МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з дисципліни “Вища математика 2”
до практичних занять, самостійної та контрольної роботи

(для студентів денної форми навчання напряму 6.030504 “Економіка підприємства”)

Харків–ХНАМГ–2011

Методичні вказівки з дисципліни "Вища математика 2" до практичних занять, самостійної та контрольної роботи (для студентів денної форми навчання напряму підготовки 6.030504 - "Економіка підприємства") / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: А. І. Колосов, Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський, Г. А. Кузнецова. – Х.: ХНАМГ, 2011 - 67 с.

Укладачі: А. І. Колосов,
Л. Б. Коваленко,
С. О. Станішевський
Г. А. Кузнецова

Рецензент: доцент, к.т.н. А. В. Якунін

У методичних вказівках викладено теорію множин і відношень, алгебру логіки і алгебру логіки висловлень, елементи комбінаторики.

Кожен розділ складається з основних теоретичних питань, має значну кількість розв'язаних і ілюстрованих прикладів з об'єктами дискретної природи; містить вправи для аудиторної і самостійної роботи.

У додатку наведено завдання для модульної контрольної роботи.

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол №2 від 28.09.2011 р.

ПЕРЕДМОВА

Основою даних методичних вказівок є цикл лекцій з дискретної математики, що на протязі декількох останніх років читається викладачами кафедри вищої математики ХНАМГ на факультетах економіки, менеджменту, електропостачання міст та електричного транспорту.

Вони містять такі розділи: теорія множин і відношень; алгебра логіки; алгебра логіки висловлень і предикатів та комбінаторику.

Кожен розділ складається з основних визначень, властивостей, операцій і теорем; має значну кількість розв’язаних і ілюстрованих прикладів, містить вправи для аудиторної та самостійної роботи.

Для розуміння матеріалу, викладеного в методичних вказівках, досить мати знання в обсязі курсу математики за середню школу.

У список літератури включено джерела для первинного вивчення дискретної математики і книги для бажаючих більш повно і глибоко засвоїти окремі розділи та їх застосування.

У додатку наведено завдання для модульної контрольної роботи з розв’язком типового варіанту.

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

<u>Визначення 1.1.</u> ***Множиною*** є сукупність визначених об'єктів, різних між собою, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю.

<u>Визначення 1.2.</u> Якщо a один з об'єктів множини A, то говорять, що a - *елемент множини* A, або a *належить* A.

Домовимося позначати множини рядковими латинськими літерами $A, B, C, \ldots$, а елементи множини – прописними латинськими літерами $a, b, c, \ldots$

Способи завдання множин:

- перерахуванням, тобто списком всіх своїх елементів. Такий спосіб завдання прийнятний тільки при завданні кінцевих множин. Позначення списку – у фігурних дужках. Наприклад, множина, що є з перших п'яти простих чисел $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Множина спортсменів університетської хокейної команди: $B = \{$*Іванов*, *Петров*, *Сидоров*, *Бубликов*, *Сироєжкін*, *Волосюк*$\}$;

- ***процедурою***, що породжує і описує спосіб одержання елементів множини із уже отриманих елементів або з інших об'єктів. Наприклад, множина усіх цілих чисел, що є степенями двійки $M_{2^n}, n \in N$, де N - множина натуральних чисел, може бути представлена процедурою, заданою двома правилами, названими рекурсивними: а) $1 \in M_{2^n}$; б) якщо $m \in M_{2^n}$, тоді $2m \in M_{2^n}$;

- ***описом характеристичних властивостей***, якими повинні володіти елементи множини. Так, множина A, що складається з таких елементів x, які мають властивість $P(x)$, позначимо в такий спосіб:

$$A = \{x | P(x)\}.$$

Так, розглянута вище множина всіх цілих чисел, що є степенями числа 2 може бути записана як $A = \{x | x = 2^n, n \in N\}$. До A ще треба додати 1.

Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a \in A$. Якщо a не є елементом множини A, то пишуть $a \notin A$. Наприклад, $5 \in \{1,3,5,7\}$, але $4 \notin \{1,3,5,7\}$. Якщо $A = \{x | \textit{студентки групи } MM_{21}\}$, то $\textit{Іванова} \in A$, а $\textit{Петров} \notin A$.

<u>Визначення 1.3.</u> Множина A називається ***підмножиною*** (або ***включенням***) множини B $(A \subseteq B)$, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, тобто, якщо $x \in A$, то $x \in B$.

Якщо $A \subseteq B$ й $A \neq B$, то A називається строгою підмножиною й позначається $A \subset B$.

<u>Визначення 1.4.</u> Дві множини рівні $(A = B)$, якщо всі їхні елементи збігаються. Множини A і B рівні, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною,* у протилежному випадку – *нескінченною.* Кількість елементів у скінченій множині A називається *потужністю* множини A і позначається $|A|$.

<u>Визначення 1.5.</u> Множина, що не містить елементів, називається *порожньою множиною*, і позначається $\varnothing$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини. *Універсальна множина* U є множина, що володіє такою властивістю, що всі розглянуті множини є його підмножинами.

Варто розрізняти поняття належності елементів множини і включення! Так, наприклад, якщо множина $A = \{1,3,6,13\}$, те $3 \in A$, $6 \in A$, але $\{3, 6\} \notin A$, у той час як $\{3, 6\} \subseteq A$.

<u>Приклад 1.1.</u> Які з наведених визначень множин A, B, C, D є коректними:

а) $A = \{1, 3, 5\}$, б) $B = \{4, 7, 7, 11\}$,

в) $C = \{x | x \in A\}$, г) $D = \{A, B\}$?

Чи належить число 5 множині D?

Розв'язання:

а) визначення множини A перерахуванням елементів коректно.

б) відповідно до визначення множин, елементи її повинні бути різні, тому при перерахуванні елементів множини не слід указувати той самий елемент кілька разів. Коректне визначення множини B виглядає в такий спосіб: $B = \{4, 7, 11\}$.

в) визначення множини C описом характеристичної властивості коректно.

г) визначення списком множини D коректно: елементами множини D є множини A і B, $D = \{\{1,3,5\},11\}$. Однак $6 \notin D$, тому що даний елемент не перерахований у списку.

<u>Визначення 1.6.</u> Множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини A, називається *булеаном* $P(A)$. Потужність булеана $|P(A)| = 2^{|A|}$.

<u>Приклад 1.2.</u> Нехай $A = \{a, b, c, d\}$. Визначити булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$?

Розв'язання:

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\},$
$\{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

Потужність $|P(A)| = 16$.

Вправи

1. Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 3 і не перевищуючих 100.

2. Задати різними способами множину обласних центрів України.

3. Перелічите елементи множини $\{x | x \quad \textit{ціле і } x^3 < 100\}$.

4. Перелічите елементи множини $\{x | x - \textit{додатне непарне ціле число}, \ x < 35\}$.

5. Перелічите елементи множини $\{x | x - \textit{список студентів вашої групи}\}$.

6. Опишіть множину $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ за допомогою характеристичної властивості.

7. Опишіть множину $\{\textit{березень}, \textit{квітень}, \textit{травень}\}$ за допомогою характеристичної властивості.

8. Опишіть множину $\{1, 5, 25, 125, 625, 3125\}$ за допомогою характеристичної властивості.

9. Перелічите підмножини множини $A = \{a, b\}$.

10. Перелічите підмножини множини $A = \{\textit{грудень}, \textit{січень}, \textit{лютий}\}$.

11. Перелічите підмножини множини $A = \{3, 7, 11, 25\}$.

12. Визначте булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$:

а) $A = \{2, 5\}$; б) $A = \{2, 5, 18\}$;

в) $A = \{1, 2, 5, 6\}$; г) $A = \{1, 2, 5, 6, 18\}$.

13. Використовуючи результати попередніх чотирьох прикладів, визначте потужність множини, що має k елементів.

14. Визначте істинність або хибність кожного з наступних висловлень:

а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; б) $\varnothing \subset \varnothing$; в) $\varnothing \in \varnothing$; г) $\varnothing \subseteq A$; д) $\varnothing \in A$, де A - довільна множина.

15. Визначте істинність або хибність кожного з наступних висловлень:

а) $5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$; б) $\{5\} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

в) $\{1, 3, 5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; в) $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

16. Визначте кількість елементів у кожній множині:

а) $\{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; б) $\{1, 2, 3, \{4, 5, 6, 7\}\}$;

в) $\{1, 2, 3, \{4, \{5, 6, 7\}\}\}$; г) $\{\{1, 2\}, \{\{3, 4\}, 5\}, 6, 7\}$.

1.2. Операції над множинами

<u>Визначення 1.7.</u> *Об'єднанням* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать хоча б однієї з множин A або B. Об'єднання множин A і B позначається $A \cup B$. Це визначення рівносильне наступному: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$.

<u>Приклад 1.3.</u> Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A \cup B$.

Розв'язання: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

<u>Визначення 1.8.</u> *Перетинанням* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать і множині A й множині B. Перетинання множин A і B позначається $A \cap B$. Це визначення рівносильне наступному: $A \cap B = \{x | x \in A \ \ i \ \ x \in B\}$.

<u>Приклад 1.4.</u> Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A \cap B$.

Розв'язання: $A \cap B = \{2, 3, 7\}$.

<u>Визначення 1.9.</u> *Доповненням (*або *абсолютним доповненням)* множини A називається множина, що складається із всіх елементів універсальної множини, які не належать A. Доповнення множини A позначається $\overline{A}$. Це визначення рівносильне наступному:
$\overline{A} = U - A = \{x | x \in U \ \ и \ \ x \notin A\}$.

<u>Визначення 1.10.</u> *Різницею* множин A й B *(*або *відносним доповненням)* називається множина, що складається із всіх елементів множини A, які не належать B. Різницю множин A і B позначають $A - B$. Це визначення рівносильне наступному: $A - B = \{x | x \in A \ \ и \ \ x \notin B\}$.

<u>Приклад 1.5.</u> Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A - B$.

Розв'язання: $A - B = \{5, 6\}$.

<u>Визначення 1.11.</u> *Симетричною різницею* множин A і B називається множина, що складається з об'єднання всіх елементів, що належать множині A і не містяться в B, і елементів, що належать множині B і не містяться в A. Симетрична різниця множин A і B позначається $A + B$. Це визначення рівносильне наступному:
$A + B = (A - B) \cup (B - A)$.

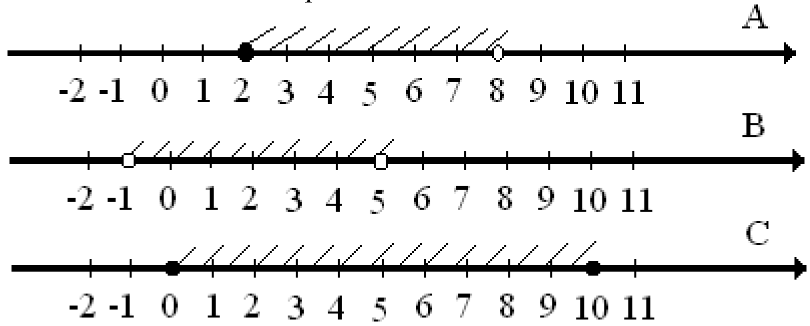
<u>Визначення 1.12.</u> Операції, які виконують над однією множиною, називають *унарними*. Операції, які виконують над двома множинами, називають *бінарними*. Прикладом унарної операції є знаходження доповнення. Прикладами бінарних операцій є об'єднання, перетинання, різниця, симетрична різниця.

<u>Приклад 1.6.</u> Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A + B$.

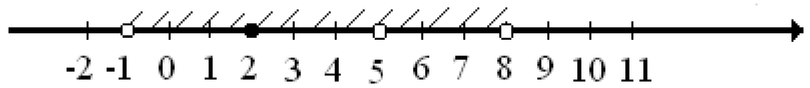
Розв'язання: $A + B = \{1, 5, 6, 9\}$.

Приклад 1.7. Нехай $A = [2, 8)$, $B = (-1, 5)$; $C = [0, 10]$. Знайти $A \cup B$, $B \cap C$, $C - A$, $B + C$, $\overline{B}$.

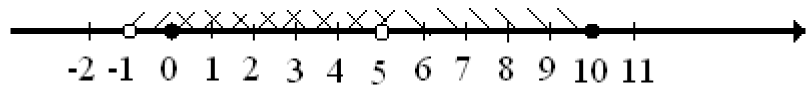
Розв'язання: Зобразимо задані множини на числовій вісі:



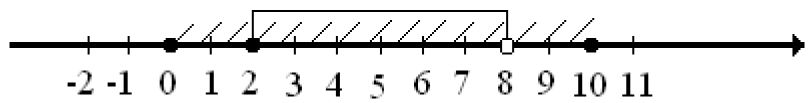
Тоді шукані множини будуть мати вигляд (рис. 1.1):



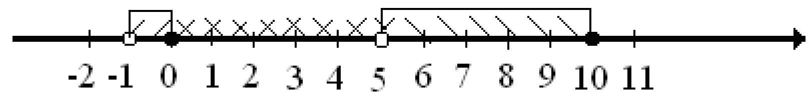
$$A \cup B = (-1, 8);$$



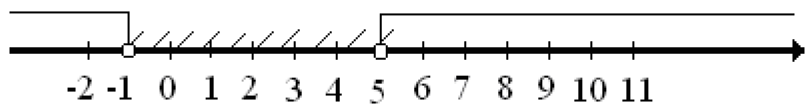
$$B \cap C = [0, 5);$$



$$C - A = [0, 2) \cup [8, 10];$$



$$B + C = (-1, 0) \cup [5, 10];$$

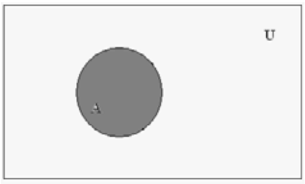


$$\overline{B} = (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

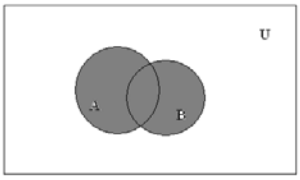
Рис. 1.1.

1.3. Діаграми Венна

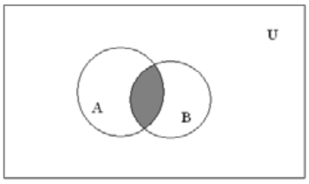
Для графічної ілюстрації відносин між множинами даної універсальної множини U використають діаграми Венна. Діаграма Венна – це зображення множини у вигляді геометричної множини, наприклад, кола. При цьому універсальну множину зображують у вигляді прямокутника. На рис. 1.2 зображені діаграми Венна для розглянутих операцій над множинами.



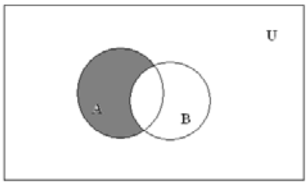
A



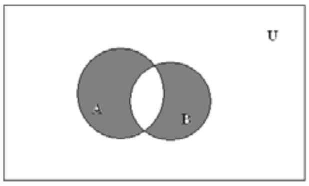
$A \cup B$



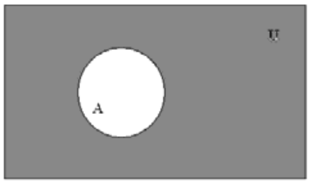
$A \cap B$



$A - B$



$A + B$



$\overline{A}$

Рис. 1.2.

<u>Теорема 1.</u> Для будь-яких підмножин A, B, C універсальної множини U справедливо наступне:

а) закони ідемпотентності $A \cup A = A$;
$A \cap A = A$;

б) подвійне доповнення $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$;

в) закони де Моргана $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) властивості комутативності $A \cup B = B \cup A$;
$A \cap B = B \cap A$;

д) властивості асоціативності

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

е) властивості дистрибутивності

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C);$$

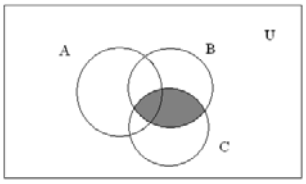
ж) властивості тотожності $A \cup \varnothing = A$;
$A \cap U = A$;

з) властивості доповнення $A \cup \overline{A} = U$;
$A \cap \overline{A} = \varnothing$.

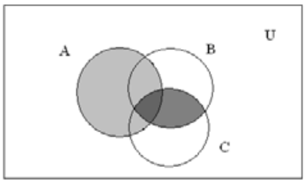
Пріоритет операцій: 1. $\overline{A}$; 2. $A \cap B$; 3. $A \cup B$;
4. $A - B$; 5. $A + B$.

<u>Приклад 1.7.</u> Покажіть, що $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

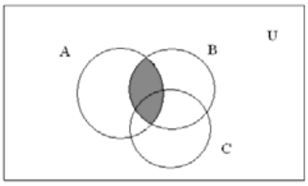
Розв'язання. Доведемо цю властивість асоціативності, скориставшись діаграмами Венна (рис. 1.3):



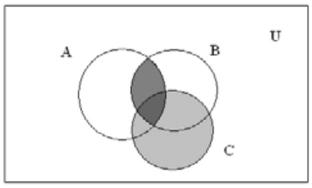
$B \cap C$



$A \cap (B \cap C)$



$A \cap B$



$(A \cap B) \cap C$

Рис. 1.3.

Як бачимо з рис. 1.3 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, що й треба було довести.

Вправи

1. $A = \{0, 3, 5, \{6, 9\}\}$, $B = \{2, 3, 9\}$, $C = \{0, 2, 3, 6\}$. Визначити наступні множини: $B - C$, $A \cap B$, $A + C$, $(A \cup B) - C$.

2. $A = \{1, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, \{3, 4\}, \{5, 6\}, 8\}$. Визначити наступні множини: $A - B$, $A \cup C$, $A + B$, $(A \cap B) \cup (B - C)$.

3. $A = \{2, 3, \{8, 9\}\}$, $B = \{0, \{1, 2\}, 3, 5\}$, $C = \{2, 5, 8\}$. Визначити наступні множини: $A \cup B$, $C - B$, $A + C$, $B + (A \cap C)$.

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначити наступні множини: $A \cap B$, $B \cup C$, $A - C$, $A + B$, $\overline{C}$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$, $\overline{(A \cap B)}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

5. $A = \{1, 2, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначити наступні множини: $A \cap C$, $A \cup B$, $B - C$, $A + C$, $\overline{B}$, $(A - \varnothing) \cup (A - A)$, $\overline{A} \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) - \overline{C}$.

6. $A = [0, 6)$, $B = [1, 7)$, $C = [2, 8]$. Визначити наступні множини: $C - B$, $A + C$, $\overline{B} \cap \overline{C}$.

7. $A=(3,7)$, $B=(1,5]$, $C=[4,8]$. Визначити наступні множини: $A-B$, $B+C$, $\overline{A \cup B}$.

8. $A=(5,8)$, $B=[2,6)$, $C=(4,7]$. Визначити наступні множини: $\overline{A \cap C}$, $A-B$, $B \cup C$.

9. Визначити, які з наступних тверджень істинні, а які хибні:

а) $A \cap \varnothing = A$; б) $A \cup \varnothing = A$; в) $A - A = \varnothing$;

г) $A + A = \varnothing$; д) якщо $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$;

е) якщо $A \cap B = A$, то $B \subseteq A$; ж) якщо $A \subseteq B$, то $A \cup B = A$; з) якщо $A \cup B = A$, то $B \subseteq A$;

10. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини:

а) $\overline{(A \cap B)}$; б) $\overline{(A \cup B)}$;

в) $B - \overline{A}$; г) $(A \cup B) - (A \cap B)$;

д) $B - (A \cap B)$; е) $\overline{(A \cap B \cap C)}$;

ж) $A - (B \cap C)$; з) $(A \cap B) + C$;

и) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$;

к) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

11. Опишіть множини, що відповідають зафарбованій частині кожної діаграми Венна (рис. 1.4):

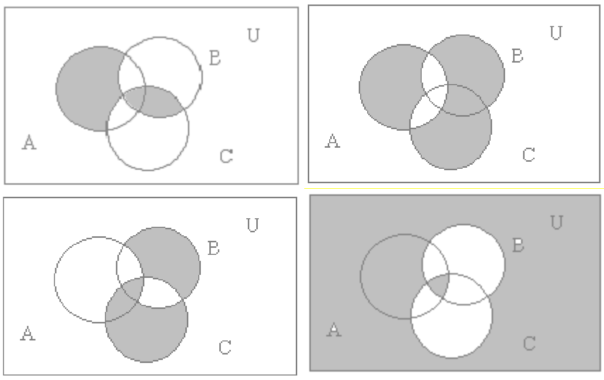


Рис. 1.4.

2. ВІДНОШЕННЯ

2.1. Основні визначення

<u>Визначення 2.1.</u> *Упорядкована пара предметів* – це сукупність, що складається із двох предметів, розташованих у деякому певному порядку. При цьому впорядкована пара має наступні властивості:

а) для будь-яких двох предметів x і y існує об'єкт, який можна позначити як $\langle x, y \rangle$, названий упорядкованою парою;

б) якщо $\langle x, y \rangle$ і $\langle u, v \rangle$ - упорядковані пари, то $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ тоді і тільки тоді, коли $x = u$, $y = v$.

При цьому x будемо називати першою координатою, а y - другою координатою впорядкованої пари $\langle x, y \rangle$.

<u>Визначення 2.2.</u> *Бінарним* (або *двомісним*) відношенням R називається підмножина впорядкованих пар, тобто множина, кожен елемент якого є впорядкована пара.

Якщо R є деяке відношення, це записують як $\langle x, y \rangle \in R$ або xRy.

Один з типів відношень − це множина всіх таких пар $\langle x, y \rangle$, що x є елемент деякої фіксованої множини X, а y − елемент деякої фіксованої множини Y. Таке відношення називається *прямим* або *декартовим добутком*.

<u>Визначення 2.3.</u> *Декартовим добутком* $X \times Y$ множин X і Y *є множина* $\{\langle x, y \rangle | x \in X, y \in Y\}$.

При цьому множина X називається *областю визначення* відношення R, а Y - його *областю значень*:

$D(R) = \{x | \langle x, y \rangle \in R\}; E(R) = \{y | \langle x, y \rangle \in R\}$ (див. рис. 2.1).

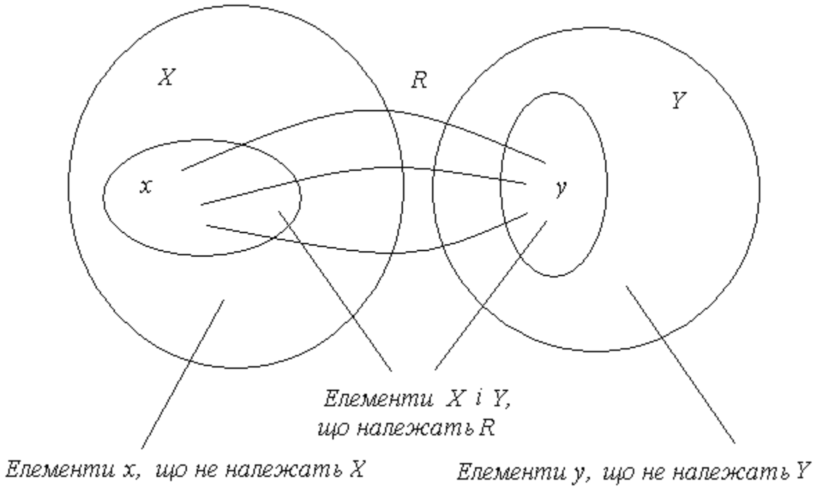


Рис. 2.1.

Приклад 2.1. Знайти області визначення і значень відношення $A = \{\langle a,1\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle, \langle c,5\rangle, \langle e,7\rangle\}$.

Розв'язання: Область визначення заданого відношення $D(A) = \{a, c, e\}$, а область значень - $E(A) = \{1,2,5,7\}$.

Скориставшись визначенням декартового добутку, можемо дати ще одне визначення бінарного відношення:

Визначення 2.4. *Бінарним* відношенням R називається підмножина пар $\langle x, y\rangle \in R$ прямого добутку $X \times Y$, тобто $R \subseteq X \times Y$.

Надалі ми будемо розглядати бінарні відношення, тому замість терміна "бінарне відношення" будемо вживати термін "відношення".

Розглянемо кілька прикладів відношень:

1. Якщо R − множина дійсних чисел, тобто $\left\{\langle x,y\rangle \in R \left| \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right.\right\}$ - бінарне відношення на R. Графічно його зобразити можна в такий спосіб (рис. 2.2):

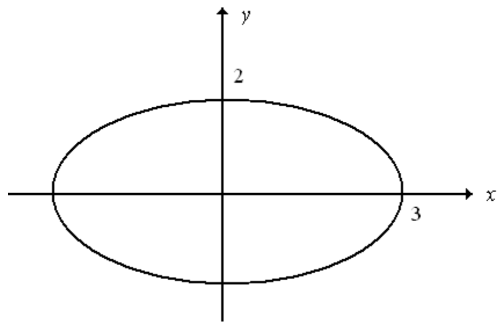


Рис. 2.2.

2. Якщо N − множина натуральних чисел, то відношення $\{\langle x,y\rangle \in N\times N | x \geq y\}$ виконується для пар $\langle 5,3\rangle$, $\langle 7,1\rangle$, $\langle 2,2\rangle$, але не виконується для пар $\langle 1,7\rangle$, $\langle 9,11\rangle$, $\langle 2,5\rangle$.

3. Якщо X − множина студентів Академії, а Y − множина груп Академії, то відношення множин X і Y − є множина $\{\langle x,y\rangle \in X\times Y | x - \textit{студент групи } y\}$.

4. Якщо X − множина товарів у магазині, а $Y=R^+$ − множина дійсних додатних чисел, то відношення множин X і Y − є множина $\{\langle x,y\rangle \in X\times Y | y - \textit{ціна } x\}$.

У силу визначення бінарних відношень, як *спосіб їх завдання* можуть бути використані будь-які способи завдання множин. Відносини, визначені на кінцевих множинах, звичайно задаються:

1. *Списком (перерахуванням)* упорядкованих пар, для яких це відношення виконується.

2. *Матрицею* – бінарному відношенню $R \subseteq X \times X$, де $B \times A$ відповідає квадратна матриця порядку n, кожен елемент a_{ij} якої дорівнює 1, якщо між x_i й x_j є відношення R, і 0, у протилежному випадку, тобто:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i R x_j, \\ 0, & \text{у протилежному випадку}. \end{cases}$$

<u>Приклад 2.2.</u> Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Знайти декартовий добуток множин $A \times B$ й $B \times A$. Записати $(A \times B) - (B \times A)$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) + (B \times A)$.

Розв'язання:

$A \times B = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$;

$B \times A = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$;

$(A \times B) - (B \times A) = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$;

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$;

$(A \times B) + (B \times A) = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 4,1 \rangle,$
$\langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$.

2.2. Функції

<u>Визначення 2.5.</u> *Функцією* f називається таке відношення R, ніякі два різних елементи якого не мають однакових перших координат. Тобто f є функцією тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє наступним умовам:

- елементами f є упорядковані пари;

- якщо упорядковані пари $\langle a,b \rangle$ і $\langle a,c \rangle$ - елементи функції f, то $b = c$.

Отже, відношення f на $A \times B$ називається функцією з A в B і позначається як $f : A \to B$.

Якщо $f: A \to B$ функція і $\langle a,b \rangle \in f$, то говорять, що $b = f(a)$.

<u>Визначення 2.6.</u> Множина A називається *областю визначення* функції f і позначається $D(f)$, а множина B - *областю потенційних значень*. Якщо $I \subseteq A$, то множина $f(I) = \{ b | f(a) = b \text{ для деякого } a \in I \}$ називається *образом* множини I. Образ усієї множини A називається *областю значень* функції f і позначається $E(f)$.

<u>Приклад 2.3.</u> Які із представлених відношень є функціями:

а) $\{\langle 1,3 \rangle, \langle 2,7 \rangle, \langle 4,9 \rangle, \langle 2,13 \rangle\}$;

б) $\{\langle 4,2 \rangle, \langle 5,3 \rangle, \langle 1,11, \rangle \langle 7,2 \rangle\}$;

в) $\{\langle x, x^2 \rangle | x \in R\}$;

г) $\{\langle x^2, x \rangle | x \in R\}$.

Розв'язання:

а) відношення не є функцією, тому що два елементи $\langle 2,7 \rangle$ і $\langle 2,13 \rangle$ мають однакову першу координату;

б) відношення є функцією, тому що перший елемент кожної впорядкованої пари зустрічається рівно один раз;

в) відношення є функцією, графіком якої буде парабола;

г) відношення не є функцією, тому що його елементами є, наприклад, і $\langle 1,1 \rangle$, і $\langle 1,-1 \rangle$.

<u>Приклад 2.4.</u> Знайти область визначення і область значень функції:

а) $\{\langle 4,2 \rangle, \langle 5,3 \rangle, \langle 1,11, \rangle \langle 7,2 \rangle\}$;

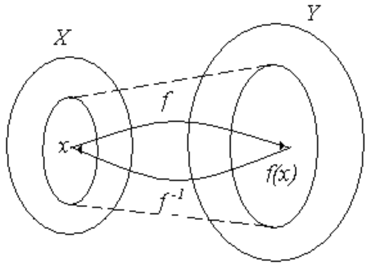
б) $\{\langle x, x^2 \rangle | x \in R\}$.

Розв'язання:

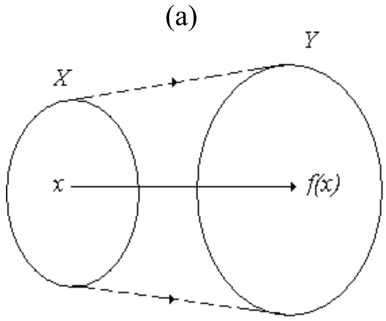
а) область визначення функції $A = \{1,4,5,7\}$, а область значень - $B = \{2,3,11\}$;

б) область визначення - $x \in R$, а область значень - $y \in R^+$.

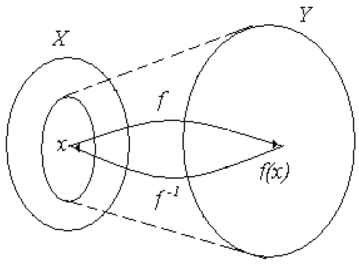
<u>Визначення 2.19.</u> Функція $f: A \to B$ називається *ін'єктивною*, або *ін'єкцією*, якщо з $f(a) = f(a')$ прямує $a = a'$ (рис. 2.4,а). Функція $f: A \to B$ називається *"відображенням на", сюр'єктивною* функцією, або *сюр'єкцією*, якщо для кожного $b \in B$ існує деяке $a \in A$ таке, що $f(a) = b$ (рис. 2.4,б). Функція, що є одночасно і ін'єктивною і сюр'єктивною, називається *бієктивною* або *взаємнооднозначною* (рис. 2.4,в).



(а)



(б)



(в)

Рис. 2.4.

Можна привести ще одне визначення взаємнооднозначної функції.

<u>Визначення 2.8.</u> Функція $f : A \to B$ називається *взаємнооднозначною,* якщо вона переводить різні елементи в різні. Тобто з умови $a \neq a'$ прямує $f(a) \neq f(a')$.

Якщо R^{-1} - обернене відношення до взаємно-однозначного функціонального відношення R, то R^{-1} визначає функцію f^{-1}, яку називають *оберненою* до функції f.

Ін'єктивна функція f має обернену функцію f^{-1}.

Функція f^{-1}, обернена до бієктивної, є відображенням не на множину X, а в множину X.

Взаємнооднозначність функції зручно доводити виходячи з міркувань:

"з умови $f(x_1) = f(x_2)$ прямує $x_1 = x_2$".

<u>Приклад 2.5.</u> Чи є функція $f(x) = 3x + 5$ взаємнооднозначною?

Розв'язання:

$f(x_1) = 3x_1 + 5$; $f(x_2) = 3x_2 + 5$. З умови $f(x_1) = f(x_2)$ прямує; $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$. Отже $x_1 = x_2$ і функція є взаємнооднозначною.

<u>Визначення 2.9.</u> Нехай f - функція із множини A в множину B, тобто $f : A \to B$ $(f \subseteq A \times B)$. *Обернене відношення* $f^{-1} \subseteq B \times A$ визначається як $f^{-1} = \{\langle b, a \rangle | \langle a, b \rangle \in f\}$. При цьому f^{-1} називається *перетворенням* функції f, або її *оберненою функцією*.

<u>Приклад 2.6.</u> Знайти функцію, обернену до даної: $y = 5x - 1$.

Розв'язання:

Обертаючи функцію, одержуємо

$\{\langle y,x\rangle | y=5x-1,\ x,y\in R\}$, але це те ж саме, що і $\{\langle x,y\rangle | x=5y-1,\ x,y\in R\}$. Вирішуючи рівняння відносно y, одержуємо $\left\{\langle x,y\rangle \middle| y=\frac{1}{5}(x+1),\ x,y\in R\right\}$. Тобто, якщо

$f=\{\langle x,y\rangle | y=5x-1,\quad x,y\in Z\}$, то

$f^{-1}=\left\{\langle x,y\rangle \middle| y=\frac{1}{5}(x+1),\ x,y\in R\right\}$.

Відповіді на питання, чи є представлене відношення функцією і чи є функція взаємнооднозначною, можна легко одержати за допомогою його графічної ілюстрації.

Відповідно до визначення функції, ніякі два різних елементи відношення не можуть мати однакових перших координат. Отже, промінь, спрямований паралельно осі Oy, повинен перетинати графік відношення не більше одного разу. Тому що взаємнооднозначні функції переводять різні елементи в різні, то промінь, спрямований паралельно осі Ox, повинен перетинати графік відношення теж не більше одного разу.

Приклад 2.7. З'ясувати, чи є дані відношення функціями? Якщо так, то чи будуть вони взаємнооднозначні? У випадку позитивної відповіді, знайти обернені функції:

а) $f=\{\langle x,y\rangle | y^2=-x,\quad x,y\in R\}$;

б) $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\quad x\in R,\ y\in R^+\right\}$;

в) $f=\{\langle x,y\rangle | 3x-2y+6=0,\quad x,y\in R\}$.

Розв'язання:

а) відношення не є функцією, тому що існує два різних елементи, що мають однакові перші координати (див. рис. 2.5, а);

б) відношення є функцією, тому що не існує елементів, що мають однакові перші координати. Дана функція не є взаємнооднозначною, тому що існують елементи, що мають однакові другі координати (див. рис. 2.5, б);

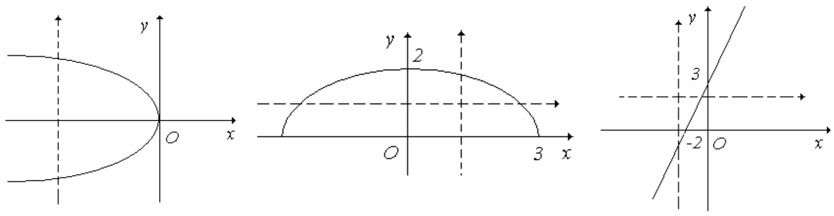
в) відношення є функцією. Дана функція є взаємнооднозначною, тому що переводить різні елементи в різні (див. рис. 2.5, в). Знайдемо функцію, обернену до даної:

$$f = \{\langle x, y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\};$$

$$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\};$$

$$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\};$$

$$f^{-1} = \left\{\langle y, x\rangle \middle| y = \frac{2}{3}x - 2; \quad x, y \in R\right\}.$$



(а) (б) (в)

Рис. 2.5.

Вправи:

1. Нехай $f \subseteq R \times R$. Знайти області визначення і значень наступних функцій:

а) $f(x) = x^2 + 9$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 9}}$;

д) $f(x) = \sqrt{x - 9}$;

е) $f(x) = |x + 9|$.

2. З'ясуйте, які з наведених нижче відношень є функціями. Визначте властивості функцій. Для взаємнооднозначних функцій знайдіть обернені:

а) $f = \{\langle x, y\rangle | y = 5x - 1, \quad x, y \in R\}$;

б) $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad x \in R, y \in R^+\right\}$;

в) $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| x^2 + (y-1)^2 = 9, \quad x, y \in R^+ \right\}$;

г) $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| y = \ln x, \quad x \in R^+, y \in R \right\}$;

д) $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad x, y \in R^+ \right\}$;

е) $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| y = e^x, \quad x \in R, y \in R^+ \right\}$;

ж) $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| 4x + 5y - 20 = 0, \quad x, y \in R \right\}$.

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

3.1. Основні визначення

Визначення 3.1. *Висловлення* – це розповідне речення, про яке можна сказати, що воно істинне або хибне. Істинність або хибність, приписувані висловленню, називаються його *істинностним значенням*.

Наприклад, речення “*Сонце – це зірка*”, “*Балаклея – обласний центр України*” є висловленнями, причому перше – істинне, а друге – хибне. А речення “*котра година?*”, “*вивчіть вірш*” не є висловленнями.

У математичних міркуваннях і повсякденній мові часто зустрічаються речення, утворені видозміною деякого речення за допомогою слова *не*, або складені із простих речень за допомогою сполучників: *і, або, якщо ... то, тоді і тільки тоді, коли*. Які називаються *сентенційними сполучниками*. На відміну від повсякденної мови, у математичній логіці зміст таких висловлень може бути визначений однозначно.

Визначення 3.2. Висловлення, що не містить сполучників, називається *простим*; висловлення, що містить сполучники, називається *складним*.

Будемо позначати висловлення буквами латинського алфавіту A, B, C, P, Q, $R\ldots$

Візьмемо наступні прості висловлення:

$A =$ “*я встаю рано*”;

$B =$ “*я йду на роботу*”.

За допомогою п'яти сентенційних сполучників можна утворити наступні складні висловлення:

- *заперечення* – це речення, видозмінене за допомогою слова *не*; позначається як $\overline{A}$, $\sim A$. Наприклад,

$\overline{A} =$ “*я не підіймаюся рано*”;

- *кон'юнкція* – це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слова *і*; позначається як $A \wedge B$. Наприклад,

$A \wedge B =$ “*я підіймаюсь рано і йду на роботу*”;

- *диз'юнкція* - це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слова *або*; позначається як $A \vee B$. Наприклад,

$A \vee \overline{B} =$ “*я підіймаюсь рано або не йду на роботу*”;

- *імплікація* - це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *якщо ... то*; позначається як $A \to B$. Наприклад,

$A \to B =$“*якщо я підіймаюсь рано, то йду на роботу*”;

- *еквівалентність* - це речення, утворене з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *тоді і тільки тоді, коли*; позначається як $A \leftrightarrow B$. Наприклад,

$A \leftrightarrow B =$ “*я підіймаюсь рано тоді і тільки тоді, коли йду на роботу*”.

<u>Визначення 3.3.</u> Символи $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ називаються *бінарними* з'єднаннями, тому що вони з'єднують два висловлення, а символ $\sim$ - *унарним* з'єднанням, тому що застосовується тільки до одного висловлення.

Є ще одне бінарне з'єднання – що *виключає або* (*нерівнозначність, додавання за модулем 2*). Позначається як $P \oplus Q$, читається як “або P або Q”. Висловлення $P \oplus Q$

істинно, коли істинностні значення P і Q не збігаються, і хибно – у протилежному випадку.

Приклад 3.1. Представити логічними формулами наступні висловлення:

1) “Сьогодні не світить сонце”;
2) “Я піду гуляти або залишуся удома”;
3) “Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду”;
4) “Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії”;
5) “Родину варто створювати тоді і тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові і поваги”;
6) “На вулиці ясно або похмуро”;
7) “Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу”.

Розв'язання:

1) Висловлення “Сьогодні не світить сонце” утворено запереченням висловленню “Сьогодні світить сонце”. Останнє позначимо через P, тоді початкове висловлення є складним представимо логічною формулою: $\overline{P}$.

2) Складне висловлення “Я піду гуляти або залишуся удома” утворено із двох простих, з'єднаних сполучником “*або*”:

P - “Я піду гуляти”;

Q - “Я залишуся удома”. Отже, маємо логічну формулу $P \vee Q$.

3) Складне висловлення “Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду” утворено із двох простих, з'єднаних сполучником “і”:

P - “Спортсмен здобув перемогу”;

Q - “Спортсмен одержав заслужену нагороду”. Отже, маємо логічну формулу $P \wedge Q$.

4) Складне висловлення “Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії”, утворено із двох простих, з'єднаних логічним сполучником “*якщо … то*”:

P - “Цех перевиконає план”;

Q - “Робітники одержать премії”. Отже, маємо логічну формулу $P \to Q$.

5) Складне висловлення “Родину варто створювати тоді і тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові і поваги” утворено із трьох простих, які з’єднані логічним сполучником «тоді і тільки тоді» і сполучником «і»:

P - “Родину варто створювати”;

Q - “Між молодими людьми є почуття любові”;

R - “Між молодими людьми є почуття поваги”. Отже, маємо логічну формулу $P \to (Q \wedge R)$.

6) Складене висловлення “На вулиці ясно або похмуро” утворено із двох простих:

P - “На вулиці ясно”;

Q - “На вулиці похмуро”, з'єднаних сполучником “*або*”, очевидно в розділовому змісті, тобто “*що виключає або*” - $\oplus$, тому що одночасно на вулиці не може бути і ясно, і похмуро. Отже, маємо логічну формулу: $P \oplus Q$.

7) Складне висловлення “Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу” розіб'ємо на прості:

P - “Парубок зневажає фізичними вправами”;

Q - “Парубок годинами сидить за комп'ютером”;

R - “Виникає погіршення самопочуття”;

S - “Виникає погана постава”.

Логічна формула, що описує дане висловлення, буде мати вигляд:

$$(P \vee Q) \to (R \wedge S).$$

Прості висловлення можуть бути істинними або хибними незалежно друг від друга, але вони визначають значення складного висловлення.

Таблиці істинності для розглянутих вище логічних формул дозволяють легко визначити значення складного висловлення.

Заперечення	
P	$\overline{P}$
1	0
0	1

		Кон'юкція	Диз'юнція	Імплікація	Еквіваленція
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Висловлення $\overline{P}$ істинно, коли висловлення P - хибно, і хибно – у протилежному випадку. Наприклад, якщо P - "сьогодні холодно", то $\overline{P}$ - "сьогодні не холодно".

Висловлення $P \wedge Q$ істинно, коли обидва висловлення істинні, і хибно – у всіх інших випадках. Прикладом кон'юнкції може бути відповідь на питання: "При яких умовах учень, що закінчує школу, може бути студентом?". Якщо прийняти за P - "одержати атестат зрілості", а за Q - "пройти конкурсний відбір у ВУЗ", то учень буде студентом, коли одержить атестат зрілості і пройде конкурсний відбір $(P=1,\ Q=1,\ P \wedge Q=1)$

Висловлення $P \vee Q$ хибно у випадку, коли обидва з простих висловлень хибні, і істинно - у всіх інших випадках. Як приклад розглянемо наступні висловлення: P - "на вулиці йде дощ", Q - "хтось забув виключити душ". Тоді $P \vee Q$ - "я чую шум, видаваний водою". Це можливо, якщо на вулиці йде дощ, або якщо хтось забув виключити душ, або при виконанні двох цих умов.

Висловлення $P \to Q$ хибно, якщо P - істинно, а Q - хибно; і істинно у всіх інших випадках. Висловлення "якщо … то" носити пояснюючий характер. Пояснюючий характер імплікації пов'язаний із причинно-наслідковим відношенням, при якому P виступає в ролі заподій (посилки імплікації), а Q - наслідку (висновку). Якщо P - "на вулиці йде дощ", а Q - "над моєю головою розкрита парасолька", тоді $P \to Q$ -"я залишуся сухим" буде помилковим тільки в тому випадку, якщо на вулиці йде дощ, а парасолька не розкрита $(P=1,\ Q=0,\ P \to Q=0)$.

Висловлення $P \leftrightarrow Q$ істинно, коли значення P і Q збігаються, і хибно – у протилежному випадку. Тому що еквівалентність виражається через кон'юнкцію двох імплікацій $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$, то це відношення виникає при одночасному виконанні двох умов: "із P прямує Q" і "із Q прямує P".

Наприклад, привласнимо висловленням P і Q значення 1, якщо P і Q означають "дочка", і 0, якщо P і Q означають "син". Тоді складне висловлення $P \leftrightarrow Q$ - "у родині одностатеві діти" істинно тоді і тільки тоді, коли або $P = Q = 1$, або $P = Q = 0$.

При запису складних висловлень у символічній формі часто виникає необхідність у використанні великої кількості дужок. Щоб усунути цю незручність вводять деякі угоди. Умовимося, що $\leftrightarrow$ є найсильніше сполучення (тобто вона має найбільшу область дії), а за нею йде $\to$. Далі – рівні по силі $\vee$ і $\wedge$, а потім $\sim$ - найслабше сполучення. Необхідно пам'ятати, що спочатку виконуються більш слабкі сполучення, а потім - більш сильні.

Якщо істинностні значення простих компонентів відомі, то істинностне значення складного висловлення може бути визначене з використанням таблиць істинності.

<u>Приклад 3.2.</u> Визначити істинностне значення висловлення

$$A \vee B \to C \leftrightarrow A \wedge \sim B \to C,$$

якщо A і B - істинні $(A = 1,\ B = 1)$, а C - хибно $(C = 0)$.

Розв'язання: Визначення істинностного значення висловлення можна зробити швидко, якщо написати під кожним простим висловленням його істинностне значення, а істинностне значення кожного складного висловлення – під відповідним сполученням. Для зручності читання послідовні кроки можуть бути записані один під іншим:

A	$\vee$	B	$\rightarrow$	C	$\leftrightarrow$	A	$\wedge$	$\sqcup$	B	$\rightarrow$	C
1		1		0		1			1		0
								0			
	1						0				
			0							1	
					0						

Звідси можемо зробити висновок: дане висловлення хибно.

Складне висловлення може приймати як істинне, так і хибне значення залежно від значень, приписуваним простим компонентам. Для того щоб однозначно вказати ті ситуації, коли складне висловлення є істинним, необхідно врахувати всі можливі ситуації. Із цією метою ми будемо будувати таблиці істинності складних висловлень, використовуючи таблиці істинності простих компонентів. Приведемо два еквівалентних способи побудови таблиці істинності складного висловлення. Перший полягає в тому, що складне висловлення ми розбиваємо на прості, і встановлюємо істинне значення кожного сполучення. А при другому способі ми записуємо істинностні значення під кожним сполученням. Проілюструємо обидва підходи на прикладі.

<u>Приклад 3.3.</u> Побудувати таблицю істинності висловлення $(\sim A \rightarrow B) \wedge C$.

Розв'язання: Побудуємо таблицю істинності двома способами:

A	B	C	$\sim A$	$\sim A \rightarrow B$	$(\sim A \rightarrow B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

A	B	C	$(\sim A \to B) \wedge C$		
1	1	1	0	1	**1**
1	1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**0**
0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	1	**0**
0	0	1	1	1	**0**
0	0	0	1	1	**0**

Необхідно відзначити важливість розходження між *мовою і метаязиком*, між *об'єктними* і *суб'єктними* висловленнями. Якщо зневажати цими розходженнями, то можна прийти до протиріччя, називаному *логічним парадоксом*. Приведемо приклад відомого парадокса. Англійський логік Бертран Рассел розглянув таку притчу: "*В одному селі жив перукар. Він голив всіх тих жителів села, хто не голився сам*". Рассел задався питанням: чи може перукар поголити самого себе? Його міркування наступні: якщо перукар захоче поголити себе самого, то як житель цього села, що голиться сам, не вправі цього зробити; але якщо перукар не стане голитися, то вже як житель села, що не голиться сам, він буде зобов'язаний себе поголити.

Викладемо зміст цього протиріччя формальною мовою. Позначимо A - перукаря, а B - жителя села. Нехай висловлення $P(A,B)$ означає "A голить B". Тоді ситуація в селищі може бути описана двома метависловлюваннями:

1) якщо $P(B,B)=0$, то $P(A,B)=1$;
2) якщо $P(B,B)=1$, то $P(A,B)=0$.

Коли перукар розглядається як рядовий житель села $(A=B)$, то обидва метависловлювання стають внутрішньо суперечливими:

1) якщо $P(A,A)=0$, то $P(A,A)=1$;
2) якщо $P(A,A)=1$, то $P(A,A)=0$.

Звідси ми можемо зробити висновок, що незважаючи на те, що A, як і B, є об'єктною змінною, її не можна ставити на один рівень із B, тому що саме відносно A були сформульовані всі метависловлювання. Як висловлення $P(A,B)$ можна розглядати будь-які з відомих нам ситуацій: “A вчить B”; “A співає для B”; …, при цьому під A розуміємо вчителя, артиста, і т.п.

Вправи:

1. Які з наступних пропозицій є висловленнями? Укажіть їх істинностне значення:

а) Сьогодні - вівторок.
б) На вулиці мороз.
в) Як пройти до бібліотеки?
г) Все наше життя - гра!
д) У тайзі субтропічний клімат.
е)Гамлет - принц датський.
ж) Як поживаєш?
з) А чи не піти нам у ліс?
і) У городі бузина, а в Києві дядько.

2. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:

A - “Я поїду влітку до Криму”;
B - “Я хочу поїхати до Криму”;
C - “У мене є гроші”.

Записати в символьній формі наступні висловлення:

а) “Я хочу поїхати до Криму і я поїду влітку до Криму”;

б) “У мене немає грошей, тому я не поїду влітку до Криму”;

в) “У мене є гроші, але я не хочу їхати до Криму, і я не поїду влітку до Криму”;

г) “Я поїду влітку до Криму тоді і тільки тоді, коли у мене є гроші і я хочу поїхати до Криму”.

3. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:

A - “Я вчуся за контрактом”;
B - “Я здам сесію вчасно”;
C - “Я одержу стипендію”.

Записати в символьній формі наступні висловлення:

а) “Я не здам сесію вчасно”;

б) “Якщо я вчуся за контрактом, то не одержую стипендію”;

в) “Якщо я не вчуся за контрактом і здам сесію вчасно, то одержу стипендію”;

г) "Якщо я не вчуся за контрактом і не одержую стипендії, то сесію я здав не вчасно";

д) "Я одержу стипендію тоді і тільки тоді, коли я здам сесію вчасно і я не вчусь за контрактом".

4. Нехай A, B, C, D і E позначають наступні висловлення:

A - "Я живу в маленькому місті";

B - "У нашому місті є театр";

C - "Я люблю театр";

D - "У мене є вільний час",

E - "Я можу ходити в театр щодня".

Записати в символьній формі наступні висловлення:

а) "У мене немає вільного часу і я не можу ходити в театр щодня";

б) "Я живу в маленькому місті, і в ньому немає театру, тому я не можу ходити в театр щодня";

в) "Я не люблю театр або у мене немає вільного часу, тому я не можу ходити в театр щодня";

г) "У нашому місті є театр, я люблю театр і можу ходити в театр щодня";

д) "Я можу ходити в театр щодня тоді і тільки тоді, коли у нашому місті є театр, я люблю театр і у мене є вільний час".

5. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:

A - "Я працюю в солідній фірмі";

B - "Я одержую високу зарплату";

C - "Я займаю високу посаду".

Інтерпретуйте наступні висловлення як звичайні пропозиції:

а) $A \wedge B$; б) $B \to (A \vee C)$;

в) $(A \wedge \sim B) \to \sim C$; г) $(A \wedge C) \leftrightarrow B$.

6. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:

A - "Я люблю грати в комп'ютерні ігри";

B - "У мене є комп'ютер";

C - "У мене є час для ігор".

Інтерпретуйте наступні висловлення як звичайні пропозиції:

а) $A \wedge \sim B$; б) $C \to A$;

в) $\sim C \wedge A \wedge B$; г) $B \wedge (\sim A \vee \sim C)$.

7. Побудуйте таблиці істинності для висловлень у вправах 2 - 6.

8. Запишіть у символьній формі наступні складні висловлення:

а) “Якщо конкуренція серед виробників товарів народного споживання висока, то для залучення потенційних покупців фірмі-виробникові необхідно: підвищувати якість товару; грамотно вирішувати питання цінової політики; проводити акції;

б) “Для того щоб стати заможним, парубок може виграти велику суму коштів в казино або одержати роботу з високим заробітком. Якщо парубок задумає розбагатіти, граючи в казино, він ризикує програти все і стати жебраком. Якщо парубок вирішив зробити кар'єру, то йому необхідно одержати гарну освіту, багато працювати над собою, добре зарекомендувати себе. Робота з високою заробітною платнею - шлях до заможного життя”;

в) “Я хочу зробити подарунок Антону: комп'ютерні диски або квитки в кіно. Якщо я подарую Антону диски з новими комп'ютерними іграми, то Антон буде грати на комп'ютері всю ніч. Якщо Антон буде грати на комп'ютері всю ніч, він сильно утомиться, і я не зможу його побачити завтра. Я зможу завтра побачити Антона, тільки якщо подарую йому квитки в кіно.”

9. Знайти істинностне значення кожного з наступних висловлень:

а) $P \to (Q \vee \sim R \leftrightarrow P \wedge R)$, якщо $P = 1$, $Q = 1$, $R = 0$;

б) $(\sim Q \wedge \sim R \leftrightarrow P) \vee Q$, якщо $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$.

10. Скласти істинностну таблицю для кожного з наступних висловлень:

а) $(R \to P) \vee \sim R \to Q \wedge P$;

б) $R \leftrightarrow \sim Q \to (P \vee (Q \wedge \sim R))$.

3.2. Істинностна функція

Обчислення висловлень призначене для аналізу логічних зв'язків між реченнями, які залежать тільки від побудови нових речень з вихідних за допомогою уже відомих нам сентенційних сполучників. Для такого аналізу необхідна наявність вихідної непустої множини простих речень і виконання наступних допущень:

а) кожне просте речення є висловленням, тобто кожному простому реченню можна поставити у відповідність його істинностне значення;

б) кожне з висловлень, що аналізуємо, складається із простих висловлень багаторазовим використанням сентенційних сполучників і приймає істинностне значення, випливаючи з наведених раніше таблиць істинності для сентенційних сполучень, відповідно до істинностних значень простих речень-висловлень.

Отже, нехай нам дана непуста множина простих висловлень A, B ,… Розширимо цю множину, приєднавши до неї всі ті висловлення, які можна утворити із простих, багаторазово і усілякими способами використовуючи різні сентенційні сполучники. Тобто, елементами розширеної множини будуть: $\sim A$; $A \vee B$; $B \to (\sim B \wedge A)$; $A \leftrightarrow (B \wedge A) \vee \sim A$;… Елементи цієї множини називають *формулами,* причому елементи вихідної множини – *простими формулами* (або *компонентами*), а інші – *складними формулами*.

Кожній простій формулі ставиться у відповідність один елемент із множини $\{1,0\}$. Істинностне значення складної формули визначається у відповідності із таблицями істинності для заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації і еквівалентності.

Якщо простими компонентами формули A служать p_1, p_2, …, p_n, то для визначення істинностного значення формули A по істинностним значенням простих компонентів

p_1, p_2, …, p_n, необхідно побудувати таблицю істинності, що складає з 2^n рядків.

<u>Визначення 3.4.</u> Істинностна функція – це функцій від n аргументів, кожний з яких може приймати значення 1 або 0, і сама функція може приймати значення 1 або 0.

Позначати істинностні функції будемо як $f(p_1, p_2, ..., p_n)$, $g(q_1, q_2, ..., q_n)$ і т.д.

Під істинностними функціями будемо розуміти елементи множини ϑ, що володіє наступними властивостями:

а) кожна з функцій $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ - елемент множини ϑ;

б) якщо функція f - елемент множини ϑ, то елементом множини ϑ буде і функція, отримана підстановкою f в якості змінної в кожну з функцій, перерахованих вище.

Як приклади можна привести наступні істинностні функції: $(p \to q) \vee \sim q$, $p \leftrightarrow p \wedge (q \to \sim p)$, …

3.3. Еквівалентні висловлення. Тавтології

Особливий інтерес у обчисленні висловлень представляють складні висловлення, що мають різну побудову, але приймають істинне значення в тих же самих випадках, тобто вони мають однакові таблиці істинності. Такі висловлення називають ***логічно еквівалентними***. Наприклад, нехай P - “на вулиці холодно”, Q - “я легко одягнений”. Розглянемо висловлення - “невірно, що на вулиці холодно і я легко одягнений” - $\sim(P \wedge Q)$ і висловлення - “на вулиці не холодно або я не легко одягнений” - $\sim P \vee \sim Q$. Побудуємо таблиці істинності:

P	Q	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

У всіх чотирьох рядках істинностні значення складних формул збігаються, отже, два розглянутих висловлення – логічно еквівалентні.

Логічно еквівалентні висловлення A і B позначають як A ***eq*** B.

З умовним висловленням – імплікацією $(A \to B)$ зв'язані ще три типи висловлень: *конверсія, інверсія* і *контрапозиція.* Визначаються вони в такий спосіб:

$A \to B$ - імплікація; $B \to A$ - конверсія висловлення $A \to B$;

$\sim A \to \sim B$ - інверсія висловлення $A \to B$;

$\sim B \to \sim A$ - контрапозиція висловлення $A \to B$.

Приклад 3.4. Нехай дано висловлення-імплікація "Якщо він їсть вітаміни, то він здоровий", тоді:
"Якщо він здоровий, то він їсть вітаміни" - конверсія;
"Якщо він не їсть вітаміни, то він не здоровий" - інверсія;
"Якщо він не здоровий, то він не їсть вітаміни" - контрапозиція.

При побудові висловлення-імплікації і пов'язаних з ним конверсії, інверсії і контрапозиції важливий не порядок слів у висловленні, а те, яка частина висловлення є частиною "якщо", а яка - частиною "то".

Закон контрапозиції говорить, що імплікація і його контрапозиція ***логічно еквівалентні***, у чому можна легко переконатися, зрівнявши їхні таблиці істинності. Еквівалентність і контрапозиція умовних висловлень мають у математиці велике значення, тому що найчастіше набагато простіше довести теорему від оберненого, чим дати її прямий доказ. Неважко також показати, що конверсія і інверсії імплікації також мають однакові таблиці істинності, а, отже, - еквівалентні. У той же час імплікація (або її контрапозиція) і конверсія (або інверсія) мають різні таблиці істинності. Нерозуміння цього факту приводить до побудови помилкових логічних міркувань.

Визначення 3.5. Висловлення, істинне при всіх розподілах простих компонентів, називається ***логічно істинним, загальнозначущим*** або ***тавтологією.*** Висловлення, хибне при всіх розподілах простих компонентів, називається ***логічно хибним*** або ***протиріччям***.

Добре нам відомим прикладом тавтології є аксіоми і теореми в математиці, тому що вони істинні завжди.

Маючи логічно істинне висловлення – тавтологію, легко побудувати логічно хибне висловлення – протиріччя. Для цього досить взяти заперечення тавтології. Якщо A - тавтологія, то $\sim A$ - протиріччя.

Для того щоб вирішити питання про те, дана формула A є тавтологією чи ні, необхідно розглянути її таблицю істинності. Формула A є тавтологією тоді і тільки тоді, коли її істинностне значення є 1 при кожному із 2^n приписаних простим компонентам, що входять у формулу A, значенням 1 або 0.

<u>Приклад 3.5.</u> Чи є висловлення $A \wedge (A \to B) \to B$ тавтологією?

Розв'язання: Розглянемо таблицю істинності даного висловлення:

A	B	$A \wedge (A \to B) \to B$		
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	0	0	1	**1**

Як прямує з таблиці істинності, при кожному з $2^2 = 4$ розподілі значень простих компонентів, формула, що описує дане висловлення, приймає значення 1. Отже, дане висловлення є тавтологією.

Незважаючи на те, що метод установлення загальної значимості формул за допомогою дослідження їхніх таблиць істинності громіздкий і стомлюючий, він завжди дає відповідь на поставлене питання.

Нижче представимо список деяких тавтологій. Їх запам'ятовувати немає необхідності, цей список буде використовуватися нами як довідковий матеріал. Для самостійної роботи студентам може бути запропоновано перевірити представлені тавтології шляхом побудови їхніх таблиць істинності.

***Тавтологічні імплікації*:**

1. $A \wedge (A \to B) \to B$;
2. $\sim B \wedge (A \to B) \to \sim A$;
3. $\sim A \wedge (A \vee B) \to B$;
4. $A \to (B \to A \wedge B)$;
5. $A \wedge B \to A$;
6. $A \to A \vee B$;
7. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$;
8. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$;
9. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$;
10. $(A \to B \wedge \sim B) \to \sim A$;
11. $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$;
12. $(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)$;
13. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;
14. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$.

***Тавтологічні еквіваленції*:**

15. $A \leftrightarrow A$;
16. $\sim\sim A \leftrightarrow A$;
17. $(A \to B) \wedge (C \to B) \leftrightarrow (A \vee C \to B)$;
18. $(A \to B) \wedge (A \to C) \leftrightarrow (A \to B \wedge C)$;
19. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$;
20. $(A \to B) \leftrightarrow (\sim B \to \sim A)$;
21. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$;
21a. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$;
22. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$;
22a. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;
23. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
23a. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
24. $A \vee A \leftrightarrow A$;
24a. $A \wedge A \leftrightarrow A$;
25. $\sim (A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$;
25a. $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$;

***Тавтології для виключення зв'язувань*:**

26. $A \to B \leftrightarrow \sim A \vee B$;
27. $A \to B \leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$;
28. $A \vee B \leftrightarrow \sim A \to B$;
29. $A \vee B \leftrightarrow \sim (\sim A \wedge \sim B)$;
30. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (A \to \sim B)$;
31. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (\sim A \vee \sim B)$;
32. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Замість того, щоб для обчислення істинностного значення формули, користуватися таблицями істинності, можна вдатися до арифметичних процедур. Для цього приймають деякі угоди, а саме:

1. Формула інтерпретується як істинностна функція, де кожен простий компонент розглядається як змінна, котрої можна приписати значення 1 або 0.

2. Суми і добутки доданків і співмножників 1 і 0, що входять у формули, обчислюються як у звичайній арифметиці, за винятком 1+1=0.

Легко перевірити (за допомогою таблиць істинності), що *основні істинностні функції* задаються наступними формулами:

$\sim P = 1 + P$; $\qquad P \wedge Q = P + Q + PQ$;

$P \vee Q = PQ$; $\qquad P \to Q = (1+P)Q$;

$P \leftrightarrow Q = P + Q$.

У цих термінах тавтологіями є ті істинностні функції, які тотожно рівні нулю.

<u>Приклад 3.6.</u> Довести, що формула $A \to (B \to A \wedge B)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Розв'язання: Виконаємо ряд перетворень:

$A \wedge B = A + B + AB$;

$B \to A \wedge B = (1+B)(A + B + AB) = (1+B)A + (1+B)B + (1+B)AB$,

тому що $(1+B)B = 0$, то другий і третій доданки дорівнюють нулю, отже, $B \to A \wedge B = (1+B)A$.

Далі, $A \to (B \to A \wedge B) = (1+A)(1+B)A = (1+A)A(1+B) = 0$, тому що $(1+A)A = 0$. Отже, дана формула є тавтологією.

Помітимо, що в даній алгебрі $2A$ і $(1+A)A$ тотожно дорівнюють нулю, що істотно полегшує спрощення довгих виражень.

Вправи:

1. Для даного висловлення сформулюйте конверсію, інверсію і контрапозицію:

а) "Якщо мені вдасться укласти вигідну угоду, то фірма виплатить мені премію";

б) "Якщо парубок одержав паспорт, то він повнолітній";

в) "Якщо я не буду працювати, то мені нема чого буде їсти";

г) "Якщо я не здам сесію, то мене відрахують із інституту";

д) “Якщо ти маєш гарну освіту, то в тебе великі шанси зробити блискучу кар'єру”.

2. Перевірити, чи є наступні висловлення еквівалентними:

а) $\sim(P \leftrightarrow Q)$ і $(P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$;

б) $P \to Q$ і $\sim P \vee Q$;

в) P і $\sim(P \wedge Q) \to (\sim Q \wedge P)$;

г) P і $P \wedge (Q \vee \sim Q)$;

д) $P \to Q$ і $Q \to P$?

3. Перевірити тавтологічні імплікації:

а) використовуючи таблиці істинності;

б) не використовуючи таблиці істинності.

4. Перевірити тавтологічні еквіваленції:

а) використовуючи таблиці істинності;

б) не використовуючи таблиці істинності.

5. Перевірити тавтології для виключення сполучень:

а) використовуючи таблиці істинності;

б) не використовуючи таблиці істинності.

4. АЛГЕБРА ЛОГІКИ

4.1. Логічні функції. Основні визначення

Алгебра логіки є самостійним розділом математичної логіки. Предметом її вивчення є побудова складних логічних висловлень, що представляють логічними формулами, і методів установлення їхньої істинності.

Нехай $B = \{0,1\}$ - бінарна множина, елементами якого є 0 і 1, що не мають арифметичного змісту, логічна інтерпретація яких є “істинно”, “хибно” або “так”, “ні”.

<u>Визначення 4.1.</u> Алгебра, утворена множиною B разом з усіма можливими операціями на ньому, називається ***алгеброю логіки***. При цьому множина B називається ***основною множиною*** або ***носієм алгебри***.

<u>Визначення 4.2.</u> ***Функцією алгебри логіки*** (або ***логічною функцією, булевою функцією***) f від n змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається n-вимірна логічна операція на множині B. Тобто, $f : B^n \to B$. Логічна функція - функція від логічних змінних також може приймати тільки два логічних значення 0 або 1.

Множину всіх логічних функцій будемо позначати як P_2. Множину всіх логічних функцій n змінних - $P_2(n)$.

<u>Визначення 4.3.</u> ***Логічною формулою*** називається формула, що складається з букв, знаків логічних операцій і дужок. При цьому букви позначають логічні змінні. Кожна формула задає логічну функцію.

Будь-яку логічну функцію можна задати або логічною формулою, або за допомогою таблиці істинності.

При визначенні логічної функції за допомогою таблиці істинності, у таблиці ліворуч виписуються всі можливі набори значення логічних змінних, а праворуч – значення функції, що відповідають цим наборам. Набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, називається *одиничним набором функції*, набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, називається *нульовим набором функції*.

Число всіх можливих наборів, що розрізняються, логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n змінних дорівнює 2^n. Ця множина з 2^n наборів є *областю визначення* логічної функції. Число всіх різних функцій n змінних дорівнює числу можливих розміщень нулів і одиниць у стовпці таблиці з 2^n рядками, тобто 2^{2^n}.

<u>Визначення 4.4.</u> Змінна x_i логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ називається ***несуттєвою*** (або ***фіктивною***),

якщо $f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) = = f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ при будь-яких значеннях інших змінних, тобто зміна x_i в будь-якому наборі значень $x_1, ..., x_n$ не міняє значення функції.

Нехай змінна x_i є фіктивною для функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$. Вилучимо з таблиці істинності стовпець аргументу x_i. Тобто, буде отримана нова таблиця для функції $n-1$ змінної, котру позначимо як $g(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Отже, функція g отримана з функції f шляхом вилучення фіктивної змінної.

<u>Визначення 4.5.</u> Дві функції називають *рівними*, якщо одну можна одержати з іншої шляхом вилучення або додавання фіктивних змінних.

Логічних функцій однієї змінної $2^{2^1} = 4$. Множина всіх логічних функцій однієї змінної представлене в табл. 4.1.

Таблиця 4.1.

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Тут $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_3(x) = 1$ константи 0 і 1 відповідно. Значення цих функцій не залежить від змінної x, отже, змінна x тут є фіктивною. Функції $\varphi_1(x) = x$ - повторення змінної, $\varphi_2(x) = \bar{x}$ - заперечення змінної.

Логічних функцій двох змінних $2^{2^2} = 16$. Множина всіх логічних функцій двох змінних представлене в табл. 4.2.

Таблиця 4.2.

x_1	x_2	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Дамо визначення функцій, наведених у табл. 4.2:

$\phi_0 = 0$ - константа 0;

$\phi_1 = x_1 \wedge x_2$ - кон'юнкція;

$\phi_2 = \overline{x_1 \to x_2}$ - заперечення імплікації;

$\phi_3 = x_1$ - повторення x_1;

$\phi_4 = \overline{x_1 \leftarrow x_2}$ - заперечення коімплікації;

$\phi_5 = x_2$ - повторення x_2;

$\phi_6 = x_1 \oplus x_2$ - додавання за модулем 2;

$\phi_7 = x_1 \vee x_2$ - диз'юнкція;

$\phi_8 = x_1 \downarrow x_2$ - стрілка Пірса;

$\phi_9 = x_1 \leftrightarrow x_2$ - еквівалентність;

$\phi_{10} = \bar{x}_2$ - заперечення x_2;

$\phi_{11} = x_1 \leftarrow x_2$ - коімпликація;

$\phi_{12} = \bar{x}_1$ - заперечення x_1;

$\phi_{13} = x_1 \to x_2$ - імплікація;

$\phi_{14} = x_1 | x_2$ - штрих Шеффера;

$\phi_{15} = 1$ - константа 1.

Як можна помітити, з 16 функцій двох змінних, шість мають фіктивні змінні:

- у функціях ϕ_0 і ϕ_{15} фіктивні змінні x_1 і x_2;
- у функціях ϕ_5 і ϕ_{10} фіктивна змінна x_1;
- у функціях ϕ_3 і ϕ_{12} фіктивна змінна x_2.

Визначення 4.6. ***Суперпозицією функцій*** $f_1, \ldots, f_n$ називається функція f, яка отримана за допомогою підстановок цих функцій друг у друга і перейменування змінних.

Наприклад, $f(x_1, x_2, x_3) = f_4(f_1(x_2, f_2(x_3, x_1)), f_3(x_2, x_1))$ являє собою суперпозицію функцій.

Приклад 4.1.

Нехай $f(x_1, x_2, x_3) = f_4(f_1(x_2, f_2(x_3, x_1)), f_3(x_2, x_1))$ і f_1 означає кон'юнкцію, f_2 - диз'юнкцію, f_3 - імплікацію, f_4 -

додавання за модулем 2. Представити функцію формулою і обчислити значення функції на наборі $(0,0,1)$

Розв'язання: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \to x_1)$.

Обчислимо значення f на наборі $(0,0,1)$, для чого підставимо в отриману формулу значення змінних:

$$(x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \to x_1)$$

0 1 0 0 0

1 1

0

1

Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

<u>Приклад 4.2.</u> Обчислити значення функції $f = \phi_6(\phi_1(x_1, x_2), \phi_{11}(x_3, x_2))$ на наборі $(1,0,1)$.

Розв'язання: Скористаємося табл. 4.2: $\phi_1(1,0) = 0$, $\phi_{11}(1,0) = 1$, а $\phi_6(0,1) = 1$. Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

<u>Визначення 4.7.</u> Еквівалентними, або ***рівносильними,*** називаються формули, що подають ту саму функцію. Еквівалентність формул в алгебрі логіці позначається символом “=”.

Для того, щоб установити еквівалентність формул, потрібно скласти їхні таблиці істинності, і зрівняти їх по кожному набору змінних.

<u>Приклад 4.3.</u> Довести еквівалентність формул

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2).$$

Розв'язання: Складемо таблиці істинності наведених формул.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Як бачимо, таблиці істинності формул $x_1 \oplus x_2$ і $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$ збігаються. Звідси робимо висновок, що формули еквівалентні.

Використовуючи таблиці істинності можна довести наступні логічні еквівалентності (закони логіки Буля):

1. ***Закони ідемпотентності:*** $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$.

2. ***Закон подвійного заперечення:*** $\bar{\bar{x}} = x$.

3. ***Властивості комутативності:*** $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$.

4. ***Властивості асоціативності:***

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge y \wedge z;$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z.$$

5. ***Властивості дистрибутивності:***
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

6. ***Закони де Моргана:*** $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

7. ***Властивості констант:*** $x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = x$; $x \vee 0 = x$; $\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$.

8. ***Закон протиріччя:*** $x \wedge \bar{x} = 0$.

9. ***Закон виключення третього:*** $x \vee \bar{x} = 1$.

10. ***Закон поглинання:*** $(x \wedge y) \vee x = x$.

11. ***Закон склеювання:*** $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$.

12. ***Закон узагальненого склеювання:***

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z).$$

13. ***Розкриття імплікації і еквівалентності:***
$x \to y = \bar{x} \vee y$; $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$.

Тотожні перетворення становлять величезний інтерес у задачах по спрощенню логічних формул, тому що формули найчастіше являють собою суперпозицію інших формул і функцій. Тобто, при виконанні тотожних перетворень будь-які формули можна заміняти еквівалентними їм.

Приклад 4.4. Використовуючи закони логіки Буля, спростити формулу $(y \vee z) \vee (x \wedge \bar{z})$.

Розв'язання:

$(y \vee z) \vee (x \wedge \bar{z}) = \quad y \vee (z \vee (x \wedge \bar{z})) =$

закон асоціативності

$= \quad y \vee ((z \vee x) \wedge (z \vee \bar{z})) =$

закон дистрибутивності

$= \quad y \vee ((z \vee x) \wedge 1) =$

закон виключення третього

$= \quad y \vee (z \vee x)$

властивості констант.

4.2. Булева алгебра. Довершені нормальні форми

Як ми вже показали, одна і та ж сама логічна функція може бути представлена формулами, що включають різні набори логічних операцій. Виявляється, існують такі набори логічних функцій (операцій над логічними змінними), за допомогою яких можна визначити будь-які інші логічні функції.

Визначення 4.8. Система функцій Σ називається *функціонально повною* (або *базисом*), якщо будь-яка булева функція може бути представлена у вигляді формули, що складається тільки з функцій цієї системи.

Існує ряд функціонально повних систем логічних функцій, наприклад, $\{\wedge, \vee, \sim\}$, $\{\wedge, \sim\}$, $\{\vee, \sim\}$, $\{\ |\ \}$, $\{\downarrow\}$, $\{\wedge, \oplus, 1\}$, $\{\rightarrow, \sim\}$, $\{\vee, \sim, \oplus\}$, $\{\wedge, \sim, \oplus\}$ і ін. На деяких з них ми зупинимося докладніше нижче.

Найбільш вивченим і використовуваним є базис $\{\wedge, \vee, \sim\}$. Формули, що містять тільки знаки функцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення називаються *булевими*.

Визначення 4.9. Алгебра $(P_2, \wedge, \vee, \sim)$, основною множиною якої є множина всіх логічних функцій P_2, а операціями - кон'юнкція, диз'юнкція і заперечення, називається *булевою алгеброю логічних функцій*. Операції і формули булевої алгебри називаються *булевими*.

Система операцій булевої алгебри $\{\wedge, \vee, \sim\}$ функціонально повна. Отже, перехід від табличного завдання будь-якої логічної функції до булевої формули завжди можливий.

Теорема 4.1. Будь-яка логічна функція може бути представлена булевою формулою, тобто як суперпозиція кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення.

Наслідок 1. Будь-яка логічна функція може бути представлена формулою:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vee \; x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}; \; f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1,$$

яку називають *довершеною диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*.

Тут диз'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких функція $f = 1$. ДДНФ функції f містить стільки диз'юнкцій, скільки одиниць у таблиці f; кожному одиничному набору $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ відповідає кон'юнкція всіх змінних, у яких x_i записуємо із запереченням, якщо $\sigma_i = 0$ і без заперечення, якщо $\sigma_i = 1$.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f і її ДДНФ. Отже, ДДНФ для всякої логічної функції єдина.

Приклад 4.5. Записати ДДНФ функції, заданою таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання:

Виділимо набори змінних, якім відповідають одиничні значення функції. ДДНФ даної функції має вигляд: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$.

<u>Зауваження 1.</u> Єдина функція, що не має ДДНФ - це константа 0, тому що не має жодного одиничного набору в таблиці істинності.

<u>Наслідок 2.</u> Будь-яка логічна функція може бути представлена формулою

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_i^{\sigma_i}} \right); \quad f\left(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\right)=0,$$

яку називають *довершеною кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)*.

Тут кон'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$, на яких функція $f=0$. ДКНФ функції f містить стільки кон'юнкцій, скільки нулів у таблиці f; кожному нульовому набору $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ відповідає диз'юнкція всіх змінних, у яких x_i записуємо із запереченням, якщо $\sigma_i=1$ і без заперечення, якщо $\sigma_i=0$.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f і її ДКНФ, отже, ДКНФ для всякої логічної функції єдина.

<u>Приклад 4.6.</u> Записати ДКНФ функції, яка задана таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання: Виділимо набори змінних, яким відповідають нульові значення функції. ДКНФ даної функції має вигляд:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee \bar{x}_2\vee \bar{x}_3)\cdot$$
$$\cdot(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee \bar{x}_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee \bar{x}_2\vee \bar{x}_3).$$

Зауваження 2. Єдина функція, що не має ДКНФ - це константа 1, тому що не має жодного нульового набору в таблиці істинності.

Зауваження 3. Із двох формул – ДДНФ і ДКНФ – звичайно вибирають ту, яка коротше. Тобто, якщо таблиця функції f містить менше одиничних наборів, то – ДДНФ; якщо містить менше нульових наборів – ДКНФ.

Приклад 4.7. Логічну функцію трьох змінних

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2)\bar{x}_3) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)$$

представити булевою формулою: у вигляді ДДНФ та у вигляді ДКНФ.

Розв'язання:

Побудуємо таблицю істинності формули

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$x_1 \vee x_2$	$(x_1 \vee x_2)\bar{x}_3$	$x_1 \leftrightarrow x_3$	$((x_1 \vee x_2)\bar{x}_3) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

ДДНФ функції має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

ДКНФ функції має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

Приклад 4.8. За допомогою таблиці 4.2 визначити ДКНФ функції $x_1 \mid x_2$.

Розв'язання: Скористаємося табл. 4.2 і запишемо ДКНФ штриха Шеффера $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

Приклад 4.9. На підставі таблиці 4.2 визначити ДДНФ функції $x_1 \downarrow x_2$.

Розв'язання: Скористаємося табл. 4.2 і запишемо ДДНФ стрілки Пірса $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2$.

Вправи:

Логічну функцію трьох змінних представити булевою формулою: у вигляді ДДНФ та у вигляді ДКНФ:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus 1)$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \mid \overline{(x_3 \vee x_2)}$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2)(x_3 \oplus x_1)$;

г) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \oplus (x_1 \bar{x}_2)$.

5. КОМБІНАТОРИКА

У цьому розділі вирішуються деякі задачі, пов'язані з розглядом різних ***комбінацій*** з елементів кінцевих множин *M*. Наприклад, якщо взяти 10 різних цифр 0, 1, 2, ... , 9 і утворювати з них комбінації, то будемо одержувати різні числа, наприклад 456, 645, 1237, 6782, 45, 54 і т.п.

Видно, що деякі з таких комбінацій відрізняються тільки порядком цифр (наприклад 345 і 534), інші - цифрами , які входять до їх складу (наприклад 1036 і 5472), треті - розрізняються і порядком і числом цифр (наприклад 345 і 54).

Отримані комбінації задовольняють різним умовам. Залежно від правил їх утворення, можна виділити три типи комбінацій: ***перестановки, розміщення, сполучення***. Розглянемо їх окремо.

5.1. Перестановки

Визначення 5.1.. Комбінації з *n* елементів, які відрізняються друг від друга тільки порядком елементів, називаються ***перестановками.***

Перестановки позначаються символом P_n, де n — число елементів, що входять у кожну перестановку.

Приклад 5.1. Нехай множина M містить три букви *A, B, C*. Складемо всі можливі комбінації із цих букв: *ABC, ACB*, *BCA, CAB, CBA, BAC* (усього 6 комбінацій). Видно, що вони відрізняються друг від друга тільки порядком розташування букв.

Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три букви. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна (та, що залишилася). Виходить, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = P_3$, але $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$. Прийшли до відомого у математиці поняттю факторіала.

Визначення 5.2. Добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно називають n-***факторіалом*** і пишуть: $n!$ *n!= 1 · 2 · 3 · ... · (n - 1) · n.* Вважають, що *0! = 1* і $n \in N$. Основна властивість факторіала: *(n + 1)! = (n +1) · n!*.

Отже, число перестановок обчислюємо за формулою:

$$P_n = n! \tag{5.1}$$

5.2. Розміщення

Визначення 5.3. *Комбінації з n елементів по m елементів, які відрізняються друг від друга або самими елементами або порядком елементів, називаються розміщеннями.*

Розміщення позначаються символом A_n^m, де n - число всіх наявних елементів, m - число елементів у кожній комбінації. Число розміщень можна обчислити за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1), \text{ де } 0 \le m \le n; \quad m, n \in N. \tag{5.2}$$

Вважають, що $A_n^0 = 1$.

Приклад 5.2. Нехай множина M містить чотири букви *A, B, C, D*. Склавши всі комбінації тільки із двох букв, одержимо: *AB, AC, AD, BA, BP, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.*

Видно, що всі отримані комбінації (їх 12) відрізняються або буквами, або їхнім порядком (комбінації BA і AB вважаються різними).

За формулою (5.2) $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, що збігається з результатом наведеного приклада. Тут кожен рядок відповідає однієї із всіх наявних букв (*n=4)*, а число стовпців відповідає іншим буквам *(n-1=3)* , усього *4 · 3=12* різних комбінацій.

Формулу (5.2) можна записати у факторіальній формі:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (5.3)$$

Основні властивості розміщень:

1) $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$; 2) $A_n^n = P_n = n!$.

5.3. Сполучення

<u>Визначення 5.4.</u> *Сполученнями називаються всі можливі комбінації з n елементів по m, які відрізняються друг від друга принаймні хоча б одним елементом (m, $n \in N$ і $n \geq m$).*

У загальному випадку число сполучень із n елементів по m дорівнює числу розміщень з n елементів по m, діленому на число перестановок з m елементів: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ **.** Використовуючи для чисел розміщень і перестановок факторіальні формули $A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ і $P_n = n!$, одержимо формулу числа сполучень у вигляді:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \qquad (5.4)$$

Основні властивості сполучень:

1) $C_n^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$; 2) $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Приклад 5.3. Множина M утворена з чотирьох букв A, B, C, D. Скласти комбінації з двох букв, що відрізняються друг від друга хоча б одним елементом.

Маємо AB, AC, AD, BP, BD, CD. Виходить, що число сполучень з чотирьох елементів по двоє дорівнює 6. Це коротко записується так: $C_4^2 = 6$.

5.4. Розміщення з повтореннями

Розміщення з n елементів по k зображують упорядковані комбінації різних елементів множини M, $|M| = n$. Часто доводиться робити упорядковані комбінації з повтореннями деяких елементів. Наприклад, з множини $M = \{А, Б\}$ можна зробити вісім комбінацій з трьох елементів: *ААА, ААБ, АБА, БАА, БАБ, ББА, АББ, БББ*. Тут $n = 2$, $k = 3$. Такі упорядковані k-комбінації називають кортежами довжини k. Два кортежі (тобто дві загальні комбінації) вважаються однаковими, якщо вони мають однакову довжину і на місцях з однаковими номерами стоять однакові елементи.

Визначення 5.5. *Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називається кортеж довжини k з n елементів.*

Кількість кортежів обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^k} = n^k . \qquad (5.5)$$

Розглянутий вище приклад обчислюється за формулою (5.5) $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$.

Дійсно, після заповнення першого місця кортежу довжиною k одним з n елементів (що можливо зробити n варіантами) заповнити друге місце кортежу можна знову будь-яким елементом з усієї множини (повторюючи в одному з варіантів елемент, який знаходиться на першому місці), і так далі k разів. За правилом добутку одержимо, що $\overline{A_n^k} = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.

6. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Задати різними способами елементи множини букв у слові «СТУДЕНТ». Знайти булеан та потужність множини.

Розв'язання. Задамо множину

а) перерахуванням: $A=\{C,T,У,Д,E,H,T\}$;

б) описом характеристичної властивості:

$$A=\{x|\,буква\ \ у\ слові\ "СТУДЕНТ"\}.$$

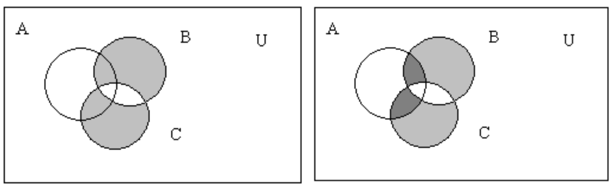
За визначенням 1.2 потужність множини $|A|=7$. За визначенням 1.6 потужність булана $|P(A)|=2^{|A|}=2^7=128$.

Завдання 2. Задано множини $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$, $C=\{1,2,5,6,9,10\}$. Визначити наступні множини: $C\cap B$, $A+B$, $A\cup(C-B)$.

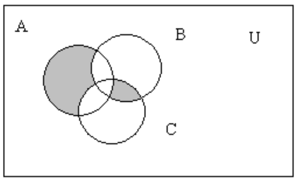
Розв'язання. За визначеннями 1.7 – 1.11 маємо
$C\cap B=\{2,6,10\}$; $A+B=\{1,3,5,7,8,10\}$; $A\cup(C-B)=$
$=\{1,2,3,4,5,6,7\}\cup\{1,5,9\}=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$.

Завдання 3. Для наведеної множини $A\cap(B+C)$ побудувати діаграму Венна, на якій штриховою показати область, що зображує множину.

Розв'язання. Побудуємо спочатку множину $B+C$, а потім шукану множину $A\cap(B+C)$:



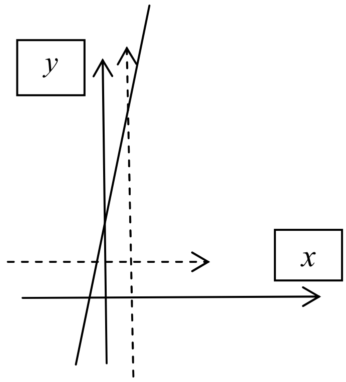
Завдання 4. За допомогою операцій над множинами описати множини, що відповідають зафарбованій частині діаграми Венна.



Розв'язання. Скористаємося приведеними у розділі 1.3 рис. 1.2, маємо: $A+(B\cap C)$.

Завдання 5. З'ясувати, чи є відношення $f=\{\langle x,y\rangle | y=4x+3,\quad x,y\in R\}$ функцією. Визначити її властивості. Якщо функція є взаємно однозначною, знайти обернену.

Розв'язання. Побудуємо графік відношення. Дане відношення є функцією, тому що не існує елементів, які мають однакові перші координати. Ця функція є взаємно однозначною, тому що переводить різні елементи в різні. Знайдемо функцію, обернену до даної:



$f=\{\langle x,y\rangle | y=4x+3,\quad x,y\in R\}$;

$f^{-1}=\{\langle y,x\rangle | x=4y+3,\quad x,y\in R\}$;

$f^{-1}=\{\langle y,x\rangle | 4y=x-3,\quad x,y\in R\}$;

$$f^{-1}=\left\{\langle y,x\rangle \middle| y=\frac{x}{4}-\frac{3}{4},\quad x,y\in R\right\}.$$

Завдання 6. Знайти істинностне значення наступного висловлення: $P\wedge Q\to\sim((Q\vee\sim R)\to(Q\vee P))$, якщо $P=1$, $Q=0$, $R=1$.

Розв'язання. Скористаємося таблицями істинності, які приведені у розділі 3.1:

$P \wedge Q \to \sim \left(\left(Q \vee \sim R\right) \to \left(Q \vee P\right)\right)$

1 0 0 1 0 1

0

0 1

1

0

0

1

Отже, дане висловлення істинне.

Завдання 7. Скласти таблицю істинності для наступного висловлювання: $\left(\sim Q \wedge R\right) \leftrightarrow \left(P \vee \left(R \to Q\right)\right)$.

Розв'язання. Скористаємося таблицями істинності, які приведені у розділі 3.1 і виконаємо всі дії послідовно:

P	Q	R	$\sim Q$	$\sim Q \wedge R$	$R \to Q$	$P \vee \left(R \to Q\right)$	$\left(\sim Q \wedge R\right) \leftrightarrow \left(P \vee \left(R \to Q\right)\right)$
0	0	0	1	0	1	1	**0**
0	0	1	1	1	0	0	**0**
0	1	0	0	0	1	1	**0**
0	1	1	0	0	1	1	**0**
1	0	0	1	0	1	1	**0**
1	0	1	1	1	0	1	**1**
1	1	0	0	0	1	1	**0**
1	1	1	0	0	1	1	**0**

Завдання 8. Логічну функцію $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\bar{x}_1 \downarrow x_3\right)\left(\overline{x_1 \to x_2}\right)$ представити булевою формулою у вигляді ДДНФ і ДКНФ.

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності функції за допомогою таблиць 4.1, 4.2:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1 \downarrow x_3$	$x_1 \to x_2$	$\overline{x_1 \to x_2}$	$(\overline{x}_1 \downarrow x_3)(\overline{x_1 \to x_2})$
0	0	0	1	0	1	0	**0**
0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	1	0	1	0	1	0	**0**
0	1	1	1	0	1	0	**0**
1	0	0	0	1	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0	1	**0**
1	1	0	0	1	1	0	**0**
1	1	1	0	0	1	0	**0**

Скористаємося наслідками 1 і 2 до теореми 4.1 та запишемо ДДНФ та ДКНФ.

Бачимо, що функція має лише один одиничний набір змінних, тому ДДНФ буде мати одну диз'юнкцію кон'юнкцій. Зауважимо, що змінні, які дорівнюють одиниці беремо без заперечення, а змінні, які дорівнюють нулю – із запереченням. Отже, ДДНФ функції має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 .$$

Функція має сім нульових наборів змінних, тому ДКНФ буде мати сім кон'юнкцій диз'юнкцій. Зауважимо, що змінні, які дорівнюють одиниці беремо із запереченням, а змінні, які дорівнюють нулю – без заперечення. Отже, ДКНФ функції має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge$$
$$\wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) .$$

Завдання 9. Розв'язати рівняння: $C_{x+1}^{x-2} = \dfrac{P_{x+1}}{P_x}$.

Розв'язання. За формулами 5.1 і 5.4 маємо:

$$C_{x+1}^{x-2} = \frac{(x+1)!}{(x+1-x+2)!(x-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-2)(x-1)x(x+1)}{3! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-2)} =$$
$$= \frac{(x-1)x(x+1)}{6}, \; x+1 \geq 3, \; x \geq 2 .$$

$$P_{x+1} = (x+1)!,\ P_x = x!;$$

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{(x+1)!}{x!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x} = x+1.$$

Підставимо отримані вирази у рівняння:

$$\frac{(x-1)x(x+1)}{6} = x+1,$$

$$(x-1)x(x+1) - 6(x+1) = 0,$$

$$(x+1)((x-1)x - 6) = 0.$$

звідки $x_1 = -1$ або $x^2 - x - 6 = 0$, $x_2 = 3,\ x_3 = -2$.

Усі від'ємні значення відпадають, бо $x \geq 2$, тобто відповідь $x = 3$.

7. МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Завдання 1. Для кожної із вказаних множин знайти булеан та потужність множини:

1.1. Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 2 і не перевищуючих 23.

1.2.Задати різними способами множину станцій метро Олексіївської вітки міста Харкова.

1.3. Задати різними способами множину днів тижня.

1.4. Перелічите елементи множини $\{x | x \quad \text{ціле і } x^4 < 100\}$.

1.5. Перелічите елементи множини

$\{x | x - \text{додатне парне ціле число і } x \leq 22\}$.

1.6. Перелічите елементи множини

$\{x | x - \text{список іспитів вашої зимової сесії}\}$.

1.7. Опишіть множину $\{3, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.8. Опишіть множину $\{\text{червень}, \text{липень}, \text{серпень}\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.9. Опишіть множину $\{1, 6, 36, 216, 1296\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.10. Опишіть множину $\{1, 6, 36, 216, 1296\}$ за допомогою характеристичної властивості.

Завдання 2.

2.1 $A=\{0, 4, 6, \{5,8\}\}$, $B=\{2, 4, 8\}$, $C=\{0, 2, 4, 5\}$. Визначити наступні множини: $B-C$, $A\cap B$, $A+C$, $(A\cup B)-C$.

2.2 $A=\{1, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 4\}$, $C=\{0, \{2, 5\}, \{4, 6\}, 7\}$. Визначити наступні множини: $A-B$, $A\cup C$, $A+B$, $(A\cap B)\cup(B-C)$.

2.3 $A=\{4, 5, \{8, 9\}\}$, $B=\{0, \{1, 4\}, 5, 6\}$, $C=\{4, 6, 8\}$. Визначити наступні множини: $A\cup B$, $C-B$, $A+C$, $B+(A\cap C)$.

2.4 $A=\{10, 11, 12, 13\}$, $B=\{10, 12, 14\}$, $C=\{11, 13, 15\}$, $U=\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Визначити наступні множини: $A\cap B$, $B\cup C$, $A-C$, $(A\cup B)\cap C$.

2.5 $A=\{1, 2, 3, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 7, 9\}$, $C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначити наступні множини: $A\cap C$, $B-C$, $A+C$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$.

2.6 $A=[0, 5)$, $B=[2, 8)$, $C=[3, 9]$. Визначити наступні множини: $C-B$, $A+C$, $\overline{B}\cap\overline{C}$, $\overline{A\cap C}$.

2.7 $A=(4, 6)$, $B=(0,5]$, $C=[5, 9]$. Визначити наступні множини: $A-B$, $B+C$, $\overline{A-B}$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$.

2.8 $A=(1, 9)$, $B=[0, 7)$, $C=(2, 5]$. Визначити наступні множини: $\overline{A\cap C}$, $A-B$, $B\cup C$, $(A\cup B)-C$.

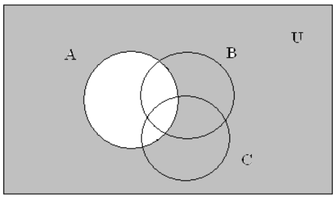
2.9 $A=(3, 7)$, $B=[0,9]$, $C=[2,5]$. Визначити наступні множини: $A\cap B$, $A+C$, $(A\cup B)\cap C$, $\overline{A}\cap\overline{B}$.

2.10 $A=[1,9]$, $B=(2,6)$, $C=(1,10)$. Визначити наступні множини: $B\cup C$, $A–C$, $A+B$, $(A\cup B)-C$.

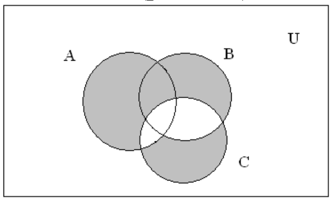
Завдання 3. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини:

3.1 $(A \cup B) - C$;
3.2 $(A \cup B) \cap C$;
3.3 $\overline{A} \cap (B \cup C)$;
3.4 $(A \cup B) - C$;
3.5 $\overline{B} - A$;
3.6 $\overline{A - B}$;
3.7 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3.8 $(A \cup B) \cap C$;
3.9 $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;
3.10 $C - (A \cap B)$.

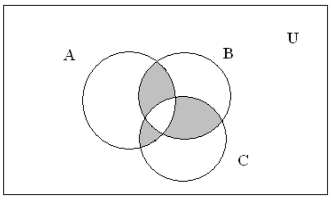
Завдання 4. Опишіть множину, що відповідає зафарбованій частині заданої діаграми Венна (рис. 7.1):



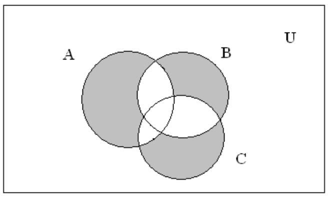
4.1



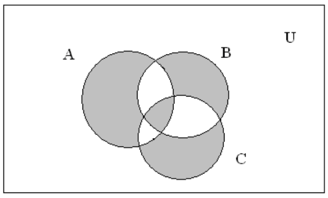
4.2



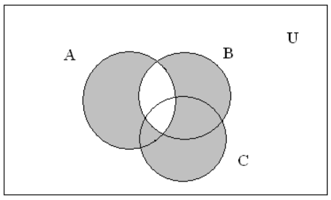
4.3



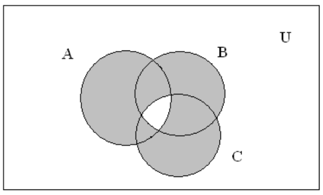
4.4



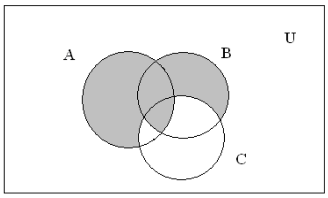
4.5



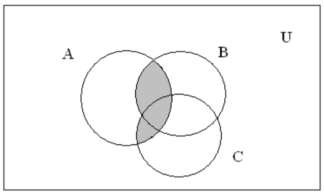
4.6



4.7



4.8

4.9 

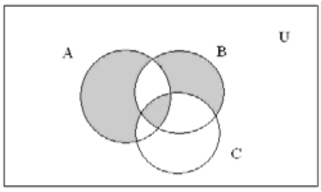
4.10 

Рис. 7.1

Завдання 5. З’ясуйте, які з наведених нижче відношень є функціями. Визначте властивості функцій. Для взаємооднозначних функцій знайдіть обернені:

5.1. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| y = 2x + 1, \quad x, y \in R \right\}$;

5.2. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad x, y \in R^+ \right\}$;

5.3. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| (x+1)^2 + y^2 = 4, \quad x, y \in R^+ \right\}$;

5.4. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| y = \ln(x+1), \quad x \in (-1, +\infty), y \in R \right\}$;

5.5. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1, \quad x, y \in R^+ \right\}$;

5.6. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| y = e^{2x}, \quad x \in R, y \in R^+ \right\}$;

5.7. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 1, \quad x, y \in R \right\}$;

5.8. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| x^2 + y^2 = 25, \quad x, y \in R^+ \right\}$;

5.9. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| y = 0{,}1x - 4, \quad x, y \in R \right\}$;

5.10. $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, \quad x, y \in R^+ \right\}$.

Завдання 6. Знайти істинностне значення кожного з наступних висловлень:

6.1. $P \wedge R \to \sim ((Q \vee \sim P) \leftrightarrow (Q \vee R))$, якщо $P = 1$, $Q = 1$, $R = 1$.

6.2. $Q \to (R \to \sim P \vee R \leftrightarrow Q)$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=1$.
6.3. $(\sim Q \vee \sim R \to Q) \wedge P \leftrightarrow (R \wedge P)$, якщо $P=0$, $Q=0$, $R=0$.
6.4. $P \to \sim (\sim Q \wedge P) \leftrightarrow (R \vee Q \to \sim P)$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=1$.
6.5. $\sim (P \wedge R) \to \sim ((Q \vee P) \leftrightarrow (Q \vee \sim R))$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=0$.
6.6. $(P \vee \sim R) \to (Q \vee \sim R) \leftrightarrow (P \wedge R)$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=0$.
6.7. $\sim (Q \wedge \sim R) \leftrightarrow (P \vee Q \to R)$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=0$.
6.8. $(P \to \sim P \vee \sim R \leftrightarrow Q) \to \sim R$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=0$.
6.9. $(\sim Q \wedge P) \leftrightarrow (R \vee Q \to \sim P)$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=0$.
6.10. $((Q \vee \sim P) \leftrightarrow (Q \vee R)) \sim P \wedge R \to$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=1$.

Завдання 7. Скласти таблицю істинності для кожного з наступних висловлень:
7.1. $Q \vee P \to \sim (Q \wedge P) \leftrightarrow R$.
7.2. $P \to (P \to (Q \leftrightarrow \sim (R \vee P)))$.
7.3. $(Q \vee \sim R) \to (P \wedge Q \leftrightarrow \sim R)$.
7.4. $(P \vee \sim R) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q \vee R)$.
7.5. $Q \vee P \to Q \vee \sim (R \wedge P)$.
7.6. $P \to (Q \to (R \to \sim (Q \wedge P)))$.
7.7. $(R \to P) \vee Q \leftrightarrow (R \to Q \wedge P)$.
7.8. $(Q \vee P \to R) \to (\sim Q \wedge P)$.
7.9. $(R \to P) \vee Q \leftrightarrow R \wedge P$.
7.10. $R \vee P \to (Q \vee \sim (R \wedge P))$.

Завдання 8. Логічну функцію представити булевою формулою у вигляді ДДНФ іДКНФ:

8.1. $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \oplus 1)(x_3 \oplus x_2)$.

8.2. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \mid (x_3 \vee x_2)$.

8.3. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_3 \downarrow x_1)$.

8.4. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \oplus 1)(x_1 \bar{x}_2)$.

8.5. $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{(x_1 \vee x_2)} \downarrow x_3$.
8.6. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \oplus 1)(\overline{x}_2 \vee x_3)$.
8.7. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\overline{x}_3)|(\overline{x}_2 x_3)$.
8.8. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2) \downarrow \overline{(x_1 \vee x_3)}$.
8.9. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \leftrightarrow (x_3 \downarrow \overline{x}_2)$.
8.10. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1|x_2) \leftrightarrow \overline{x}_3$.

Завдання 9. Розв'язати рівняння:

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	а) $A_{x+2}^{x}=15P_x$; б) $3C_{2x}^{x-1}=5C_{2x-1}^{x}$.	6	а) $A_x^3+C_x^{x-2}=14x$; б) $P_{x+3}=720A_x^5P_{x-5}$.
2	а) $C_{x-1}^3+C_{x-1}^2=7(x-2)$; б) $12C_{x+3}^4=55A_{x+1}^2$.	7	а) $210A_{x+3}^{x-4}P_3=P_{x+2}$; б) $A_x^3-C_x^4=3A_x^2$.
3	а) $A_{x+1}^6P_{x-5}=72P_{x-1}$; б) $C_{x-1}^3+C_{x-1}^2=7(x-2)$.	8	а) $A_x^5=336A_{x-2}^{x-5}$; б) $2(A_x^3+3A_x^2)=P_{x+1}$.
4	а) $A_x^{x-3}=xP_{x-2}$; б) $C_{x+4}^{x-1}-C_{x+3}^{x}=15(x+2)$.	9	а) $A_x^2C_x^{x-1}=42$; б) $A_{x+1}^4P_{x-4}=15P_{x-1}$.
5	а) $5C_x^3=C_{x+2}^4$; б) $P_{x+5}=240A_{x+3}^6P_{x-3}$.	10	а) $C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^3$; б) $A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}=\frac{30}{7}P_x$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.
2. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. – Москва – С.- Петербург – Киев.: Издательский дом "Вильямс", 2003.– 958 с.
3. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
4. Донской В.И. Дискретная математика. - Симферополь: Сонат, 2000– 360с.
5. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А. Основи дискретної математики. – К.:Наукова думка, 2002. – 578 с.
6. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: Энергия, 1980. – 344 с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1976. – 320 с.
8. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. - М.: Логос, 2002. – 238 с.
9. Тевяшев А.В., Гусарова И.Г. Основы дискретной математики в примерах и задачах. - Харьков: ХНУРЭ, 2003. – 272 с.
10. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1979. -384 с.
11. Коваленко Л.Б.,Станішевський С.О. Дискретна математика. - Харків: ХНАМГ, 2006.-192 с.
12. Городнов В.П., Кинаст Е.Н., Михайленко С.В., Савинова Е.Л., Янцевич А.А. Уроки по комбинаторике. – Харьков. НУА, 2006. – 40 с.
13. Колосов А.І., Коваленко Л.Б., Станішевський С.О., Якунін А.В. Методичні вказівки в дискретної математики. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 123 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки з дисципліни **"Вища математика 2"**
до практичних занять, самостійної та контрольної роботи
(для студентів денної форми навчання напряму підготовки
6.030504 - "Економіка підприємства")

Укладачі: Колосов Анатолій Іванович
Коваленко Людмила Борисівна
Станішевський Степан Олександрович
Кузнецова Ганна Анатоліївна

Відповідальний за випуск: *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *Л. Б. Коваленко, Г. А. Кузнецова*

План 2011, поз. 153М

Підп. до друку 21.10.2011 Формат 60х84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 3,8
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.