 \cdot 10^{-3} < \Delta_{x_1} = 0,00075 \leq 0,5 \cdot 10^{-2}$. Знайдемо наближене значення x_2 з чотирма десятковими знаками, використовуючи правило заокруглювання: $x_2 = 91,74$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2 \text{ окр}}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2 :

$$\Delta_{x_2 \text{ окр}} = |x_1 - x_2| = |91,735 - 91,74| = 0,005;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2 \text{ окр}} = 0,00075 + 0,005 = 0,006;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |x_2| = 0,006 / |91,74| = 0,7 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_{x_2} = 0,006 \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$, то вірними значущими цифрами числа x_2 є тільки перші три 9, 1 і 7, а остання цифра 4 – сумнівна. Отже, $x_2 = 91,74 \pm 0,006$. ■

2.1.5. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій

Розглянемо неперервно диференційовну на відрізку $[a; b]$ функцію однієї змінної $y = f(x)$. Припустимо, що потрібно знайти наближення y для її точного значення Y при $X \in [a; b]$, що задане наближеним числом $x \in [a; b]$ з абсолютною похибкою Δ_x , і оцінити відповідну абсолютну похибку функції $\Delta_y = |Y - y|$.

За наближене значення функції $Y = f(X)$ можна взяти $y = f(x)$. При цьому абсолютну похибку Δ_y можна розглядати як модуль її приросту, викликаного приростом аргументу $\pm \Delta_x$. Оскільки приріст аргументу відносно невеликий, то при практичних розрахунках з достатньою точністю можна використовувати *лінійні оцінки*:

$$\Delta_y = |f'(x)| \cdot \Delta_x \quad \text{і} \quad \Delta_y^* = |f'(x)| \cdot \Delta_x^*,$$

що рівносильне заміні приросту функції диференціалом.

Ці формули безпосередньо узагальнюються на випадок неперервної диференційовної функції n змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\boxed{y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)} ;$$

$$\boxed{\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}} ; \quad \boxed{\Delta_y^* = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}^*}$$

На основі одержаного наближеного значення функції та лінійної оцінки її абсолютної похибки дістанемо лінійні оцінки відносної похибки δ_y та її граничного значення δ_y^* .

а) У випадку функції однієї змінної $y = f(x)$:

$$\boxed{\delta_y = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_x} \quad \text{і} \quad \boxed{\delta_y^* = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_y^*}$$

б) У випадку функції n змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\boxed{\delta_y = \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}}$$

$$\text{і} \quad \boxed{\delta_y^* = \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}^*}$$

Зауваження. За одержаними формулами знаходяться неусувні похибки обчислення функції, породжені похибками аргументів. Похибки заокруглювання тут не враховуються.

Використовуючи одержані формули, можна визначити лінійні оцінки похибок результатів арифметичних операцій як окремих випадків функції двох змінних.

а) Похибка суми. Нехай $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Оскільки $\partial f(x_1, x_2) / \partial x_i = 1$ і $\partial \ln f(x_1, x_2) / \partial x_i = 1 / (x_1 + x_2)$, $i = 1, 2$, то дістанемо

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_2}$$

Абсолютна похибка суми дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.

Аналогічно знаходяться похибки для інших результатів арифметичних операцій.

б) Похибка різниці. $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_2}.$$

Абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного і від'ємника.

в) Похибка добутку. $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

$$\Delta_y = |x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників.

г) Похибка частки. $y = f(x_1, x_2) = x_1/x_2$.

$$\Delta_y = \frac{|x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2}}{(x_2)^2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.

Правила підрахунку цифр:

1) *При знаходженні суми й різниці наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент операції з найменшим числом десяткових знаків.*

2) *При знаходженні добутку й частки наближених чисел у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має компонент операції з найменшим числом значущих цифр.*

Приклад. Знайти абсолютну Δ_u і відносну δ_u похибки обчислення значення функції $u = x^2 z / y^3$, якщо $x = 0,15 \pm 0,005$, $y = 2,12 \pm 0,01$, $z = 1,16 \pm 0,007$.

□ За формулою для лінійної оцінки абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta_u &= \left| \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \right| \Delta_y + \left| \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \right| \Delta_z = \\ &= \left| \frac{2xz}{y^3} \right| \Delta_x + \left| \frac{3x^2z}{y^4} \right| \Delta_y + \left| \frac{x^2}{y^3} \right| \Delta_z = \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 1,16}{2,12^3} \cdot 0,005 + \\ &+ \frac{3 \cdot 0,15^2 \cdot 1,16}{2,12^4} \cdot 0,01 + \frac{0,15^2}{2,12^3} \cdot 0,007 = 0,0001826 + \\ &+ 0,0001163 + 0,00001653 = 0,00032 = 3,2 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Знайдемо наближене значення функції:

$$u = 0,15^2 \cdot 1,16 / 2,12^3 = 0,002739.$$

Тоді $\delta_u = \Delta_u // u = 3,2 \cdot 10^{-4} / 0,002739 = 0,12$. ■

2.2. Чисельні методи знаходження дійсних коренів скінченних рівнянь

Рівнянням з однією змінною x називається рівність

$$\boxed{f(x) = 0},$$

яка справджується при певних значеннях x , що називаються **коренями** рівняння. Вважають, що корінь x^* має кратність k , якщо

$$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \text{ але } f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Розв'язування рівняння полягає в знаходженні його коренів.

Зауваження 1. Рівносильними перетвореннями рівняння $f(x) = 0$ можна звести до вигляду $\boxed{x = \varphi(x)}$. Тим самим знаходження кореня рівняння $f(x) = 0$ (**нуля функції** $f(x)$) зводиться до пошуку **нерухомої точки** відображення φ – такого значення x , яке відображенням φ переводиться само в себе.

Зауваження 2. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних коренів дійсних рівнянь.

2.2.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів

Наближене обчислення кожного з дійсних коренів складається з наступних етапів:

а) дослідження кількості й розташування коренів на числовій прямій, з'ясування їх кратності; виділення області пошуку D коренів, яка відповідає умовам поставленої задачі;

б) **відокремлення (ізоляція, локалізація)** кореня x^* , тобто знаходження як можна меншого відрізка $[a;b]$ з області пошуку D , в межах якого лежить один і тільки один цей корінь, і вибір його початкового наближення x_0 ;

в) **уточнення** значення кореня x^* , тобто обчислення його з необхідною точністю.

Найчастіше відокремлення коренів здійснюється аналітичним чи графічним способами.

Основою **аналітичного способу** служить наступна

теорема. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і приймає значення різних знаків на його кінцях, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то усередині цього відрізка міститься хоча б один корінь x^* рівняння $f(x) = 0$. Цей корінь буде єдиним, якщо на інтервалі $(a;b)$ похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак.*

У найпростішому випадку формують таблицю, в яку заносять послідовно розміщені на осі Ox точки x_i , $i = 1, 2, \dots$ з досить малим кроком $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ і обчислені в них значення $f(x_i)$ лівої частини рівняння $f(x) = 0$. Потім у таблиці вибирають ті пари сусідніх значень аргументу x_i і x_{i+1} , між якими функція $f(x)$ змінює знак.

При **графічному способі** будують графік функції $y = f(x)$ і приблизно виявляють ділянки його перетину з віссю Ox . Або, перетворивши вхідне рівняння $f(x) = 0$ до вигляду $f_1(x) = f_2(x)$, будують графіки двох функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і приблизно визначають проміжки, яким належать абсциси їх точок перетину між собою.

Приклад 2. Для рівняння $2^x + x^2 - 2 = 0$ знайти інтервали ізоляції його коренів, що лежать на проміжку $[-2; 2]$, аналітичним способом, а потім проконтролювати результат графічним методом.

□ Побудуємо таблицю значень, де $y = f(x) = 2^x + x^2 - 2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	2,25	- 0,5	-1	1	6

З таблиці значень видно, що відрізьку $[-2; 2]$ функція $y = f(x)$ двічі змінює знак, тому можна припустити, що рівняння має два корені, проміжки локалізації яких $[-2; -1]$ і $[0; 1]$.

Для контролю розв'яжемо задачу графічно. Подамо рівняння у вигляді $2^x = 2 - x^2$ і побудуємо графіки лівої $y = 2^x$ та правої $y = 2 - x^2$ частин (рис. 37). Перетин графіків на рис. 37 покаже, що коренів два і вони розміщені на відрізках $[-2; -1]$ і $[0; 1]$. ■

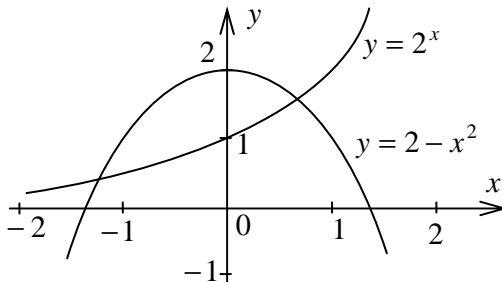


Рис. 37

2.2.2. Методи уточнення наближених значень коренів

На етапі уточнення кореня x^* рівняння $f(x) = 0$ обчислюють його наближене значення з заданою точністю.

Для цього використовують різні ітераційні методи (методи послідовних наближень), суть яких полягає у послідовному обчисленні, виходячи з початкового наближення x_0 , за однією й тією ж схемою (за допомогою відповідного рекурентного співвідношення

$$x_k = \Phi_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

значень $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, що наближаються до кореня x^* :

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ (це забезпечується вибором Φ_k).

Критеріями закінчення ітераційного процесу служать:

а) досягнення заданої точності за аргументом: $|x_k - x^*| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення x_k кореня x^* ;

б) досягнення заданої точності за функцією: $|f(x_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення $f(x_k)$ функції $f(x)$;

в) досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій k_{\max} : $k = k_{\max}$.

Зауваження. Позитивною стороною всіх ітераційних методів є відсутність накопичення похибок обчислень.

Далі розглянемо найпоширеніші ітераційні методи уточнення наближеного значення кореня.

2.2.3. Метод поділу навпіл (дихотомії, бісекції)

Метод дихотомії (бісекції, поділу навпіл) є досить простим і надійним способом розв'язування нелінійних рівнянь.

Нехай з попереднього аналізу відомо, що корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ належить відрізку $[a_0; b_0]$: $x^* \in [a_0; b_0]$, причому функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку і приймає на його кінцях різні за знаком значення, тобто $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

На першому кроці ($k = 1$) розділимо відрізок $[a_0; b_0]$ навпіл точкою $x_1 = (a_0 + b_0)/2$ (рис. 38). Якщо $f(x_1) = 0$, то x_1 – шуканий корінь і задача розв'язана: $x^* = x_1$. Якщо $f(x_1) \neq 0$, то треба визначити, на кінцях якого з відрізків $[a_0; x_1]$ чи $[x_1; b_0]$ функція приймає різні за знаком значення. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$.

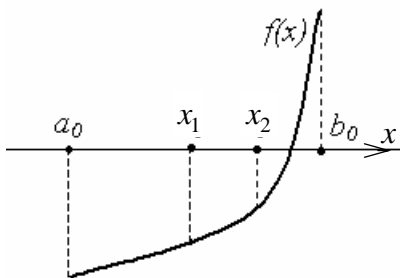


Рис. 38

Оскільки $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, то $x^* \in [a_1; b_1]$ і довжина відрізка $[a_1; b_1]$ удвічі менша, ніж довжина попереднього відрізка $[a_0; b_0]$.

Далі ($k = 2$) зробимо аналогічні дії на відрізку $[a_1; b_1]$ (поділимо його навпіл і т.д.). У результаті отримаємо корінь x^* або його відповідне наближення

$$x_2 = (a_1 + b_1)/2$$

і новий відрізок ізоляції $[a_2; b_2]$ і т.д. На k -му кроці обчислення проводяться за схемою:

$$\boxed{x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2; f(a_{k-1}) f(b_{k-1}) < 0 \quad (k = 1, 2, \dots)},$$

де x_k – наближення до шуканого кореня x^* ; $[a_{k-1}; b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $k = k_{\max}$, то покласти $x^* = x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k) = 0$, то покласти $x^* = x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k) \cdot f(a_{k-1}) > 0$, то покласти $a_k = x_k$; $b_k = b_{k-1}$, інакше – $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_k$. Далі присвоїти $k := k + 1$ і продовжити обчислення.

На k -му кроці довжина одержаного відрізка ізоляції $[a_k; b_k]$ дорівнює $(b_0 - a_0)/2^k$. Оскільки $x^* \in [a_k; b_k]$, то маємо оцінку

$$\boxed{|x_k - x^*| \leq b_k - a_k = (b_0 - a_0)/2^k},$$

яка характеризує похибку методу ділення відрізка навпіл і вказує на швидкість збіжності: *метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої $q = 1/2$.*

Оскільки $|x_k - x^*| \leq b_k - a_k = |x_k - x_{k-1}|$, то обчислення закінчують, коли буде виконана нерівність $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження. Метод дихотомії застосовують тоді, коли вимагається висока надійність, а швидкість збіжності несуттєва.

Приклад. Знайти наближено $x = \sqrt[8]{2}$ з точністю $\delta = 0,01$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 10$.

□ Задача еквівалентна відшукуванню додатного кореня рівняння $x^8 - 2 = 0$ (знаходженню додатного нуля функції $f(x) = x^8 - 2$). За початковий проміжок локалізації $[a_0; b_0]$ можна взяти відрізок $[1; 2]$, оскільки на кінцях цього відрізка функція $f(x)$ приймає значення з різними знаками: $f(1) < 0$ і $f(2) > 0$.

Для уточнення кореня застосуємо метод дихотомії.

Оцінимо число k поділів відрізка $[1; 2]$, що необхідні для досягнення заданої точності $\delta = 0,01$:

$$k > \log_2((b_0 - a_0)/\delta) = \log_2((2 - 1)/0,01) = \log_2 100; \quad k \geq 7$$

Очікуємо, що після сьомої ітерації знайдемо $\sqrt[8]{2}$ з потрібною точністю.

Оскільки $\delta = 0,01$, тобто результат треба знайти з двома вірними значущими десятковими цифрами після коми, то проміжні обчислення виконуємо з чотирма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень подані у наступній таблиці:

k	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0625	1,0625	1,0781
b_k	2,0000	1,5000	1,2500	1,1250	1,1250	1,0937	1,0937
x_k	1,5000	1,2500	1,1250	1,0625	1,0937	1,0781	1,0859
Знак $f(a_k)$	-	-	-	-	-	-	-
Знак $f(b_k)$	+	+	+	+	+	+	+
Знак $f(x_k)$	+	+	+	-	+	-	-
$ x_k - x_{k-1} $	—	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312	0,0156	0,0078

Отже, $x = \sqrt[8]{2} = x_7 = 1,09 \pm 0,01$. ■

2.2.4. Метод простих ітерацій

Метод простих ітерацій застосовується до розв'язування рівняння вигляду $x = \Phi(x)$.

Виберемо довільно початкове наближення $x_0 \in [a; b]$ кореня x^* рівняння $x = \Phi(x)$ й обчислимо послідовно наступні наближення за схемою: $x_k = \Phi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$.

Достатню умову збіжності методу простих ітерацій установлює наступна

теорема. *Якщо в інтервалі, який містить корінь x^* рівняння $x = \Phi(x)$ і його послідовні наближення $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$, які обчислюються за формулою $x_k = \Phi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$, виконується умова $|\Phi'(x)| \leq q < 1$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, тобто ітераційний процес збігається, і справджується нерівність $|x_k - x^*| \leq q^k |x_0 - x^*|$.*

Оцінка похибки $|x_k - x^*| \leq q^k |x_0 - x^*|$ показує, що метод простих ітерацій збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником q . Швидкість збіжності тим більша, чим менше q .

Умова $|\Phi'(x)| < 1$ є достатньою для збіжності методу простих ітерацій: її виконання гарантує збіжність. Але ця умова не є необхідною: якщо вона не виконується, то це не означає, що ітераційний процес обов'язково буде розбігатись.

Метод простих ітерацій має прозору геометричну інтерпретацію. Побудуємо графіки функцій $y = x$ і $y = \Phi(x)$. Коренем рівняння $x = \Phi(x)$ є абсциса точки їх перетину. Від початкового наближення x_0 будуємо ламану, абсциси вершин якої є послідовними наближеннями $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ до кореня x^* .

На рис. 39 – 42 показано чотири випадки взаємного розташування ліній $y = x$, $y = \Phi(x)$ і відповідної ламаної, що описує ітераційний процес. Рис. 39 і 40 відповідають випадку $|\Phi'(x)| \leq q < 1$, коли ітераційний процес збігається. Рис. 41 і 42 відповідають ви-

падку $|\varphi'(x)| > 1$, коли ітераційний процес розбігається.

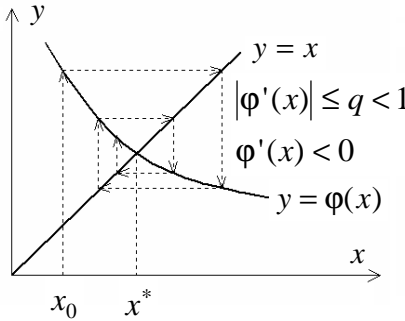


Рис. 39

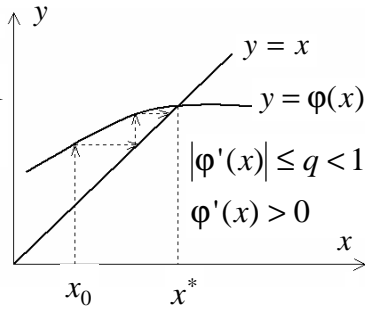


Рис. 40

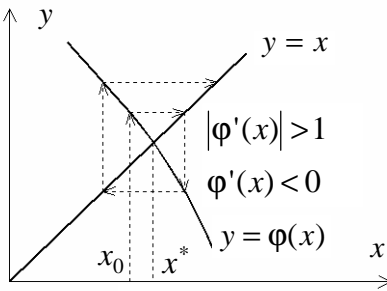


Рис. 41

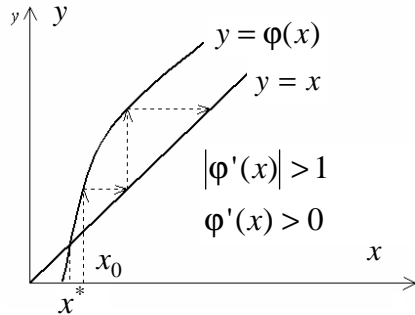


Рис. 42

Зауваження 1. Якщо не виконана ні одна з умов $|\varphi'(x)| < 1$ чи $|\varphi'(x)| > 1$, то ітераційний процес може зациклюватися.

Похибка методу і критерій закінчення. Якщо відома величина q в умові $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, то застосовують оцінку похибки

$$|x_k - x^*| \leq (q/(1-q))|x_k - x_{k-1}|, k \geq 1,$$

з якої витікає наступний критерій закінчення ітераційного процесу: обчислення необхідно продовжувати до виконання нерівності

$|x_k - x_{k-1}| < \delta q / (1 - q)$, де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження 2. Якщо $q \leq 0,5$, то можна користуватись більш простим критерієм закінчення: $|x_k - x_{k-1}| < \delta$.

Зауваження 3. Надати рівнянню $f(x) = 0$ вигляду $x = \varphi(x)$ можна багатьма способами. Найпростіше безпосередньо додати x до обох частин рівняння $f(x) = 0$: $x = x + f(x)$. Часто застосовується **модифікація методу простих ітерацій**: $x = x + \alpha f(x)$, де α – параметр, значення якого підбирається експериментально так, щоб справджувалася умова збіжності $|\varphi'(x)| < 1$.

Приклад. Методом простих ітерацій розв'язати рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = 2x^2\sqrt{x} + x^2 - 4$, з точністю $\delta = 0,001$ з додатковою вимогою $|f(x_k)| < \epsilon$, де $\epsilon = 0,01$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

□ Областю допустимих значень даного рівняння є закритий промінь $[0; +\infty)$.

Оскільки $f(1) = -1 < 0$, а $f(2) = 11,3 > 0$, тобто функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[1; 2]$ має різні знаки, то всередині цього відрізка є корінь x^* . Так як для всіх $x \in (0; +\infty)$ похідна $f'(x)$ зберігає знак $f'(x) = 5x\sqrt{x} + 2x > 0$, то на відрізку $[1; 2]$ знаходиться єдиний корінь x^* рівняння.

Проведемо уточнення кореня методом простих ітерацій.

Перетворимо рівняння до вигляду $x = \varphi(x)$:

$$x^2 = 4 / (2\sqrt{x} + 1); \quad x = 2 / \sqrt{2\sqrt{x} + 1}. \quad \text{Отже, } \varphi(x) = 2 / \sqrt{2\sqrt{x} + 1}.$$

На рис. 43 показано розташування кореня x^* . Видно, що корінь розміщений значно ближче до лівого кінця відрізка $[1; 2]$, ніж до правого. Тому за початкове наближення оберемо $x_0 = 1,1$.

Обчислимо першу та другу похідні функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)^{3/2}}; \quad \varphi''(x) = \frac{3(5\sqrt{x}+1)}{4x\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)^{5/2}}.$$

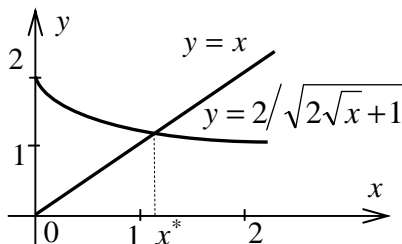


Рис. 43

Оскільки на відрізку $[1;2]$ друга похідна $\varphi''(x)$ додатна, то перша похідна $\varphi'(x)$ монотонно зростає на цьому відрізку і приймає найменше та найбільше значення на його кінцях:

$$\min_{x \in [a_0; b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(1) = -0,192;$$

$$\max_{x \in [a_0; b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(2) = -0,094.$$

Тоді справедлива оцінка $|\varphi'(x)| \leq \max_{x \in [a_0; b_0]} |\varphi'(x)| = 0,192 < 1$.

Таким чином, умова збіжності $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ справджується, причому $q = 0,192 \leq 0,5$. Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0,001$ і $|f(x_k)| < \varepsilon = 0,01$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$. Отримані за формулою $x_k = \varphi(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$ наближення показані у наступній таблиці:

k	1	2	3	4	5
x_k	1,13636	1,13011	1,13117	1,13099	
$ x_k - x_{k-1} $	0,03636	0,00625	0,00106	0,00018	
$ f(x_k) $	0,0444	0,0075	0,0013	0,0002	

Оскільки $\delta = 0,001$ і $\varepsilon = 0,01$, то проміжні обчислення виконані з п'ятьма десятковими знаками після коми (дві-три цифри запасні). Характер збіжності відповідає рис. 39.

Отже, шукане значення кореня $x^* = x_4 = 1,131 \pm 0,001$ досягнуто після чотирьох ітерацій. ■

2.2.5. Метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)

Найбільш ефективним методом розв'язування нелінійних рівнянь є *метод Ньютона* (*метод дотичних* або *метод лінеаризації*).

Нехай корінь $x^* \in [a; b]$, причому $f(a) \cdot f(b) < 0$, а функція $f(x)$ неперервна на відрізку локалізації $[a; b]$ і двічі неперервно диференційовна на інтервалі $(a; b)$, де друга похідна $f''(x)$ зберігає знак. За початкове наближення x_0 візьмемо той кінець відрізка $[a; b]$, для якого $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (знаки функції та другої похідної співпадають).

Покладемо, для визначеності, $f''(x) > 0$ і $f(b) > 0$. Тоді $x_0 = b$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці $B_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 44). Рівняння цієї дотичної:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox , абсциса якої буде першим наближенням до кореня: $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

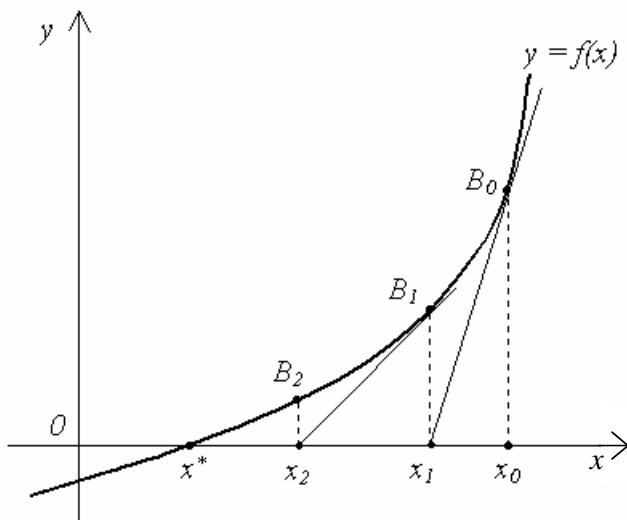


Рис. 44

У точці $B_1(x_1; f(x_2))$ знову проведемо дотичну до кривої й отримаємо наступне наближення. Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність наближень $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$, де

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1}); k = 1, 2, \dots$$

Це співвідношення є **ітераційною формулою** методу Ньютона.

Зауваження 1. Метод Ньютона можна розглядати як окремий випадок методу простих ітерацій, для якого $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Тоді **умова збіжності** $|\varphi'(x)| < 1$ матиме вигляд $|f \cdot f''| < (f')^2$.

Достатню умову збіжності методу дотичних встановлює наступна

теорема. Нехай $[a; b]$ – відрізок, який містить корінь x^* рівняння $f(x) = 0$. Якщо $f(a) \cdot f(b) < 0$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ відмінні від нуля та зберігають знак на $[a; b]$, то виходячи з довільного початкового наближення $x_0 \in [a; b]$, що задовольняє умову $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, ітераційний процес методу Ньютона $x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$ ($k = 1, 2, \dots$) монотонно збігається до єдиного на відріжку $[a; b]$ кореня x^* , який можна обчислити з будь-яким ступенем точності.

Зауваження 2. Збіжність методу Ньютона суттєво залежить від того, чи достатньо близько до кореня взято початкове наближення.

Похибка методу. Для дослідження швидкості збіжності скористаємося поданням функції $f(x)$ в околі точки x_{k-1} за формулою Тейлора до членів другого порядку включно й отримаємо:

$$f(x^*) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) + (1/2)f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2 = 0,$$

де $\xi \in (x^*; x_{k-1})$. Звідси

$$f(x_{k-1}) = -f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) - (1/2)f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2.$$

Підставимо цей вираз у формулу методу Ньютона і дістанемо

$$x_{k-1} = x^* + (1/2)(f''(\xi)/f'(x_{k-1}))(x^* - x_{k-1})^2.$$

Тоді для похибки k -го наближення маємо

$$x_{k-1} - x^* = (1/2)(f''(\xi)/f'(x_{k-1}))(x^* - x_{k-1})^2.$$

Позначимо $m = \min_{x \in [a;b]} |f'(x)| \neq 0$; $M = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$. Тоді для абсолютної похибки k -го наближення дістанемо оцінку

$$\boxed{|x_k - x^*| \leq (M/(2m)) |x_{k-1} - x^*|^2}.$$

Це означає, що *метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності*, тобто похибка чергового наближення пропорційна до квадрата похибки попереднього наближення.

Зауваження 3. На практиці звичайно користуються такою оцінкою похибки: $\boxed{|x_k - x^*| \leq |x_k - x_{k-1}|}$. У кращих випадках число вірних десяткових знаків у черговому наближенні подвоюється, тобто процес збігається дуже швидко.

Критерій закінчення. Попередня оцінка дозволяє сформулювати такий критерій закінчення ітерацій: обчислення треба вести доти, доки не буде виконана нерівність $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження 4. Для підвищення стійкості ітераційного процесу застосовується наступна *модифікація методу Ньютона*:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \alpha f(x_{k-1})/f'(x_{k-1}); k = 1, 2, \dots},$$

де α – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону $\alpha = 0,1 \div 1$).

Приклад 1. Методом Ньютона з точністю $\delta = 0,001$ знайти додатний корінь x^* рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = e^{-x} - 2x^2 + 1$, з додатковою вимогою $|f(x_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0,0001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

□ Подамо дане рівняння у вигляді $e^{-x} = 2x^2 - 1$, дослідимо перетин графіків $y = e^{-x}$ і $y = 2x^2 - 1$ при $x \in [0; +\infty)$. У результаті одержимо, що додатний корінь x^* лежить на відрізку $[0,5; 1]$.

(Проробіть це самостійно).

На кінцях відрізка $f(0,5) = 1,11 > 0$ і $f(1) = -0,63 < 0$.

Обчислимо першу та другу похідні функції $f(x)$:

$$f'(x) = -e^{-x} - 4x; \quad f''(x) = e^{-x} - 4.$$

На відрізку $[0,5;1]$ справджуються нерівності $f'(x) < 0$ і $f''(x) < 0$. Оскільки виконується умова $f'(1)f''(1) > 0$, то за початкове наближення візьмемо $x_0 = 1$. Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0,001$ і $|f(x_k)| < \varepsilon = 0,0001$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$. Виходячи з того, що $\delta = 0,001$ і $\varepsilon = 0,0001$, проміжні обчислення здійснюємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (одна-дві цифри запасні).

Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

Отже, шукане значення кореня $x^* = x_3 = 0,845 \pm 0,001$ досягнуто після трьох ітерацій. ■

k	0	1	2	3	4
x_k	1,00000	0,85528	0,84544	0,84540	
$ x_k - x_{k-1} $	—	0,14472	0,00984	0,00005	
$f(x_k)$	-0,63212	-0,03784	-0,00017	-0,00000	
$f'(x_k)$	-4,36788	-3,84628	-3,81113	—	

Приклад 2. Методом Ньютона з точністю $\delta = 0,001$ розв'язати рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = 2/(x^2 + 1) - x^3 + 1$, з додатковою допомогою $|f(x_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0,0001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

(Розв'язати самостійно). Відповідь: $x^* = 1,218 \pm 0,001$.

2.3. Апроксимація функцій

2.3.1. Загальна постановка задачі апроксимації

Задача *апроксимації* (наближення) функцій полягає у тому, щоб для заданої функції $y = f(x)$ побудувати *апроксимуючу* (наближену) функцію (модель) $y = F(x)$, значення якої достатньо близькі до значень даної функції. *Відхилення* $R(x) = f(x) - F(x)$ характеризує якість наближення.

Наведемо найбільш типові ситуації, коли на практиці виникає така задача:

– функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$ для скінченної множини точок x_0, x_1, \dots, x_n , а обчислення $y = f(x)$ треба зробити в інших точках;

– функція $y = f(x)$ задана аналітично, але обчислювати її за відповідними формулами важко.

Знаходження апроксимуючої функції $y = F(x)$ включає наступні етапи:

1) вибір *критерію близькості* вхідної $y = f(x)$ і наближеної $y = F(x)$ функцій (вимога збігу значень обох функцій на заданій сукупності точок x_0, x_1, \dots, x_n – *інтерполяція (колокація)*, мінімізація середньоквадратичного відхилення – *середньоквадратична апроксимація*, мінімізація максимального за модулем відхилення – *рівномірне наближення* та ін.);

2) вибір вигляду наближеної функції $y = F(x)$ – *структурна ідентифікація (параметризація моделі* – визначення певної параметричної сім'ї функцій $y = F(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$, де a_0, a_1, \dots, a_n – невідомі коефіцієнти);

3) знаходження за вибраним критерієм оптимальних оцінок параметрів a_0, a_1, \dots, a_n – *параметрична ідентифікація* (вибір і реалізація методу обчислення з заданою точністю найкращих за певним критерієм значень коефіцієнтів наближеної функції).

Нехай на відрізьку $[a; b]$ зміни аргументу x задано одновимір-

ну сітку $\omega_n = \{x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком $h_k = x_k - x_{k-1} = \text{var}$, $k = \overline{1, n}$), у всіх вузлах x_k , $k = \overline{0, n}$ якої відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Звичайно припускають, що вузли x_k , $k = \overline{0, n}$ визначені точно.

Якщо знехтувати похибками у значеннях функції $y = f(x)$, то за критерій узгодженості з нею апроксимуючої залежності $y = F(x)$ можна вибрати вимогу, щоб у всіх вузлах сітки обидві функції давали однакові результати: $F(x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$.

Такий спосіб наближення називають **інтерполяцією**, відповідну модель $y = F(x)$ – **інтерполяційною функцією**, а точки x_0, x_1, \dots, x_n – **вузлами інтерполяції**.

Якщо похибки задання вузлових значень функції $y = f(x)$ суттєві, то вимога обов'язкового збігу з ними відповідних значень моделі $y = F(x)$ втрачає сенс. Тоді апроксимуючу функцію $y = F(x)$ можна вибрати з умови, щоб **відхилення (нев'язки)** $f(x) - F(x)$ у вузлах сітки x_k , $k = \overline{0, n}$ були найменшими у певному розумінні. Маємо більш загальну постановку задачі апроксимації.

Якщо задача передбачає мінімізацію суми квадратів відхилень моделі $y = F(x)$ від вхідної функції $y = f(x)$ у всіх вузлах сітки: $\rho_2(f, F) = \sum_{k=0}^n (f(x_k) - F(x_k))^2 \rightarrow \min$, то говорять про **середньоквадратичну апроксимацію** (наближення за **методом найменших квадратів (МНК)**).

Як правило, апроксимуюча функція $y = F(x)$ будується у вигляді узагальненого полінома $F(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x)$, де $\{\varphi_i(x)\}$ – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій; a_0, a_1, \dots, a_m – невідомі коефіцієнти. Базисними системами $\{\varphi_i(x)\}$ найчастіше служать степеневі, тригонометричні, дробово-раціональні, експоненціальні, логарифмічні та інші функції.

2.3.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Для практики вельми важливим випадком є наближення функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом $P_n(x)$, що співпадає з $f(x)$ тільки на деякій системі точок $x_k \in [a; b]$, $k = \overline{0, n}$, а в інших точках $x \in [a; b]$ лише наближено дорівнює $f(x)$.

Нехай значення функції $y = f(x)$ задані в $n + 1$ різних точках $x_k \in [a; b]$, причому $a = x_0$, $b = x_n$, і $y_k = f(x_k)$ ($k = \overline{0, n}$).

Розглядається інтерполяційна задача: побудувати многочлен $P_n(x)$ (степеня не вище за n), значення якого в $n + 1$ різних точках x_0, x_1, \dots, x_n співпадали би зі значеннями в них функції $f(x)$:

$$P_n(x_k) = y_k, \text{ де } y_k = f(x_k), \text{ } k = \overline{0, n}.$$

Геометричний зміст: знайти такий многочлен $P_n(x)$, графік якого проходить через задані точки $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$, що лежать на графіку функції $y = f(x)$ (рис. 45).

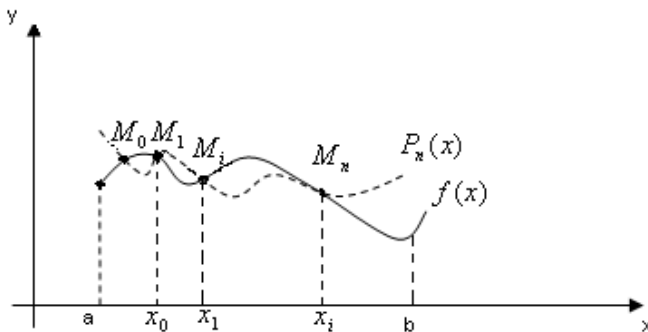


Рис. 45

Якщо інтерполяційний многочлен подати в стандартному вигляді $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, то невідомі коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_n можна знайти, розв'язуючи систему

$$a_0 + a_1 x_k + \dots + a_n x_k^n = y_k; \quad k = \overline{0, n}.$$

стандартними процедурами. Але така побудова цього єдиного многочлена $P_n(x)$ при великому числі вузлів інтерполяції викликає значні труднощі, оскільки вказана система має високий порядок.

Розглянемо побудову шуканого многочлена у формі так званого інтерполяційного полінома Лагранжа.

Нехай досліджувана функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$ своїми значеннями в $n+1$ (у загальному випадку, нерівновіддалених) вузлах $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ і $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$.

Наближену функцію $y = F(x)$ відшукуємо у вигляді інтерполяційного многочлена $F(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k P_{n,k}(x)$, де $P_{n,k}(x)$ – допоміжний поліном n -го степеня (*коефіцієнт Лагранжа*) такий, що

$$P_{n,k}(x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq j; \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Оскільки точки $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ є коренями многочлена $P_{n,k}(x)$, то його можна записати у формі

$$P_{n,k}(x) = A_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n).$$

Прийmemo $x = x_k$ і враховуючи, що $P_{n,k}(x_k) = 1$, дістанемо

$$1 = A_k (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n),$$

звідки $A_k = 1 / ((x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n))$.

Тоді коефіцієнт Лагранжа $P_{n,k}(x)$ набуває вигляду

$$P_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)},$$

а інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна подати у формі:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)},$$

яку називають **інтерполяційним многочленом (формулою) Лагранжа**.

Коефіцієнти Лагранжа $P_{n,k}(x)$ і відповідний інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна записати у стислому вигляді:

$$P_{n,k}(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = \overline{0, n}; \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Для $n = 1$ формула Лагранжа має вигляд

$$L_1(x) = y_0 (x - x_1)/(x_0 - x_1) + y_1 (x - x_0)/(x_1 - x_0)$$

і називається **лінійною інтерполяцією** за Лагранжем.

Для $n = 2$ отримаємо формулу **квадратичної інтерполяції** за Лагранжем:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Приклад. Для функції $y = f(x)$, що задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	0	0,5	1	2
y_k	1	2	3	4

побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.

□ Степінь многочлена Лагранжа при $n + 1$ вузлах дорівнює n . Для нашого прикладу $n = 3$, тобто многочлен Лагранжа має третій

порядок. Конкретизуємо формулу $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$:

$$L_3(x) = \frac{y_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \frac{y_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$L_3(x) = \frac{1 \cdot (x-0,5)(x-1)(x-2)}{(0-0,5)(0-1)(0-2)} + \frac{2 \cdot (x-0)(x-1)(x-2)}{(0,5-0)(0,5-1)(0,5-2)} + \frac{3 \cdot (x-0)(x-0,5)(x-2)}{(1-0)(1-0,5)(1-2)} + \frac{4 \cdot (x-0)(x-0,5)(x-1)}{(2-0)(2-0,5)(2-1)} =$$

$$= (31/3)x^3 - (63/2)x^2 + (139/6)x + 1. \blacksquare$$

Зауваження. Абсолютна похибка інтерполяції в середньому буде тим більша, чим ближче лежить точка x до лівого чи правого кінця відрізка $[a; b]$. Якщо ж використовувати інтерполяційний поліном для наближеного знаходження значення функції поза відрізком $[a; b]$ (для екстраполяції), то похибка зростає дуже суттєво.

2.3.3. Апроксимація за методом найменших квадратів

Наближення за методом найменших квадратів часто застосовують для згладжування табличних функцій, отриманих у результаті експерименту, а також для зменшення обсягу інформації про табличні функції при невисоких вимогах до точності подання їх значень.

Застосування інтерполяції в цьому випадку невіправдане, оскільки значення вхідної функції у вузлах $y_k = f(x_k)$ є неточними. Інтерполяційна формула повторить всі похибки в експериментальних даних. Крім того, збіг значень у вузлах не гарантує близькості характерів поведінки вхідної $y = f(x)$ та апроксимуючої $y = F(x)$ функцій.

Нехай вхідна функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$ для скінченної множини точок x_0, x_1, \dots, x_n . Припускаємо, що значення функції y_k , $k = \overline{0, n}$ відомі з похибками.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів у поширеному на практиці випадку лінійної за невідомими параметрами апроксимуючої функції $y = F(x)$. Нехай наближена функція подана у вигляді узагальненого многочлена $F(x) = \sum_{i=0}^m a_i \Phi_i(x)$, де

$\{\varphi_i(x)\}$ – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій; a_0, a_1, \dots, a_m – невідомі коефіцієнти.

Згідно з МНК оптимальні значення коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_m визначимо з умови, щоб сума квадратів відхилень (нев'язок) $\rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)$ значень $F(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ наближеної функції від відповідних значень $f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ вхідної функції – була мінімальною:

$$\begin{aligned} \rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m) &= \sum_{k=0}^n (f(x_k) - F(x_k))^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(f(x_k) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_k) \right)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

У випадку лінійно параметризованої моделі $y = F(x)$ сума $\rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)$ є квадратичною функцією відносно шуканих коефіцієнтів, що має єдиний екстремум – мінімум. Оскільки в точці мінімуму всі частинні похідні $\partial \rho_2 / \partial a_j$, $j = \overline{0, m}$ перетворюються в нуль, то, використовуючи цей факт – необхідні умови екстремуму, дістанемо систему рівнянь $(m + 1)$ -го порядку

$$\sum_{k=0}^n \left(f(x_k) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_k) \right) \varphi_j(x_k) = 0, \quad j = \overline{0, m}$$

або

$$\sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=0}^n \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) \right) a_i = \sum_{k=0}^n \varphi_j(x_k) f(x_k), \quad j = \overline{0, m}.$$

Точність апроксимації за МНК оцінюється на основі мінімального значення суми $\rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)$ або відповідного **середньоквадратичного відхилення** $\Delta y_s = \sqrt{\rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m) / (n + 1)}$.

Нехай за апроксимуючу функцію взято звичайний алгебраїчний многочлен m -го степеня

$$F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m.$$

Тоді після рівносильних перетворень система необхідних умов екстремуму відносно матриці-стовпця $X = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m)^T$ шуканих коефіцієнтів набуває стандартного вигляду $AX = B$:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k + \dots + a_m \sum_{k=0}^n x_k^m = \sum_{k=0}^n f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 + \dots + a_m \sum_{k=0}^n x_k^{m+1} = \sum_{k=0}^n x_k f(x_k); \\ \dots \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k^m + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^{m+1} + \dots + a_m \sum_{k=0}^n x_k^{2m} = \sum_{k=0}^n x_k^m f(x_k). \end{cases}$$

Елементи a_{ij} ($i, j = \overline{0, m}$) квадратної матриці системи A і компоненти b_i ($i = \overline{0, m}$) матриці-стовпця правих частин B обчислюються за формулами:

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^n x_k^{i+j} \quad (i, j = \overline{0, m}); \quad b_i = \sum_{k=0}^n x_k^i f(x_k). \quad (i = \overline{0, m}).$$

Після визначення коефіцієнтів і правих частин лінійну систему $AX = B$ можна розв'язати будь-яким стандартним методом.

Найпростішою (при $m=1$) є залежність $F(x) = a_0 + a_1x$ – **лінійна регресія**. Близькість експериментального розподілу точок $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$ до **лінії регресії** – прямої $y = a_0 + a_1x$ легко проглядається після їх побудови в одній прямокутній системі координат.

Для лінійної регресії $F(x) = a_0 + a_1x$ система необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень $\rho_2(a_0, a_1)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n x_k f(x_k). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо оптимальні МНК-оцінки коефіцієнтів a_0 і a_1 .

Приклад. Функція $f(x)$ задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ лінійною регресією $F(x) = a_0 + a_1x$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y = a_0 + a_1x$ на кінцях відрізка $[-3;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення Δ_y лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо лінійну апроксимацію $F(x) = a_0 + a_1x$. Проведемо попередні обчислення і заповнимо таблицю

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$x_k f(x_k)$
0	-3	-4,5	9	13,5
1	-1	2,5	1	-2,5
2	1	-2	1	-2
3	3	-1,5	9	-4,5
Σ	0	-5,5	20	4,5

Складемо і розв'яжемо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0(3+1) + a_1 \cdot 0 = -5,5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 20 = 4,5; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a_0 = -5,5; \\ 20a_1 = 4,5; \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = -1,375; \\ a_1 = 0,225. \end{cases}$$

Отже, $y = -1,375 + 0,225x$ – шукана лінійна регресія.

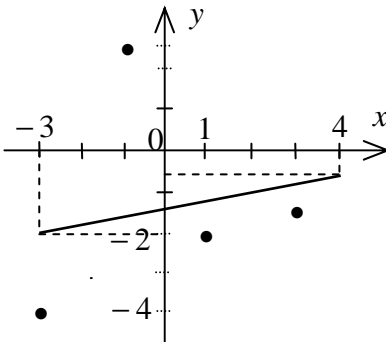


Рис. 46

x	-3	4
$y = a_0 + a_1x$	-2,05	-0,475

Обчислимо значення отриманої лінійної апроксимації та складемо відповідну таблицю і побудуємо графік – лінію регресії $y = -1,375 + 0,225x$ (рис. 46).

Знайдемо середньоквадратич-

не відхилення Δy_s :

$$\begin{aligned} \Delta y_s &= \sqrt{\frac{1}{n+1} \rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)} = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2} = \\ &= (1/2) \left((-4,5 + 2,05)^2 + (2,5 + 1,6)^2 + (-2 + 1,15)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (-1,5 + 0,7)^2 \right)^{1/2} = 2,4584. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.4. Чисельне диференціювання та інтегрування функцій

2.4.1. Чисельне диференціювання

При числовому розв'язуванні багатьох практичних задач часто виникає потреба в обчисленні похідних різних порядків функції $y = f(x)$, що задана таблично або складним аналітичним виразом, безпосередньо диференціювати який досить важко. У таких випадках застосовуються наближені методи диференціювання.

Нехай на сітці $\{x_k : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b\}$ (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком $h_k = x_k - x_{k-1} = \text{var}$, $k = \overline{1, n}$) у всіх вузлах x_k , $k = \overline{0, n}$ відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Необхідно обчислити похідну $f^{(m)}(x_*)$ у точці $x_* \in [a; b]$ та оцінити абсолютну похибку Δ .

Знайдемо наближення $f(x) \approx F(x)$, тобто подамо вхідну функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = F(x) + R(x)$, де за апроксимуючу функцію $F(x)$ можна взяти, наприклад, часткову суму ряду Тейлора чи інтерполяційний многочлен, а остаточний член $R(x)$ визначає похибку апроксимації.

Продиференціюємо останню рівність m разів, покладемо $x = x_*$ і дістанемо $f^{(m)}(x_*) = F^{(m)}(x_*) + R^{(m)}(x_*)$, тобто $f^{(m)}(x_*) \approx F^{(m)}(x_*)$. Величина $R^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - F^{(m)}(x)$, що характеризує відхилення наближеного значення похідної від точного, називається *похибкою апроксимації похідної*.

Нехай сітка має сталий крок $h = x_k - x_{k-1} = const$. Тоді похибка $R^{(m)}$ залежить від h і її записують у вигляді $R^{(m)} = O(h^r)$ (тобто $|R^{(m)}| < Ch^r$, де $C > 0$ і C не залежить від h). Показник степеня r називається *порядком похибки апроксимації* похідної (*порядком точності апроксимації*).

Розглянемо побудову наближених формул для $f'(x)$ за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа з рівномірним розміщенням вузлів.

Запишемо інтерполяцію многочленом Лагранжа другого порядку (за *шаблоном* з трьох вузлів x_{k-1} , x_k і x_{k+1})

$$L_2(x) = ((x - x_k)(x - x_{k+1})y_{k-1} - 2(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})y_k + (x - x_{k-1})(x - x_k)y_{k+1}) / (2h^2)$$

з залишковим членом

$$R_2(x) = f(x) - L_2(x) = (1/3!)f'''(c(x))(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1}).$$

$$\text{Тоді } f'(x) = L'_2(x) + R'_2(x) = ((2x - x_k - x_{k+1})y_{k-1} - 2(2x - x_{k-1} - x_{k+1})y_k + (2x - x_{k-1} - x_k)y_{k+1}) / (2h^2) + R'_2(x);$$

$$R'_2(x) = (1/3!)f'''(c(x))(3x^2 - 2(x_{k-1} + x_k + x_{k+1})x + x_{k-1}x_k + x_kx_{k+1} + x_{k-1}x_{k+1})$$

Як правило, формули чисельного диференціювання застосовують для обчислення похідних у вузлах x_k , $k = \overline{0, n}$. Підставляючи в одержані вирази послідовно значення x_{k-1} , x_k і x_{k+1} , дістанемо:

$$f'(x_{k-1}) = (-3y_{k-1} + 4y_k - y_{k+1}) / (2h) + (h^2/3)f'''(c_{k-1});$$

$$f'(x_k) = (-y_{k-1} + y_{k+1}) / (2h) - (h^2/6)f'''(c_k);$$

$$f'(x_{k+1}) = (y_{k-1} - 4y_k + 3y_{k+1}) / (2h) + (h^2/3)f'''(c_{k+1}),$$

де останні доданки відображають похибку апроксимації похідної; c_{k-1} , c_k і c_{k+1} – деякі невідомі точки з інтервалу $(x_{k-1}; x_{k+1})$.

Зауваження. При непарному числі вузлів інтерполяції та парному степені поліному Лагранжа найбільш прості вирази і найменші коефіцієнти у залишкових членах одержуються для похідної у центральному вузлі. Указані співвідношення є *апроксимаціями похідної за допомогою центральних різниць*.

Порядок точності скінченно-різницевої апроксимації похідної зростає зі збільшенням числа вузлів, за якими вони будуються.

Можна оцінити абсолютну похибку апроксимації похідної й уточнити наближене значення останньої, не змінюючи шаблону, якщо застосувати *метод Рунге (метод подвоєння кроку)*.

Нехай $f'(x)$ – похідна, наближене значення якої треба знайти; $F'(x, h)$ – її скінченно-різницева апроксимація на рівномірній сітці з кроком h , що має r -й порядок точності; $R'(x, h)$ – похибка апроксимації. Тоді маємо *першу формулу Рунге*

$$\Delta_1 \approx |F'(x, h) - F'(x, 2h)| / (2^r - 1)$$

і *другу формулу Рунге*

$$f'(x) = F'(x, h) + (F'(x, h) - F'(x, 2h)) / (2^r - 1) + O(h^{r+1}),$$

що дозволяють за двома наближеннями похідної з кроками h і $2h$ з r -м порядком точності оцінити абсолютну похибку апроксимації та знайти уточнене значення цієї похідної з підвищеним порядком точності $r + 1$.

Приклад. Функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$, де $a = 1$ і $b = 3,1$, наступною таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ ($n = 7$) у рівновіддалених вузлах з кроком $h = (b - a) / n = 0,3$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
y_k	-1,15	-1,5	-1,6	-1,8	-1,7	-1,75	-2,05	-2,3

Знайти наближене значення $f'(x_3)$ похідної $f'(x)$ у вузлі $x_3 = 1,9$ за формулою $f'(x_k) \approx F'(x_k, h) = (-y_{k-1} + y_{k+1}) / (2h)$, що має порядок точності $r = 2$: $R'(x_k, h) = -(h^2 / 6) f'''(c_k)$, з кро-

ком $h = 0,3$. Користуючись методом Рунге, оцінити абсолютну похибку Δ_1 апроксимації та уточнити значення похідної $f'(x_3)$.

Вказівка. Похибками у вхідних даних і похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до трьох десяткових знаків після коми.

□ При кроці $h = 0,3$ маємо:

$$f'(x_3) \approx F'(x_3, h) = (-y_2 + y_4)/(2h) = -0,167.$$

Згідно з методом Рунге обчислимо наближене значення $f'(x_3)$ за тією ж формулою при подвоєному кроці $2h = 0,6$:

$$f'(x_3) \approx F'(x_3, 2h) = (-y_1 + y_5)/(4h) = -0,208.$$

Далі знайдемо оцінку абсолютної похибки Δ_1 і уточнене значення похідної:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |R'(x_k, h)| \approx \left| (F'(x_3, h) - F'(x_3, 2h)) / (2^r - 1) \right| = \\ &= \left| (-0,167 + 0,208) / (2^2 - 1) \right| = 0,014; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_3) &\approx F'(x_3, h) + (F'(x_3, h) - F'(x_3, 2h)) / (2^r - 1) = \\ &= -0,167 + 0,014 = -0,153. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.4.2. Чисельне інтегрування функцій. Основні поняття

При математичному моделюванні різноманітних процесів час-то виникає потреба в наближених обчисленнях визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x) dx$, якщо: а) підінтегральна функція $f(x)$ задана графічно, таблично чи іншим неаналітичним способом; б) первісна $F(x)$ не є елементарною функцією; в) первісна $F(x)$ хоч і є елементарною функцією, але знаходження її значень досить громіздке.

Нехай необхідно знайти наближене значення $I_n(f)$ визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x) dx$, де $f(x)$ – задана функція.

В основі **чисельних наближених методів** розв'язування цієї

задачі лежить подання визначеного інтеграла як границі інтегральної суми

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) h_k,$$

де $h_k = x_k - x_{k-1} = \text{var}$ – нерівномірний крок сітки (розбиття) $\omega_n = \{x_k : a = x_0 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$; $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1, n}$, причому точки x_k і ξ_k вибираються довільно.

Якщо наближення $I_n(f)$ до інтеграла $I(f)$ будувати у вигляді аналогічної суми, тобто лінійної комбінації скінченного числа значень підінтегральної функції $f(x)$, то дістанемо **квадратурну формулу** $I(f) \approx I_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$, де x_k , $k = \overline{0, n}$ – **вузли**; c_k , $k = \overline{0, n}$ – **ваги (коефіцієнти)**.

Методи **чисельного інтегрування** різняться способами вибору вузлів x_k і ваг c_k , $k = \overline{0, n}$, а також наближень для значень підінтегральної функції у вузлах $f(x_k)$. Вибрані значення повинні, поперше, мінімізувати (у певному сенсі) **похибку (залишковий член)** $R_n(f) = I(f) - I_n(f)$ квадратурної формули, а по-друге, забезпечити достатню швидкість збіжності обчислювальної процедури.

Нехай вузли утворюють сітку Δ_n зі сталим кроком h . Тоді похибка $R_n(f)$ залежить від h і її можна подати у вигляді $R_n(f) = O(h^r)$, тобто $|R_n(f)| < Ch^r$, де $C > 0$ і C не залежить від h . Показник степеня r називається **порядком точності за кроком h** квадратурної формули. Квадратурна формула повинна бути такою, щоб для довільної інтегрованої на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ наближене значення $I_n(f)$ інтеграла збіглося до його точного $I(f)$. Тобто, щоб виконувалася умова $r > 0$.

Далі розглянемо найбільш прості квадратурні формули, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції $f(x) \geq 0$ мають ясний геометричний зміст – наближене обчислення площі $S = \int_a^b f(x) dx$

відповідної криволінійної трапеції при рівномірному розбитті відрізка $[a; b]$, $a < b$ зі сталим **кроком** $\Delta x_i = h = (b - a) / n$, $i = \overline{1, n}$.

2.4.3. Метод прямокутників

Нехай треба наближено обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де функція $f(x)$ невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$ (рис. 47).

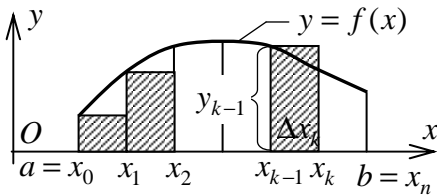


Рис. 47

Будемо спиратися на геометричний зміст інтеграла:

$\int_a^b f(x) dx = S$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних частин з кроком $h = (b - a) / n$ точками $x_0 = a$, $x_k = x_{k-1} + h$,

$k = \overline{1, n}$. Кожну k -у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо прямокутником з основою $\Delta x_k = h$ і висотою $y_{k-1} = f(x_{k-1})$, що є значенням функції $y = f(x)$ у крайній лівій точці елементарного відрізка $[x_{k-1}; x_k]$. Площа цього прямокутника $\Delta S_k = y_{k-1} h$. Тоді площа S всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n y_{k-1} h = h \sum_{k=1}^n y_{k-1}.$$

Маємо **формулу лівих прямокутників** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = ((b - a) / n)(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n, \text{ де } R_n \text{ - похибка.}$$

Якщо за висоти частинних прямокутників узяти значення функції $y = f(x)$ у крайніх правих точках елементарних відрізків $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1, n}$, то дістанемо **формулу правих прямокутників**:

$$\int_a^b f(x) dx = ((b - a) / n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + R_n, \text{ де } R_n \text{ - похибка.}$$

Якщо похідна $f'(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\Delta_n = |R_n| \leq \Delta_n^* = ((b-a)^2 / (2n)) M_1,$$

де $M_1 = \max_{x \in [a;b]} |f'(x)|$. Тобто, формули прямокутників характеризуються першим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 1$.

2.4.4. Метод трапецій

Як і в попередньому пункті, розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин. Сполучимо відрізком кінці кожної частинної дуги даної лінії $y = f(x)$, як показано на рис. 48.

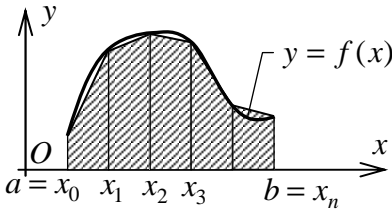


Рис. 48

Кожну k -у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо звичайною трапецією з висотою $\Delta x_k = h$ і основами $y_{k-1} = f(x_{k-1})$ та $y_k = f(x_k)$, що має площу $\Delta S_k = (y_{k-1} + y_k)h/2$.

Тоді площа S всієї криволінійної трапеції

$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k)h/2 = h \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k)/2.$$

Дістаємо **формулу трапецій** для наближеного обчислення вказаного інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = ((b-a)/n) \cdot (y_0/2 + y_1 + \dots + y_{n-1} + y_n/2) + R_n,$$

де R_n – похибка.

Якщо друга похідна $f''(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтег-

рала за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\Delta_n = |R_n| \leq \Delta_n^* = ((b-a)^3 / (12n^2)) M_2,$$

де $M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$. Тобто, формула трапецій характеризується

другим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 2$.

2.4.5. Метод Симпсона (парабол)

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на парне число $n = 2m$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n$ точками $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_{2i-1} = x_{2i-2} + h$, $x_{2i} = x_{2i-1} + h$, ..., $x_n = b$, $i = \overline{1, m}$.

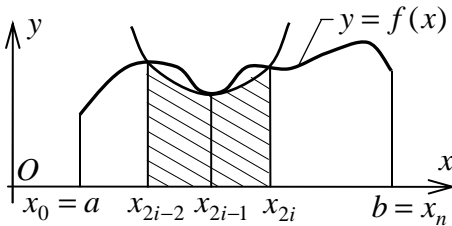


Рис. 49

Як показано на рис. 49, дві сусідні елементарні криволінійні трапеції, що спираються на спарені відрізки $[x_{2i-2}; x_{2i-1}]$ і $[x_{2i-1}; x_{2i}]$, наближено замінимо однією криволінійною трапецією, обмеженою зверху дугою вертикальної параболі

$y = A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i$. Ця парабола проходить через три верхні вершини даних частинних трапецій, що породжує лінійну алгебраїчну систему, з якої однозначно знаходяться невідомі коефіцієнти A_i , B_i , C_i :

$$A_i = (y_{2i-2} - 2y_{2i-1} + y_{2i}) / (2h^2); \quad B_i = (y_{2i} - y_{2i-2}) / (2h);$$

$$C_i = y_{2i-1}.$$

Тоді площа ΔS_{pi} елементарної параболічної трапеції:

$$\Delta S_{pi} = \int_{-h}^h (A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i) dx = (h/3) \times$$

$$\times (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

Підсумовуючи ΔS_{pi} за всіма $i = \overline{1, m}$, дістаємо наближений вираз для площі S всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^m \Delta S_{pi} = \sum_{i=1}^m (h/3)(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

Маємо **формулу Симпсона (формулу парабол)** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = ((b-a)/(3n)) \cdot (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})) + R_n,$$

де R_n – похибка.

Якщо на відрізку $[a; b]$ існує обмежена четверта похідна $f^{IV}(x)$, то істинна абсолютна похибка $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою Δ_n^* так:

$$\Delta_n = |R_n| \leq \Delta_n^* = ((b-a)^5 / (180n^4)) M_4, \text{ де } M_4 = \max_{x \in [a; b]} |f^{IV}(x)|.$$

Тобто, формула Симпсона характеризується четвертим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 4$.

Зауваження 1. Усі розглянуті формули тим точніші, чим густіше розбиття: $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При одному й тому ж значенні n формула Симпсона – найбільш точна з них. У загальному випадку, ефективність тієї чи іншої квадратурної формули залежить від поведінки функції $f(x)$ та її похідних на відрізку інтегрування.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx$, застосовуючи при $n = 4$ формули: а) лівих прямокутників, б) трапецій, в) Симпсона. Оцінити допущені абсолютні похибки. Обчислення проводити з округленням до п'ятого десяткового знака після коми. Одержані результати порівняти з точним значенням інтеграла, обчисленим за формулою Ньютона – Лейбни-

ця: $I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0,40547$.

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n=4$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0,25$, ..., $x_4 = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, \dots, y_4 підінтегральної функції $y = 1/(x+2)$, що відповідають указаним точкам, і запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,25	0,5	0,75	1
y_k	0,5	0,44444	0,4	0,36364	0,33333

а) Знайдемо значення інтеграла за допомогою формули лівих прямокутників:

$$I_n \approx ((b-a)/4)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = ((1-0)/4) \times \\ \times (0,5 + 0,44444 + 0,4 + 0,36364) = 1,70808/4 \approx 0,42702.$$

Знайдемо і порівняємо граничну Δ_n^* та істинну $\Delta_n = |I - I_n|$ абсолютні похибки.

Щоб обчислити граничну абсолютну похибку Δ_n^* , знайдемо похідну підінтегральної функції: $y' = -1/(x+2)^2$. Найбільше за модулем значення цієї похідної на відрізку $[0;1]$ дорівнює $M_1 = |y'(0)| = 0,25$. Тоді $\Delta_n^* = ((1-0)^2 / (2 \cdot 4)) \cdot 0,25 \approx 0,03125$.

Істинна абсолютна похибка $\Delta_n = |0,40547 - 0,42702| \approx 0,02155$. Можемо перекоонатися, що істинна похибка не перевищує граничної: $\Delta_n = 0,02155 < 0,03125 = \Delta_n^*$.

б) Обчислимо наближене значення інтеграла за формулою трапецій:

$$I_n \approx ((b-a)/4) \cdot (y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) = ((1-0)/4) \times \\ \times (0,5/2 + 0,44444 + 0,4 + 0,36364 + 0,33333/2) \approx 0,40619.$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і

порівняємо їх:

$$y''(x) = 6/(x+2)^4; \quad M_2 = |y''(0)| = 0,25;$$

$$\Delta_n^* = ((1-0)^3 / (12 \cdot 4^2)) \cdot 0,25 \approx 0,0013;$$

$$\Delta_n = |0,40547 - 0,40619| \approx 0,00072; \quad \Delta_n < \Delta_n^*.$$

в) Обчислимо наближене значення визначеного інтеграла за формулою Симпсона:

$$\begin{aligned} I_n &\approx ((b-a)/(3 \cdot 4)) \cdot (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = \\ &= ((1-0)/(3 \cdot 4)) \cdot (0,5 + 0,33333 + 4 \cdot (0,44444 + \\ &\quad + 0,36364) + 2 \cdot 0,4) = 4,86565/12 \approx 0,40547 \end{aligned}$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y^{IV} = 24/(x+2)^5; \quad M_4 = |y^{IV}(0)| = 0,75;$$

$$\Delta_n^* = ((1-0)^5 / (180 \cdot 4^4)) \cdot 0,75 \approx 0,00002;$$

$$\Delta_0 = |0,40547 - 0,40547| \approx 0,00000; \quad \Delta_n < \Delta_n^*. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. В аналітичні вирази оцінки похибки розглянутих квадратурних формул входять величини $M_r = \max_{x \in [a; b]} |f^{(r)}(x)|$ ($r = 1$ – для формул лівих і правих прямокутників, $r = 2$ – для формули трапецій, $r = 4$ – для формули Симпсона), знаходження яких нерідко приводить до громіздких обчислень або взагалі неможливе. Тоді можна скористатися методом Рунге (методом подвоєння кроку). Згідно з ним обчислюють інтеграл I за вибраною квадратурною формулою два рази: спочатку з кроком $2h$, потім з кроком h , тобто подвоюють число n . Як результат отримують два значення інтеграла I_{2h} та I_h . Для оцінки граничної абсолютної похибки використовують першу формулу Рунге $\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^r - 1)$. За другою формулою Рунге знаходять уточнене значення інтеграла $I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^r - 1)$.

Приклад 2. Знайти наближено за формулою Симпсона визна-

чений інтеграл $I = \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2}$, поклавши $n = 8$. Оцінити граничну аб-

солютну похибку Δ_h^* одержаного наближення I_h , користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку). За цим же методом знайти уточнене наближене значення інтеграла I_{ym} . Обчислити абсолютну похибку Δ_{ym} цього наближення I_{ym} , одержавши точне значення інтеграла I за формулою Ньютона – Лейбниця.

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до сьомого десяткового знака після коми.

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 8$ рівних частин з кроком $h = (b - a)/n = (1 - 0)/8 = 0,125$ точками x_k , $k = \overline{0, n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ підінтегральної функції $f(x)$. Запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,125	0,25	0,375	0,5
y_k	0,0000000	0,2461538	0,4705882	0,6575342	0,8000000

k	5	6	7	8
x_k	0,625	0,75	0,875	1
y_k	0,8988764	0,9600000	0,9911504	1,0000000

Далі за формулою парабол при кроці $h = 0,125$ дістанемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h} :

$$\begin{aligned}
 I_h &= (h/3) \cdot (y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)) = \\
 &= (0,125/3) \cdot (0 + 1 + 4(0,2461538 + 0,6575342 + 0,8988764 + \\
 &\quad + 0,9911504 + 2(0,4705882 + 0,8 + 0,96)) = 0,6931682 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{2h} &= (2h/3) \cdot (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = (2 \cdot 0,125/3) \cdot (0 + \\
 &\quad + 1 + 4(0,4705882 + 0,96) + 2 \cdot 0,8) = 0,6935294 .
 \end{aligned}$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \frac{|I_h - I_{2h}|}{2^r - 1} = \frac{|0,6931682 - 0,6935294|}{2^4 - 1} = 0,0000241.$$

Оскільки $\Delta_h^* \approx 0,0000241 < 0,5 \cdot 10^{-4}$, то значення I_h повинно бути вірним до четвертого знака після коми.

Знайдемо уточнене значення інтеграла I_{ym} за другою формулою Рунге:

$$I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^r - 1) = 0,6931682 + (0,6931682 - 0,6935294) / (2^4 - 1) = 0,6931441.$$

За формулою Ньютона – Лейбниця обчислимо точне значення інтеграла I :

$$I = \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2} = \left| u = 1+x^2; du = 2x dx; u_1 = 1; u_2 = 2 \right| = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln |u| \Big|_1^2 = \ln 2 = 0,6931472.$$

$$\text{Тоді } \Delta_{ym} = |I - I_{ym}| = |0,6931472 - 0,6931441| = 0,0000031. \blacksquare$$

2.5. Чисельні методи розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

2.5.1. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

Нехай *звичайне диференціальне рівняння першого порядку* $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ можна подати у *нормальній формі*

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Його *розв’язком* є диференційовна функція $y(x)$, що при підстановці в рівняння перетворює його у вірну тотожність. На рис. 50 наведено графік розв’язку диференціального рівняння, який називається *інтегральною кривою*.

Геометричною інтерпретацією похідної $y'(x)$ у кожній точці

(x, y) є тангенс кута α нахилу дотичної до інтегральної кривої, що проходить через цю точку, тобто: $k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ (рис. 50).

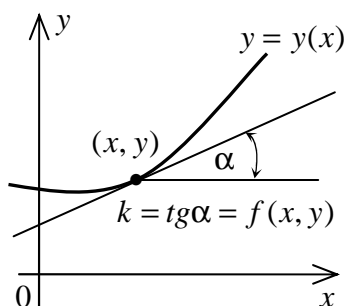


Рис. 50

Рівняння $y'(x) = f(x, y(x))$ має цілу сім'ю розв'язків – **загальний розв'язок** $y = y(x, C)$, де C – довільна стала. При конкретному значенні C із загального розв'язку одержуємо **частинний розв'язок**. Щоб виділити один певний частинний розв'язок, диференціальне рівняння найчастіше доповнюють **початковою умовою** $y(x_0) = y_0$, де x_0 – задане **початкове значення аргументу**, а y_0

– відповідно задане **початкове значення функції**.

Задача Коші полягає у тому, щоб відшукати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівнянню $y'(x) = f(x, y(x))$ і початковій умові $y(x_0) = y_0$. Геометричний зміст цієї задачі: знайти інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$. Звичайно визначають розв'язок задачі Коші на відрізку, який розташований праворуч від початкового значення x_0 , тобто для $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$.

Теорема. Нехай права частина $f(x, y)$ диференціального рівняння $y'(x) = f(x, y(x))$ визначена і неперервна при $x_0 \leq x \leq X$, $-\infty < y < +\infty$ і задовольняє умові $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, де L – деяка стала, а y_1, y_2 – довільні значення. Тоді для кожного початкового значення y_0 існує єдиний розв'язок $y(x)$ задачі Коші для $x \in [x_0, X]$.

Приклад. Розв'язати аналітично задачу Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = x/y^2$, який задовольняє заданій початковій умові $y(0) = 1$. Обчислити значення

$y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку $y(x)$ на відрізку $[0;1]$ у рівновіддалених вузлах $x_k = x_{k-1} + h$; $x_0 = 0$; $k = 1, 2, \dots, n$; $n = 10$ зі сталим кроком $h = 0,1$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік аналітичного розв'язку $y = y(x)$.

□ Розв'яжемо задану задачу Коші аналітично. Дане рівняння допускає відокремлення змінних: $y^2 dy = x dx$. Далі проінтегруємо ліву і праву частини: $y^3/3 = x^2/2 + C/3$. Звідси дістанемо $y = \sqrt[3]{1,5x^2 + C}$ – загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Підставимо у нього початкову умову $y(0) = 1$: $1 = \sqrt[3]{C}$ $\Rightarrow C = 1$. Тоді $y = \sqrt[3]{1,5x^2 + 1}$ – шуканий частинний розв'язок.

Обчислимо значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку $y(x)$ на відрізку $[0;1]$ у рівновіддалених вузлах з кроком $h = 0,1$ і складемо відповідну таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y(x_k)$	1	1,005	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(x_k)$	1,1548	1,2016	1,2515	1,3035	1,3572

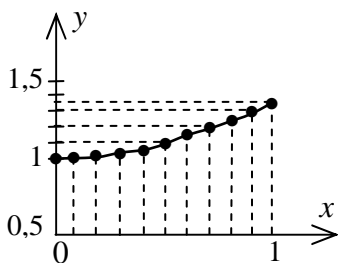


Рис. 51

Побудуємо інтегральну криву – графік аналітичного розв'язку $y = y(x)$ (рис. 51), сполучивши послідовні точки плавною лінією. ■

Зауваження 2. Досі невідомі загальні методи точного аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь. Тому до більшості з них застосовні тільки наближені методи.

2.5.2. Метод послідовних наближень.

Поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші

Метод послідовних наближень (метод Пікара) відноситься до **наближених аналітичних способів** розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. За цим методом здійснюється перехід до еквівалентно-

го **інтегрального рівняння** $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, яке розв'язується за допомогою послідовних наближень аналогічно методу простих ітерацій розв'язування скінченних рівнянь.

Шуканий розв'язок $y(x)$ знаходиться як границя послідовності функцій $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x),$$

де $y_0(x) = y_0$; $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$; $y_2(x) = y_0 +$

$$+ \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt; \dots; y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt.$$

Абсолютна похибка $\Delta_n = |R_n(x)| = |y(x) - y_n(x)|$ оцінюється за співвідношенням $\Delta_n \leq \Delta_n^* = M(KC)^n / (K n!)$, де $|\partial f / \partial y| \leq K$; $|f(x, y)| \leq M$; $|x - x_0| \leq A$; $|y - y_0| \leq B$; $C = \min\{A, B/M\}$.

Приклад. Методом Пікара знайти друге наближення $y_2(x)$ до розв'язку задачі Коші: $y' = x/y^2$, $y(0) = 1$.

□ За умовою $y_0(x) = 1$. Далі за методом Пікара знаходимо:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t/1^2) dt = 1 + (t^2/2) \Big|_0^x = 1 + x^2/2;$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(t / (1 + t^2/2)^2 \right) dt = \left| u = 1 + t^2/2; du = t dt; u_1 = 1; \right.$$

$$\left. u_2 = 1 + \frac{x^2}{2} \right| = 1 + \int_1^{1+x^2/2} u^{-2} du = 1 - u^{-1} \Big|_1^{1+x^2/2} = \frac{2(1+x^2)}{2+x^2}. \blacksquare$$

Зауваження 1. Із-за складності обчислень метод Пікара засто-

совується для знаходження лише декількох перших наближень.

Навіть для простих диференціальних рівнянь першого порядку не завжди можна отримати аналітичний розв'язок. Тому значне застосування мають чисельні методи розв'язування, що дозволяють визначити наближені значення шуканого розв'язку $y(x)$ на відрізьку $[x_0, X]$ у **вузлах** x_k , $k = 0, 1, \dots, n$ деякої одновимірної **сітки** $\omega_n = \{x_k : x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = X\}$ з нерівномірним, у загальному випадку, **кроком** $h_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$. При цьому **наближений розв'язок** отримують у вигляді **сіткової функції** y_k , $k = 0, 1, \dots, n$, що задається таблицею, в якій кожному вузлу x_k сітки ω_n відповідає наближене значення розв'язку $y_k \approx y(x_k)$.

Чисельні методи розв'язування задачі Коші діляться на: **однокрокові** та **багатокрокові**, **явні** та **неявні**.

Однокроковий метод використовує дані про розв'язок $y(x)$ тільки в одній попередній точці. Проте деякі з них передбачають обчислення значень правої частини $f(x, y)$ у проміжних точках.

А **m -кроковий метод** для обчислення поточного значення розв'язку y_k потребує даних про розв'язок у m попередніх точках x_{k-i} , $i = 1, 2, \dots, m$, $m \geq 1$.

В **явних методах** поточне значення розв'язку виражається в явній формі і знаходиться безпосередньо через його відомі значення на попередніх кроках за допомогою скінченного числа операцій. (Ці методи не потребують ітерацій).

У **неявних методах** знаходження поточного значення розв'язку зводиться до наближеного розв'язування скінченного рівняння. Звичайно, для цього застосовують метод простих ітерацій або метод Ньютона.

Нехай $y(x)$ – точний розв'язок задачі Коші, а y_k , $k = 0, 1, \dots, n$ – її наближений чисельний розв'язок. **Глобальною похибкою** (або просто **похибкою**) чисельного методу називають сіткову функцію $R_k = y(x_k) - y_k$, $k = \overline{0, n}$, задану у вузлах x_k сітки ω_n , $k = \overline{0, n}$. За **абсолютну похибку** приймають величину $\Delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} |R_k|$.

Локальною похибкою на k -му кроці **однокрокового методу** називають

вають $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де \tilde{y}_k – чисельний розв’язок, отриманий при умові, що за наближення y_{k-1} до розв’язку на попередньому кроці взято його точне значення: $y_{k-1} = y(x_{k-1})$. **Локальною похибкою** на k -му кроці ***m -крокового методу*** називають величину $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де \tilde{y}_k – чисельний розв’язок, одержаний при умові, що за наближення y_{k-i} , $i = \overline{1, m}$ до розв’язку на m попередніх кроках взято його точні значення: $y_{k-i} = y(x_{k-i})$, $i = \overline{1, m}$.

Для оцінки якості наближення на відрізку $[x_0; x_n]$ також використовується ***середньоквадратичне відхилення*** σ_n наближених значень y_k розв’язку від точних $y(x_k)$, яке обчислюється за формулою

$$\sigma_n = \sqrt{(1/n) \sum_{k=1}^n (y(x_k) - y_k)^2}.$$

Чисельний метод має ***r -й порядок точності*** ($r > 0$), якщо для абсолютної похибки Δ_n справджується оцінка $\Delta_n \leq Ch^r$, де C – деяка додатна стала.

Зауваження 2. Похибка наближеного розв’язку тим чи іншим чисельним методом виражається через похідні шуканого розв’язку, які наперед невідомі. Крім того, попередні оцінки похибки, як правило, є сильно завищеними. Тому на практиці у випадку рівномірної сітки двічі проводять розрахунки за однією й тією ж схемою r -го порядку точності при кроках h і $2h$. Як результат отримують відповідно два наближення $y(x, h)$ і $y(x, 2h)$ до точного розв’язку $y(x)$. Використовуючи першу формулу Рунге, для оцінки граничної абсолютної похибки Δ_n^* наближеного розв’язку $y(x, h)$ на густішій сітці можна дістати співвідношення

$$\Delta_n^* \approx \left(\frac{1}{2^r - 1} \right) \max_x |y(x, h) - y(x, 2h)|,$$

де максимум береться за всіма співпадаючими вузлами x обох сіток. Часто застосовують також більш грубу оцінку

$$\Delta_n^* \approx \max_x |y(x, h) - y(x, 2h)|.$$

2.5.3. Явний метод Ейлера

Явний однокроковий метод Ейлера є найпростішим чисельним методом розв'язування задачі Коші. Він досить грубий і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень розв'язку.

Нехай треба розв'язати задачу Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на відрізку $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$. Візьмемо сталий крок $h = (X - x_0)/n$ і побудуємо рівномірну сітку з вузлами $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

У кожному вузлі x_{k-1} , $k = 1, \dots, n$ замінимо похідну y' скінченною різницею вперед $y'_{k-1} \approx (y_k - y_{k-1})/h$, а праву частину $f(x, y)$ обчислимо в точці (x_{k-1}, y_{k-1}) . Тоді на кожному елементарному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ дістанемо наближену рівність

$$(y_k - y_{k-1})/h = f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Звідси отримаємо $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$ ($k = 1, \dots, n$) – **різницеве рівняння**, що служить наближенням даного диференціального рівняння з локальною похибкою другого порядку: $l_k = O(h^2)$. Абсолютна похибка має перший порядок: $\Delta_n = O(h)$.

Додаючи початкову умову $y_0 = y(x_0)$, одержимо **різницеву задачу Коші**, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Таким чином, метод Ейлера задається розрахунковими формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n$$

і забезпечує перший порядок точності ($r = 1$).

Геометрична інтерпретація: якщо кожному парі сусідніх точок $M_{k-1}(x_{k-1}; y_{k-1})$ і $M_k(x_k; y_k)$, $k = 1, \dots, n$ сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, наближено замінюється **ламанною Ейлера** $M_0M_1M_2\dots M_n$. Кожна ланка $M_{k-1}M_k$ цієї ламаної має напрям, який співпадає з напрямом дотичної в точці M_{k-1} до тієї інтегральної

ної кривої, що проходить через цю точку.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0,1$ методом Ейлера і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$. За формулою Рунге оцінити граничну абсолютну похибку Δ_n^* .

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Проведемо обчислення за методом Ейлера й одержані значення запишемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1	1,01	1,0296	1,0579	1,0936
$f(x_k, y_k)$	0	0,1	0,1961	0,283	0,3574	0,4181
k	6	7	8	9	10	
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
y_k	1,1354	1,1819	1,2320	1,2847	1,3392	
$f(x_k, y_k)$	0,4654	0,5011	0,5271	0,5453	–	

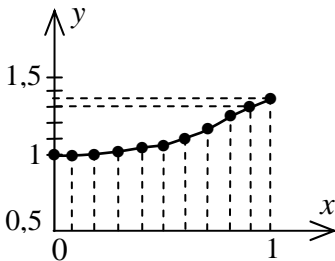


Рис. 52

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 52), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0,0167$.

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0,2$ (зробіть це самостійно), за формулою

Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки:

$$\Delta_n^* \approx \left(1/(2^1 - 1)\right) \max \{|1,01 - 1|, |1,0579 - 1,04|, |1,1354 - 1,114|, |1,232 - 1,2107|, |1,3392 - 1,3199|\} \approx 0,02. \blacksquare$$

2.5.4. Явний метод Рунге – Кутта

Серед методів високої точності одним з найпоширеніших є *метод Рунге – Кутта*. Він базується на розвиненні шуканого розв'язку $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_k$ до членів r -го порядку включно. Розрахункові формули *явного однокрокового методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності* ($r = 4$) для випадку сталого кроку інтегрування мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6; \\ K_1 &= h f(x_{k-1}, y_{k-1}); \quad K_2 = h f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2); \\ K_3 &= h f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2); \\ K_4 &= h f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Зауваження 1. Метод Рунге – Кутта легко реалізувати, проте він потребує додаткових обчислень правих частин $f(x, y)$ у проміжних точках інтервалу $[x_{k-1}, x_k]$.

Зауваження 2. Метод Ейлера можна розглядати як окремий простий варіант методу Рунге – Кутта.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h = 0,1$ методом Рунге–Кутта четвертого порядку точності та побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) Проведемо обчислення за методом Рунге – Кутта й одержані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
K_1	–	0,0000	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347
K_2	–	0,0050	0,0147	0,0236	0,0313	0,0378
K_3	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
K_4	–	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347	0,0404
Δy_k	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
K_1	0,0404	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530
K_2	0,0429	0,0469	0,0499	0,0521	0,0537
K_3	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
K_4	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530	0,0543
Δy_k	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
y_k	1,1548	1,2016	1,2515	1,3036	1,3573

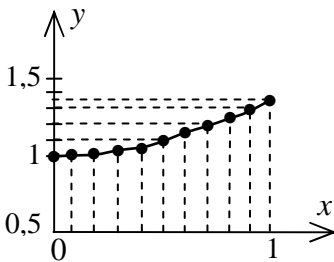


Рис. 53

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 53), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0,0000$. ■

2.5.5. Явний чотирикроковий метод Адамса

Якщо в диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ підставити його частинний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, то одержимо вірну тотожність $y' = f(x, y(x))$, де права частина є складеною функцією x : $F(x) = f(x, y(x))$. Для екстраполяції справа в околі кожного вузла x_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ рівномірної сітки зі сталим кроком h наближено замінимо цю функцію $F(x) = f(x, y(x))$ інтерполяційним многочленом третього порядку, а потім проінтегруємо одержану наближену тотожність на кожному елементарному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$. У результаті після зведення подібних членів отримаємо розрахункові формули **явного чотирикрокового методу Адамса**

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k; \quad \Delta y_k = (h/24)(55f(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59 \times \\ \times f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37f(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9f(x_{k-4}, y_{k-4})), \quad k = 4, 5, \dots,$$

що має четвертий порядок точності.

Зауваження. Метод Адамса порівняно з методом Рунге – Кутта тієї ж точності є більш економічним, оскільки на кожному кроці потрібно обчислювати лише одне значення правої частини, а не чотири. Проте цей метод незручний тим, що неможливо розпочати розрахунки, маючи лише одне відоме значення $y(x_0) = y_0$. Для запуску методу Адамса потрібно додатково визначити y_1 , y_2 і y_3 , наприклад, тим же методом Рунге – Кутта. Це суттєво ускладнює процедуру. Крім того, на відміну від однокрокових, більшість багатокрокових методів, включаючи метод Адамса, не дозволяє легко змінювати крок h у процесі обчислень.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h = 0,1$ чотирикроковим методом Адамса і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Необхідні для запуску методу Адамса значення y_1 , y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 2.5.4). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З умови задачі маємо $f(x, y) = x/y^2$, $y_0 = 1$, а приклад з пункту 2.5.4 додатково дає значення $y_1 = 1,0050$, $y_2 = 1,0196$ і $y_3 = 1,0431$, одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0742	1,1118
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4045
Δy_k	–	–	–	–	0,0311	0,0376

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1546	1,2014	1,2513	1,3034	1,3571
$f(x_k, y_k)$	0,4501	0,4850	0,5109	0,5298	–
Δy_k	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537

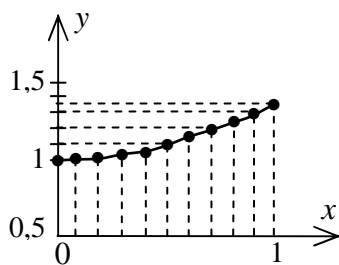


Рис. 54

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 54), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0,0001$. ■

2.5.6. Метод прогнозування і корекції Хеммінга

Ідея методів *прогнозування та корекції* (*предиктор – коректор*) полягає у тому, що кожний крок розбивається на два етапи: спочатку за допомогою явного методу (*предиктор*) за відомими значеннями розв'язку в попередніх вузлах знаходять його грубе наближення $y_k^{(0)}$ в новому k -му вузлі (*прогнозування*), а потім, використовуючи неявний метод (*коректор*), ітераційно уточнюють отримане значення $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, ... (*корекція*).

На практиці часто застосовують *чотирикроковий метод прогнозування і корекції Хеммінга*:

$$y_k^{(0)} = y_{k-4} + (4h/3) (2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 2f(x_{k-3}, y_{k-3})); \quad y_k = (1/8) (9y_{k-1} - y_{k-3}) + (3h/8) \times (f(x_k, y_k^{(0)}) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})); \quad k = 4, 5, 6, \dots,$$

де корекція обмежується однією ітерацією.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0,1$ чотирикроковим методом прогнозування і корекції Хеммінга і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Необхідні для запуску методу Хеммінга значення y_1 , y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 2.5.4). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) З умови задачі маємо $f(x, y) = x/y^2$, $y_0 = 1$, а додаткові значення $y_1 = 1,0050$, $y_2 = 1,0196$ і $y_3 = 1,0431$ дістаємо з прикладу пункту 2.5.4, де вони одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу прогнозування і корекції Хеммінга й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4044
$y_k^{(0)}$	–	–	–	–	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k^{(0)})$	–	–	–	–	0,3466	0,4044

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1548	1,2016	1,2514	1,3035	1,3572
$f(x_k, y_k)$	0,4499	0,4848	0,5109	0,5297	0,5429
$y_k^{(0)}$	1,1547	1,2016	1,2514	1,3036	1,3572
$f(x_k, y_k^{(0)})$	0,4500	0,4848	0,5109	0,5296	0,5429

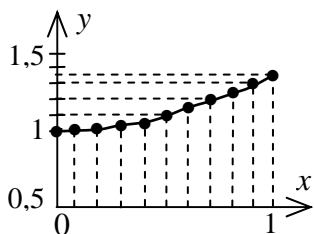


Рис. 55

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 55), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0,0000$. ■

2.6. Контрольні запитання

1. Що таке математична модель об'єкту?
2. Який розв'язок задачі називається стійким за вхідними даними?
3. Що таке коректно (правильно) поставлена математична задача?
4. Що розуміють під чисельним (числовим, обчислювальним) методом?
5. Який метод називається прямим? Ітераційним?
6. Дайте означення однокрокового і багатокрокового ітераційного методу.
7. За якими характеристиками розрізняються чисельні методи?
8. Що означає p -й порядок збіжності ітераційного методу?
9. При якій умові ітераційний метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії?
10. Що називається наближеним числом?
11. Що називається похибкою наближення? Укажіть основні джерела похибок. Дайте класифікацію похибок.
12. Дайте означення абсолютної та відносної похибки.
13. У яких формах записуються наближені числа? Що таке значущі цифри? Які з них називаються вірними (правильними) у вузькому сенсі?
14. Сформулюйте правило симетричного заокруглення.
15. Як за записом наближеного числа оцінити його абсолютну та відносну похибку?
16. Як обчислюються лінійні оцінки похибки функції?
17. Як обчислюються лінійні оцінки похибок арифметичних операцій? Наведіть відповідні правила підрахунку цифр.
18. У чому полягає локалізація (відокремлення) дійсного кореня скінченного рівняння? Які способи для цього застосовують?
19. Наведіть основні критерії закінчення ітераційного процесу уточнення кореня.
20. У чому суть методу поділу навпіл (дихотомії, бісекції)? Наведіть його переваги та недоліки.
21. У чому суть методу простих ітерацій? Запишіть достатню умову його збіжності. Дайте геометричну інтерпретацію.
22. У чому полягає метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію. Запишіть достатню умову його збіжності.

23. У чому полягає задача апроксимації (наближення) функцій?
24. Який спосіб наближення називають інтерполяцією?
25. Що розуміють під середньоквадратичною апроксимацією (наближенням за методом найменших квадратів)? У чому відмінність цього методу від інтерполяції?
26. Як здійснюється інтерполяція многочленами? Запишіть інтерполяційний поліном Лагранжа.
27. Як оцінюється похибка інтерполювання?
28. Коли застосовують апроксимацію за методом найменших квадратів? Чому цей метод найбільш ефективний у випадку моделі, що лінійна відносно параметрів?
29. Як здійснюється апроксимація лінійною функцією за методом найменших квадратів?
30. Коли застосовується чисельне диференціювання?
31. Як наближено знаходяться похідні за допомогою інтерполяційних многочленів?
32. Як за методом Рунге (методом подвоєння кроку) оцінити похибку апроксимації похідної й уточнити її значення?
33. Запишіть розрахункові формули методу лівих і правих прямокутників.
34. Запишіть розрахункову формулу методу трапецій.
35. Наведіть формулу Симпсона (формулу парабол) чисельного інтегрування.
36. Як практично оцінюється похибка чисельного інтегрування за правилом Рунге?
37. Як ставиться задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку?
38. Дайте геометричну інтерпретацію розв'язку задачі Коші та його похідної.
39. У чому полягає метод послідовних наближень (метод Пікара) наближеного обчислення визначеного інтеграла?
40. Що таке локальна і глобальна похибки чисельного методу розв'язування задачі Коші?
41. Як за правилом Рунге практично оцінюється похибка наближеного розв'язку?
42. Запишіть розрахункову формулу явного методу Ейлера. Який його порядок точності? Яка геометрична інтерпретація цього методу?

43. Запишіть розрахункові формули явного методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності.
44. Наведіть розрахункові формули явного чотирикрокового методу Адамса. Порівняйте цей метод з методом Рунге – Кутта тієї ж точності.
45. У чому суть методів прогнозування та корекції (предиктор – коректор)?
46. Запишіть розрахункові формули чотирикрокового методу прогнозування і корекції Хеммінга.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632с.
3. Валеев К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.
4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.
5. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах і вправах. – К.: ІСДО, 1995.–248 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. – М.: Высш. шк., 1997. –Ч.2. – 416 с.
7. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
8. Орвис В.Д. Excel для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.
9. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985. Т.2. – 560 с.
11. Станішевський С.О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.
12. Фадеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. – СПб.: Лань, 2008. – 128 с.

З М І С Т

Передмова	3
Змістовий модуль 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	4
1.1. Кратні інтеграли	4
1.1.1. Задача про об'єм циліндричного тіла. Подвійний інтеграл і його властивості	4
1.1.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній системі координат	5
1.1.3. Задача про масу просторового тіла. Потрійний інтеграл і його властивості	16
1.1.4. Обчислення потрійного інтеграла у прямокутній системі координат	18
1.1.5. Застосування кратних інтегралів	21
1.2. Криволінійні інтеграли	24
1.2.1. Скалярне поле. Задача про масу дуги. Криволінійний інтеграл за довжиною	24
1.2.2. Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною	26
1.2.3. Векторне поле. Задача про роботу векторного поля. Криволінійний інтеграл за координатами	28
1.2.4. Обчислення криволінійного інтеграла за координатами	31
1.2.5. Формула Гріна	33
1.2.6. Застосування криволінійних інтегралів	35
1.3. Степеневі ряди	37
1.3.1. Функціональні ряди. Степеневі ряди та їх збіжність	37
1.3.2. Ряди Тейлора і Маклорена. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена	44
1.3.3. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень	51
1.4. Ряди Фур'є	57
1.4.1. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є	57
1.4.2. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій	63
1.4.3. Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом	65
1.4.4. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій	68
1.5. Контрольні запитання	73

Змістовий модуль 2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ	75
2.1. Загальне поняття про чисельні методи. Наближені числа. Похибки та їх обчислення	75
2.1.1. Загальне поняття про чисельні методи	75
2.1.2. Наближені числа. Похибки та їх класифікація. Абсолютна та відносна похибки	77
2.1.3. Форми запису наближених даних	80
2.1.4. Похибки округлення	82
2.1.5. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій	84
2.2. Чисельні методи знаходження дійсних коренів скінченних рівнянь	87
2.2.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів	88
2.2.2. Методи уточнення наближених значень коренів	89
2.2.3. Метод поділу навпіл (дихотомії, бісекції)	90
2.2.4. Метод простих ітерацій	93
2.2.5. Метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)	97
2.3. Апроксимація функцій	101
2.3.1. Загальна постановка задачі апроксимації	101
2.3.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа	103
2.3.3. Апроксимація за методом найменших квадратів	106
2.4. Чисельне диференціювання та інтегрування функцій	110
2.4.1. Чисельне диференціювання	110
2.4.2. Чисельне інтегрування функцій. Основні поняття	113
2.4.3. Метод прямокутників	115
2.4.4. Метод трапецій	116
2.4.5. Метод Симпсона (парабол)	117
2.5. Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь	122
2.5.1. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку	122
2.5.2. Метод послідовних наближень. Поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші	125
2.5.3. Явний метод Ейлера	128
2.5.4. Явний метод Рунге – Кутта	130
2.5.5. Явний чотирикроковий метод Адамса	132
2.5.6. Метод прогнозування і корекції Хеммінга	134
2.6. Контрольні запитання	136
Список літератури	138

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Якунін Анатолій Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА II

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів заочної форми навчання за напрямом
підготовки 6.030509 “Облік і аудит”

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Редактор *З. І. Зайцева*

Комп’ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2011, поз. 96Л

Підп. до друку 15.12.2011

Друк на ризографі

Тираж 100 пр.

Формат 60x84 1/16

Ум. друк. арк. 8,0

Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:

ДК № 4064 від 12.05.2011