

Рис.5 – Фрактальное изображение полинома 31-й степени: $P_{31}(z)=(z^3+0.064)(z^4-0.1296)(z^3-0.027)(z^4-1)(z^3-0.125)(3z-2)(2z+6)(z^2-1)(z^2+2)(z^2-9)(z^2-16)(z+5)(z^2+5)(z+6)$; размер рисунка: [-7 .. 7, -7 .. 7].

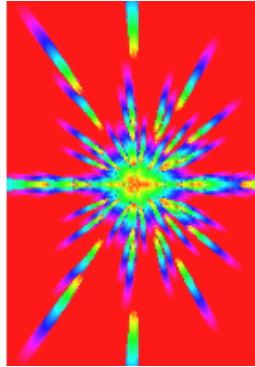


Рис.6 – Фрактальное изображение полинома 70-й степени: $P_{70}(z)=(z^4-1)(z^2-2z+5)(z^3-256)(z^2-2z+7)(z^2-3z+3)(z^3-27)(z^3+64)(z^4-1296)(z^2-5z+10)(3z-2)(z^2+100)(z^3-125)(z^4-2z^2+4)(z^4+1)(z^4+0.0016)(z^4-49)(z^3-0.027)(3z^4+6z^2+4)(27z^3-1)(z^2-4z+5)(z^2-0.36)(z^2+0.81)(5z^2-1)$; размер рисунка: [-6 .. 6, -10 .. 10].

1. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Ижевск: НИУ, 2002. – 160 с.

2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

3. Постников М.М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

4. Лопатин М.С., Тульчий В.В., Зеленков Г.А. Исследование робастной устойчивости и неустойчивости по группам вещественных коэффициентов интервального полинома // Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Вып. 39(1). – М.: ЛИБРОКОМ, 2008. – С.133-137.

УДК [519.95+518.5] : 622.692.4

Н.Н.НОВИЦКИЙ, д-р техн. наук

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г.Иркутск
(Российская Федерация)

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМАХ РАСЧЕТА ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

В работе на фоне краткой характеристики существующих подходов и методов решения классической задачи установившегося потокораспределения в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами рассматриваются вопросы множественности способов организации вычислительного процесса на базе ньютоновской схемы последовательных приближений.

У роботі на фоні короткої характеристики існуючих підходів і методів розв'язання класичної задачі сталого потокорозподілу в гідрравлічних ланцюгах із зосередженими параметрами розглядаються питання множинності способів організації обчислювального процесу на базі ньютонівської схеми після-последовних наближень.

In the report against the short characteristic of existing approaches and methods of the decision of a classical problem of steady flow in hydraulic circuits with the lumped parameters questions of multiplicity of ways of the organization of computing process on the basis of the Newtonian scheme of successive approximations are considered.

Ключевые слова: трубопроводные системы, гидравлические цепи.

Каноническая задача установившегося потокораспределения в гидравлических цепях (ГЦ) с сосредоточенными параметрами занимает базисное положение во всей проблематике математического моделирования трубопроводных и гидравлических систем различного типа и назначения (тепло-, водо-, газо-, нефтеснабжения и др.) и возникает практически на всех этапах их жизненного цикла (проектирование, эксплуатация, диспетчерское управление). Назначение задачи – количественная оценка реакций системы на произвольные изменения ее топологии, структуры, параметров, проявлений внешней среды. Ее свойства достаточно хорошо изучены [1-3], а разработка методов решения имеет уже почти вековую историю.

Несмотря на большое разнообразие имеющихся методов, наибольшее распространение получили методы ньютоновского типа, включая классические методы контурных расходов (МКР) и узловых давлений (МД) [1]. В настоящей работе предпринята попытка систематизации порождающих факторов и техники генерации различных вычислительных схем расчета потокораспределения в рамках ньютоновской схемы последовательных приближений.

Традиционные факторы разнообразия вычислительных схем метода Ньютона. Пусть $w(x)$ – n -мерная нелинейная вектор-функция n -мерного векторного аргумента x . Как известно, отыскание корня уравнения $w(x)=0$ методом Ньютона (МН) состоит в организации процесса последовательных приближений

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad (1)$$

где неизвестное приращение Δx^k отыскивается путем решения линеаризованной в окрестности k -го приближения x^k системы уравнений

$$J^k \Delta x^k = -w^k, \quad (2)$$

где $J^k = \frac{\partial w}{\partial x}$ – матрица Якоби $w(x)$ в точке x^k (полагается невырожденной); $w^k = w(x^k)$ – вектор невязок. Процесс итераций продолжается, пока невязки не станут приемлемо малы.

МН чувствителен к начальному приближению x^0 , которое должно

находиться в окрестности искомого решения. В противном случае сходимость не гарантируется [5]. Этот недостаток можно преодолеть применением регулировки шага, когда вместо (1) применяется процесс

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k \Delta x^k, \quad (3)$$

а скалярный параметр λ^k , называемый длиной шага, выбирается исходя из одномерной минимизации некоторой нормы вектора невязки

$$\lambda^k = \arg \min_{\lambda} \|w(x^k + \lambda \Delta x^k)\|. \quad (4)$$

Таким образом, первая группа факторов, определяющих разнообразие возможных реализаций МН, связана со свободой выбора методов решения каждой из трех основных подзадач: определения начального приближения x^0 ; решения систем линейных уравнений (2); регулировки шага (4).

В данной статье рассматривается другая часть факторов, связанных со спецификой моделей потокораспределения (блочная разреженность матрицы производных, наличие легко обратимых квадратных блоков, линейность части уравнений). Эта специфика допускает вариантность возможных вычислительных схем (в рамках общей схемы МН) в зависимости от выбранной стратегии: 1) понижения порядка линеаризованной системы; 2) выбора координат поиска решения; 3) управления невязками.

Стратегия понижения порядка. Осуществим декомпозицию исходной системы уравнений на две подсистемы

$$w_1(x_1, x_2) = 0, \quad w_2(x_1, x_2) = 0. \quad (5)$$

Линеаризованным аналогом (5) будет

$$J_{11}^k \Delta x_1^k + J_{12}^k \Delta x_2^k = -w_1^k, \quad J_{21}^k \Delta x_1^k + J_{22}^k \Delta x_2^k = -w_2^k. \quad (6)$$

Пусть

$$\dim(w_1) = \dim(x_1), \quad \det(J_{11}^k = \partial w_1 / \partial x_1) \neq 0. \quad (7)$$

Тогда вектор Δx_1^k можно выразить из первой подсистемы (6)

$$\Delta x_1^k = -\left(J_{11}^k\right)^{-1} \left(w_1^k + J_{12}^k \Delta x_2^k\right), \quad (8)$$

а подстановка этого выражения во вторую дает

$$\left[J_{22}^k - J_{21}^k \left(J_{11}^k\right)^{-1} J_{12}^k \right] \Delta x_2^k = J_{21}^k \left(J_{11}^k\right)^{-1} w_1^k - w_2^k. \quad (9)$$

Решив эту систему относительно Δx_2^k , обратной подстановкой в (8) можно определить Δx_1^k .

В любом случае очевидно, что эффект понижения порядка системы должен быть сопоставлен с трудоемкостью дополнительных операций обращения матриц.

Таким образом, первый из рассматриваемых факторов связан с выбором схемы поблочного исключения, вариантность которой определяется: 1) неоднозначностью разбиения x на x_1 и x_2 ; 2) возможностью декомпозиции X на более чем два подвектора; 3) последовательностью исключения подвекторов, которая, в конечном счете, приводит к пространству определенного подвектора.

Стратегия координат поиска решения. Представим первую подсистему (5) в виде $x_1 = v_1(x_2)$, где v_1 – в общем случае неявная вектор-функция. Тогда вторую можно записать как $w_2(x_1, x_2) = w_2(v_1(x_2), x_2) = u_2(x_2) = 0$. Применение к ней МН сводится к процессу $x_2^{k+1} = x_2^k + \Delta x_2^k$, по завершению которого вычисляется $x_1 = v_1(x_2)$. В особенности этот подход упрощается, если v_1 – явная. Очевидно, что выражение для матрицы производных du_2/dx_2 совпадает с матрицей коэффициентов (9).

Таким образом, процесс последовательных приближений (на каждом шаге которого решается система уравнений с матрицей коэффициентов du_2/dx_2) можно вести, как в пространстве x , так и в пространстве x_2 . В случае декомпозиции x более чем на два подвектора возникают варианты: 1) в пространстве какого подвектора (или их подмножества) определен процесс (1) (или (4)); 2) к пространству какого подвектора сводится решение системы (2). Кроме того, оба эти вопроса могут быть решены независимо. Например, процесс поиска решения можно вести как $x_1^{k+1} = x_1^k + \Delta x_1^k$, где Δx_1^k дается выражением (8), а Δx_2^k определяется из (9).

Стратегия обработки невязок. В рассматриваемом случае, когда $\text{rank}(J^k) = \text{dim}(x)$, возможна такая декомпозиция (5), что $\text{rank}(J_{11}^k) = \text{dim}(x_1)$ и $\text{rank}(J_{22}^k) = \text{dim}(x_2)$. При этом допустимо эквивалентное представление (5): $x_1 = v_1(x_2)$, $x_2 = v_2(x_1)$. На каждом шаге итераций имеются: x_1^k , x_2^k , Δx_1^k , Δx_2^k . При этом возможны следующие стратегии расчета невязок:

$$w_1^{k+1} = w_1(x_1^k + \Delta x_1^k, x_2^k + \Delta x_2^k); w_2^{k+1} = w_2(x_1^k + \Delta x_1^k, x_2^k + \Delta x_2^k); (10)$$

$$w_1^{k+1} = w_1(x_1^k + \Delta x_1^k, v_2(x_1^k + \Delta x_1^k)); \quad w_2^{k+1} = 0; \quad (11)$$

$$w_1^{k+1} = 0; \quad w_1^{k+1} = w_1(v_1(x_2^k + \Delta x_2^k), x_2^k + \Delta x_2^k). \quad (12)$$

Очевидно, что: 1) число вариантов возрастает при декомпозиции более чем на два подвектора; 2) стратегия обработки невязок может применяться независимо от стратегии понижения порядка системы линейных уравнений; 3) стратегия обработки невязок определяет траекторию процесса приближения к решению, так как в общем случае $x_1^k + \Delta x_1^k \neq v_1(x_2^k + \Delta x_2^k)$ и $x_2^k + \Delta x_2^k \neq v_2(x_1^k + \Delta x_1^k)$; 4) если хотя бы одна из подсистем (5) линейная (например, первая), то $w_1^{k+1} = w_1(x_1^k + \Delta x_1^k, x_2^k + \Delta x_2^k) = 0$. Действительно, пусть $w_1^k = Ax - b \neq 0$, так как $A\Delta x^k = -w_1^k$, то $w_1^{k+1} = A(x^k + \Delta x^k) - b = Ax^k + A\Delta x^k - b = w_1^k + A\Delta x^k = 0$.

Исходная модель потокораспределения. Возьмем в качестве базовой узловую форму записи модели установившегося потокораспределения в ГЦ с сосредоточенными параметрами, которую представим в виде

$$w(x, y, P) = \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(P, y) \\ w_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - Q \\ A^T P - y \\ y - f(x) \end{pmatrix} = 0, \quad (13)$$

где $A - (m-1) \times n$ -матрица инцидентий узлов и ветвей расчетной схемы с элементами $a_{ji} = 1(-1)$, если узел j является начальным (конечным) для ветви i и $a_{ji} = 0$, если ветвь i не инцидентна узлу j ; $x, y - n$ -мерные векторы расходов и перепадов давлений на ветвях расчетной схемы; $f(x) - n$ -мерная вектор-функция с элементами $f_i(x_i)$, задаваемая перечнем тех или иных соотношений для гидравлических характеристик ветвей; $Q - m-1$ -мерный вектор узловых расходов с элементами $Q_j > 0$ для притока в узел j , $Q_j < 0$ для отбора в узле j и $Q_j = 0$, если узел $j -$ простая точка соединения ветвей; $P - m-1$ -мерный вектор узловых давлений.

Традиционная задача потокораспределения состоит в определении значений векторов x, y, P по известному значению Q и давления в одном из узлов. В модели (13), без потери общности, полагается, что в

роли линейно зависимого принято уравнение материального баланса в узле m , а давление в этом узле полагается равным нулю. Соответственно, система (13) определена относительно $2n + m - 1$ неизвестных.

Варианты МД. Линеаризованным аналогом (13) будет система

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -E_n & A^T \\ -f'_x & E_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \\ \Delta P^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ w_3^k \end{bmatrix},$$

где E_n – единичная матрица порядка n .

Наименьшее пространство, к которому можно свести решение этой системы поблочным исключением переменных, это – ΔP^k . Опуская промежуточные выкладки, приведем конечные выражения некоторых вариантов вычислительных схем МД с целью иллюстрации их множественности даже в рамках фиксированной стратегии понижения порядка.

1. МД(P) – классический МД. В скобках указаны координаты решения задачи, которые в данном случае совпадают с пространством, к которому сводится линеаризованная система. Схема: $A(f'_x)^{-1} A^T \Delta P^k = -w_1^k$, $P^{k+1} = P^k + \Delta P^k$, $x^{k+1} = \varphi(A^T P^{k+1})$, где φ – функция, обратная к f .

2. МД(P, x) – известен как метод глобального градиента [6]:

$$A(f'_x)^{-1} A^T \Delta P^k = -A(f'_x)^{-1} w_2^k, \quad P^{k+1} = P^k + \Delta P^k, \\ x^{k+1} = x^k + (f'_x)^{-1} (A^T \Delta P^k + w_2^k).$$

3. МД(x, y). Так как вектор P никак не используется в процессе итераций, то имеет место следующий вариант:

$$A(f'_x)^{-1} A^T \Delta P^k = -A(f'_x)^{-1} w_3^k, \quad x^{k+1} = x^k + (f'_x)^{-1} (A^T \Delta P^k + w_3^k), \\ y^{k+1} = y^k + A^T \Delta P^k.$$

4. МД(y). Так как $y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y)$ и $w_1^k = A\varphi(y^k) - Q$, то возможна следующая схема: $A\varphi'_y A^T \Delta P^k = -w_1^k$,

$$y^{k+1} = A^T (P^k + \Delta P^k).$$

Поскольку $\text{rank}(A) = m - 1$, при наличии контуров (когда $c = n - m + 1 > 0$) возможна декомпозиция $A = [A_K \parallel A_D]$ с точки зрения принадлежности ветвей хордам или остовному дереву [1]. Декомпозиция модели (13) (в которой для упрощения предварительно

исключен вектор y) по этому признаку дает

$$w(x, P) = \begin{pmatrix} w_1(x_K, x_D) \\ w_{K2}(P, x_K) \\ w_{D2}(P, x_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_K x_K + A_D x_D - Q \\ A_K^T P - f_K(x_K) \\ A_D^T P - f_D(x_D) \end{pmatrix} = 0. \quad (14)$$

Отметим, что широко распространенная «контурная» модель потокораспределения, является результатом применения промежуточной операции понижения порядка (14). Действительно, выразив из $w_{D2}(P, x_D) = 0$ имеем $P = (A_D^T)^{-1} f_D(x_D)$. Подставив это выражение в $w_{K2}(P, x_K) = 0$, получим, $w_{K2}(P, x_K) = -Bf(x) = 0$, так как $A_K^T (A_D^T)^{-1} = -B_D$ и $B = [E_c \mid B_D]$. Таким образом имеет место эквивалентное представление (14)

$$w(x, P) = \begin{pmatrix} w_1(x_K, x_D) \\ w_{K2}(x_K, x_D) \\ w_{D2}(P, x_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_K x_K + A_D x_D - Q \\ f_K(x_K) + B_D f_D(x_D) \\ P - (A_D^T)^{-1} f_D(x_D) \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Наименьшее пространство, к которому можно свести решение этой системы поблочным исключением переменных, это – x_K . Соответствующие преобразования приводят к известной вычислительной схеме МКР [1]. Тем не менее, из сопоставления (14) и (15) видно, что невязку в контурах можно определять, как $w_{K2}(P^k, x_K^k)$, или как $w_{K2}(x_K^k, x_D^k)$. Соответственно, возможна комбинация МД и МКР [6], которую

обозначим как МД(x_K): $A(f'_x)^{-1} A^T \Delta P^k = -A(f'_x)^{-1} \begin{bmatrix} w_{K2}^k \\ 0 \end{bmatrix}$,

$x_K^{k+1} = x_K^k + (f'_K)^{-1} (A_K^T \Delta P^k + w_{K2}^k)$. Необходимый для взятия производных f'_x вектор x_D^k , может быть явно выражен из $w_1(x_K, x_D) = 0$ как $x_D^k = R_D^T (A_K x_K^k - Q)$, где R_D – матрица путей [1].

Нетрадиционные варианты понижения порядка. Потенциально, решение линеаризованной системы может быть сведено к пространству любого из введенных в рассмотрение векторов: P , x_K , x_D , y_K , y_D (или их комбинации). Однако, целесообразно обеспечение как можно меньшего порядка с сохранением свойства симметричности матрицы

коэффициентов. С этой точки зрения, (ассоциируя название вычислительной схемы со стратегией понижения порядка по аналогии с МД и МКР), можно, например, ввести в рассмотрение следующие нетрадиционные методы.

1. Метод остовных расходов (МОР(x_D)):

$$[f'_D B_D^T (f'_K)^{-1} B_D f'_D + f'_D] \Delta x_D = f'_D R_D^T w_1, \quad x_D^{k+1} = x_D^k + \Delta x_D^k.$$

2. Метод остовных напряжений (МОН(y_D)):

$$(B_D^T \phi_K^k B_D + \phi_D^k) \Delta y_D = R_D^T w_1^k, \quad y_D^{k+1} = y_D^k + \Delta y_D^k,$$

где $w_1^k = A \phi(y^k) - Q$, $y^k = \begin{bmatrix} -B_D y_D^k \\ y_D^k \end{bmatrix}$.

3. Метод контурных напряжений (МКН(y_K))

$$[\phi'_K + \phi'_K B_D (\phi'_D)^{-1} B_D^T \phi'_K] \Delta y_K = -\phi'_K w_2, \quad y_K^{k+1} = y_K^k + \Delta y_K^k.$$

Во всех рассмотренных методах матрица коэффициентов симметричная, а с точки зрения порядка решаемых систем, они сопоставимы с традиционными методами.

Таким образом, выделены основные факторы, определяющие множественность возможных реализаций метода Ньютона для расчета потокораспределения. К числу таких факторов, связанных со спецификой моделей потокораспределения, отнесены стратегии: 1) понижения порядка линейных систем уравнений; 2) координат поиска решения; 2) обработки невязок. Показана вариантность каждой из этих стратегий, а также возможность их независимого применения и комбинирования. Этим определяется большее, чем это считалось ранее, многообразие возможных схем расчета потокораспределения методом Ньютона. На конкретных примерах проиллюстрирована согласованность предложенной логики конструирования вычислительных схем с известными методами расчета потокораспределения, а также получен ряд новых методов, сопоставимых с традиционными.

1. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. – М.: Наука, 1985. – 278 с.

2. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровский В.В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. – М.: Стройиздат, 1990. – 368 с.

3. Сухарев М.Г. Уточненная формализация задач анализа гидравлических цепей // Изв. РАН. Энергетика. – 2004. – №3 – С.105-115.

4. Коррельштейн Л.Б., Пашенкова Е.С. Опыт использования метода глобального градиента при расчете установившегося изотермического течения жидкостей и газов в трубопроводах // Трубопроводные системы энергетики. Развитие методов математического мо-

делирования и оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2008. – С.80-89.

5.Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

6.Сенцова Е.В., Сидлер В.Г. Математическое моделирование и оптимизация тепло-снабжающих систем. – Новосибирск: Наука, 1987. – 221 с.

Получено 09.11.2011

УДК 65.012.34

І.Л.ЯКОВИЦЬКИЙ, канд. техн. наук

Харківська національна академія міського господарства

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПИТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЛОГІСТИКИ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Розглядається можливість використання новітньої інформаційної технології «хмарні обчислення» для створення інформаційної інфраструктури з метою впровадження логістичних принципів управління в міському господарстві.

Рассматривается возможность использования новой информационной технологии «облачные вычисления» создания информационной инфраструктуры с целью внедрения логистических принципов управления в городском хозяйстве.

The possibility of using new information technology "cloud computing" information infrastructure with a view to implementing the principles of logistics management in the urban economy.

Ключові слова: міське господарство, інформаційна логістика, «хмарні обчислення», інформаційна інфраструктура, логістичні принципи управління, транспортна інфраструктура.

Використання логістичних принципів управління в комунальному господарстві дозволяє перейти до більш ефективної структури управління. Рішення задач логістики міського господарства можливе за умови широкого використання засобів обчислювальної техніки і розвинених технологій обробки інформації [4].

Інформаційним середовищем управління міським господарством є наступні дані: територія міста, транспортна інфраструктура (за видами транспорту: автомобільний, залізничний, трубопровідний (газорозподільні мережі, системи подачі і розподілу води, система водовідведення), енергетичні розподільчі мережі, інфраструктура транспорту інформації [1].

Інформаційні потоки, що породжує кожна підсистема, є двонаправленими. Вони дозволяють реалізовувати стандартний технічний алгоритм управління «зі зворотним зв'язком», в якому інформаційний потік про вимірювання технічних характеристик процесу транспортування або розподілу матеріального ресурсу є даними для генерування інформаційного потоку про керуючі впливи на активних елементах підсистем тран-