МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для самостійної роботи студентів 2 курсу всіх спеціальностей академії)

Частина 3

Харків – ХНАМГ – 2012

Методичні вказівки з вищої математики (для самостійної роботи студентів 2 курсу всіх спеціальностей академії). Частина 3 / Харк. нац. акад.. міськ. госп-ва; уклад.: Л. П. Вороновська, Є. С. Пахомова, С. С. Шульгіна. – Х.: ХНАМГ, 2012. –66 с.

Укладачі: Л. П. Вороновська,
Є. С. Пахомова,
С. С. Шульгіна.

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей академії.

Рецензент: к. ф.-м. н, доц. Коваленко Л.Б.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики,
протокол № 4 від 23.11.2010 р.

РОЗДІЛ 1. КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Кратні інтеграли

1.1.1. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

Подвійним інтегралом від неперервної функції $f(x,y)$, поширеним на обмежену замкнену область (D) площини x0y, називають границю відповідної двовимірної інтегральної суми, тобто

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{max\,\Delta x_i \to 0 \\ max\,\Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k ,$$

де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ і сума поширення на ті значення *i* та *к*, для яких точки x_i, y_k належать області (*D*).

Зауважимо, що *dxdy* = *ds* називають елементом площі в прямокутних координатах.

Відомо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторного (двократного) інтеграла, тобто до послідовного обчислення двох визначених інтегралів. Будемо розрізняти два основні види області інтегрування.

1. Область інтегрування (*D*) (рис.1) обмежена зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), а знизу і зверху неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$, кожна із яких перетинається з прямою x = const лише один раз. $y = \varphi_1(x)$ - нижня межа області (лінія входу), $y = \varphi_2(x)$ - верхня межа області (лінія виходу).

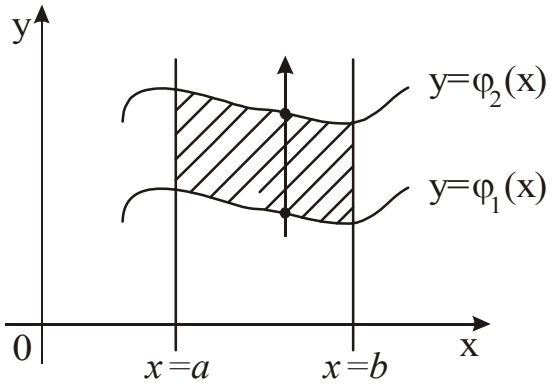


Рис. 1

В області (D) змінна *x* змінюється від *a* до *b*, а змінна *y* при сталому *x* змінюється від $y = \varphi_1(x)$ до $y = \varphi_2(x)$.

Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \int_a^в dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

Область інтегрування (D) (рис. 2) знизу і зверху обмежена прямими $y = c$ і $y = d$ ($c < d$), а зліва і справа неперервними кривими $x = \psi_1(y)$ і $x = \psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, кожна з яких перетинається з прямою $y = const$ лише один раз.

$x = \psi_1(y)$ - ліва межа області (лінія входу), $x = \psi_2(y)$ - права межа області (лінія виходу)

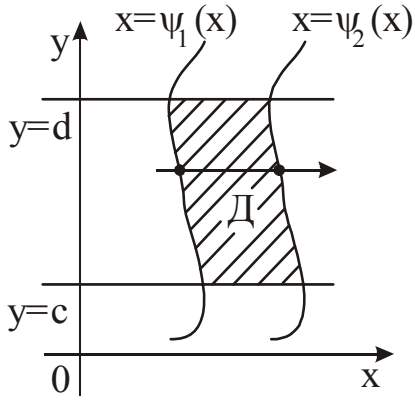


Рис. 2

В області (D) змінна y змінюється від c до d, а змінна x при сталому y змінюється від $x = \psi_1(y)$ до $x = \psi_2(y)$. Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

Відзначимо, що коли границя області складається з кількох ліній входу або виходу, то область (D) розбивають на частини, кожна з яких має одну лінію входу і одну лінію виходу, і тоді інтеграл відносно області, наприклад, $(D) = (D_1) + (D_2)$ розглядають як суму інтегралів відносно кожної з них, тобто

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy .$$

Обчислюючи подвійний інтеграл у прямокутних координатах, доцільно користуватися наступним правилом.

Правила обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

1.Побудувати область інтегрування (D) і перевірити, чи є вона правильною (прямі, паралельні осям координат, перетинають межу області не більше ніж в двох точках).

2. Обрати раціональний порядок інтегрування.

3. Перейти від подвійного інтеграла до повторного.

4. Розставити межі інтегрування в повторному інтегралі, пам’ятаючи, що межі зовнішнього інтеграла завжди сталі (це кінці інтервала, що належить осі Ox або осі Oy, на який проекцюється область (D)), а межі внутрішнього інтеграла є функціями тієї змінної, відносно якої береться зовнішній інтеграл.

5. Знайти внутрішній інтеграл, вважаючи сталою змінну зовнішнього інтеграла.

6. Знайти зовнішній інтеграл від функції, одержаної у результаті знаходження внутрішнього інтеграла.

Зауважимо, що коли область інтегрування (D) – прямокутник, сторони якого паралельні осям координат то всі чотири межі інтегрування в повторному інтегралі сталі.

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити повторний інтеграл:

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx .$$

Розв'язання. Обчислюємо внутрішній інтеграл, вважаючи y сталим.

$$\int_0^1 (x^2 + 2y)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2y dx = \int_0^1 x^2 dx + 2y\int_0^1 dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 2y .$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл від одержаної функції

$$\int_0^2 (\frac{1}{3} + 2y)dy = \int_0^2 \frac{1}{3} dy + \int_0^2 2y dy = \left(\frac{1}{3}y + y^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3} .$$

Таким чином,

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx = 4\frac{2}{3} .$$

Розв'язання цього прикладу інакше можна записати так:

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2y dx\right)dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy\right)\Bigg|_0^1 dy = \int_0^2 (\frac{1}{3} + 2y)dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{3} dy + \int_0^2 2y dy = \left(\frac{1}{3}y + y^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3}$$

Приклад 2. Обчислити повторний інтеграл

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2} .$$

Розв'язання. У даному інтегралі змінною внутрішнього інтеграла є y. Отже,

$$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int_1^2 x^2\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=-\int_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=-\int_1^2\left(x-x^3\right)dx=\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=4-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=2\frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Побудувати область (D), обмежену лініями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$, перейти від подвійного інтеграла, взятого відносно цієї області до повторного і розставити межі інтегрування.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис.3,*а*).

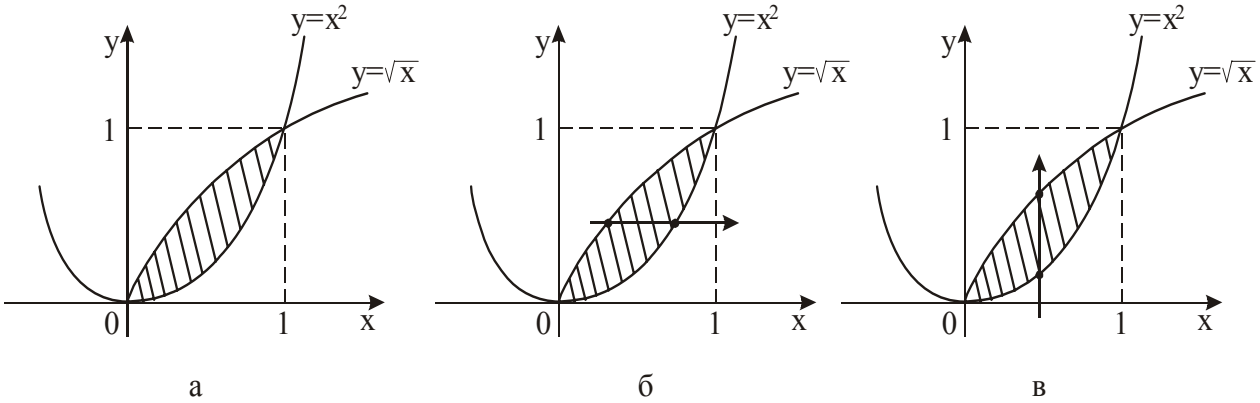


Рис.3

Для вибору раціонального порядку інтегрування перетнемо область (D) прямими, паралельними осям координат (рис. 3,*б* – паралельними осі Ox, рис. 3,*в* – паралельними осі Oy). Так як у кожному випадку маємо по одній лінії входу і по одній лінії виходу, то порядок інтегрування буде будь–яким і подвійний інтеграл відносно області (D) можна записати у вигляді одного повторного інтеграла.

$$\int dy\int f(x,y)dx \text{ (див. рис. 3,}б\text{);}$$

$$\int dx\int f(x,y)dy \text{ (див. рис. 3,}в\text{).}$$

Зауважимо, що підінтегральна функція $f(x,y)$ завжди записується під знак внутрішнього інтеграла.

Розставимо межі інтегрування в інтегралі $\int dy\int f(x,y)dx$. Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтеграла спроекцюємо область (D) на вісь Oy $(0\le y\le 1)$. Межі внутрішнього інтеграла знайдемо із рівняння лінії входу $x = y^2$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $x = \sqrt{y}$ (верхня межа інтегрування).

Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\,.$$

Далі розставимо межі в інтегралі $\int dx\int f(x,y)dy$. Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтеграла спроекцюємо область (D) на вісь Ox $(0\le x\le 1)$. Межі внутрішнього інтеграла знаходимо з рівняння лінії входу $y = x^2$

(нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $y=\sqrt{x}$ (верхня межа інтегрування).

Тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy .$$

Приклад 4. Перейти від подвійного інтеграла, взятого відносно області (*D*), обмеженої лініями *y* = 0, y = 2, *y* = *x* і y = *x* – 4, до повторного.

Розв'язання. Побудуємо область (*D*) (рис. 4,*а*).

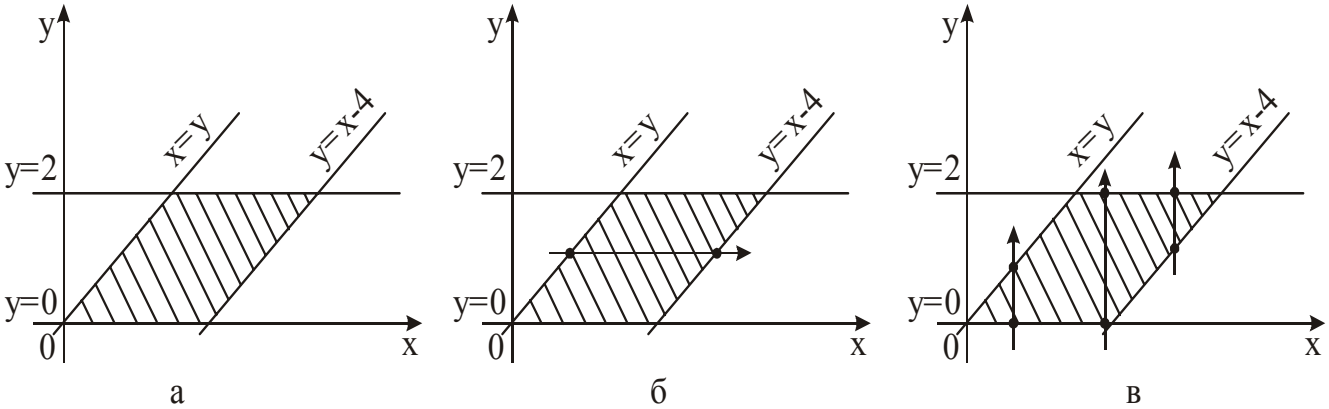


Рис. 4

Для вибору раціонального порядку інтегрування перетнемо область інтегрування прямими, паралельними осям координат (рис. 4,*б* – паралельними осі *Ox,* рис. 4,*в* – паралельними осі *Oy*).

У першому випадку (рис. 4,*б*) маємо одну лінію входу *y* = *x* і одну лінію виходу *y* = *x* – *4*, тому подвійний інтеграл відносно області (D) можна записати у вигляді одного повторного інтеграла виду

$$\int dy \int f(x,y)dx .$$

У другому випадку маємо дві лінії входу: *y* = *0* і *y* = *x* – *4* і дві лінії виходу: *y* = *x* і *y* = *2,* тому область (*D*) розбиваємо на три частини (рис. 4,*в*) і тоді подвійний інтеграл відносно області (*D*) = (D_1) + (D_2) + (D_3) можна записати як суму подвійних інтегралів відносно кожної з них, тобто:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_3)} f(x,y)dxdy ,$$

де кожний з одержаних інтегралів можна записати у вигляді одного повторного інтеграла виду $\int dx \int f(x,y)dy$.

Таким чином, зрозуміло, що порядок інтегрування буде раціональним у першому випадку, оскільки веде до обчислення меншої кількості повторних інтегралів і обчислення значно меншої кількості визначених інтегралів.

Розставимо межі інтегрування в повторному інтегралі

$$\int dy \int f(x,y)dx .$$

Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтеграла спроекцюємо область (D) на вісь Oy $(0 \le y \le 2)$. Межі внутрішнього інтеграла знайдемо з рівняння лінії входу $x = y$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $x = y + 4$ (верхня межа інтегрування).

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{y+4} f(x,y)dx .$$

Приклад 5. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy .$$

Розв'язання. У даному повторному інтегралі порядок інтегрування наступний. Внутрішнє інтегрування виконується відносно змінної y, а зовнішнє – відносно змінної x. Змінити порядок інтегрування в даному інтегралі означає те, що внутрішнє інтегрування треба виконати відносно змінної x, а зовнішнє – відносно змінної y, тобто записати інтеграл у вигляді

$$\int dy \int f(x,y)dx .$$

Але, як показує попередній приклад, поки що не відомо, скільки таких інтегралів буде. Щоб відповісти на це питання, відновимо область (D). Оскільки змінна внутрішнього інтеграла - y, то рівняння нижньої межі області $y = 2x$ (лінія входу), а рівняння верхньої межі області $y = 6 - x$ (лінія виходу). Змінна x зовнішнього інтеграла змінюється від $x = 0$ до $x = 2$.

Таким чином, рівняння меж області: $y = 2x$, $y = 6 - x$, $x = 0$ і $x = 2$. Побудуємо область (D) (рис. 5).

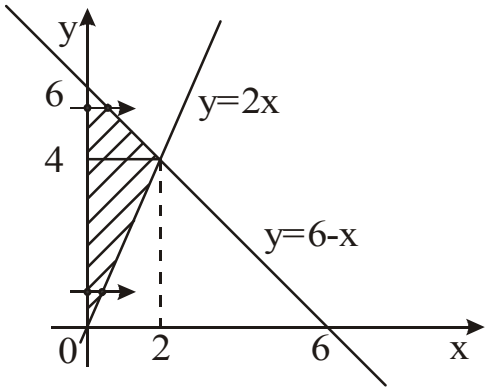


Рис. 5

Перетнувши область (D) в напрямку осі Ox бачимо, що точки входу знаходяться на одній лінії $x = 0$, а точки виходу - на двох різних лініях $y = 2x$ і $y = 6 - x$, тому область (D) доведеться розбити на дві частини (D_1) (нижня) і (D_2) (верхня).

Тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)dx .$$

Приклад 6. Змінюючи порядок інтегрування, записати вираз

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$$

у вигляді одного двократного інтеграла.

Розв'язання. Запишемо рівняння меж області (D):

$$\left\{ x = 0; x = 1; x = 3; y = 0; y = x^2; y = \frac{1}{2}(3-x) \right\}.$$

Побудуємо область (D) = (D_1) + (D_2) (рис. 6).

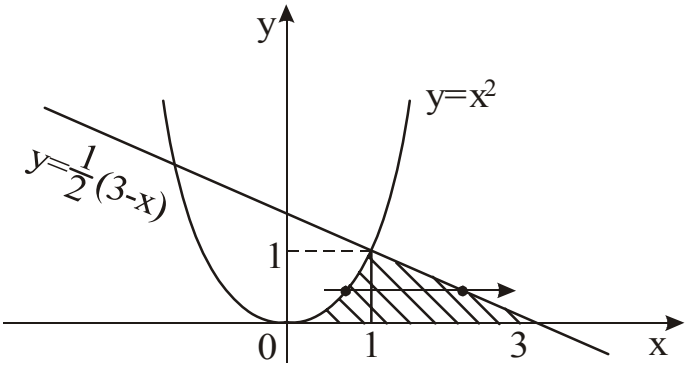


Рис. 6

Дійсно, в області (D_1) (ліва межа) $(0 \le x \le 1)$, $(0 \le y \le x^2)$, а в області (D_2) (права межа) $(1 \le x \le 3)$, $\left(0 \le y \le \frac{1}{2}(3-x)\right)$.

Перетинаючи область (D) в напрямку осі Ox бачимо, що лінія входу одна- $y = x^2$ і лінія виходу одна - $y = \frac{1}{2}(3-x)$, а тому при зміні порядку інтегрування одержимо один двократний інтеграл виду:

$$\int dy \int f(x,y)dx .$$

Розставимо межі інтегрування. Змінна, що стоїть поряд з y зовнішнім інтегралом змінюється від 0 до 1, оскільки область (D) проекцюється на вісь Oy у відрізок [0;1]. Змінна x внутрішнього інтеграла змінюється від $x=\sqrt{y}$ (лінія входу) до $x = 3 - 2y$ (лінія виходу).

Таким чином,

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx\,.$$

Приклад 7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x^2+y)dxdy$ відносно області (D), обмеженої лініями $y = x^2$ і $y^2 = x$.

Розв'язання. Перейдемо до повторного інтеграла (див.рис. 3,*а*) і обчислимо його.

Тоді

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\left(x^2+y\right)dx=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}}x^2dx+\int_{y^2}^{\sqrt{y}}ydx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+yx\right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}+y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^6}{3}-y^3\right)dy=\int_0^1\left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^6}{3}-y^3\right)dy=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{y^7}{21}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{15}-\frac{1}{21}-\frac{1}{4}=\frac{224-20-105}{420}=\frac{99}{420}=\frac{33}{140}.$$

Або (див.рис. 3,*в*):

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=\frac{80+70-84}{280}=\frac{66}{280}=\frac{33}{140}.$$

Як бачимо, результати обчислень в кожному випадку однакові.

Приклад 8. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}\cos(x+y)dxdy$ відносно області (D), обмеженої лініями $x = 0$, $y = \pi$ і $y = x$.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис. 7,*а*):

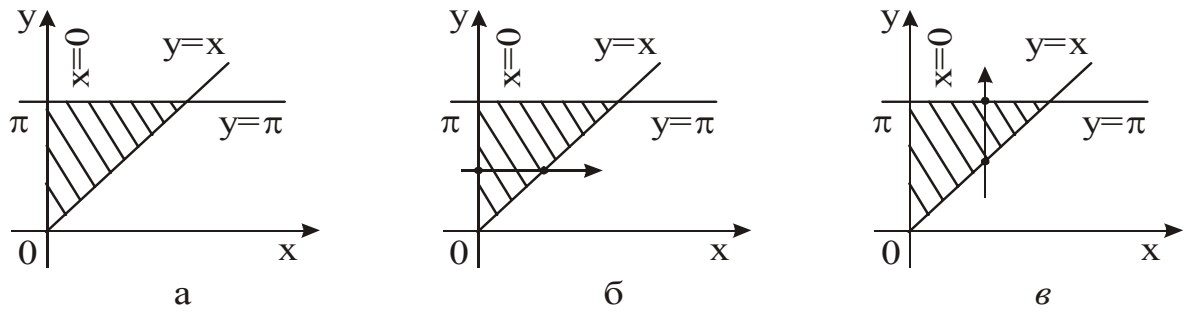


Рис. 7

Із (рис. 7,*б*) і рис.(7,*в*) бачимо, що подвійний інтеграл відносно області (*D*) можна записати у вигляді одного повторного інтеграла незалежно від того, в якому порядку буде виконуватись інтегрування в повторному інтегралі. Однак, враховуючи, що межі внутрішнього інтеграла будуть простішими у випадку, зображеному на (рис. 7,*б*), обчислення подвійного інтеграла раціонально виконати так:

$$\iint\limits_{(D)} \cos(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_0^{y} \cos(x+y)dx = \int\limits_0^{\pi} \sin(x+y)\Big|_0^{y} dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (\sin 2y - \sin y)dy = \left(-\frac{1}{2}\cos 2y + \cos y\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - 1 = -2$$

1.1.2. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Якщо область інтегрування (*D*) (рис. 8) обмежена двома променями, що виходять з полюса $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), і двома кривими $r = r_1(\varphi)$ і $r = r_2(\varphi)$, де $r_1(\varphi)$ і $r_2(\varphi)$ – однозначні функції при $\alpha \le \varphi \le \beta$ і $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$, то подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(D)} F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr ,$$

причому спочатку обчислюється внутрішній інтеграл, тобто

$$\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr ,$$

в якому φ вважається сталою.

Відзначимо, що коли полюс належить області (*D*), то $r_1(\varphi) = 0$.

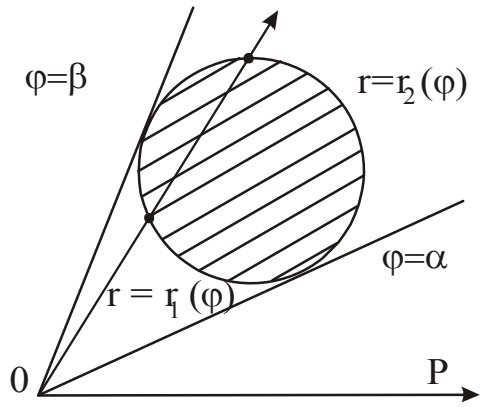


Рис. 8

Правила обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

1. Побудувати область інтегрування (D).
2. Замінити змінні *x* і *y*, від яких залежить підінтегральна функція на $r\cos\varphi$ і $r\sin\varphi$ відповідно, а елемент площі $dxdy$ на $rdrd\varphi$.
3. Перейти до повторного інтеграла, пам'ятаючи при цьому, що зовнішній інтеграл завжди береться за змінною φ, а внутрішній - за змінною *r*.
4. Розставити межі інтегрування. Для цього перевести рівняння меж області в полярну систему координат і визначити межі зміни полярного кута φ і полярного радіуса r в області (*D*).
5. Виконати обчислення.

Зауважимо, що перехід в подвійному інтегралі до полярних координат виконують, як правило, в тому випадку, коли область інтегрування (D) є круг або його частини.

Приклад 9. Обчислити

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} rdr .$$

Розв'язання. Обчислюючи спочатку внутрішній інтеграл, потім, інтегруючи одержану функцію, знаходимо

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} rdr = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{a\sin\varphi}^{a} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^2 - a^2\sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}a^2\int_0^{2\pi}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити

$$\iint\limits_{(Д)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

де (*Д*) – частина круга радіуса *a* з центром у точці O(0;0), яка розташована в першій чверті.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис. 9).

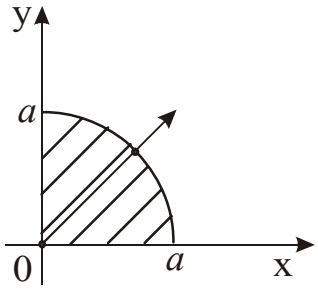


Рис. 9

При переході до полярних координат у подвійному інтегралі, будемо мати

$$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - \left(x^2 + y^2\right)}} = \iint\limits_{(D)} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Далі, переходячи від подвійного інтеграла в полярних координатах відносно області (D) до повторного і враховуючи, що в області (D) $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le r \le a$, будемо мати

$$\iint\limits_{(D)} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2}\Bigg|_0^a d\varphi = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - a) d\varphi = a\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a}{2}.$$

Приклад 11. Обчислити

$$\iint\limits_{(D)} arctg\frac{y}{x} dxdy,$$

де (D) – частина кільця $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le x\sqrt{3}$.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рис. 10):

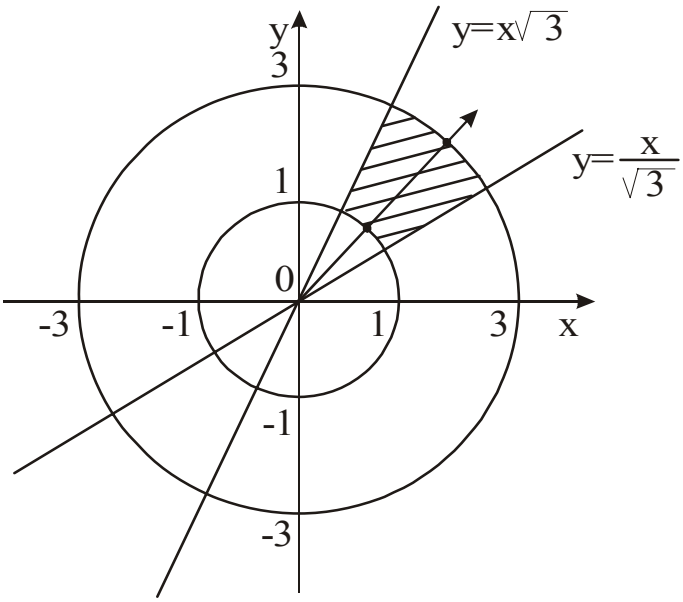


Рис. 10

Переходячи до полярних координат в подвійному інтегралі, будемо мати

$$\iint\limits_{(D)} arctg\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{(D)} arctgtg\varphi \cdot rdrd\varphi = \iint\limits_{(D)} \varphi rdrd\varphi .$$

Далі, переходячи до повторного інтеграла, одержимо

$$\iint\limits_{(D)} \varphi rdrd\varphi = \int \varphi d\varphi \int rdr .$$

Для розстановки меж інтегрування в повторному інтегралі переведемо рівняння меж області в полярну систему координат.

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1,\ r = 1;$$
$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9,\ r = 3;$$
$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi = \frac{\pi}{6};$$
$$y = x\sqrt{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow tg\varphi = \sqrt{3},\ \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)} \varphi rdrd\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int\limits_{1}^{3} rdr = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_1^3 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi(9-1)d\varphi = 4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi = 4 \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{6} .$$

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} arctg\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{(D)} \varphi r dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int\limits_{1}^{3} r dr = \frac{\pi^2}{6}.$$

Зауважимо, що оскільки в повторному інтегралі $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int\limits_{1}^{3} r dr$ всі чотири межі інтегрування сталі і кожний з інтегралів (внутрішній і зовнішній) залежить лише від однієї змінної, то обчислювати їх можна було б незалежно один від одного, тобто

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int\limits_{1}^{3} r dr = \left.\frac{\varphi^2}{2}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_{1}^{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right)\cdot(9-1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{12}\cdot 8 = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.1.3. Застосування подвійного інтеграла для розв'язання задач геометрії і механіки

Табл.

Вираз деяких величин через подвійний інтеграл

Назва величини	Формула для обчислення	
	у прямокутних координатах	у полярних координатах
Площа плоскої фігури	$S = \iint\limits_{(D)} dxdy$ (1)	$S = \iint\limits_{(D)} rdrd\varphi$ (1,а)
Об'єм циліндричного тіла	$V = \iint\limits_{(D)} z(x,y)dxdy$ (2)	$V = \iint\limits_{(D)} z(r,\varphi)rdrd\varphi$ (2,а)
Маса плоскої фігури	$m = \iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)dxdy$ (3)	$m = \iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)rdrd\varphi$ (3,а)
Статичні моменти плоскої фігури, відносно осей координат	$M_x = \iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)ydxdy$ (4) $M_y = \iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)xdxdy$ (5)	$M_x = \iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^2 \sin\varphi drd\varphi$ (4,а) $M_x = \iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^2 \cos\varphi drd\varphi$ (5,а)
Моменти інерції плоскої фігури, відносно осей координат і початку координат	$I_x = \iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)y^2dxdy$ (6) $I_y = \iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)x^2dxdy$ (7) $I_0 = \iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)(x^2+y^2)dxdy$ (8)	$I_x = \iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^3 \sin^2\varphi drd\varphi$ (6,а) $I_x = \iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^3 \cos^2\varphi drd\varphi$ (7,а) $I_x = \iint\limits_{(D)} \gamma(r,\varphi)r^3 drd\varphi$ (8,а)
Координати центра ваги плоскої фігури	$x_c = \dfrac{M_y}{m}$ (9) $y_c = \dfrac{M_x}{m}$ (10)	–

Зауважимо, що коли плоска фігура однорідна, то $\gamma(x,y)$=const, яку приймають рівною одиниці.

Розв'язання задач

Задача 1. Знайти подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ і $x=4$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру, обмежену даними лініями, тобто область (D) (рис. 11). Її площу обчислимо за формулою 1, (табл.), згідно з якою

$$S=\iint\limits_{(D)} dxdy$$

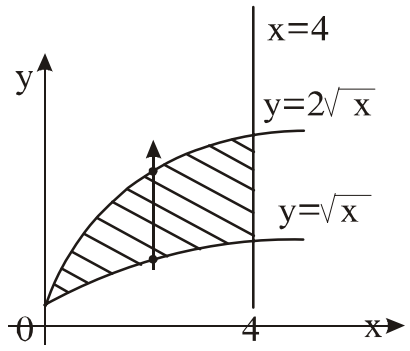


Рис. 11

Переходячи до повторного інтеграла й обчислюючи його, одержимо:

$$S=\iint\limits_{(D)} dxdy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy=\int_0^4 y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx=\int_0^4 (2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx=\int_0^4 \sqrt{x}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}.$$

Задача 2. Обчислити подвійним інтегруванням площу області, обмеженої лінією $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ (лемніската Бернуллі).

Розв'язання. Насамперед помічаємо, що заміна x на $-x$ і y на $-y$ не змінює рівняння кривої. А це свідчить про те, що крива розташована симетрично відносно координатних осей. Тому досить побудувати криву лише в першій чверті, а потім, враховуючи симетрію її відносно координатних осей, побудувати її в трьох інших четвертях.

Для побудови кривої запишемо її рівняння в полярній системі координат, поклавши $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Виконуючи перетворення, одержимо:

$$\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)^2=2a^2\left(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi\right);$$
$$\left(r^2\right)^2=2a^2r^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right);$$
$$r^2=2a^2\cos 2\varphi;$$
$$r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Оскільки полярний радіус r може набувати лише дійсних значень, то $\cos 2\varphi$ в одержаному рівнянні не може бути від'ємним, тобто $\cos 2\varphi\geq 0$.

Це означає, що кут 2φ повинен знаходитись або в першій, або в четвертій чверті. З'ясувавши, що досить побудувати криву лише в першій чверті,

розглянемо значення 2φ, яке задовольняє умові $0 \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$. Звідси випливає, що для побудови кривої в першій чверті, куту φ необхідно надавати значень від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Крива зображена на рис. 12.

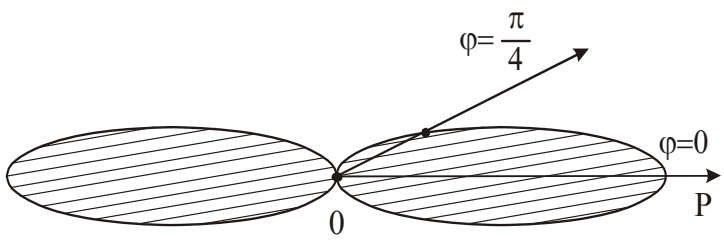


Рис. 12

Площу фігури, обмеженої даною лінією, обчислимо за формулою 1,*а* (табл.):

$$S = \iint\limits_{(D)} r dr d\varphi .$$

Переходячи до повторного інтеграла і враховуючи симетрію фігури, відносно осей координат, одержимо:

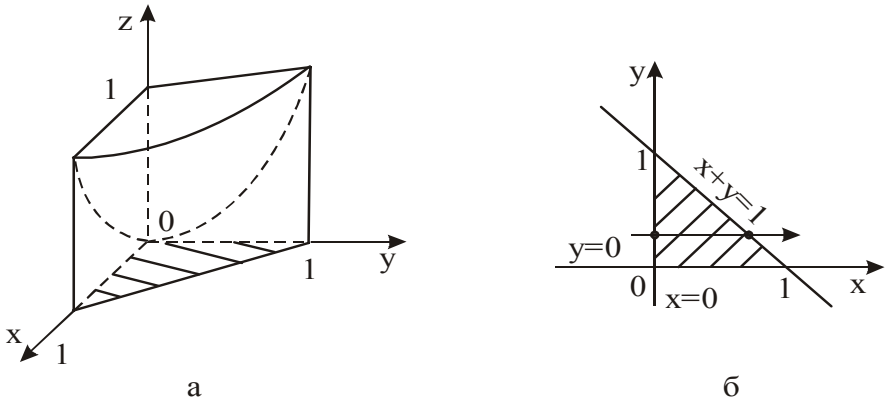
$$S = \iint\limits_{(D)} r dr d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2a^2.$$

Задача 3. Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, координатними площинами і площиною $x + y = 1$.

Розв'язання. Тіло, об'єм якого треба обчислити, обмежене знизу площиною $z = 0$, з боків площинами $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 1$ і зверху поверхнею $z = x^2 + y^2$.

Отже, це циліндричне тіло (рис. 13,*а*).



а б

Рис. 13

Проекцією тіла на площину xOy є область (D) (рис. 13,*б*). Згідно з формулою 2, (табл.) об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою

$$V = \iint\limits_{(D)} z dxdy ,$$

де $z = f(x, y)$ - рівняння поверхні, яка обмежує тіло зверху. У нашому випадку

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

і задача зводиться до обчислення подвійного інтеграла відносно області (D).

Виконуючи обчислення, одержимо:

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \left(x^2 + y^2\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)\Bigg|_0^{1-y} dy = \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + y^2 - y^3 \right) dy =$$

$$= \left(-\frac{(1-y)^4}{12} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Задача 4. Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $z = 4 - x^2$, координатними площинами і площиною $2x + y = 4$ ($x \geq 0$).

Розв'язання. Побудувавши тіло (рис.14), переконуємося, що воно циліндричне.

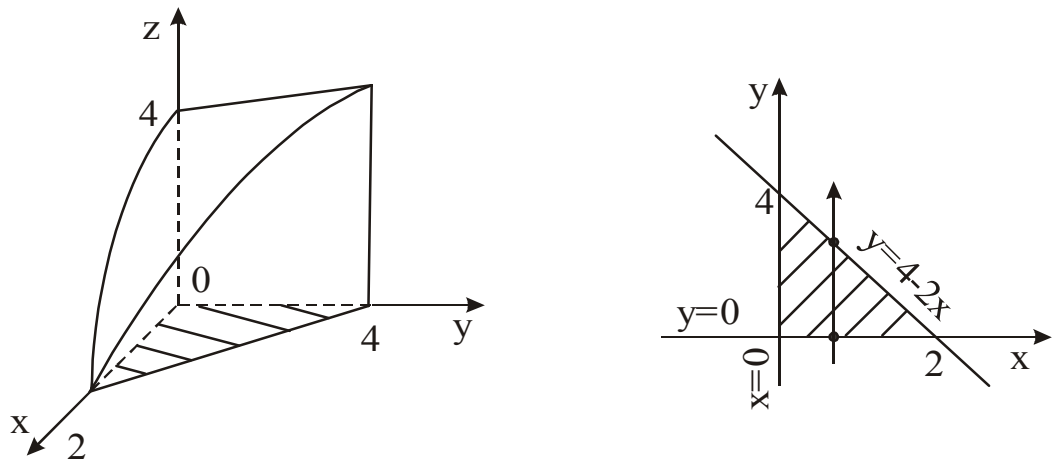


Рис. 14

Проекцією тіла на площину xOy є область (D) (рис. D,*б*). Згідно з формулою 2, (табл.), об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою

$$V = \iint\limits_{(D)} z dxdy .$$

Оскільки зверху тіло обмежене поверхнею $z = 4 - x^2$, то

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(4 - x^2\right) dxdy .$$

Обчислення будуть простішими, якщо інтегрування в повторному інтегралі виконувати в такому порядку, як показано на рис. 14,*б*.

Отже,

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(4 - x^2\right) dxdy = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \int_0^{4-2x} dy = \int_0^2 \left(4 - x^2\right)(4 - 2x) dx = 2\int_0^2 \left(4 - x^2\right)(2 - x) dx =$$

$$= 2\int_0^2 \left(8 - 4x - 2x^2 + x^3\right) dx = 2\left(8x - 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(16 - 8 - \frac{16}{3} + 4\right) = 13\frac{1}{3}.$$

Задача 5. Знайти подвійним інтегруванням об’єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ і площинами $2x - z = 0$ і $4x - z = 0$.

Розв’язання. Побудуємо тіло (рис. 15,*а*). Його проекцією на площину *xOy* є область (*D*) (рис. 15,*б*).

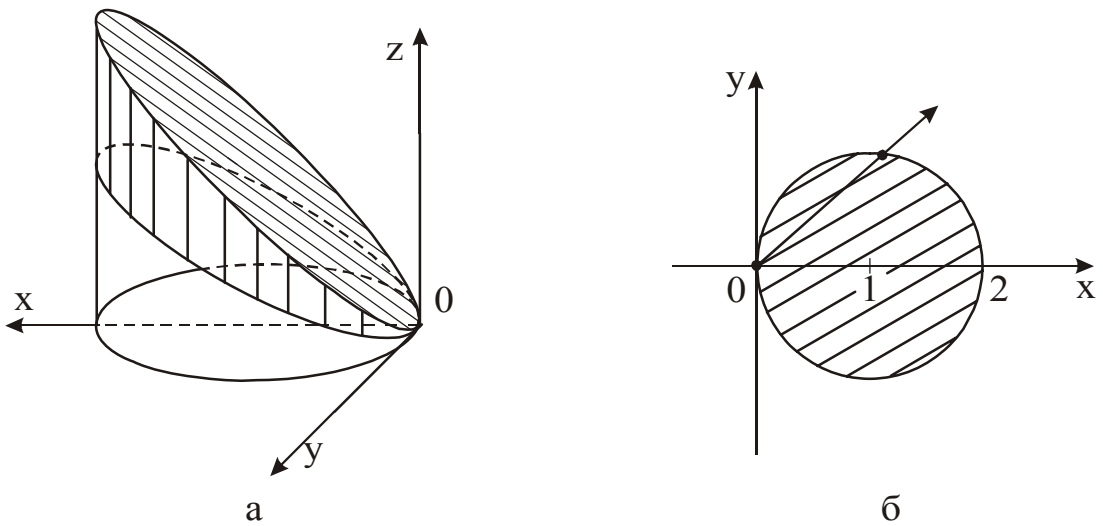


Рис. 15

Переконуємося в тому, що тіло не є циліндричним, бо знизу обмежене площиною $2x - z = 0$, а тому застосувати безпосередньо формулу 2, (табл.), для обчислення його об’єму не можна. Однак не важко зрозуміти, що шуканий об’єм буде дорівнювати різниці об’ємів двох циліндричних тіл, одне з яких обмежене зверху поверхнею $4x - z = 0$, а друге - поверхнею $2x - z = 0$.

Тоді

$$V = \iint\limits_{(D)} \left(z_в - z_н\right) dxdy = \iint\limits_{(D)} (4x - 2x) dxdy = 2\iint\limits_{(D)} xdxdy .$$

Оскільки область інтегрування (D) є круг, то доцільно перейти до полярних координат.

Внаслідок чого будемо мати

$$V = 2\iint\limits_{(D)} r^2 \cos\varphi dr d\varphi .$$

Межа області (D) в полярних координатах набуде вигляду $r = 2\cos\varphi$. Переходячи тепер від подвійного інтеграла до повторного і виконуючи обчислення, одержимо:

$$V = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 \cos\varphi dr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{2} d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\left.\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Отже, шуканий об'єм $V = 2\pi$.

Задача 6. Знайти масу квадратної пластинки із стороною $2a$, якщо густина матеріалу пластинки пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і на кутах квадрата дорівнює одиниці.

Розв'язання. Квадратну пластинку в системі xOy зручно розташувати таким чином, щоб точка перетину діагоналей квадрата співпала з початком координат, а сторони були паралельні осям координат (рис. 16).

Для обчислення маси пластинки скористаємося формулою 3, (табл.), згідно з якою маса плоскої фігури

$$m = \iint\limits_{(D)} \gamma(x, y) dxdy .$$

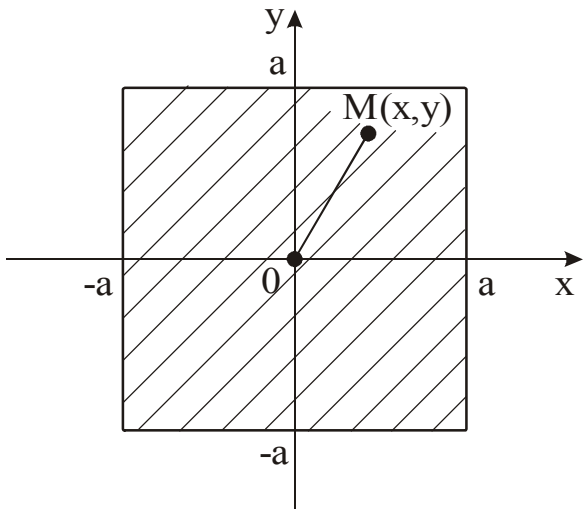


Рис. 16

За умовою задачі поверхнева густина

$$\gamma(x,y) = kd^2 = k\left(x^2 + y^2\right)$$

Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови, що на кутах квадрата $\gamma = 1$, а $d = a\sqrt{2}$. Тоді $1 = k \cdot 2a^2$, звідки $k = \dfrac{1}{2a^2}$ і $\gamma(x,y) = \dfrac{1}{2a^2}\left(x^2 + y^2\right)$.

Таким чином,

$$m = \iint\limits_{(D)} \gamma(x,y)dxdy = \frac{1}{2a^2}\iint\limits_{(D)}\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-a}^{a}\left(x^2 + y^2\right)dy .$$

Враховуючи симетрію фігури відносно координатних осей, остаточно будемо мати:

$$m = 4 \cdot \frac{1}{2a^2}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(x^2 + y^2\right)dy = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{a^2}\left(a \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \cdot x\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right) = \frac{4a^2}{3}.$$

Задача 7. Знайти статичний момент однорідного півкруга з радіусом R відносно діаметра.

Розв'язання. **1-й спосіб**. Так як нам відомі формули для обчислення статичних моментів плоскої фігури відносно осей координат формули 4 і 5, (табл.), то в системі xOy півкруг зручно розташувати таким чином, щоб його діаметр співпадав з однією із осей координат, наприклад Ox, а центр з початком координат (рис. 17). У цьому випадку область (D) буде обмежена лініями, рівняння яких $y = 0$ і $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

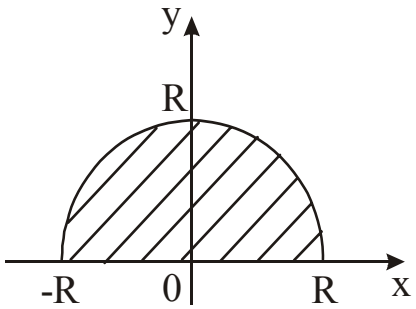


Рис. 17

Тоді, враховуючи однорідність фігури і її симетрію відносно осі Oy, одержимо:

$$M_x = \iint\limits_{(D)} y dxdy = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = 2\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = 2\int\limits_{0}^{R} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx = \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}R^3.$$

2-й спосіб. Оскільки область інтегрування (D) являє собою частину круга, то обчислення інтеграла можна було б виконувати і в полярних координатах. У силу формули 4,*а*, (табл.) і однорідності фігури

$$M_x = \iint\limits_{(D)} r^2 \sin\varphi dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^R r^2 dr = -\cos\varphi\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{R^3}{3}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{R^3}{3}(1+1) = \frac{2R^3}{3}$$

.

Задача 8. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої синусоїдою y = sinx, віссю Ox і прямою $x = \frac{\pi}{4}$ (рис. 18).

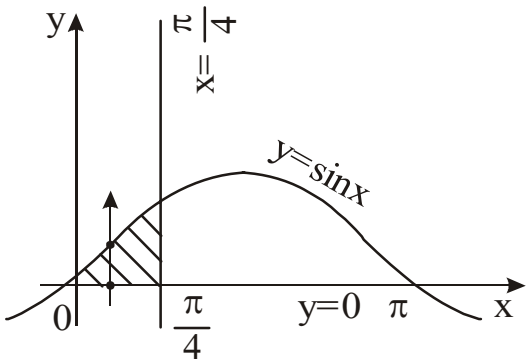


Рис. 18

Розв'язання. За формулами 9 і 10 (табл.)

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Обчислимо насамперед m, M_x і M_y, скориставшись відповідно формулами 3, 4, 5, (табл.), і враховуючи, що $\gamma(x, y) = 1$ в силу однорідності фігури.

Перетинаючи область (D) в напрямку осі Oy, бачимо, що $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \sin x$.

Тоді

$$m = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} y\Bigg|_0^{\sin x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

$$M_x = \iint\limits_{(D)} ydxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} ydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi - 2}{16}.$$

$$M_y = \iint\limits_{(D)} xdxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} xdx \int\limits_0^{\sin x} dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos xdx =$$

$$= (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}.$$

Отже,

$$x_c = \frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{4-\pi}{4(\sqrt{2}-1)} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}+1\right);$$

$$y_c = \frac{\pi - 2}{16}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{\pi - 2}{8(2-\sqrt{2})} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\sqrt{2}+2\right).$$

Задача 9. Знайти момент інерції однорідного рівнобедреного трикутника з основою *a* і висотою *h* відносно вершини.

Розв'язання. У даній задачі треба знайти момент інерції плоскої фігури відносно точки, тому трикутник слід розташувати в системі *xOy* таким чином, щоб його вершина співпадала з початком координат.

Тоді в силу однорідності фігури і формули 8 (табл.)

$$I_0 = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdy .$$

Якщо висоту трикутника сумістити з однією з осей координат, наприклад, з *Ox* (рис. 19), то рівняння меж області будуть мати найпростіший вигляд:

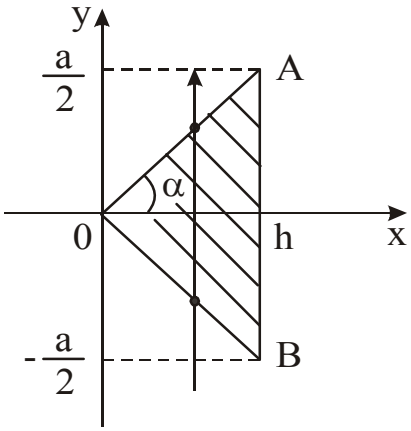


Рис. 19

OA: $y = kx$, *де* $k = tg\alpha = \dfrac{a}{2h}$, *тобто* $y = \dfrac{a}{2h}x$.

OB: $y = -\dfrac{a}{2h}x$.

AB: $x = h$.

Перетинаючи область (D) в напрямку осі Oy, бачимо, що змінна x змінюється від 0 до h, а змінна y змінюється від $-\dfrac{a}{2h}x$ до $\dfrac{a}{2h}x$.

Тоді

$$I_0 = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_0^h dx \int\limits_{-\frac{\alpha}{2h}x}^{\frac{\alpha}{2h}x} (x^2 + y^2)dy,$$

а, враховуючи симетрію фігури відносно осі Ox,

$$I_0 = 2\int\limits_0^h dx \int\limits_0^{\frac{a}{2h}x} (x^2 + y^2)dy = 2\int\limits_0^h \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2h}x} dx = 2\int\limits_0^h \left(\frac{a}{2h}x^3 + \frac{a^3}{24h^3}x^3 \right)dx =$$

$$2\left(\frac{a}{2h} + \frac{a^3}{24h^3} \right)\int\limits_0^h x^3 dx = \left(\frac{a}{h} + \frac{a^3}{12h^3} \right) \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^h = \left(\frac{a}{h} + \frac{a^3}{12h^3} \right) \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{ah\left(12h^2 + a^2\right)}{48}.$$

1.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Інтеграли виду:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

називаються криволінійними інтегралами другого роду.

1.2.1. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів. Розглянемо наступні випадки:

а) Якщо крива L, по якій обчислюється криволінійний інтеграл, задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t); y = \psi(t); (\alpha \leq t \leq \beta)$, де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, а також їх похідні $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ – неперервні функції t, то обчислення криволінійного інтегралу виконується за формулою

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt.$$

б) Якщо крива L, по якій обчислюється криволінійний інтеграл, лінія простору, задана параметричними рівняннями $x = x(t)$;

$y = y(t); z = z(t);\ (\alpha \le t \le \beta)$, де функції $x(t), y(t)$ і $z(t)$, а також їх похідні $x'(t)$ $y'(t)$і $z'(t)$ – неперервні функції t, то обчислення криволінійного інтегралу виконується за формулою

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\}dt.$$

в) Якщо крива L задана явно, рівнянням $y = f(x); (a \le x \le b)$, де $f(x)$ – неперервна функція, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[x,f(x)] + Q[x,f(x)]f'(x)\}dx.$$

г) Якщо крива L задана явно, рівнянням $x = \varphi(y); (c \le y \le d)$, де $\varphi(y)$ – неперервна функція, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \{P[\varphi(y),y]\varphi'(y) + Q[\varphi(y),y]\}dy.$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,$$

де L - дуга параболи $y = x^2$, від точки А(-1,1) до точки В(2,4).

Розв'язання. В даному прикладі дуга L парабола $y = x^2$, похідна цієї функції $y' = 2x$. Границі інтегрування – абсциси точок А і В - $a = -1, b = 2$. Таким чином, можемо записати:

$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_{-1}^{2} ((x^2 - 2x \cdot x^2) + (x^4 - 2x \cdot x^2)2x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x^3 - 4x^4 + 2x^5)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^6\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{3}(8+1) - \frac{1}{2}(16-1) - \frac{4}{5}(32+1) + \frac{1}{3}(64-1) = -9\frac{9}{10} = -9{,}9.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}},$$

де L дуга астроїди $x = R\cos^3 t,\ y = R\sin^3 t$, від точки А($R$,0) до точки В(0, R).

Розв'язання. Визначмо границі інтегрування для параметра t, для цього розглянемо абсциси точок А і В

$R = R\cos^3,\quad \cos t = 1,\quad t_н = 0;\quad 0 = R\cos^3 t,\quad \cos t = 0,\quad t_к = \frac{\pi}{2}.$

Визначимо диференціали dx, dy:

$dx = 3R\cos^2 t(-\sin t)dt, \quad dy = 3R\sin^2 t\cos t dt.$

Таким чином,

$$\int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}} = \int_0^{\pi/2} \frac{R^2\cos^6 t \cdot 3R\sin^2 t\cos t dt + R^2\sin^6 t \cdot 3R\cos^2 t\sin t\, dt}{(R\cos^3 t)^{5/3} + (R\sin^3 t)^{5/3}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{3R^3\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^5 t + \sin^5 t)}{R^{5/3}(\cos^5 t + \sin^5 t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{4} R^{4/3}\sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{3}{4} R^{4/3} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3}{8} R^{4/3} \left(\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \cos 4t dt \right) =$$

$$= \frac{3}{8} R^{4/3} \left(t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{3\pi}{16} R^{4/3} = \frac{3\pi}{16} R\sqrt[3]{R}.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L 2xydx + y^2dy + z^2dz,$$

де L дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t;$ від точки A(1,0,0) до точки B(1,0,4π).

Розв'язання. Знайдемо $dx = -\sin t\, dt; dy = \cos t\, dt; dz = 2\, dt.$ Границі інтегрування $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi$ (визначали аналогічно попередньому прикладу).

Отже,

$$\int_L 2xydx + y^2dy + z^2dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos t\sin t\,(-\sin t)\, dt + \sin^2 t\cos t\, dt + 4t^2 \cdot 2\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (8t^2 - \sin^2 t\cos t)dt = 8\int_0^{2\pi} t^2 dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t dt =$$

$$= \frac{8}{3} t^3 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t dt = \left| \begin{matrix} U = \sin t; dU = \cos t\, dt; \\ U_н = 0;\ U_в = 0. \end{matrix} \right| = \frac{16}{3}\pi^3.$$

1.2.2. Формула Гріна

У загальному випадку значення криволінійного інтеграла залежить від форми шляху інтегрування (тобто від кривої L) і від початкової та кінцевої точок цього шляху. Але в деяких випадках криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Наведемо теорему, яка вказує необхідну і достатню умову, незалежності криволінійного інтегралу від форми шляху інтегрування.

Теорема. Якщо функція $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ визначені та неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкненій області D, то, для того, щоб криволінійний інтеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежав від форми шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цієї області виконувалася умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Криволінійний інтеграл по простому замкненому гладкому контуру L, який обмежує область D, може бути перетворений в подвійний інтеграл по області D, обмеженої цим контуром.

Це перетворення виконується за формулою Гріна

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Передбачається, що функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, а також їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D і на контурі L, який її обмежує, причому контур L пробігається в додатному напрямі, (проти ходу годинникової стрілки).

Приклад . Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл

$$\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy,$$

де L - контур правої половини круга $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ від точки A(1,1) до точки C(1,3) та його діаметра.

Розв'язання. Згідно з формулою

$P(x,y) = 2(x^2 + y^2)$, $Q(x,y) = (x + y)^2$.

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y).$$

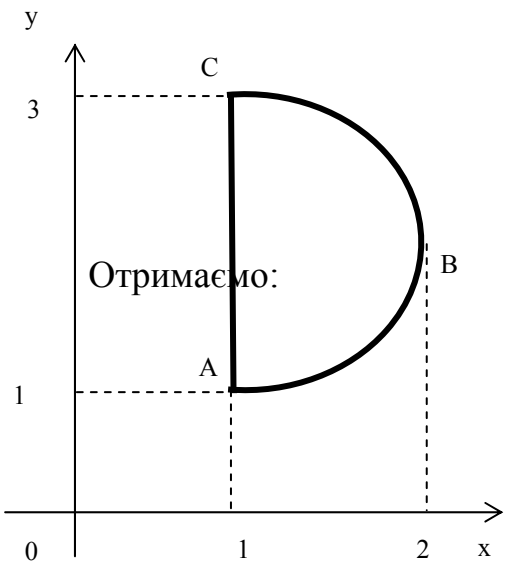


Рис. 20

На рис. 20 зображений контур ABC. ABC – дуга круга $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, її рівняння $x = \sqrt{1-(y-2)^2} + 1$. AC – діаметр, його рівняння $x = 1$. Використовуючи формулу Гріна,

Отримаємо:

$$\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = \iint_D (2(x + y) - 4y)dxdy.$$

Обчислюючи подвійний інтеграл, знайдемо значення криволінійного інтегралу по замкненому контуру L:

$$\iint_D (2(x+y)-4y)dxdy = \int_1^3 dy \int_1^{\sqrt{1-(y-2)^2}+1} (2x-2y)dx =$$

$$= \int_1^3 (x^2-2xy)\Big|_1^{\sqrt{1-(y-2)^2}+1} dy =$$

$$= \int_1^3 \left(\left(\sqrt{1-(y-2)^2}+1\right)^2 - 1 - 2y\sqrt{1-(y-2)^2}\right)dy =$$

$$= \int_1^3 \left(1-(y-2)^2 + 2\sqrt{1-(y-2)^2} - 2y\sqrt{1-(y-2)^2}\right)dy =$$

$$= \int_1^3 dy - \int_1^3 (y-2)^2 dy + 2\int_1^3 (1-y)\sqrt{1-(y-2)^2}dy =$$

$$= y\Big|_1^3 - \frac{1}{3}(y-2)^3\Big|_1^3 + 2I = 3 - 1 - \frac{1}{3}(1+1) + 2I = \frac{4}{3} + 2I.$$

В останньому інтегралі виконаємо підстановку:

$$y-2 = \sin t;\ dy = \cos t dt;\ y_н = -\frac{\pi}{2};\ y_в = \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin t-2)\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\, dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin t)\cdot \cos^2 t\, dt =$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin t\, dt.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо:

$$1)\ \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$2)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt \cdot \sin t\, dt = \left| \begin{matrix} U = \cos t;\ dU = -\sin t dt \\ U_н = 0;\ U_в = 0 \end{matrix} \right| = 0.$$

Таким чином, маємо

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = \frac{4}{3} - \pi.$$

1.2.3. Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Диференційне рівняння виду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

називається рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина задовольняє умові

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Загальний інтеграл такого рівняння може бути знайдений за формулою:

$$\int_a^x P(x,b)\,dx + \int_b^y Q(x,y)\,dy = C,$$

де a і b можуть бути вибрані довільно з урахуванням ОВФ для функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$.

Приклад . Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції $U(x,y)$. Знайти функцію $U(x,y)$.

$$\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy.$$

Розв'язання. Виберемо довільно початкову точку інтегрування з урахуванням ОВФ функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ – це точка (2,1).

$$P(x,y) = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}, \qquad Q(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Знайдемо $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y(x-y)^2 - y^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2xy}{(x-y)^3};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x(x-y)^2 + x^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2xy}{(x-y)^3};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Даний вираз є повним диференціалом. Знайдемо функцію $U(x,y)$

$$U(x,y) = \int_2^x \left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \int_1^y \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy + C =$$

(при інтегруванні другого інтегралу по змінній y, x вважаємо константою)

$$= -\frac{1}{x-1}\Big|_2^x - \ln x\Big|_2^x + \ln y\Big|_1^y - \frac{x^2}{x-y}\Big|_1^y + C =$$

$$= -\left(\frac{1}{x-1} - 1\right) - (\ln x - \ln 2) + (\ln y - \ln 1) - x^2\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-1}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{x-1} + 1 - \ln x + \ln 2 + \ln y - \frac{x^2}{x-y} + \frac{x^2}{x-1} + C = [C_1 = C + 1 + \ln 2]$$

$$= \ln\frac{y}{x} + \frac{x^2-1}{x-1} - \frac{x^2}{x-y} + C_1 = \ln\frac{y}{x} - \frac{x^2}{x-y} + x + 1 + C_1 = [C_2 = C_1 + 1] =$$

$$= \ln\frac{y}{x} - \frac{x^2}{x-y} + x + C_2 = \ln\frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} + C_2.$$

$$U(x,y) = \ln\frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} + C_2.$$

Зробимо перевірку отриманої функції. Для цього знайдемо $\frac{\partial U}{\partial x}$ та $\frac{\partial U}{\partial y}$, якщо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \text{ та } \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y),$$

то функція знайдена вірно.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{(x-y)^2} = P(x,y);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x(x-y) + xy}{(x-y)^2} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} = Q(x,y).$$

Отже

$$U(x,y) = \ln\frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} + C_2.$$

1.2.4. Застосування криволінійних інтегралів другого роду

За допомогою криволінійних інтегралів другого роду обчислюють площу плоскої фігури, обмеженої кусочно-гладкою кривою L

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$

Робота силового поля при переміщенні матеріальної точки по кривій L виражається криволінійним інтегралом

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – проекції сил поля на осі координат.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ та прямою, яка проходить через точку O(0,0) та точку A(2,4).

Розв'язання: Область D, як обмежена вказаними лініями, має вигляд (рис. 21)

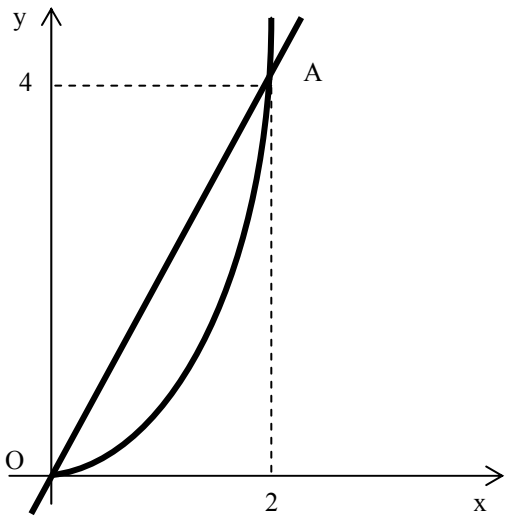


Рис. 21

1. Обчислимо криволінійний інтеграл за дугою AB параболи $y = x^2$,

$$dy = 2xdx.$$

$$\int_0^2 x \cdot 2xdx - x^2dx = \int_0^2 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

2. Обчислимо криволінійний інтеграл по прямій AB. Запишемо рівняння прямої AB використовуючи рівняння:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

$$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-0}{2-0};\quad \frac{y}{4}=\frac{x}{2};\quad y=2x;\quad dy=2dx.$$

$$\int_{2}^{0} x\cdot 2dx-2x\,dx=0.$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\text{(од.кв.)}$$

Приклад 2. Обчислити площу, обмежену однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}.$$

Розв'язання. Перш за все визначимо під інтегральний вираз $dx=a(1-\cos t)dt;\quad dy=a\sin t\,dt.$

При обчисленні даного інтегралу інтегрування повинно виконуватись по контуру OABO (рис. 22) в напрямку, вказаному стрілками. На дузі ABO параметр t змінюється від 2π до 0. На відрізку OA $y=0$, тому $dy=0$.

$$S=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}[a(t-\sin t)\cdot a\sin t-a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)]\,dt=$$

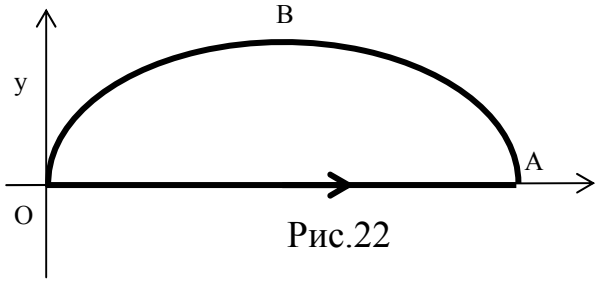


Рис.22

$$=\frac{1}{2}a^2\int_{2\pi}^{0}(t\cdot\sin t+2\cos t-2)\,dt=a^2\left[\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}t\cdot\sin t\,dt+\int_{2\pi}^{0}\cos t\,dt-\int_{2\pi}^{0}dt\right].$$

Обчислимо перший інтеграл окремо, використовуючи метод інтегрування частинами.

$$\int_{2\pi}^{0}t\cdot\sin t\,dt=\left|\begin{matrix}U=t;\ dU=dt\\ dV=\sin t dt;\ V=-\cos t\end{matrix}\right|=$$

$$=-t\cdot\cos t\Big|_{2\pi}^{0}+\int_{2\pi}^{0}\cos t\,dt=-2\pi+\sin t\Big|_{2\pi}^{0}=-2\pi.$$

Отже, маємо

$$S=a^2\left[-\pi+\sin t\Big|_{2\pi}^{0}-t\Big|_{2\pi}^{0}\right]=a^2[-\pi+2\pi]=\pi a^2\text{(од.кв.)}$$

Приклад 3. Обчислити роботу сили $\vec{F}=xy\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки массою m з точки B(1,1) в точку C(4,2) по прямій.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки B і C

$$\frac{y-1}{1}=\frac{x-1}{3};\quad y-1=\frac{1}{3}(x-1);\quad y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}.$$

Запишемо криволінійний інтеграл. Тут проекція сили: $P(x,y)=xy$; $Q(x,y)=x+y$. При переміщенні від точки B(1,1) до точки C(4,2) змінна x пробігає значення від 1 до 4.

$$A=\int_L xydx+(x+y)dy=\int_1^4 x\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)dx+\left(x+\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}dx=$$

$$=\int_1^4\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{9}x+\frac{2}{9}\right)dx=\left(\frac{1}{9}x^3+\frac{5}{9}x^2+\frac{2}{9}x\right)\Big|_1^4=$$

$$=\frac{1}{9}(64-1)+\frac{5}{9}(16-1)+\frac{2}{9}(4-1)=\frac{63+75+6}{9}=16\text{ (од.роботи)}$$

1.3. Криволінійний інтеграл по довжині дуги

Нехай функція *f(x,y)* визначена і неперервна в точках дуги *AB* гладкої кривої *L*, рівняння якої $y=\varphi(x)$ $(a\le x\le b)$.

Розіб'ємо дугу точками $A=A_0, A_1, A_2,.....,A_n=B$. Нехай ΔS_k - довжина дуги $A_{к-1}A_к$. На кожній елементарній дузі виберемо довільну точку $M_к(\xi_k;\eta_k)$ і помножимо значення функції $f(\xi_k;\eta_k)$ в цій точці на довжину відповідної дуги ΔS_k.

Інтегральною сумою для функції *f(x,y)* по довжині дуги *AB* називається сума виду:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\,\Delta S_k .$$

Криволінійним інтегралом по довжині дуги AB від функції *f(x,y),* або криволінійним інтегралом 1-го роду називається границя інтегральної суми за умови, що $\max\Delta S_k\to 0$, тобто

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\lim_{\max\Delta S_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\,\Delta S_k ,$$

де *ds* – диференціал дуги.

Криволінійний інтеграл 1-го роду обчислюється за формулою

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx . \qquad (1)$$

Якщо крива *L* задана параметричними рівняннями: $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1\le t\le t_2)$, то

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \qquad (2)$$

Аналогічно визначається і обчислюється криволінійний інтеграл 1-го роду від функції трьох змінних *f(x,y,z)* по просторовій кривій. Якщо просторова крива задана рівняннями *x = x(t), y = y(t), z = z(t)* $(t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z`(t))^2}\,dt\,. \qquad (3)$$

Якщо *f(x,y)* > 0, то криволінійний інтеграл 1-го роду, тобто $\int_L f(x,y)ds$ являє собою масу кривої *L*, що має змінну лінійну густину $\gamma = f(x,y)$ (фізичне тлумачення).

Основні властивості криволінійного інтеграла по довжині дуги (1-го роду)

1. Криволінійний інтеграла 1-го роду не залежить від напрямку шляху інтегрування

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds\,.$$

2. $\int_L (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))ds = \int_L f_1(x,y)ds \pm \int_L f_2(x,y)ds\,.$
3. $\int_L cf(x,y)ds = c\int_L f(x,y)ds$, де *c = const.*
4. Якщо контур інтегрування *L* розбити на дві частини L_1 і L_2, то

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds\,.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити $\int_L (x-y)ds$, де *L* – відрізок прямої від точки *O*(0;0) до точки *A*(4;3).

Розв'язання. Складемо рівняння прямої *OA*. Так як ця пряма проходить через початок координат, то її рівняння можна записати у вигляді *y = кx*. Оскільки точка *A*(4;3) належить прямій *OA*, то координати точки *A* задовольняють рівнянню *y = кx*. Тому, підставляючи в це рівняння координати точки *A*, одержимо 3 = 4*к*, звідки $к = \frac{3}{4}$. Отже, рівняння прямої *OA:* $y = \frac{3}{4}x$.

Враховуючи далі, що $y' = \frac{3}{4}$ і $0 \le x \le 4$, за формулою (1) знаходимо

$$\int_L (x-y)ds = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int_0^4 xdx = \frac{5}{16}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_L (x+y)ds$, де L – контур трикутника OAB з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$ і $B(0;1)$ (рис. 23).

Розв'язання.

На прямій OA: $y = 0$, $y' = 0$, $0 \le x \le 1$;

на прямій AB: $y = 1 - x$, $y' = -1$, $0 \le x \le 1$;

на прямій OB: $x = 0$, $x' = 0$, $0 \le y \le 1$.

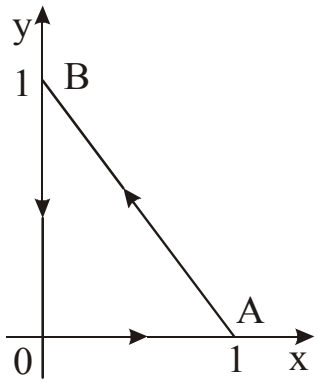


Рис. 23

Тому згідно з властивостями (4) і (1) криволінійного інтеграла по довжині дуги і формулою (1), будемо мати:

$$\int_L (x+y)ds = \int_{OA}(x+y)ds + \int_{AB}(x+y)ds + \int_{BO}(x+y)ds =$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+0}dx + \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+1}dx + \int_0^1 y\sqrt{1+0}dy = \int_0^1 xdx + \sqrt{2}\int_0^1 dx + \int_0^1 ydy =$$

$$\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \sqrt{2}x\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Приклад 3. Обчислити $\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, де L – дуга розгортки кола $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ і $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t;$$
$$y'_t = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

Тоді

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t = a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2t^2.$$

Скориставшись далі формулою (2), одержимо:

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2} \cdot \sqrt{a^2t^2dt} =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} t\sqrt{\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\cdot t\,dt = \frac{a^2}{2}\cdot \frac{2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{3}\left((1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Приклад 4. Обчислити $\int_L (x+z)ds$ де L – дуга кривої $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$ і $0 \le t \le 1$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо $x'_t = 1$, $y'_t = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot 2t = 3\sqrt{2}t$, $z'_t = 3t^2$. Тоді $(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2 = 1 + 18t^2 + 9t^4$.

Далі, в силу формули (3) маємо:

$$\int_L (x+z)ds = \int_0^1 (t+t^3)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt = \frac{1}{36}\int_0^1 (1+18t^2+9t^4)^{\frac{1}{2}}\,d(1+18t^2+9t^4) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot \frac{2(1+18t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{54}\left(28^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{54}\left(56\sqrt{7} - 1\right).$$

Приклад 5. Обчислити $\int_L (x-y)ds$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = ax$ в полярних координатах має вигляд $r = a\cos\varphi$. Оскільки $r'_\varphi = -a\sin\varphi$ і $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, то

$$\int_L (x-y)ds = \int_\alpha^\beta (r\cos\varphi - r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(\cos\varphi - \sin\varphi)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)\cdot a\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi = a^2\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_L yds$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(4;\sqrt{8})$.

Розв'язання. Тут зручно лінію задати у вигляді $x = \frac{y^2}{2}$. Тоді $x'_y = y$ і :

$$\int\limits_L yds = \int\limits_c^d y\sqrt{1+\left(x_t^{`}\right)^2}dy = \int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int\limits_c^d \left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}.$$

1.3.1. Застосування криволінійного інтеграла по довжині дуги до розв'язання задач механіки

Нехай L є плоска крива, яка має змінну лінійну густину $\gamma(x,y)$, тоді:

а) маса m кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int\limits_L \gamma(x,y)ds\,; \tag{4}$$

б) статичні моменти дуги кривої відносно осей координат, знаходять за формулами

$$M_x = \int\limits_L \gamma(x,y)yds\,, \tag{5}$$

$$M_y = \int\limits_L \gamma(x,y)xds\,; \tag{6}$$

в) координати центра ваги дуги кривої обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}\,, \tag{7}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m}\,; \tag{8}$$

г) моменти інерції дуги кривої відносно осей координат і початку координат знаходяться за формулами:

$$I_x = \int\limits_L y^2\gamma(x,y)ds\,, \tag{9}$$

$$I_y = \int\limits_L x^2\gamma(x,y)ds\,, \tag{10}$$

$$I_0 = \int\limits_L \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)ds\,. \tag{11}$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти масу дуги кривої $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$ $(0 \le t \le 1)$, лінійна густина якої змінюється за законом $\gamma = \sqrt{2y}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $x'_t = 1$, $y'_t = t$, $z'_t = t^2$ і $0 \le t \le 1$ за формулою (3) маємо:

$$m = \int_L \sqrt{2y}ds = \int_0^1 \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}t^2} \cdot \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}dt = \int_0^1 t\sqrt{1^2 + t^2 + t^4}dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}}d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2 + \frac{1}{2}}{2} \cdot \sqrt{t^4 + t^2 + 1} + \frac{3}{8}\ln\left(t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{t^4 + t^2 + 1}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Приклад 2. Знайти координати центра ваги однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$.

Розв'язання. В силу формул (7), (8):

$$x_c = \frac{M_y}{m};$$
$$y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Обчислимо спочатку m, M_x і M_y, враховуючи, що $\gamma(x, y) = 1$, $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$:

$$\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) =$$
$$= a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Маємо:

$$m = \int_L ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 4a.$$

$$M_x=\int_L yds\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt=\int_0^{\pi} a(1-\cos t)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2a^2\int_0^{\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}dt=4a^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt=4a^2\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt-4a^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=a^2\left(-8\cos\frac{t}{2}+8\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=a^2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}a^2.$$

$$M_y=\int_L xds\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt=\int_0^{\pi} a(t-\sin t)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a^2\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2a^2\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}-2a^2\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt=\begin{vmatrix} u=t & du=dt \\ dv=\sin\frac{t}{2}dt & v=-2\cos\frac{t}{2}\end{vmatrix}=2a^2\left(-2t\cos\frac{t}{2}+2\int\cos\frac{t}{2}dt\right)\Bigg|_0^{\pi}-$$

$$-4a^2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt=4a^2\left(-t\cos\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}-8a^2\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{\pi}=8a^2-\frac{8}{3}a^2=\frac{16}{3}a^2.$$

Таким чином, $x_c=\frac{4}{3}a$ і $y_c=\frac{4}{3}a$.

Приклад 3. Знайти моменти інерції відносно осей координат відрізка однорідної прямої $z = -2y + 1$, розташованого між осями координат в площині yOz.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину прямої з осями координат. При $y = 0$ $z = 1$, при $z = 0$ $y = \frac{1}{2}$. Отже, $A(0;1)$ і $B(\frac{1}{2};0)$ – шукані точки.

У силу формул (9) і (10):

$$I_y=\int_{AB} z^2\gamma(y,z)ds;$$
$$I_z=\int_{AB} y^2\gamma(y,z)ds.$$

Оскільки $z = -2y + 1$, то $z_y'=-2$ і $ds=\sqrt{1+\left(z_y'\right)^2}dy=\sqrt{1+4}dy=\sqrt{5}dy$. Враховуючи також, що $\gamma(x,y) = 1$, бо пряма однорідна, одержимо:

$$I_y=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2y+1)^2\sqrt{5}dy=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{(-2y+1)^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{6}(0-1)=\frac{\sqrt{5}}{6};$$

$$I_z=\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\sqrt{5}dy=\sqrt{5}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{1}{8}-0\right)=\frac{\sqrt{5}}{24}.$$

Отже, $I_y = \frac{\sqrt{5}}{6}$ і $I_z = \frac{\sqrt{5}}{24}$.

Приклад 4. Знайти момент інерції відносно початку координат дуги кривої $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$ між точками, для яких $t = 0$ і $t = 1$, якщо густина γ в кожній її точці дорівнює $\frac{1}{y^2}$.

Розв'язання. За формулою (11)

$$I_0 = \int_L \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y)ds .$$

Оскільки $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$, то $x'_t = t^2$, $y'_t = t$ і

$$ds = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}dt = \sqrt{t^4 + t^2}dt = t\sqrt{t^2 + 1}dt, \ \gamma = \frac{1}{y^2} = \frac{4}{t^4}.$$

Тоді

$$I_0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{4}t^4\right) \cdot \frac{4}{t^4} \cdot t\sqrt{t^2 + 1}dt \int_0^1 \left(\frac{4}{9}t^2 + 1\right)\sqrt{t^2 + 1} \cdot tdt = \left| \begin{array}{c} t^2 + 1 = u^2 \\ 2tdt = 2udu \\ tdt = udu \\ u_н = 1; \quad u_b = \sqrt{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{9}\left(u^2 - 1\right) + 1\right) \cdot u \cdot udu = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{9}u^4 + \frac{5}{9}u^2\right)du = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{5}u^5 + \frac{5}{3}u^3\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{16}{5}\sqrt{2} + \frac{10}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{5} - \frac{5}{3}\right) = \frac{98\sqrt{2} - 37}{135}.$$

РОЗДІЛ 2. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1. Числові ряди

Рядом називають суму нескінченної множини елементів

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots, \qquad (1)$$

які є членами нескінченної послідовності $\{U_n\}$.

Елементи $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n, \ldots$ називають членами ряду.

Скорочено ряд позначають так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots.$$

Сума n перших членів ряду

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n. \qquad (2)$$

називається *частковою сумою ряду*. Ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Якщо границя послідовності часткових сум не існує або дорівнює нескінченності, то ряд називається *розбіжним.*

Необхідна ознака збіжності ряду: якщо ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ збігається, то його загальний член U_n наближається до нуля, при нескінченному зростанні *n*, тобто

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0. \qquad (3)$$

Ця ознака не є достатньою.

Приклад 1. Знайти суму ряду та дослідити його на збіжність.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Розв'язання:

1) Розкладемо даний раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Потім послідовно розглянемо часткові суми даного ряду.

Розкладемо квадратний тричлен на лінійні множники:

$$4n^2+8n+3 = 4n^2+8n+4-4+3 = (2n+2)^2-1 = (2n+1)(2n+3).$$

Тепер загальний член ряду представимо у вигляді:

$$U_n = \frac{2}{4n^2+8n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Розкладемо отриманий раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3};$$

$$2 = A(2n+3) + B(2n+1);$$

$$\text{при } n = -\frac{1}{2},\ \text{маємо: } 2 = 2A, \qquad A = 1;$$

$$\text{при } n = -\frac{3}{2},\ \text{маємо: } 2 = -2B, \qquad B = -1.$$

Тому маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right).$$

Розглянемо часткові суми даного ряду.

$$S_1 = \frac{1}{2\cdot 1+1} - \frac{1}{2\cdot 1+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5};$$

$$S_2 = \frac{1}{2\cdot 1+1} - \frac{1}{2\cdot 1+3} + \frac{1}{2\cdot 2+1} - \frac{1}{2\cdot 2+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7};$$

$$S_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2\cdot 3+1} - \frac{1}{2\cdot 3+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9};$$

$$\cdots$$

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}.$$

Для знаходження суми S даного ряду, перейдемо до границі:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

2) Формула суми нескінченно спадаючої геометричної прогресії:

$$S = \frac{b_1}{1-q},$$

де b_1 - перший член нескінченно спадаючої геометричної прогресії, а q - її знаменник.

Представимо ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right).$$

Знаменник $q = {}^1/_2$, а перший член b_1=1. Сума дорівнює:

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - {}^1/_2}\right) = \frac{2}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

2.1.1. Ряди з додатними членами

Для числових рядів з додатними членами $(U_n > 0)$, при дослідженні на збіжність, використовують наступні достатні ознаки збіжності:

Ознака порівняння. Якщо ряд з додатними членами

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots \qquad (4)$$

порівняти з іншим рядом з додатними членами

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots \qquad (5)$$

збіжність або розбіжність котрого відома, і якщо починаючи з деякого номера *n* виконується умова:

1) $U_n \leq V_n$ і ряд (5) збігається, то і ряд (4) також збігається;
2) $U_n \geq V_n$ і ряд (5) розбігається, то і ряд (4) також розбігається.

При використанні цієї ознаки, в якості еталонного ряду часто використовують нескінченну геометричну прогресію

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q > 0,$$

яка при $q < 1$ збігається, а при $q \geq 1$ розбігається, або узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ .$$

який при $p > 1$ збігається і розбігається при $p \leq 1$.

Ознака Д'Аламбера. Якщо

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, а при $C > 1$ розбігається, а при $C = 1$ питання про збіжність залишається без відповіді.

Радикальна ознака Коші. Якщо

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, при $C > 1$ розбігається, а при $C = 1$ питання про збіжність залишається без відповіді.

Інтегральна ознака Коші. Ряд з додатними членами $U_n = f(n)$ збігається або розбігається, якщо збігається або розбігається відповідний невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx, \text{ де } f(x) - \text{ неперервно спадаюча функція.}$$

Приклад 2. Дослідити за ознакою порівняння збіжність ряду:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+4};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)5^n}.$$

Розв'язання:

1)Порівняємо цей ряд з узагальненим гармонійним рядом. В якості еталонного ряду обираємо $V_n = \frac{1}{n^2}$, так як $p = 2$, то цей ряд є збіжним. Виконаємо порівняння U_n з V_n:

$$\frac{1}{n^2+7n+4} \le \frac{1}{n^2}.$$

Отже, згідно ознаки порівняння, даний ряд є збіжним.

2) Кожен член U_n даного ряду більше від відповідного члена $V_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}.$$

Згідно ознаки порівняння, даний ряд розбігається.

3) Кожен член $U_n = \frac{1}{(n+2)5^n}$ даного ряду, починаючи з другого, менше відповідного члена $V_n = \frac{1}{5^n}$ нескінченної геометричної прогресії, $q = \frac{1}{5} < 1$. Ця нескінченна геометрична прогресія є збіжним рядом. Згідно ознаки порівняння $\frac{1}{(n+2)5^n} < \frac{1}{5^n}$, досліджуваний ряд також збігається.

Приклад 3. Дослідити за ознакою Д'Аламбера збіжність ряду:

$$1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n};\quad 3)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}.$$

Розв'язання:

1)Знаючи *n*-ий член ряду, знаходимо наступний (*n*+1)-й член:

$$U_n = \frac{3^n}{2^n(2n+1)},\quad U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(2(n+1)+1)} = \frac{3^n\cdot 3}{2^n\cdot 2\cdot(2n+3)}.$$

Знайдемо границю відношення U_{n+1} до U_n при необмеженому зростанні *n*:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot 2^n\cdot(2n+1)}{2^n\cdot 2\cdot(2n+3)\cdot 3^n} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Так як $n \to \infty$ і максимальна степінь чисельника дорівнює максимальній степені знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів, які знаходяться біля старшої степені *n*, отже маємо: $C = \frac{3}{2} > 1$ тому даний ряд розбігається.

$$2)\ U_n = \frac{n!}{5^n};\qquad U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{5^n\cdot 5}.$$

Знайдемо границю відношення U_{n+1} до U_n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)\cdot 5^n}{5^n\cdot 5\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty.$$

$C=\infty$, тому робимо висновок що даний ряд розбігається.

3) $U_n=\dfrac{7^{3n}}{(2n-5)!}$; $\quad U_{n+1}=\dfrac{7^{3(n+1)}}{(2(n+1)-5)!}=\dfrac{7^{3n}\cdot 7^3}{(2n-3)!}=$

$$=\frac{7^{3n}\cdot 7^3}{(2n-5)!\cdot(2n-4)\cdot(2n-3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{3n}\cdot 7^3\cdot(2n-5)!}{(2n-5)!\cdot(2n-4)\cdot(2n-3)\cdot 7^{3n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7^3}{(2n-4)\cdot(2n-3)}=0.$$

$C=0<1$, тому робимо висновок, що даний ряд збігається.

Приклад 4. Дослідити за радикальною ознакою Коші збіжність ряду:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n;\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n^2}$$

Розв'язання:

1) За радикальною ознакою Коші необхідно знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+5}=\frac{3}{4}.$$

$$C=\frac{3}{4}<1-\text{ ряд збігається.}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{2n-1}-1\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-(2n-1)}{2n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot n}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

$C=\sqrt{e}>1-$ ряд розбігається.

(При обчисленні границі ми скористалися другою чудовою границею).

Приклад 5. Дослідити за інтегральною ознакою Коші збіжність ряду:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1};\quad 2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Розв'язання. Замінимо у заданому виразі загального члену ряду $U_n=f(n)$ номер n неперервною змінною x і переконаємося, що функція $f(x)$ є неперервною і спадаючою на нескінченному інтервалі зміни x. Потім знаходимо невласний інтеграл від функції $f(x)$ з нескінченною верхньою границею.

$$1)\ f(x)=\frac{2x}{x^2+1};\qquad \int_1^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{2x}{x^2+1}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} t=x^2+1\\ dt=2xdx\\ t_н=2;\ t_в=\infty\end{bmatrix}==\lim_{N\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{dt}{t}=\lim_{N\to\infty}\ln t\Big|_2^N=\ln\infty-\ln 2=\infty.$$

Інтеграл розбігається, а отже розбігається і ряд.

$$2)\ f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x};\qquad \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{N\to\infty}\int_2^{N}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x} \\ t_н=\ln 2;\ t_в=\infty \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{\ln 2}^{N}\frac{dt}{t^2}=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{\ln 2}^{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{t}\Big|_{N}^{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\infty}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Інтеграл збігається, тому збігається і ряд.

$$3)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2n-1}};\qquad \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}2\sqrt{2x-1}\Big|_1^N==\infty-1=\infty.$$

Інтеграл розбігається, а отже ряд розбігається.

2.1.2. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінного ряду. Ознака збіжності знакозмінного ряду

Знакозмінний ряд (з членами різних знаків)

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n=U_1+U_2+U_3+\cdots$$

називається *абсолютно* збіжним, якщо збігається ряд, складений з абсолютних значень його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|=|U_1|+|U_2|+|U_3|+\cdots$$

Ряд, знаки членів котрого строго чергуються

$$U_1-U_2+U_3-U_4+\cdots+(-1)^{n+1}U_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n,\ \ (U_n>0)$$

збігається, якщо його члени зменшуються за абсолютним значенням, тобто $U_1>U_2>U_3>\cdots$ і загальний член ряду на нескінченност прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty}U_n=0.$ (ознака Лейбніца).

Приклад 6. Дослідити збіжність знакозмінного ряду.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1};\quad 2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Розв'язання:

1) $u_n-\frac{1}{2n-1}$. Досліджуємо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0,$$

отже даний ряд збігається. Для того щоб установити збігається ряд абсолютно чи умовно, дослідимо ряд, складений з абсолютних значень членів даного ряду . Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\ln(2x-1)\Big|_1^N=\frac{1}{2}(\lim_{N\to\infty}\ln(2N-1)-1)=\infty,$$

невласний інтеграл розбігається, тому можемо зробити висновок, що ряд збігається умовно.

2) $U_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$. За ознакою Лейцбніца ряд збігається. Досліджуємо за ознакою Д'Аламбера.

Знайдемо $U_{n+1} = \dfrac{1}{(2(n+1)-1)!} = \dfrac{1}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{(2n-1)!2n(2n+1)}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!\,2n(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0, \qquad (C<1).$$

Даний ряд збігається абсолютно.

3) $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Дослідимо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0$, ряд збігається. Застосуємо інтегральну ознаку Коші для з'ясування абсолютної збіжності:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{x^2+x} =$$

$$= \left[x^2+x = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \lim_{N\to\infty}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^N =$$

$$= \ln\left(\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N+1}\right) - \ln\frac{1}{2} = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$$

Інтеграл збігається, а отже ряд збігається абсолютно.

2.2. Функціональні ряди

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \cdots$, члени якого являються функціями від змінної x, називається *функціональним.* При різних значеннях x функціональний ряд перетворюється в числовий, який може бути збіжним або розбіжним.

Сукупність значень x, при яких функціональний ряд збігається, називається областю збіжності.

З усіх функціональних рядів найпростішими і найпоширенішими є степеневі ряди виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

або більш загального виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

Для визначення області збіжності функціонального ряду, як правило, спочатку використовують ознаку Д'Аламбера, а потім ті значення x, для яких ця ознака не відповідає на питання збіжності ряду ($C = 1$), досліджуються окремо.

Приклад 7. Визначити інтервали збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{2n} n!}{(2n)!};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{3n}}{n^2}.$$

Розв'язання:

1) За відомим загальним членом ряду U_n, знайдемо U_{n+1}:

$$U_n=\frac{x^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}};\quad U_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{2^n\sqrt{n+2}}.$$

Далі, за ознакою Д'Аламбера, знаходимо границю

$$C=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}2^{n-1}\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n+2}\;x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|==\frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}=\frac{|x|}{2}.$$

З'ясуємо, при яких значеннях x ця границя буде менше одиниці, тобто

$$\frac{|x|}{2}<1;$$
$$-1<\frac{x}{2}<1;$$
$$-2<x<2.$$

Згідно ознаки Д'Аламбера, при будь-якому значенні x із знайденого інтервалу даний ряд збігається абсолютно, а при $|x|>2$ розбігається. Граничні точки $x=\pm 2$ досліджуємо окремо.

При $x=-2$ отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n 2^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}},$$

який розбігається, що випливає із ознаки порівняння його з узагальненим гармонійним рядом.

При $x=2$ отримуємо знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{\sqrt{n+1}},$$

котрий збігається за ознакою Лейбніца: $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}}=0$ і не збігається абсолютно за ознакою порівняння (див. вище), а отже збігається умовно.

Отже, інтервал збіжності даного степеневого ряду є напіввідкритий інтервал: $-2<x\le 2$.

$$2)U_n=\frac{3^n x^{2n} n!}{(2n)!},\quad U_{n+1}=\frac{3^{n+1}x^{2n+2}(n+1)!}{(2n+2)!}=\frac{3^{n+1}x^{2n}x^2 n!\,(n+1)}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}.$$

Знаходимо границю:

$$C=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{2n}x^2 n!\,(n+1)(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)3^n x^{2n} n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x^2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\right|=$$
$$=3x^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2+6n+2}=3x^2\cdot 0=0<1,$$

тобто для даного ряду $C<1$ при будь-якому значенні x.

Інтервал збіжності ряду: $-\infty<x<\infty$.

$$3)\ U_n=\frac{(x+5)^{3n}}{n^2};\quad U_{n+1}=\frac{(x+5)^{3n+3}}{(n+1)^2};$$

$$C=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{3n+3}n^2}{(n+1)^2(x+5)^{3n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^3 n^2}{(n+1)^2}\right|==|x+5|^3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=|x+5|^3.$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$|x+5|^3 < 1;$$
$$|x+5| < 1;$$
$$-1 < x+5 < 1;$$
$$-6 < x < -4.$$

Граничні точки інтервалу досліджуємо окремо.

При $x = -6$ отримуємо знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається абсолютно за ознакою Лейбніца.

При $x = -4$ отримуємо числовий ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Згідно з ознакою порівняння ряд збігається.

Інтервал збіжності ряду: $-6 \le x \le -4$.

2.3. Ряди Тейлора та Маклорена

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки a називається степеневий ряд відносно двочлена $x - a$ виду

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad (T)$$

При $a = 0$ ряд Тейлора є степеневий ряд відносно незалежної змінної x, який називається рядом Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (M)$$

Розкладання деяких елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty, \infty) \; ; \quad (6)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty, \infty) \; ; \quad (7)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty, \infty) \; ; \quad (8)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1,1) \; ; \quad (9)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1,1] \; ; \quad (10a)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \quad [-1,1) \; ; \quad (10b)$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (-1,1) \; ; \quad (11)$$

$$arcsinx = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad [-1,1] \; ; \quad (12)$$

Для того, щоб розкласти дану функцію в ряд Тейлора необхідно:

1) написати ряд Тейлора для даної функції, тобто обчислити значення цієї функції та її похідних при $x = a$ і підставити отримані значення в загальний вираз ряду Тейлора (Т);

2) дослідимо отриманий ряд на збіжність та знайти інтервал збіжності.

Приклад 8. Розкласти функції в ряд Тейлора:

1) $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$, при $a=2$; 2) $f(x)=\ln(3x-1)$, при $a=1$.

Розв'язання:

1) Знайдемо похідні та обчислимо їх значення при $x=a$:

$$f(x)=\frac{1}{2x-1},\quad f(2)=\frac{1}{3};$$

$$f'(x)=\frac{(-1)}{(2x-1)^2}\cdot 2,\quad f'(2)=\frac{(-1)\cdot 2}{3^2};$$

$$f''(x)=-2\cdot\frac{(-1)}{(2x-1)^4}\cdot 2(2x-1)\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 2^2}{(2x-1)^3},\qquad f''(2)=\frac{1\cdot 2\cdot 2^2}{3^3}=\frac{2!\cdot 2^2}{3^3};$$

$$f^{(3)}(x)=1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\frac{(-1)}{(2x-1)^6}\cdot 3(2x-1)^2\cdot 2=\frac{(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}{(2x-1)^4},$$

$$f^{(3)}(2)=\frac{(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}{3^4}=\frac{(-1)\cdot 3!\cdot 2^3}{3^4};$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}},\qquad f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{3^{n+1}},$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

Підставляючи отримані значення в ряд Тейлора (Т), отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{1!\cdot 2}{1!\cdot 3^2}(x-2)+\frac{2!\cdot 2^2}{2!\cdot 3^3}(x-2)^2-\frac{3!\cdot 2^3}{3!\cdot 3^4}(x-2)^3+\cdots+$$
$$+\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{n!\cdot 3^{n+1}}(x-2)^n+\cdots=$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}(x-2)+\frac{2^2}{3^2}(x-2)^2-\frac{2^3}{3^3}(x-2)^3+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^n}(x-2)^n+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot(x-2)^n}{3^n}.$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{2^n\cdot(x-2)^n}{3^n};\quad U_{n+1}=\frac{2^{n+1}\cdot(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2\cdot 2^n\cdot(x-2)^n\cdot(x-2)}{3\cdot 3^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\cdot 2^n\cdot(x-2)^n\cdot(x-2)\cdot 3^n}{3\cdot 3^n\cdot 2^n\cdot(x-2)^n}\right|=\frac{2}{3}|x-2|.$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{2}{3}|x-2|<1;$$
$$-1<\frac{2}{3}(x-2)<1;$$
$$-\frac{3}{2}<x-2<\frac{3}{2};$$
$$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}.$$

Граничні точки цього інтервалу дослідимо окремо.

При $x=\frac{1}{2}$ отримаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot(-1)^n\cdot 3^n}{3^n 2^n}=$
$=\sum_{n=0}^{\infty}1$ – ряд розбігається.

При $x=\frac{7}{2}$ отримаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ - ряд розбігається.

Інтервал збіжності ряду: $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$.

2) $f(x)=\ln(4x-1),\quad f(1)=\ln 3;$

$$f'(x)=\frac{1}{4x-1}\cdot 4,\quad f'(1)=\frac{1\cdot 4}{3};$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(4x-1)^2}\cdot 4^2,\quad f''(1)=\frac{-1\cdot 4^2}{3^2};$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot(4x-1)}{(4x-1)^4}\cdot 4^3=\frac{2!\cdot 4^3}{(4x-1)^3},\quad f^{(3)}(1)=\frac{2!\cdot 4^3}{3^3};$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{(4x-1)^n},\quad f^n(1)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{3^n};$$

. . . .

Підставимо отримані значення в ряд Тейлора (Т)

$$f(x)=\ln 3+\frac{4}{3}(x-1)-\frac{1!\cdot 4^2}{2!\cdot 3^2}(x-1)^2+\frac{2!\cdot 4^3}{3!\cdot 3^3}(x-1)^3+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{n!\cdot 3^n}(x-1)^n+\cdots==\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot 4^n}{n!\cdot 3^n}(x-1)^n=$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4^n}{n\cdot 3^n}(x-1)^n.$$

Дослідимо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{4^n\cdot(x-1)^n}{n\cdot 3^n};\quad U_{n+1}=\frac{4^{n+1}\cdot(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}\cdot(x-1)^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot(x-1)^n}\right|=$$

$$=\frac{4}{3}|x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{4}{3}|x-1|$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{4}{3}|x-1|<1;$$

$$-1<\frac{4}{3}(x-1)<1;$$

$$\frac{1}{4}<x<\frac{7}{4}.$$

При $x=\frac{1}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\text{ряд збігається умовно}$$

за ознакою Лейбніця (див. вище).

При $x-\frac{7}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{4^n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n\cdot 3^n}-\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}-\text{ряд розбігається (див. вище).}$$

Область збіжності ряду: $x\epsilon\left[\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$.

Приклад 9. Розкласти функції в ряд Маклорена, з'ясувати області збіжності отриманих рядів:

$$1)\ f(x)=e^{3x};\quad 2)\ f(x)=x\cdot sin2x;\quad 3) f(x)=\frac{1}{x^2+2}.$$

Розв'язання:

1) Розкладання функції e^{3x} в ряд Маклорена легко отримати, замінивши у формулі (1) x на $3x$:

$$e^{3x}=1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(3x)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{3^n x^n}{n!},\quad U_{n+1}=\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{3x\ 3^n x^n}{n!\,(n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x\cdot\ 3^n\cdot x^n\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 3^n\cdot x^n}\right|=|3x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|3x|\cdot 0=0,$$

даний ряд збігається при $x\epsilon(-\infty,\infty)$.

2) розкладемо $sin2x$ за формулою (2):

$$sin2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$x\cdot sin2x=x\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!},\quad U_{n+1}=\frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+3)!}=\frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+3}x^{2n+4}\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)\cdot 2^{2n+1}x^{2n+2}}\right|=$$

$$=4x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0,$$

отже, даний ряд збігається при $x\epsilon(-\infty,\infty)$.

3) розкладемо в ряд Маклорена тільки дріб $\frac{1}{x^2+2}$, замінивши x^2 на t:

$$f(t)=\frac{1}{t+2},\quad f(0)=\frac{1}{2};$$

$$f'(t)=\frac{-1}{(t+2)^2},\quad f'(0)=-1\cdot\frac{1}{2^2};$$

$$f''(t)=\frac{1\cdot 2\cdot(t+2)}{(t+2)^4}=\frac{1\cdot 2}{(t+2)^3},\qquad f''(0)=\frac{1\cdot 2}{2^3};$$

$$f'''(t)=\frac{-1\cdot 2\cdot 3(t+2)^2}{(t+2)^6}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(t+2)^4},\qquad f'''(0)=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{2^4};$$

... ...

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(t+2)^{n+1}}, \qquad f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}}.$$

Отриманні значення підставимо у формулу (М):

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{1 \cdot 2}{2^3} \cdot \frac{x^2}{2!} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2^4} \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{2^{n+1}}.$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1} \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \cdot x^n}\right| = \frac{1}{2} \cdot |x| < 1;$$

$$-2 < x < 2.$$

При $x = -2$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-2)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} - \text{ряд розбігається.}$$

При $x = 2$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} - \text{ряд розбігається.}$$

2.4. Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди застосовують до наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, роз'язання диференційних рівнянь.

Приклад 10. Обчислити наближено зазначену величину з точністю до α, використавши розклад в степеневий ряд відповідно підібраної функції.

$1)\sqrt[3]{500}, \alpha = 0{,}001;\ 2) cos10^{\circ}, \alpha = 0{,}001;\ 3)\ ln7, \alpha = 0{,}0001.$

Розв'язання. 1) Наближене обчислення зазначеної функції виконується за допомогою біноміального ряду.

Представимо дане число у вигляді, до якого можливо застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000 \cdot \frac{1}{2}} = 10\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 10\sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}} = 10\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В біноміальний ряд підставимо замість x величину $(-{}^1/_2), m = {}^1/_3$.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5 +$$

$$+ \dots = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{5}{648} - \frac{5}{1944} - \frac{11}{11644} - \dots = 1 - 0{,}1666666 - 0{,}0277777 -$$

$$-0{,}007716 - 0{,}002572 - 0{,}0009446 - \cdots \approx 0{,}79396.$$

$$\sqrt[3]{500} \approx 10 \cdot 0{,}79396 \approx 7{,}9396.$$

2) Представимо аргумент функції косинус через радіанну міру кута:

$$x = 10^{\circ} = \frac{10 \cdot \pi}{180} = \frac{3{,}14159}{18} = 0{,}17453.$$

Для обчислення наближеного значення функції скористаємося формулою:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \ ;$$

$$cos0{,}17453 = 1 - \frac{(0{,}17453)^2}{2!} + \frac{(0{,}17453)^4}{4!} - \frac{(0{,}17453)^6}{6!} + \cdots =$$

$$= 1 - 0{,}01523 + 0{,}0000386 - \cdots \approx 0{,}9848.$$

3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1,1];$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \quad [-1,1)$$

Аргумент функції не задовольняє умові $x \epsilon (-1,1)$, тому скористаємося наступною формулою:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right); \ x \neq 1.$$

$$\frac{1+x}{1-x} = 7; \ 7(1-x) = 1 + x; \ 8x = 6; \ x = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

$$\ln 7 = \ln\frac{1+0{,}75}{1-0{,}75} = 2\left(0{,}75 + \frac{0{,}75^3}{3} + \frac{0{,}75^5}{5} + \frac{0{,}75^7}{7} + \cdots\right) =$$

$$= 2(0{,}75 + 0{,}140625 + 0{,}04746 + 0{,}019069 + \cdots) = 1{,}914308.$$

Приклад 11. Обчислити визначений інтеграл з точністю $\alpha = 0{,}0001$.

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx$$

Розв'язання. Даний інтеграл не можливо обчислити в елементарних функціях. Тому підінтегральну функцію необхідно розкласти в степеневий ряд і перевірити, чи належать границі інтегрування області збіжності цього ряду, якщо так, то наближенне обчислення інтегралу можливе.

Розкладемо функцію $y = sin(x^2)$ в степеневий ряд за формулою:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \ ,$$

замінивши в ній x на x^2. Отримаємо

$$sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots \ .$$

Знайдемо область збіжності отриманого степеневого ряду, застосовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$U_n = \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}; \ U_{n+1} = \frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{4n+6}(2n+1)!}{(2n+3)!\,x^{4n+2}}\right| = x^4 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^4 \cdot 0 = 0.$$

Область збіжності $(-\infty, \infty)$. Відрізок $[0,1]$ належить області збіжності. Таким чином,

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \cdots.$$

Отримали знакозмінний числовий ряд. Остаток ряду не перевищує першого із відкиданих членів. У даному випадку достатньо взяти перші два члена, а

$$R_3 < \frac{1}{1320} < 8\cdot 10^{-4}.$$

Тобто, вказана точність буде дотримуватись. Тому

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0{,}3095.$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок диференційного рівняння $y'' + x^2 y = 0$ у вигляді степеневого ряду і частинне розв'язання, яке задовольняє початковим умовам: $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

Розв'язання. Нехай степеневий ряд має вид

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Знайдемо y'': $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$; $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Підставимо знайдені значення в дане рівняння:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Отриманий вираз дорівнює нулю, якщо суми коефіцієнтів при відповідних степенях дорівнюють нулю. Останній вираз перепишемо у вигляді:

$$2a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3\cdot x + (a_1 + 3\cdot 4\cdot a_4)x^2 + (a_2 + 4\cdot 5\cdot a_5)x^3 +$$
$$+(a_3 + 5\cdot 6\cdot a_6)x^4 + \cdots + (a_n + (n+3)(n+4)a_{n+4})x^{n+2} + \cdots = 0$$

Звідки випливає, що $a_2 = 0$; $a_3 = 0$; $a_0 + 3\cdot 4\cdot a_4 = 0$; $a_1 + 4\cdot 5\cdot a_5 = 0$;
$a_2 + 4\cdot 5\cdot a_5 = 0$; ...; $a_n + (n+3)(n+4)a_{n+4} = 0$.

Остання рівність дає рекурентне відношення:

$$a_{n+4} = -\frac{a_n}{(n+3)(n+4)}$$

яке дозволяє визначити всі коефіцієнти шуканого степеневого ряду. Рекурентне відношення має цикл $4k$. Таким чином, $a_{4k+2} = 0; a_{4k+3} = 0;$

$a_{4k} = -\frac{a_{4(k-1)}}{(4k-1)4k}$; $a_{4k+1} = -\frac{a_{4k-3}}{4k(4k+1)}$ для всіх $k \geq 1$. Наприклад,

$$a_4 = -\frac{a_0}{3\cdot 4}, a_5 = -\frac{a_1}{4\cdot 5}, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = -\frac{a_4}{7\cdot 8}, a_9 = -\frac{a_5}{8\cdot 9}.$$

В a_8 і a_9 підставимо a_4 і a_5 виражені через a_0 і a_1 відповідно. Отримаємо,

$$a_8 = \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}, a_9 = \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}.$$

Отже, шуканий ряд буде мати вид:

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{3\cdot 4}x^4 - \frac{a_1}{4\cdot 5}x^5 + \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^8 + \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9 + \cdots.$$

Отриманий ряд можна групувати у вигляді суми двох рядів:

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots\right) +$$
$$+a_1\left(x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\right).$$

Початкове диференційне рівняння другого порядку, тому знайдене у вигляді степеневого ряду розв'язання містить дві довільні сталі a_0 та a_1. Визначимо їх, використовуючи початкові умови: $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

$$y(0) = a_0 + a_1\cdot 0 - \frac{a_0}{3\cdot 4}\cdot 0 - \frac{a_1}{4\cdot 5}\cdot 0 + \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}\cdot 0 + \cdots = a_0.$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1.$$
$$y' = a_1 - \frac{4a_0}{3\cdot 4}x^3 - \frac{5a_1}{4\cdot 5}x^4 + \frac{8a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^7 + \frac{9a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^8 - \cdots.$$
$$y'(0) = a_1 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{a_1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7}\cdot 0 + \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8}\cdot 0 - \cdots.$$
$$y'(0) = a_1.\ y'(0) = 2 \Rightarrow a_1 = 2.$$

Частинний роз'язок, який задовольняє початковим умовам, запишемо у вигляді:

$$y = 1 + 2x - \frac{x^4}{3\cdot 4} - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} - \cdots.$$

РОЗДІЛ 3. РЯДИ ФУР'Є

Ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + \cdots + a_n cosnx + b_n \sin nx + \cdots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (13)$$

називається тригонометричним рядом, а дійсні числа a_0, a_1, b_1, a_2, b_2… - його коефіцієнтами.

Припустимо, що ряд (13) на відрізку $[-\pi;\pi]$ рівномірно збіжний до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (14)$$

Важливою ознакою тригонометричних функцій ряду (13) є їх ортогональність на відрізку $[-\pi;\pi]$. Вона розуміється у наступному сенсі: інтеграл на цьому відрізку від добутку двох будь-яких функцій дорівнює:

- нулю, якщо в підінтегральну функцію входять різні функції;
- додатному числу, якщо підінтегральна функція складається з квадрата любої функції.

Обчислимо наступні інтеграли:

а) при $k \neq n; k, n = 0,1,2 \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \qquad (15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-n)x - \cos(k+n)x] dx = 0; \qquad (16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+n)x + \sin(k-n)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n-k)x}{n-k} - \frac{\cos(n+k)x}{n+k} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \qquad (17)$$

б) при $k = n;\ \ k, n = 1,2,3, \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi; \qquad (18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \qquad (19)$$

в) $$\int_{-\pi}^{\pi} dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi. \qquad (20)$$

Інтегруємо ряд (14) на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)dx$$

за формулами (15)-(20) отримуємо, що всі інтеграли, окрім першого,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi,$$

дорівнюють нулю. Звідси знаходимо нульовий коефіцієнт

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (21)$$

Для визначення коефіцієнтів a_n і b_n послідовно помножимо обидві частини (14) на $\cos nx$, $\sin nx$ і проінтегруємо на відрізку $[-\pi;\pi]$, отримаємо:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad (22)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \qquad (23)$$

Якщо $f(x)$ - парна функція, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = 0.$$

Якщо $f(x)$ – не парна функція, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

Зауваження: $\cos \pi n = \cos(-\pi n) = (-1)^n;$

$\sin \pi n = \sin(-\pi n) = 0.$

Приклад 13. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом 2π) функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi;\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ 3x-2, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Розв'язання. Графік функції представлений на рис.24. На відрізку $-\pi \le x \le 0$ функція $f(x)$=0, тому $a_0 = 0, a_n = 0,\ b_n = 0.$ На відрізку $0 \le x \le \pi$ функція $f(x) = 3x-2,$ тому

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(3x-2)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3\pi^2}{2} - 2\pi\right] = \frac{3\pi-4}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(3x-2)\cos nx\, dx = \begin{bmatrix} U = 3x-2; & dU = 3dx \\ dV = \cos nx\, dx; & V = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} =$$

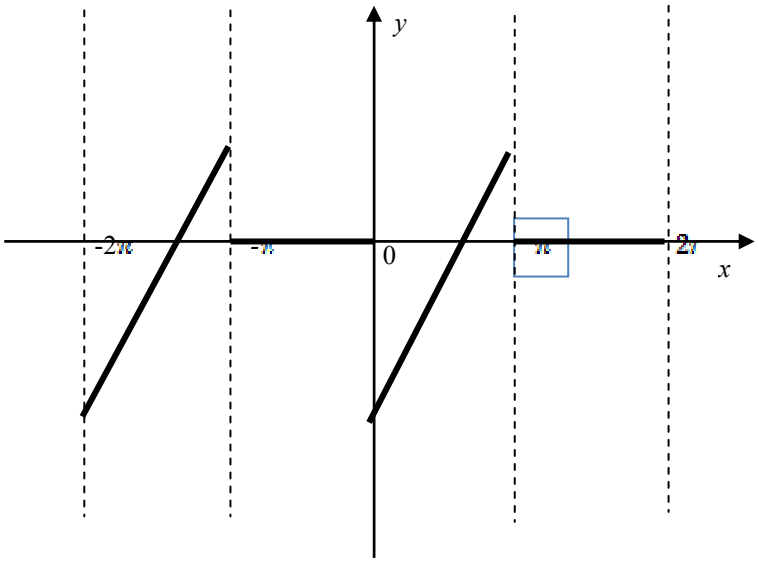


Рис. 24

$$= \frac{1}{\pi}\left[(3x-2)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{n^2}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{n^2}[\cos\pi n - \cos 0] = \frac{3}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(3x-2)\sin nx\,dx = \left[\begin{matrix} U = 3x-2; & dU = 3dx \\ dV = \sin nx\,dx; & V = \frac{-1}{n}\cos nx \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(3x-2)\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[(2-3\pi)(-1)^n - 2 + \frac{3}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi n}((2-3\pi)(-1)^n - 2).$$

Розклад в ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$f(x) = \frac{3\pi-4}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{1}{\pi n}((2-3\pi)(-1)^n - 2)\sin nx\right)$$

$$f(x) = \frac{3\pi-4}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{1}{n}((2-3\pi)(-1)^n - 2)\sin nx\right).$$

Приклад 14. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;\pi]$, до визначив її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

$f(x) = x^2 - 1$

Розв'язання. а) Побудуємо графік функції до визначив її парним чином (рис. 25).

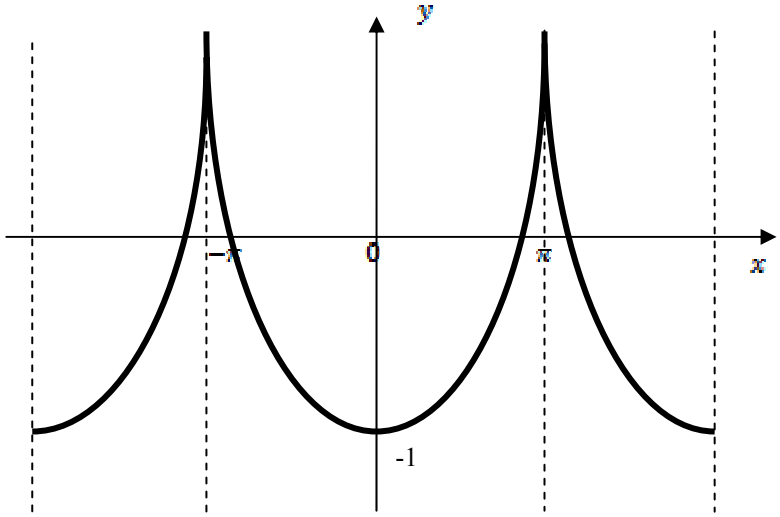


Рис. 25

Для функції, яка продовжена парним чином коефіцієнти ряду Ф'урьє:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = 0.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\pi\right) = \frac{2\pi^2}{3}-2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)\cos nx\, dx = \left|\begin{matrix} U = x^2-1; & dU = 2x\,dx \\ dV = \cos nx\, dx; & V = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2-1}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx\right] = \left|\begin{matrix} U = x, & dU = dx \\ dV = \sin nx, & V = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(0 - \frac{2}{n}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]\right) = \frac{4}{\pi n^2}\left[\pi(-1)^n - \frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n;$$

Розклад в ряд Фур'є функції, продовженої парним чином:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx.$$

б) Для функції, яка продовжена непарним образом (рис. 26) коефіцієнти ряду Ф'урьє:

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)\sin nx\, dx = \left|\begin{matrix} U = x^2-1; & dU = 2x dx \\ dV = \sin nx; & V = \frac{-1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x^2}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx\right] =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \cos nx; & V = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + 2\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + 2\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + \frac{2}{n^2}((-1)^n - 1)\right].$$

Розклад в ряд Фур'є функції, продовженої непарним чином:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-\pi^2)(-1)^n - 1 + \frac{2}{n^2}((-1)^n - 1)\right]\frac{\sin nx}{n}.$$

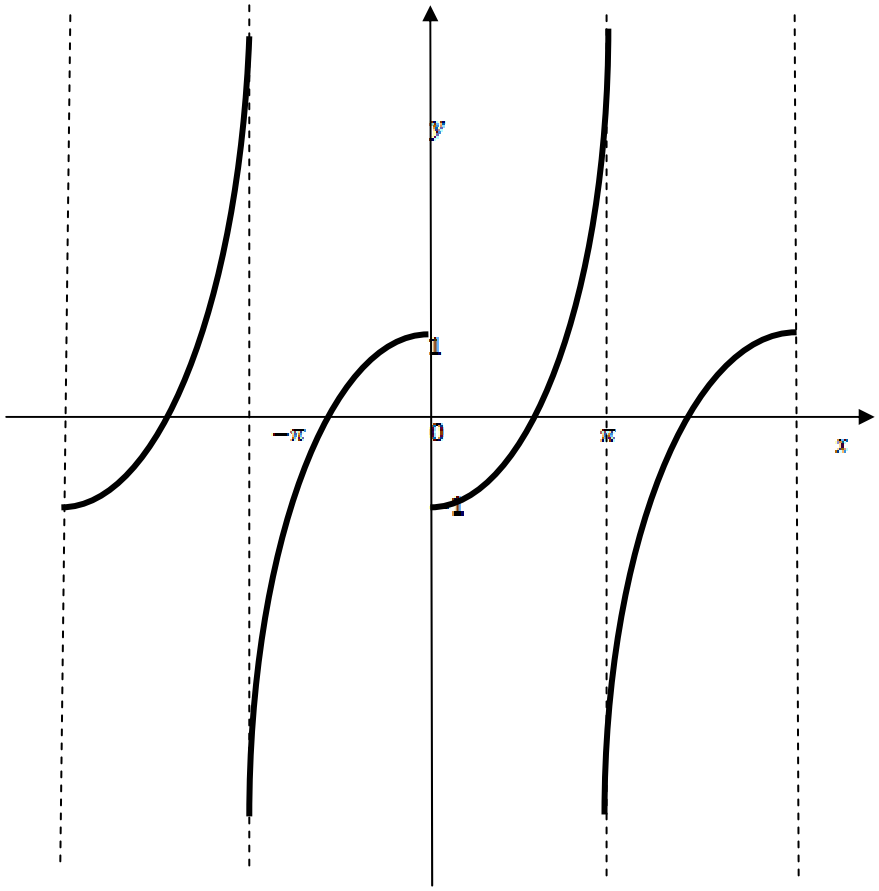


Рис. 26

Якщо період функції $f(x)$ дорівнює не 2π, а $2l$, то її ряд Фур'є має вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

а коефіцієнти цього ряду a_0, a_n і b_n обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Приклад 15. Розкласти в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & 2 \le x \le 1, \\ 1, & -1 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Функція задана на відрізку $[-2,2]$. Довжина інтервалу інтегрування $2l = 4$, тому $l = 2$. Тому

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(x+2)\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{2}(2-x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+2)^2}{2}\Bigg|_{-2}^{-1} + x\Big|_{-1}^{1} - \frac{(2-x)^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(x+2)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx + \int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx + \int_{1}^{2}(2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right].$$

Обчислимо окремо кожен з інтегралів:

$$1)\ \int_{-2}^{-1}(x+2)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \left| \begin{matrix} U = x + 2, & dU = dx \\ dV = \cos\frac{\pi n x}{2}\,dx, & V = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= (x+2)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_{-2}^{-1} - \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{-1}\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx = \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right].$$

$$2)\ \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi n}\left[\sin\frac{\pi n}{2} + \sin\frac{\pi n}{2}\right] = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$3)\ \int_{1}^{2} (2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \left| \begin{matrix} U = 2-x, & dU = -dx \\ dV = \cos\frac{\pi n x}{2}dx, & V = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= (2-x)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} + \frac{2}{\pi n}\int_{1}^{2} \sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} =$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\pi n - \cos\frac{\pi n}{2}\right].$$

Підставимо найдені значення інтегралів a_n, отримаємо

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{8}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right]\right) == \frac{-1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right].$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} (x+2)\sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{-1}^{1} \sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{1}^{2} (2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right]$$

Обчислимо окремо кожен з інтегралів:

$$1)\ \int_{-2}^{-1} (x+2)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \left| \begin{matrix} U = x+2, & dU = dx \\ dV = \sin\frac{\pi n x}{2}, & V = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{-2(x+2)}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{-1} \cos\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\sin\frac{\pi n}{2} - 0\right] = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$2)\ \int_{-1}^{1} \sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-2}{\pi n}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}\right] = 0.$$

$$3)\ \int_{1}^{2} (2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \left| \begin{matrix} U = 2-x, & dU = -dx \\ dV = \sin\frac{\pi n x}{2}dx, & V = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -(2-x)\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} - \frac{2}{\pi n}\int_{1}^{2} \cos\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{1}^{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Підставимо найдені значення інтегралів b_n, отримаємо

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2} + 0 + \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right] = 0.$$

Розклад в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі функції $f(x)$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right]\right)\cos\frac{\pi n x}{2}.$$

Приклад 16. Розкласти в ряд в ряд Фур'є функцію, яка задана графічно (див. рис 27.).

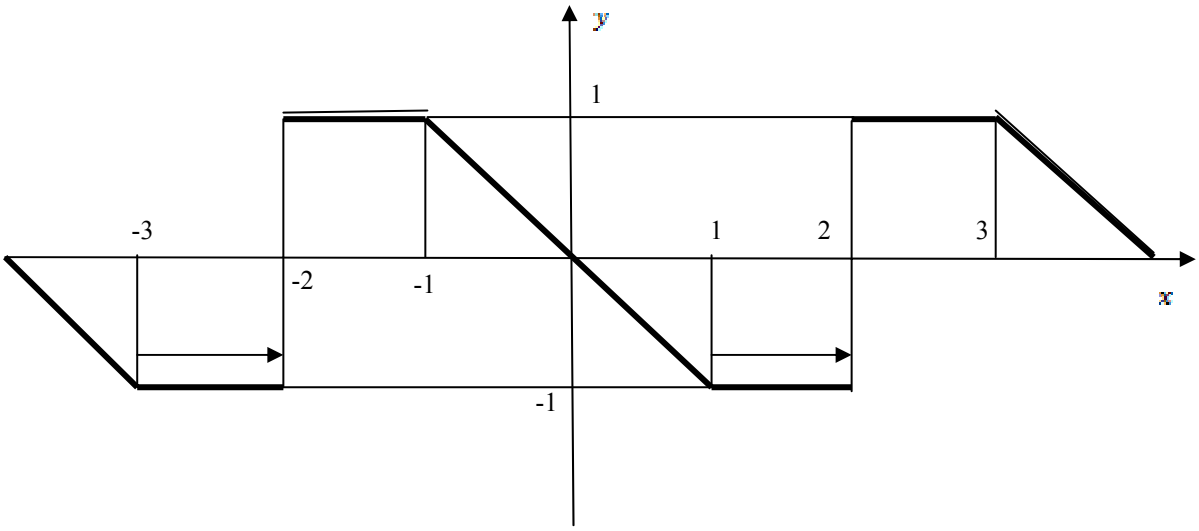


Рис. 27

Запишемо аналітично функцію ($l = 2$):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x \le -1, \\ -x, & -1 \le x \le 1, \\ -1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} dx - \int_{-1}^{1} x dx - \int_{1}^{2} dx\right] = \frac{1}{2}\left[x\Big|_{-2}^{-1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} - x\Big|_{1}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 0 - 1) = 0,$$

$$a_n - \frac{1}{2}\left[\int_{2}^{-1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx - \int_{1}^{1} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx - \int_{1}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо:

$$1)\ \int_{-2}^{-1} \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$2)\ \int_{-1}^{1} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \left|\begin{matrix} U = x, & dU = dx \\ dV - \cos\frac{n\pi x}{2}dx, & V - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1}\right) = 0;$$

$$3)\ \int_{1}^{2} \cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2} = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$a_n = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = 0.$$

$$b_n - \frac{1}{2}\left[\int_{2}^{-1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \int_{1}^{1} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \int_{1}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] -$$

$$= \left|\begin{matrix} U = x, dU = dx \\ dV = \sin\frac{n\pi x}{2}dx, V = \frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1} - \left(\frac{-2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right) + \left(\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right].$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. Наука, 1985. – 383 с.

2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.

3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.

4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. Кн.2. Основні розділи. – 400 с. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.

5. Станішевський С.О. Вища математика: навч. посібник.– Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для самостійної роботи студентів 2 курсу всіх спеціальностей академії)

Частина 3

Укладачі **Вороновська** Лариса Петрівна,

Пахомова Євгенія Серафімівна,

Шульгіна Світлана Сергіївна

Відповідальний за випуск к. ф.-м. н., доц.. *Л.Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

Є. С. Пахомова

С. С. Шульгіна

План 2011, поз. 157М

Підп. до друку 25.11.11 Формат 60х84 /16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3.9
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №4064 від 12.05.2011р.