МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

з курсу

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання напряму підготовки 6.030601 — «Менеджмент» та слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.03060101- «Менеджмент організацій і адміністрування»)

Харків - ХНАМГ - 2011

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математичне програмування» (для студентів 3 курсу заочної форми навчання напряму підготовки 6.030601 — «Менеджмент» та слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.03060101- «Менеджмент організацій і адміністрування») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Т. Б. Воронкова В. М. Охріменко, О. О. Воронков, - Х.: ХНАМГ, 2011.- 58 с.

Укладачі : доц. В. М. Охріменко,
ст. викл. Т. Б. Воронкова,
ас. О. О. Воронков

Рекомендовано кафедрою інформаційних систем і технологій в міському господарстві, протокол № 61 від 17.11.09 р.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні вказівки спрямовані на допомогу студентам оволодіти практичними навичками з побудови математичних моделей економічних задач оптимального вибору і застосування методів математичного програмування для їх розв’язання.

Математичне програмування – це розділ математики, що розроблює методи пошуку екстремальних значень функції, на аргументи якої накладені обмеження. Дисципліна «Математичне програмування» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки бакалаврів за напрямком 6.030601 — «Менеджмент». Відповідно до навчального плану її вивчають у 5 семестрі 3 курсу. Обсяг практичних занять становить 16 аудиторних годин (8 практичних занять). Вивчення дисципліни «Математичне програмування» спрямоване на підготовку висококваліфікованих фахівців, які володіють методами математичного моделювання й оптимізації і здатні приймати рішення, підкріплені математичними розрахунками.

Відповідно до робочої програми курсу «Математичне програмування» у цих методичних вказівках розглянуто в основному найбільш важливі теми змістового модуля 1 «Особливості і сфери застосування математичного програмування в менеджменті. Класифікація задач. Лінійне програмування», зокрема економічна і математична постановка оптимізаційних задач, вибір критерію оптимізації і обмежень задачі, геометрична інтерпретація множини допустимих рішень і цільової функції, канонічна форма лінійної оптимізаційної моделі, симплексний метод, економічна і математична постановка транспортної задачі (ТЗ), випадок виродження і двоетапна ТЗ, а також змістового модуля 2 «Економічна інтерпретація і аналіз оптимальних планів лінійних економіко-математичних моделей», зокрема двоїста задача і двоїсті оцінки в аналізі рішень лінійних оптимізаційних моделей, дефіцитність ресурсів в оточенні оптимального плану задачі лінійного програмування, оцінка рентабельності продукції, аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів та коефіцієнтів цільової функції. Знання й навички, отримані при вивченні цих тем, є основою для вивчення наступних, більш складних тем курсу, а також найбільш часто застосовуються у практичній діяльності.

Практичне заняття 1
ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета — сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Задача 1. 1

Виконати замовлення з виробництва 32 виробів $В_1$ і 4 виробів $В_2$ взялися бригади $Б_1$ і $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ з виробництва виробів $В_1$ і $В_2$ становить відповідно 4 і 2 вироби на годину, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 год. Продуктивність бригади $Б_2$ – відповідно 1 і 3 вироби на годину, а її фонд робочого часу – 4 год. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці виробу, для бригади $Б_1$ дорівнюють відповідно 9 і 20 грн., для бригади $Б_2$ – 15 і 30 грн.

Складіть математичну модель задачі, що дозволяє знайти оптимальний обсяг випуску виробів, який забезпечує мінімальні витрати на виконання замовлення.

Розв'язання

Задамося змінними задачі

Шуканими величинами у задачі є обсяги випуску виробів. Вироби $В_1$ будуть випускатися двома бригадами $Б_1$ і $Б_2$. Тому необхідно розрізняти кількість виробів $В_1$, вироблених бригадою $Б_1$, і кількість виробів $В_1$, вироблених бригадою $Б_2$. Аналогічно, обсяги випуску виробів $В_2$ бригадою $Б_1$ і бригадою $Б_2$ також є різними величинами. Внаслідок цього в даній задачі 4 змінні. Для зручності сприйняття будемо використати двохіндексну форму запису x_{ij} – кількість виробів $В_j$ (j=1,2), що виготовляються бригадою $Б_i$ (i=1,2), а саме,

x_{11} - кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];
x_{12} - кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];
x_{21} - кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.];
x_{22} - кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.].

Цільова функція

Метою розв'язання задачі є виконання плану з мінімальними витратами, тобто критерієм ефективності розв'язку служить показник витрат на виконання всього замовлення. Тому цільова функція повинна бути представлена формулою розрахунку цих витрат. Витрати кожної бригади на виробництво одного виробу $В_1$ і $В_2$ відомі з умови. Таким чином, цільова функція має вигляд

$$L(X) = 9x11 + 20x12 + 15x21 + 30x22 \rightarrow \min, \left[\frac{грн.}{шт} * шт = грн.\right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва виробів бригадами обмежуються наступними умовами:

- загальна кількість виробів В1, що випущені обома бригадами, повинна дорівнювати 32 шт., а загальна кількість виробів $В_2$ - 4 шт.;
- час, відпущений на роботу над даним замовленням, становить для бригади Б1 - 9,5 год., а для бригади $Б_2$ - 4 год.;
- обсяги виробництва виробів не можуть бути від'ємними величинами.

Таким чином, всі обмеження задачі діляться на три групи, обумовлені:

- величиною замовлення на виробництво виробів;
- фондами часу, виділеними бригадам;
- невід'ємністю обсягів виробництва.

Для зручності складання обмежень запишемо вихідні дані у вигляді табл. 1.1.

Таблиця 1.1 - Вихідні дані

Бригада	**Продуктивність бригад, шт/год.**		**Фонд робочого часу, год.**
	$В_1$	**$В_2$**	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Замовленн	32	4	

Обмеження за замовленням виробів мають наступну змістовну форму запису

$$\begin{bmatrix} \textit{кількість виробів } B_1 \\ \textit{виготовлених бригадами } Б_1 \textit{ і } Б_2 \end{bmatrix} = [32 \textit{ шт.}]$$

та

$$\begin{bmatrix} \textit{кількість виробів } B_2 \\ \textit{виготовлених бригадами } Б_1 \textit{ і } Б_2 \end{bmatrix} = [4 \textit{ шт.}]$$

Математична форма запису має вигляд

$$x_{11} + x_{21} = 32 \text{ [шт.]}$$

і

$$x1_2 + x_{22} = 4 \text{ [шт.]}.$$

Обмеження за фондами часу має змістовну форму

$$\begin{bmatrix} \textit{загальний час, витрачений бригадою } Б_1 \\ \textit{на виготовлення виробів } B_1 \textit{ і } B_2 \end{bmatrix} \le [9{,}5 \textit{ год.}]$$

та

$$\begin{bmatrix} \textit{загальний час, витрачений бригадою } Б_2 \\ \textit{на виготовлення виробів } B_1 \textit{ і } B_2 \end{bmatrix} \le [4 \textit{ год.}]$$

Проблема полягає в тому, що в умові задачі безпосередньо не заданий час, що витрачають бригади на випуск одного виробу $В_1$ або $В_2$, тобто не задана трудомісткість виробництва. Але є інформація про продуктивність кожної бригади, тобто про кількість випущених виробів у 1 годину. Трудомісткість $Т_р$ і продуктивність $П_р$ є зворотними величинами, тобто

$$Tp = \frac{1}{Пр}\left[\frac{\textit{год.}}{\textit{шт.}}\right].$$

Тому використовуючи табл. 1.1, дістаємо наступну інформацію:

— $\frac{1}{4}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виготовлення одного виробу $В_1$;

— $\frac{1}{2}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $В_2$;

— $\frac{1}{1}$ год. витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_1$;

— $\frac{1}{3}$ год. витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_2$.

Запишемо обмеження за фондами часу в математичному вигляді

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad \left[\frac{\textit{год.}}{\textit{шт.}}\textit{шт.}\right] \le [\textit{год.}]$$

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4 \quad \left[\frac{\textit{год.}}{\textit{шт.}}\textit{шт.}\right] \le [\textit{год.}]$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається як

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1,2;\ j = 1,2).$$

Таким чином, математична модель цієї задачі має вигляд

$$L = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow \min \quad [грн.]$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 \quad [шт.] \\ x_{12} + x_{22} = 4 \quad [шт.] \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad [год.] \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \le 4 \quad [год.] \\ x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1{,}2};\ j = \overline{1{,}2} \quad [шт.] \end{cases}$$

Задача 1. 2

Для пошиття одного виробу потрібно викроїти з тканини 6 деталей. На швейній фабриці були розроблені два варіанти розкрою тканини. У табл. 1.2 наведені характеристики варіантів розкрою 10 м тканини і комплектність, тобто кількість деталей певного виду, які необхідні для пошиття одного виробу. Щомісячний запас тканини для пошиття виробів даного типу становить 405 м^2. У найближчий місяць планується зшити 90 виробів.

Необхідно побудувати математичну модель задачі, що дозволяє в найближчий місяць виконати план з пошиття з мінімальною кількістю відходів.

Таблиця 1.2 - Характеристика варіантів розкрою відрізів тканини по 10 м

Варіант розкрою	**Кількість деталей, шт. /відріз**						**Відходи, м^2/відріз**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектність, шт. /виріб	1	2	2	2	2	2	

Розв'язання

Змінні задачі

У даній задачі шукані величини явно не вказані, але сказано, що повинен бути виконаний щомісячний план з пошиття 90 виробів. Для пошиття 90 виробів на місяць потрібно розкроїти строго певну кількість деталей. Крій проводиться з відрізів тканини по 10 м двома різними способами, які дозволяють одержати різне число деталей. Оскільки заздалегідь невідомо, скільки тканини буде розкроюватися першим способом і скільки - другим, то як шукані величини можна задати кількість відрізів тканини по 10 м , що розкроєні кожним із способів:

x_1 - кількість відрізів тканини по 10 м^2, що розкроєні першим способом протягом місяця, [відріз./міс.];

x_2 - кількість відрізів тканини по 10 м^2, що розкроєні другим способом протягом місяця, [відріз./міс].

Цільова функція

Метою розв'язання задачі є виконання плану при мінімальній кількості відходів. Оскільки кількість виробів строго заплановано (90 шт. /міс.), то цей параметр не описує цільової функції, а належить до обмеження, невиконання якого означає, що задача не вирішена. А критерієм ефективності виконання плану служить параметр "кількість відходів", який необхідно звести до мінімуму. Оскільки при розкрої одного відрізу (10 м^2) тканини за 1-м варіантом виходить 0,5 м^2 відходів, а за 2-м варіантом - 0,35 м^2, то загальна кількість відходів при крої (цільова функція) має вигляд

$$L = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min ,$$

$$\left[\frac{м^2 відх}{відріз} * \frac{відріз}{міс.} = \frac{м^2 відх}{міс.} \right].$$

Обмеження

Кількість розкроїв тканини різними способами обмежується наступними умовами:

- повинен бути виконаний план з пошиття виробів, інакше кажучи, загальна кількість викроєних деталей повинна бути такою, щоб з них можна було пошити 90 виробів на місяць, а саме: деталей 1-го виду повинно бути як мінімум 90 і деталей інших видів - як мінімум по 180;
- витрата тканини не повинна перевищувати її місячного запасу на складі;
- кількість відрізів розкраюваної тканини не може бути від'ємним. Обмеження за планом пошиття пальто мають наступну змістовну форму запису

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 1, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \ge [90 \textit{ шт.}]$$

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 2, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \ge [180 \textit{ шт.}]$$

……………………………………………………......

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 6, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \ge [180 \textit{ шт.}]$$

Математично ці обмеження записуються у вигляді

$$\begin{aligned} &60x_1 + 80x_2 \ge 90; \\ &35x_2 \ge 180; \\ &90x_1 + 20x_2 \ge 180; \\ &40x_1 + 78x_2 \ge 180; \\ &70x_1 + 15x_2 \ge 180; \\ &90x_1 \ge 180; \end{aligned}$$

$$\left[\frac{шт.}{відріз} * \frac{відріз}{міс.} \right] \ge \left[\frac{шт.}{міс.} \right]$$

Обмеження за витратами тканини має такі форми запису:

змістовну

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість тканини} \\ \textit{що розкрієна за місяць} \end{bmatrix} \le [405 \textit{ м}^2]$$

і математичну

$$x_1 + x_2 \le \frac{405}{10},$$

$$\left[\frac{відріз}{міс.}\right] \le \left[\frac{м^2 * відріз}{міс. * м^2}\right].$$

Невід'ємність кількості розкроєних відрізів задається у вигляді

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$
\begin{aligned}
& L = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min \quad [м_2 відх./міс.] \\
& 60x_1 + 80x_2 \ge 90 \quad [шт./міс.] \\
& 35x_2 \ge 180 \quad [шт./міс.] \\
& 90x_1 + 20x_2 \ge 180 \quad [шт./міс.] \\
& 40x_1 + 78x_2 \ge 180 \quad [шт./міс.] \\
& 70x_1 + 15x_2 \ge 180 \quad [шт./міс.] \\
& 90x_1 \ge 180 \quad [шт./міс.] \\
& x_1 + x_2 \le 40{,}5 \quad [відріз/міс.] \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \quad [відріз/міс.]
\end{aligned}
.$$

Практичне заняття 2
ГЕОМЕТРІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – засвоєння студентами основних понять і визначень дисципліни шляхом ілюстрації змісту оптимізації.

Вихідні дані: математична модель задачі лінійного програмування.

Графічний метод досить простий і наочний для розв'язання задач лінійного програмування (ЛП) з двома змінними. Він заснований на геометричному поданні припустимих рішень і цільової функції задачі.

Кожна з нерівностей задачі ЛП визначає на координатній площині (x1,x2) деяку напівплощину, а система нерівностей у цілому – перетинання відповідних площин. Множина точок перетинання даних напівплощин називається областю припустимих рішень (ОПР). ОПР завжди являє собою опуклу фігуру, тобто таку, що володіє наступною властивістю: якщо дві точки А і В належать цій фігурі, то й весь відрізок АВ належить їй. ОПР графічно може бути представлена опуклим багатокутником, необмеженою опуклою багатокутною областю, відрізком, променем, однією точкою. У випадку несумісності системи обмежень задачі ОПР є порожньою множиною.

Все вищесказане належить і до випадку, коли система обмежень включає рівності, оскільки будь-яку рівність

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$$

можна подати у вигляді системи двох нерівностей

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i \end{cases}.$$

Цільова функція $L=c_1x_1 + c_2x_2$ при фіксованому значенні визначає на площині пряму лінію $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Змінюючи значення L, ми одержимо сімейство паралельних прямих, називаних лініями рівня. Це пов'язане з тим, що зміна значення L спричинить зміну лише довжини відрізка, що відсікає лінією рівня на осі x_2 (початкова ордината), а кутовий коефіцієнт прямої

$$tg\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$$

залишиться постійним. Тому для рішення буде досить побудувати одну з ліній рівня, довільно вибравши значення L.

Вектор $C = (c_1;c_2)$ з координатами з коефіцієнтів цільової функції при x_1 і x_2 перпендикулярний до кожної з ліній рівня. Напрямок вектора C збігається з напрямком зростання цільової функції, що є важливим моментом для розв'язання задач. Напрямок убування цільової функції протилежний напрямку вектора C.

Суть графічного методу полягає в наступному. За напрямком (або проти напрямку) вектора C в ОПР шукають оптимальну точку $X^* = (x_1^*;\ x^*_2)$. Оптимальною вважається точка, через яку проходить лінія рівня L_{max} (L_{min}), що відповідає найбільшому (найменшому) значенню функції L(x). Оптимальний розв'язок завжди перебуває на границі ОПР, зокрема, в останній вершині багатокутника ОПР, через яку пройде цільова пряма, або на всій його стороні.

При пошуку оптимального розв'язку задач ЛП можливі наступні ситуації: існує єдиний розв'язок задачі; існує нескінченна множина розв'язків (альтернативний оптимум); цільова функція не обмежена; область припустимих рішень - єдина точка; задача не має рішень.

Вказівки до виконання завдання

I. В обмеженнях задачі замініть знаки нерівностей на знаки точних рівностей і побудуйте відповідні прямі.

II. Знайдіть і заштрихуйте напівплощини, дозволені кожним з обмежень-нерівностей задачі. Для цього підставте в конкретну нерівність координати якої-небудь точки [наприклад, (0;0)], і перевірте істинність отриманої нерівності.

Якщо нерівність істинна, то треба заштрихувати напівплощину, що містить дану точку; інакше (якщо нерівність помилкова) треба заштрихувати напівплощину, що не містить дану точку.

Оскільки x_1 і x_2 повинні бути невід'ємними, то їхні припустимі значення завжди будуть знаходитися вище осі x_1 і правіше осі x_2, тобто в I-му квадранті.
Обмеження-рівності дозволяють тільки ті точки, які лежать на відповідній прямій, тому виділіть на графіку такі прямі.

III. Визначите ОПР як частину площини, що належить одночасно всім дозволеним областям, і виділіть її. При відсутності ОПР задача не має рішень, про що зробіть відповідний висновок.

Якщо ОПР – не порожня множина, то побудуйте цільову пряму, тобто кожну з ліній рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, де L – довільне число, наприклад, кратне c_1 і c_2, тобто зручне для проведення розрахунків. Спосіб побудови аналогічний побудові прямих обмежень.

V. Побудуйте вектор $C = (c_1,c_2)$, що починається в точці (0;0), закінчується в точці (c_1,c_2). Якщо цільова пряма і вектор C побудовані правильно, то вони будуть перпендикулярні.

VI. При пошуку максимуму цільової функції пересувайте цільову пряму у напрямку вектора C, при пошуку мінімуму цільової функції - проти напрямку вектора C. Остання за ходом руху вершина ОПР буде точкою max або min цільової функції. Якщо такої точки (або точок) не існує, то зробіть висновок про необмеженість цільової функції на множині планів зверху (при пошуку max) або знизу (при пошуку min).

VII. Визначите координати точки max (min) цільової функції $X^* = (x_1^*;x_2^*)$ і обчисліть значення цільової функції $L(X^*)$. Для обчислення координат оптимальної точки X^* вирішіть систему рівнянь прямих, на перетинанні яких знаходиться X^*.

Задача 2.1

Знайдемо оптимальне рішення задачі, математична модель якої має вигляд

$$L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Побудуємо прямі обмежень, для чого обчислимо координати точок перетинання цих прямих з осями координат (рис. 2.1).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (3) \\ x_2 = 2 & (4). \end{cases}$$

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Пряма (4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі x_1.

Визначимо ОПР. Наприклад, підставимо точку (0;0) у вихідне обмеження (3), дістанемо 0 < 1, що є істинною нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що містить точку (0;0), тобто розташовану правіше і нижче прямої (3). Аналогічно визначимо припустимі напівплощини для інших обмежень і вкажемо їх стрілками біля відповідних прямих обмежень. Загальною областю, дозволеною всіма обмеженнями, тобто ОПР є багатокутник ABCDEF.

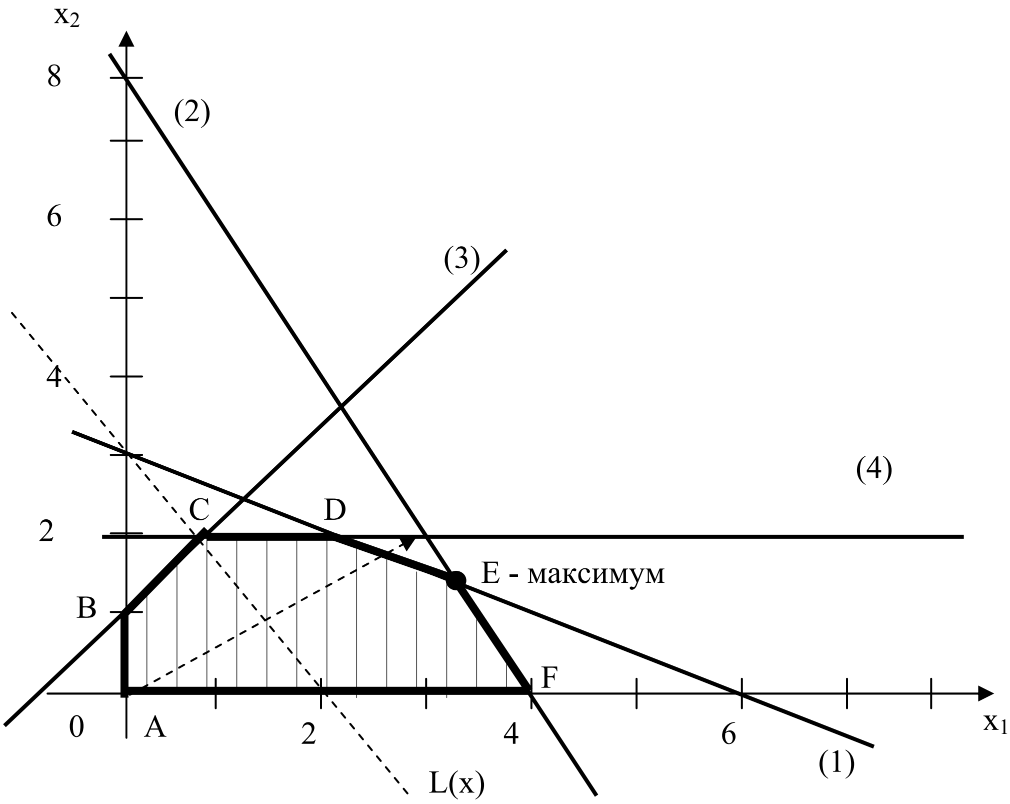


Рис. 2.1 – Графічне рішення задачі

Цільову пряму можна побудувати за рівнянням

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Будуємо вектор C з точки (0;0) у точку (3;2). Точка E - це остання вершина багатокутника припустимих рішень ABCDEF, через яку проходить цільова пряма, рухаючись за напрямком вектора C. Тому E - це точка максимуму цільової функції. Визначимо координати точки E з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (2):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$E = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right).$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

$$L^* = 3 * \frac{10}{3} + 2 * \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Задача 2. 2

$$L = -2x_1 - x_2 \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \quad (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \quad (2) \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \quad (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \quad (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.2).

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

$$(4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Цільову пряму побудуємо за рівнянням

$$-2x_1 - x_2 = -4,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

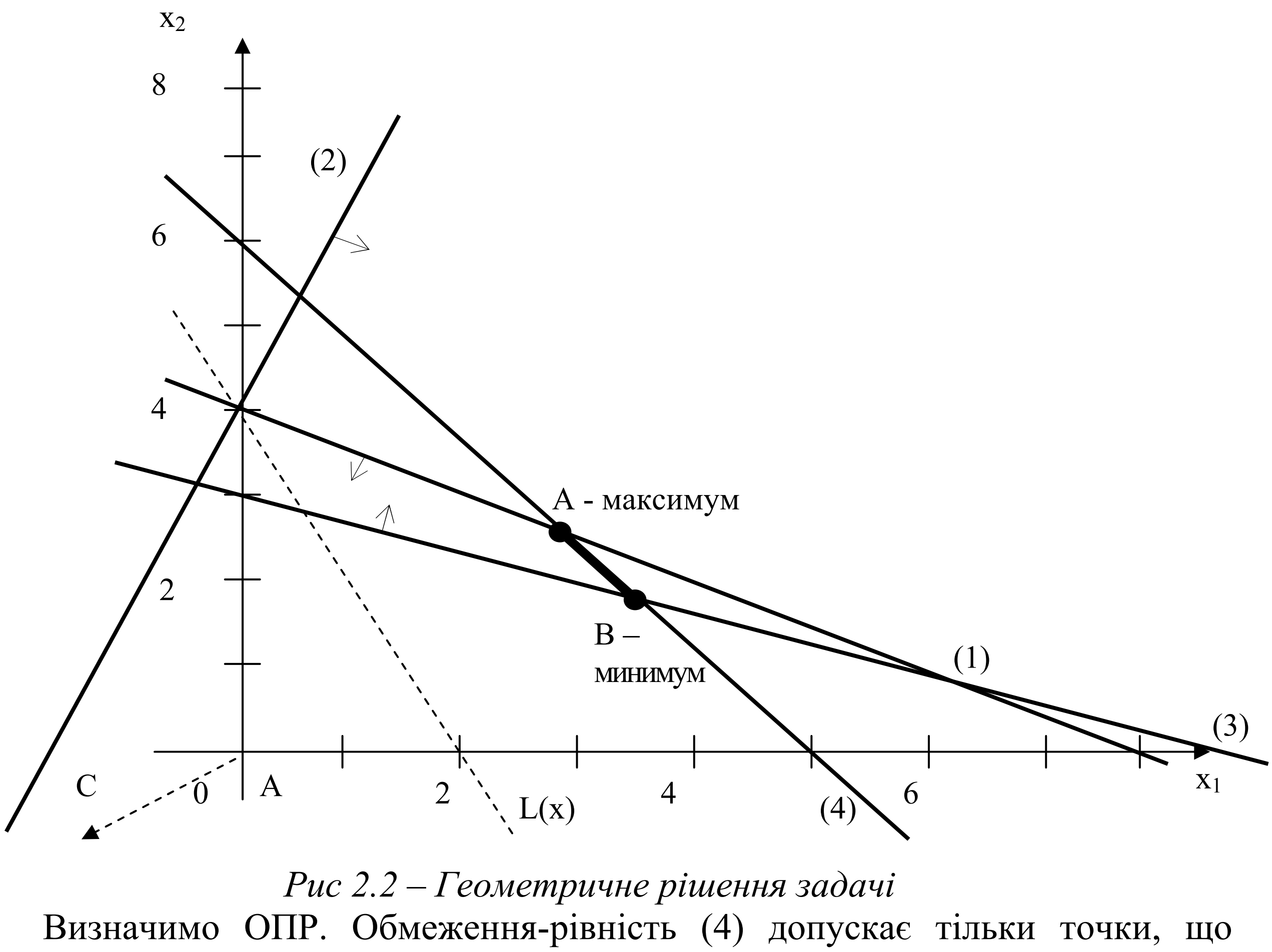


Рис 2.2 – Геометричне рішення задачі

Визначимо ОПР. Обмеження-рівність (4) допускає тільки точки, що лежать на прямій (4). Підставимо точку (0;0) в обмеження (3), одержимо 0≥ 9, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0;0), тобто розташовану вище прямої (3). Аналогічно визначимо й укажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз напівплощин, припустимих іншими обмеженнями-нерівностями, дозволяє визначити, що ОПР - це відрізок АВ.

Будуємо вектор С з точки (0;0) у точку (-2;-1). Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектора С. Точка В - це остання точка відрізка АВ, через яку проходить цільова пряма, тобто В - точка мінімуму цільової функції.

Визначимо координати точки В з системи рівнянь прямих обмежень (3) і (4)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3{,}46 \\ x_2 \approx 1{,}85 \end{cases}.$$

Мінімальне значення цільової функції дорівнює

L (3,46; 1,85)= -2 * 3,46 -1 * 1,85 = -8,77.

При пошуку точки максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектора С. Останньою точкою відрізка АВ, а виходить, і точкою максимуму буде А. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (4)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2{,}86 \\ x_2 \approx 2{,}57 \end{cases}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює

L (2,86; 2,57)= -2 * 2,86 -1 * 2,57 = -8,29.

Таким чином, В(3,46; 1,85) - точка мінімуму, L_{min} = -8,77 ; А(2,86; 2,57`) - точка максимуму, L_{max} = -8,29.

Задача 2. 3

$$L = x_1 - 3x_2 \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3 & (1) \\ x_1 + x_2 \ge 5 & (2) \\ x_1 \le 4 & (3) \\ -2x_1 + x_2 \ge 2 & (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.3)

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases};\quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases};\quad (4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Пряма (3) - проходить через точку x1 = 4 паралельно осі x2. Цільову пряму побудуємо за рівнянням

x_1-3x_2=-3,

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Визначимо ОПР. Підставимо точку (0;0) в обмеження (2), дістанемо 0≥5, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0;0), тобто розташовану правіше й вище прямої (2).

Аналогічно визначимо й укажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз припустимих напівплощин дозволяє визначити, що ОПР - це незамкнута область, обмежена прямими (2), (3), (4) і віссю x_2.

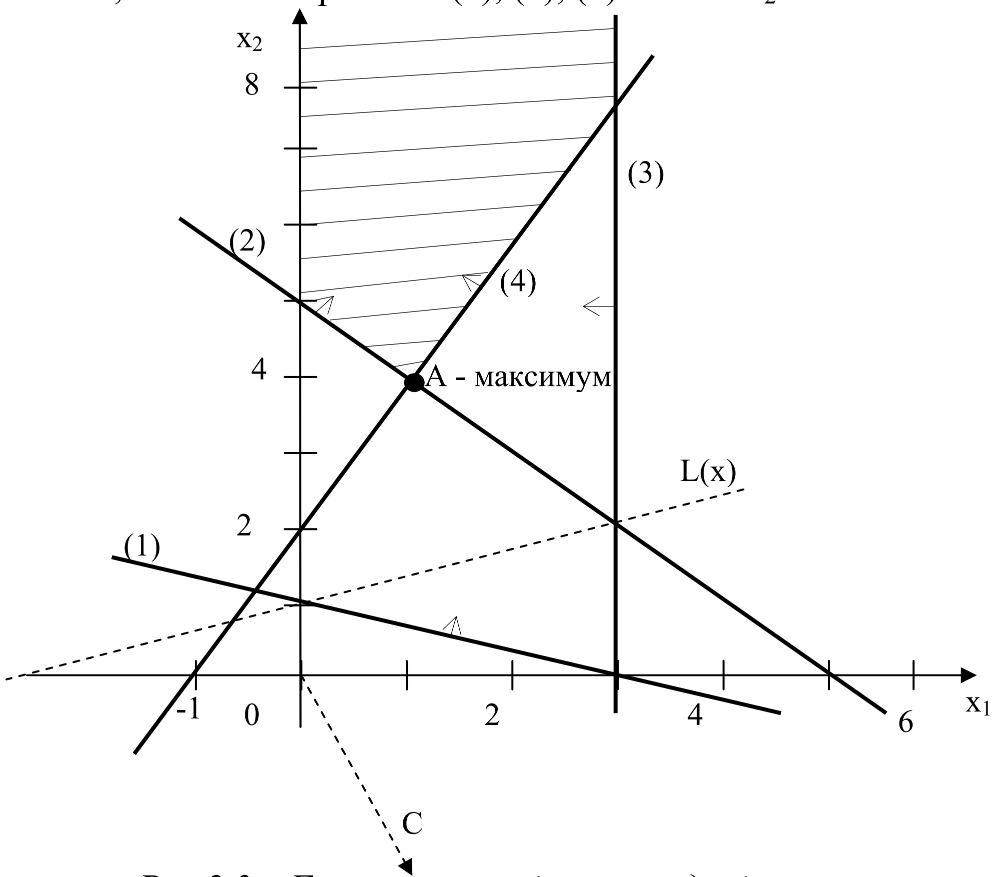


Рис 2.3 – Геометричне рішення задачі

Будуємо вектор С з точки (0;0) у точку (1;-3). Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектора С. Оскільки в цьому напрямку ОПР не обмежена, неможливо в цьому напрямку знайти останню точку ОПР. Звідси витікає, що цільова функція не обмежена на множині планів знизу (оскільки йде пошук мінімуму).

При пошуку максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектора С до перетинання з вершиною А - останньою точкою ОПР у цьому напрямку. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (2) і (4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

L(1; 4)=1*1-3*4 = -11.

Таким чином, у даній задачі цільова функція не обмежена на множині планів знизу, а А(1;4) є точкою максимуму цільової функції, Lmax = -11.

Практичне заняття 3
СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – оволодіння основними етапами алгоритму симплекс-методу, вивчення його особливостей, сутності коефіцієнтів технологічної матриці й методу оцінки оптимальності плану.

Вказівки до виконання завдання

Симплексний метод являє собою послідовний перебір кутових точок ОПР, при якому значення цільової функції зростає (убуває) від однієї ітерації до іншої (від однієї кутової точки до іншої). Критерій оптимальності в симплексному методі реалізується шляхом визначення оцінок стовпців матриці Δ щодо поточного базису (симплекс-різниць). Якщо симплекс-різниці показують неоптимальність плану, здійснюється перехід до наступного базису. При цьому один стовпець виводиться з базису, а інший вводиться. Якщо є кілька стовпців, що мають від’ємні (додатні) симплекс-різниці, то треба вибирати, який з них вводити в першу чергу.

- Записати задачу в канонічній формі.
- Визначити початковий опорний план.
- Скласти симплексну таблицю.
- Перевірити план на оптимальність. Для цього визначити елементи індексного рядка за формулою $L_j = \Sigma c_j{*}a_{ij}$ і оцінки векторів $\Delta_j = L_j - c_j$. Опорний план оптимальний, якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (або $\Delta_j \leq 0$), а інакше задача не має рішення, або треба перейти до нового опорного плану.
- Для знаходження нового опорного плану визначити напрямні рядок і стовпець таблиці. До базису вводять той вектор, для якого добуток $\Delta_j{*}\Theta_j$ найбільший за абсолютною величиною, де Θ_j – найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводиться до базису $\Theta = \min(b_i/a_{ij})$.
- Визначити коефіцієнти нового опорного плану (коефіцієнти розкладання векторів $\overline{A}_j$ по векторах нового базису).
- Перевірити новий опорний план на оптимальність.

Задача 3. 1

Продукція чотирьох видів A, B, C і D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду задана таблицею.

Верстат	**Тривалість обробки, год.**			
	A	**B**	**C**	**D**
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн. для верстата 1 і 15 грн. - для верстата 2. Можливий час використання верстатів обмежено: для верстата 1 він становить 450 машино-годин, а для верстата 2 - 380 машино-годин. Ціна одиниці продукції кожного виду дорівнює відповідно 73, 70, 55 і 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний чистий прибуток.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель. Нехай x_j — план виробництва продукції j-го виду, де j може приймати значення від 1 до 4. Умовами задачі будуть обмеження на час використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

- для верстата 1 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450$ (машино-годин);
- для верстата 2 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380$ (машино-годин).

Цільова функція задачі визначається як загальний чистий прибуток від реалізації готової продукції і складається з різниці між ціною і собівартістю виробництва продукції кожного виду:

$$L = (73-(2*10 + 3*15))x_1+(70-(3*10 + 2*15))x_2 +$$
$$+ (55-(4*10 + 1*15))x_3 + (45-(2*10 + 2*15))x_4;$$
$$L = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3-5x_4.$$

Таким чином, математична модель задачі має такий вигляд:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від нерівностей-обмежень до строгих рівностей, увівши до лівих частини обмежень додаткові змінні x5 і x6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Економічний зміст цих додаткових змінних - не використаний на виробництво продукції час роботи верстатів 1 і 2. У цільовій функції додаткові змінні мають коефіцієнти, рівні нулю.

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \overline{A}_1 + x_2 \overline{A}_2 + x_3 \overline{A}_3 + x_4 \overline{A}_4 + x_5 \overline{A}_5 + x_6 \overline{A}_6 = \overline{B}$$

де

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{B} = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\overline{A}_5$ й $\overline{A}_6$ одиничні і лінійно незалежні, саме вони складають початковий базис. Змінні задачі x5 і x6, що відповідають одиничним базисним векторам, є базисними, а інші — вільними змінними задачі. Таким чином, початковий опорний план має вигляд

X = (0; 0; 0; 0; 450; 380).

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану.

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	8	10	0	-5	0	0
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_5	0	450	2	3	4	2	1	0
A_6	0	380	3	2	1	2	0	1
Lj		0	0	0	0	0	0	0
Δj			-8	-10	0	5	0	0

Перевіримо план на оптимальність. Для цього заповнимо індексний рядок за формулою $L_j = \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij}$ і визначимо симплекс-різниці Δj = Lj – cj.

3. Оскільки в оцінному рядку присутні симплекс-різниці, які не задовольняють умові оптимальності (від'ємні у задачі на максимум або додатні у задачі на мінімум), опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити. У нашої задачі в оцінному рядку дві симплекс-різниці Δ1 = -8 і Δ2 = -10 суперечать умові оптимальності, тому перший опорний план неоптимальний. Необхідно перейти до нового опорного плану.

4. Для переходу до іншого опорного плану змінюють базис за рахунок виключення з поточного базису однієї змінної і включення замість неї нової з числа вільних змінних. Будемо вводити до базису змінну x2, тому що їй відповідає найбільша за абсолютною величиною симплекс-різниця з тих, що не задовольняють умові оптимальності.

З базису будемо виводити вектор, якому відповідає найменше з відношень вільних членів до додатних елементів вектора, що вводиться до базису ($\overline{A}_2$) $\Theta_2 = \min\left(\frac{450}{3}; \frac{380}{2}\right) = \min(150;180) = 150$. Таким чином, з базису будемо виключати вектор $\overline{A}_5$. Розв'язуючим елементом є число 3. Подальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана - Гаусса. Симплексна таблиця має вигляд:

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	8	10	0	-5	0	0
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	10	150	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0
A_6	0	80	1,67	0	-1,67	0,67	-0,67	1
L_j		1500	20/3	10	40/3	20/3	10/3	0
Δj			-4/3	0	40/3	35/3	10/3	0

У цій таблиці спочатку заповнимо два перших стовпчики «Базис» і «Сjбаз», а інші елементи нової таблиці розрахуємо за розглянутими нижче правилами:

Напрямний рядок розділимо на розв'язуючий елемент 3 і отримані числа запишемо в перший рядок нової симплексної таблиці.

Для одержання нуля в другому стовпчику рядка вектора $\overline{A}_6$ головний рядок нової таблиці помножимо на -2 і додамо до рядка вектору $\overline{A}_6$

попередньої таблиці. Отримали новий опорний план x=(0; 150; 0; 0; 0; 80).

Для перевірки нового плану на оптимальність розрахуємо елементи індексного рядка й симплекс-різниці. Отриманий план також не оптимальний, оскільки Δ1= – 4/3.

Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначимо третій опорний план задачі. При цьому до базису будемо вводити вектор $\overline{A_1}$. З базису будемо виводити вектор, якому відповідає найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводиться до базису.

$$\Theta_1 = \min\left(\frac{150*3}{2}; \frac{80}{1,67}\right) = \min(225; 47,9) = 47,9$$

Базис	Cjбаз	Cj	8	10	0	-5	0	0
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	8	47,9	1	0	-1	0,4	-0,4	0,6
A_2	10	118	0	1	2	0,4	0,6	-0,4
Lj		1563,2	8	10	12	7,2	2,8	0,8
Δj			0	0	12	12,2	2,8	0,8

В оцінному рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі Δj≥0 і задовольняють умові оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (47,9;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0),$$
$$L\ \max = 8*47,9 + 10*118 = 1564.$$

Таким чином, оптимальний план виробництва передбачає випуск 48 одиниць продукції А і 118 одиниць продукції В. Найбільший прибуток становить 1564 грн. При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Задача 3.2

Вирішити задачу 3.1 з додатковою умовою: продукція 3 повинна виготовлятися в кількості не менш ніж 9 одиниць.

Розв'язання

Математична модель сформульованої задачі буде мати вигляд:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380 \\ x_3 \le 9 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Застосовуючи для розв'язання задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі, а потім - у векторній:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_3 - x_7 = 9 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Зазначимо, що нерівність типу «більше або дорівнює» перетворюємо на рівність введенням до лівої частини обмеження додаткової змінної із знаком «мінус».

Векторна форма запису:

$$x_1\overline{A}_1 + x_2\overline{A}_2 + x_3\overline{A}_3 + x_4\overline{A}_4 + x_5\overline{A}_5 + x_6\overline{A}_6 + x_7\overline{A}_7 = \overline{B}$$

де

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \overline{B} = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

У числі записаних векторів є два одиничні — $\overline{A}_5$ і $\overline{A}_6$, а базис у тривимірному просторі повинен складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, ввівши до третього обмеження з коефіцієнтом +1 штучну змінну x8, якої відповідатиме одиничний вектор $\overline{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.Тепер будемо розглядати розширену задачу лінійного програмування:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,8} \end{cases}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x8 має в цільовій функції коефіцієнт +М (для задачі на мінімум) або -М (для задачі на максимум), де М — досить велике позитивне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x5, x6, x8, а інші змінні - вільні. Початковий опорний план задачі:

x = (0; 0; 0; 0; 450; 380; 0; 9),

L = 8*0 + 10*0 + 0*0-5*0 + 0*450 + 0*380 + 0*0-M*9 = -9M.

Складемо першу симплексну таблицю:

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0
A_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0
A_8	-M	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
Lj		-9M	0	0	-M	0	0	0	M	-M
Δj			-8	-10	-M	5	0	0	M	0

Розрахуємо симплекс-різниці для першого опорного плану, вони не задовольняють умові оптимальності. Перейдемо до наступного опорного плану. Введемо до базису вектор $\overline{A}_3$, виводити будемо вектор $\overline{A}_8$

$$\left(\Theta_3 = \min\left(\frac{450}{4};\frac{380}{1};\frac{9}{1}\right) = \min(112{,}5;380;9) = 9\right).$$

Отримаємо наступну таблицю:

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4
A_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1
A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
L_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0
Δj			-8	-10	0	5	0	0	0	0

Отриманий план x=(0; 0; 9; 0; 414; 371; 0; 0) не оптимальний. Уводимо до базису вектор $\overline{A}_2$, а виводимо вектор $\overline{A}_5$

$$\left(\Theta_2 = \min\left(\frac{414}{3};\frac{371}{2};\frac{9}{0}\right) = \min(138;185{,}5) = 138\right),$$

дістанемо таблицю

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_2	10	138	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
A_6	0	95	1,67	0	0	0,67	-0,67	1	-1,67	1,67
A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
Lj		1380	$\frac{20}{3}$	10	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{40}{3}$	$-\frac{40}{3}$
Δj			$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{35}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{40}{3}$	$\frac{M-40}{3}$

Отриманий план x=(0; 138; 9; 0; 0; 95; 0; 0) не оптимальний. Вводимо до базису вектор $\overline{A}_1$, а виводимо вектор $\overline{A}_6$

$$\left(\Theta_1 = \min\left(\frac{138*3}{2};\frac{95}{1{,}67};\frac{9}{0}\right) = \min(207;57) = 57\right),$$

одержимо таблицю

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	8	57	1	3	0	0,4	-0,4	0,6	-1	1
A_2	10	100	0	2	0	0,4	0,6	-0,4	2	-2
A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
Lj		1456	8	10	0	7,2	2,8	0,8	12	-12
Δj			0	0	0	12,2	2,8	0,8	12	M-12

Усі симплекс-різниці більші або дорівнюють нулю, отже отриманий план x*=(57; 100; 9; 0; 0; 0; 0; 0) є оптимальним. Цільова функція при оптимальному плані приймає найбільше значення L*=8*57+10*100+0*9=1456.

Таким чином, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільший і складе 1456 грн.

Задача 3. 3

Кошти фірми можуть використовуватися для фінансування двох проектів. Проект А гарантує одержання через рік прибутку в розмірі 60 центів на кожний вкладений долар. Проект В гарантує одержання прибутку в розмірі 2 долари на кожний інвестований долар, але через два роки. При фінансуванні проекту В період інвестицій повинен бути кратним двом рокам. Визначити, як треба розпорядитися капіталом у сумі 100000 доларів, щоб максимізувати загальний прибуток, який можна дістати через три роки після початку інвестицій.

Розв'язання

Нехай x_{ij} — розмір вкладених коштів в і-му році у проект j ($i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,2}$). Побудуємо умовну схему розподілу коштів протягом трьох років.

		Проект А	Проект В
1-й рік	Початок року	100000	
		x_{11}	x_{12}
	Дохід на кінець року	$1,6*x_{11}$	-
2-й рік	Початок року	$100000-(x_{11}+x_{12})+1,6x_{11}$	
		x_{21}	x_{22}
	Дохід на кінець року	$1,6*x_{21}$	$3*x_{12}$
3-й рік	Початок року	$100000-(x_{11}+x_{12})+1,6x_{11}-(x_{21}+x_{22})+1,6x_{21}+3x_{12}$	
		x_{31}	-
	Дохід на кінець року	$1,6*x_{31}$	$3*x_{22}$

Відповідно до схеми можна записати математичну модель задачі. Цільова функція - дохід фірми після трьох років інвестицій:

$$L=1,6x_{31}+3x_{22} \to \max.$$

Обмеження моделі сформулюємо відповідно до такої умови: розмір коштів, інвестованих цього року, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року й прибутку за минулий рік:

для 1-го року $x11 + x12 \leq 100000$;

для 2-го року $x21 + x22 \leq 100000 - (x11 + x12) + 1,6x11$;

для 3-го року $x31 \leq 100000 - (x11 + x12) + 1,6x11 - (x21 + x22) + 1,6x21 + 3x12$.

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12} \leq 100000 \\ -1,6x_{11}+x_{21}+x_{22} \leq 0 \\ -3x_{12}-1,6x_{21}+x_{31} \leq 0 \end{cases}.$$

Таким чином, математична модель сформульованої задачі має такий вигляд:

$$L = 3x_{22} + 1{,}6x_{31} \to \max$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100000 \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0 \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0 \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,2} \end{cases}.$$

Приведемо задачу до канонічного виду шляхом введення додаткових змінних x_1, x_2, і x_3 із знаком «+» у лівій частині відповідних обмежень. У цільовій функції ці змінні мають коефіцієнти, рівні нулю. Обмеження канонічної задачі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_1 = 100000 \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} + x_2 = 0 \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} + x_3 = 0 \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Рішення задачі виконаємо у симплексній таблиці:

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	0	0	0	3	1,6	0	0	0	Θ
		B	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_1	A_2	A_3	
A_1	0	100000	1	1	0	0	0	1	0	0	100000
A_{22}	3	0	-1,6	0	1	1	0	0	1	0	-
A_{31}	1,6	0	0	-3	-1,6	0	1	0	0	1	-
Lj		0	-4,8	-4,8	0,44	3	1,6	0	3	1,6	
Δj			-4,8	-4,8	0,44	0	0	0	3	1,6	
A_{11}	0	100000	1	1	0	0	0	1	0	0	100000
A_{22}	3	160000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0	100000
A_{31}	1,6	0	0	-3	-1,6	0	1	0	0	1	-
Lj		0	0	0	0,44	3	1,6	4,8	3	1,6	
Δj			0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6	

Отримано оптимальний план x*=(x11=100000; x22=160000), відповідно до якого всю суму 100 тис. дол. треба в першому році вкласти в проект А, а на другий рік весь дохід вкласти в проект В. При цьому максимальний прибуток становитиме 480 тис. дол.

Але задача має ще один оптимум, який можна дістати з останньої симплекс-таблиці. Введемо до базису вектор $\overline{A}_{12}$ і виведемо з базису вектор $\overline{A}_{22}$.

Одержимо

Базис	$Cj_{баз}$	Cj	0	0	0	3	1,6	0	0	0
		B	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_1	A_2	A_3
A_{11}	0	0	1	0	-0,63	-0,63	0	0	-0,63	0
A_{12}	0	100000	0	1	0,63	0,63	0	1	0,63	0
A_{31}	1,6	300000	0	0	0,28	1,88	1	3	1,88	1
Lj		480000	0	0	0,45	3	1,6	4,8	3	1,6
Δj			0	0	0,45	0	0	4,8	3	1,6

Отримано оптимальний план x**=(x_{11}=0; x_{12}=100000; x_{31}=300000). Відповідно до цього плану всю суму 100 тис. дол. треба в першому році вкласти в проект В, а на початку третього року весь дохід 300 тис. дол. вкласти в проект А. При цьому максимальний прибуток також складе 480 тис. дол.
Схема розподілу коштів відповідно до оптимального плану x* має вигляд

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Проект А</td><td>Проект В</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1-й рік</td><td rowspan="2">Початок року</td><td colspan="2">100000</td></tr>
<tr><td>x_{11}=100000</td><td>x_{12}=0</td></tr>
<tr><td>Дохід на кінець року</td><td>1,6*x_{11}=160000</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2-й рік</td><td rowspan="2">Початок року</td><td colspan="2">1600001</td></tr>
<tr><td>x_{21}=0</td><td>x_{22}=160000</td></tr>
<tr><td>Дохід на кінець року</td><td>1,6*x_{21}=0</td><td>3*x_{12}=0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3-й рік</td><td rowspan="2">Початок року</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>x_{31}=0</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Дохід на кінець року</td><td>1,6*x_{31}=0</td><td>3*x_{22}=480000</td></tr>
</table>

Відповідно до розглянутої схеми перший оптимальний план інвестицій передбачає на перший рік всі кошти в розмірі 100 тис. дол. вкласти в проект А, що принесе наприкінці року дохід 160 тис. дол. У другий рік всі кошти в розмірі 160 тис. дол. передбачається витратити на фінансування проекту В. Наприкінці другого року фірма доходу не одержить. У третьому році фінансування проектів не передбачається, але наприкінці року дохід фірми від попередніх інвестицій проекту В становитиме 480 тис. дол.

Аналогічний максимальний дохід можна також одержати, провівши інвестиції за іншою схемою:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Проект А</td><td>Проект В</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1-й рік</td><td rowspan="2">Початок року</td><td colspan="2">100000</td></tr>
<tr><td>x_{11}=0</td><td>x_{12}=100000</td></tr>
<tr><td>Дохід на кінець року</td><td>1,6*x_{11}=0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2-й рік</td><td rowspan="2">Початок року</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>x_{21}=0</td><td>x_{22}=0</td></tr>
<tr><td>Дохід на кінець року</td><td>1,6*x_{21}=0</td><td>3*x_{12}=300000</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3-й рік</td><td rowspan="2">Початок року</td><td colspan="2">300000</td></tr>
<tr><td>x_{31}=300000</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Дохід на кінець року</td><td>1,6*x_{31}=480000</td><td>3*x_{22}=0</td></tr>
</table>

Відповідно до другого оптимального плану на перший рік фірма направляє весь капітал у розмірі 100 тис.дол. на фінансування проекту В. Це принесе дохід лише наприкінці другого року в розмірі 300 тис.дол., які в третьому році в повному обсязі інвестуються в проект А. Дохід фірми за три роки діяльності становитиме 480 тис. дол.

Практичне заняття 4
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА
(ВИПАДОК НЕЗБАЛАНСОВАНОСТІ Й ВИРОДЖЕНОСТІ)

Мета - сформувати вміння з побудови математичної моделі транспортної задачі, засвоїти сутність і основні етапи алгоритму методу потенціалів, оволодіти розв'язуванням незбалансованої і виродженої задач.

Вказівки до виконання завдання

Стандартна ТЗ визначається як задача розробки найбільш економічного плану перевезення продукції одного виду з декількох пунктів відправлення в пункти призначення. При цьому величина транспортних витрат прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції і задається за допомогою тарифів на перевезення одиниці продукції.

Вихідні параметри моделі ТЗ

- n - кількість пунктів відправлення, m - кількість пунктів призначення;
- a_i – запас продукції в пункті відправлення Ai (i =1,n) [од. прод.];
- b_j – попит на продукцію в пункті призначення Bj (j =1,m) [од. прод.];
- c_{ij} – тариф (вартість) перевезення одиниці продукції з пункту відправлення Ai у пункт призначення Bj [грн. / од. прод.].

Шукані параметри моделі ТЗ

- xij – кількість продукції, перевезеної з пункту відправлення Ai у пункт призначення Bj [од. прод.].
- L – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [грн.].

Етапи побудови моделі

- Визначення змінних.
- Перевірка збалансованості задачі.
- Побудова збалансованої транспортної матриці.
- Задання цільової функції.
- Задання обмежень.

У транспортній моделі ЦФ являє собою загальні транспортні витрати на здійснення всіх перевезень в цілому. Сума запасів продукції у всіх пунктах відправлення повинна дорівнювати сумарній потребі у всіх пунктах споживання, тобто $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$. Якщо це виконується, то ТЗ називається збалансованою (закритою), у противному випадку - незбалансованою (відкритою). У випадку, коли сумарні запаси перевищують сумарні потреби, необхідний додатковий фіктивний (реально не існуючий) пункт споживання, що буде формально споживати існуючий надлишок запасів. Якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, то необхідно ввести додатковий фіктивний пункт відправлення, що формально заповнює існуючу нестачу продукції в пунктах відправлення. Для фіктивних перевезень вводять фіктивні тарифи $c_ф$, величину яких звичайно прирівнюють до нуля $c_ф = 0$.

Задача 4.1

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, які виготовляють 150, 60 і 80 тис.од. продукції на тиждень. Компанія уклала договір с чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, якім на тиждень необхідно відповідно 110, 40, 60 і 80 тис. од. продукції.

Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної з фабрик приведена у таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 одиниць продукції			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва й транспортних послуг.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i-й фабрики до j-му замовникові ($i=\overline{1,3}, \quad j=\overline{1,4}$). Оскільки транспортна задача за умовою є збалансована, закрита $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290$, математична модель матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80 \end{cases}.$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція повинна вивозитися до замовників цілком.

Аналогічні обмеження можна записати щодо замовників: продукція, що надходить до споживача, повинна цілком задовольняти його попит.

Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=40 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80 \end{cases}.$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, визначаються як добуток обсягу перевезеної продукції й питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом й за умовою задачі повинні бути мінімальними. Тому

$$L=4x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+5x_{14}+5x_{21}+3x_{22}+x_{23}+$$
$$+2x_{24}+2x_{31}+x_{32}+4x_{33}+2x_{34}\to\min$$

У цілому математична модель має вигляд:

$$L=4x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+5x_{14}+5x_{21}+3x_{22}+x_{23}+$$
$$+2x_{24}+2x_{31}+x_{32}+4x_{33}+2x_{34}\to\min$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=110 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=40 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80 \end{cases}$$

$$x_{ij}\ge 0, \quad i=\overline{1,3}, \quad j=\overline{1,4}.$$

Перший опорний план побудуємо за методом мінімальної вартості:

A_i	B_j				ui
	B_1=110	B_2=40	B_3=60	B_4=80	
A_1=150	4 **110**	4	2 +Θ	5 **40 -(**	u_1 =5
A_2=60	5	3	1 **60 -(**	2 **0 +(**	u_2 =2
A_3=80	2	1 **40**	4	2 **40**	u_3 =2
v_j	v_1=-1	v_2=-1	v_3=-1	v_4=0	

L = 4 *110 + 5 * 40 + 1 * 60 + 1 * 40 + 2 * 40 = 820 грош. од.

Перший опорний план є виродженим, оскільки кількість заповнених кліток у таблиці дорівнює п'яти, а (m+n-1) = 3+4-1=6. Для подальшого розв'язання задачі необхідно в одну з порожніх кліток записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорність плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітку, що не утворює замкнутого циклу. Наприклад, заповнимо клітку A_2B_4. Тепер перший план ТЗ невироджений, і його можна перевірити на оптимальність, користуючись методом потенціалів.

На підставі першої умови оптимальності $u_i+v_j=c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_4=5 \\ u_2+v_3=1 \\ u_2+v_4=2 \\ u_3+v_2=1 \\ u_3+v_4=2 \end{cases}.$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і одне з її рішень одержимо, поклавши, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 =-1$, $v_2 = -1$, $v_3 =-1$.

Далі відповідно до алгоритму методу потенціалів перевіримо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх кліток таблиці):

$$A_1B_2: \quad u_1+v_2=5+(-1)=4=4;$$
$$A_1B_3: \quad u_1+v_3=5+(-1)=4>2;$$
$$A_2B_1: \quad u_2+v_1=2+(-1)=1<5;$$
$$A_2B_2: \quad u_2+v_2=2+(-1)=1<3;$$
$$A_3B_1: \quad u_3+v_1=2+(-1)=1<2;$$
$$A_3B_3: \quad u_3+v_3=2+(-1)=1<4.$$

Умова оптимальності не виконується для клітки А1В3. Перший опорний план ТЗ є неоптимальним. Тому треба перейти до іншого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх кліток таблиці. Для цього заповнимо клітку А1В3, поставивши в ній +Θ. Для визначення вивільнюваної клітки побудуємо цикл, починаючи із клітки А1В3, позначивши вершини циклу по черзі знаками -Θ і +Θ. Тепер треба перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітку А1В3 переносимо найменше з чисел Θ, розміщених у клітках з -Θ. Одночасно це ж число Θ додаємо до відповідних чисел, які розміщуються в клітках, що містять +Θ, і вичитаємо з чисел, розташованих у клітках, позначених -Θ. У цьому випадку min{60; 40}=40. Виконавши перерозподіл продукції, одержимо нові значення: клітки A1B3 - 40 од. продукції, A2B3 - (60-40) = 20 од., A2B4- (0 + 40) = 40 од. Клітка A1B4, звільниться й у новій таблиці буде порожньою. Всі інші заповнені клітки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у нову таблицю без змін. Кількість заповнених кліток у новій таблиці також повинна відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати (n+m-1).

У результаті новий опорний план ТЗ матиме вигляд:

A_i	B_j				u_i
	B_1=110	B_2=40	B_3=60	B_4=80	
A_1=150	4 **110 -(**	4	2 **40 +(**	5	u_1 =0
A_2=60	5	3	1 **20 -(**	2 **40 +(**	u_2 =-1
A_3=80	2 +Θ	1 **40**	4	2 **40 -(**	u_3 =-1
v_j	v_1=4	v_2=-2	v_3=2	v_4=3	

L = 4 *110 + 2 * 40 + 1 * 20 + 2 * 40 +1*40+ 2 * 40 = 740 грош. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані вище дії. Отриманий план також неоптимальний (порушено умову оптимальності для клітки A3B1). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану й одержимо третю таблицю:

A_i	B_j				u_i
	B_1=110	B_2=40	B_3=60	B_4=80	
A_1=150	4 **90**	4	2 **60**	5	u_1 =2
A_2=60	5	3	1	2 **60**	u_2 =0
A_3=80	2 **20**	1 **40**	4	2 **20**	u_3 =0
v_j	v_1=2	v_2=1	v_3=0	v_4=2	

L = 4 *90 + 2 * 60 + 2 * 60 + 2 * 20 +1*40+ 2 * 20 = 720 грош. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він є оптимальним. Відповідно до цього плану перевезень перший замовник одержує 90 тис. од. продукції з першої фабрики й 20 тис. од. з третьої. Другий замовник задовольняє свій попит за рахунок виробництва й перевезення 40 тис. од. продукції із третьої фабрики й т.ін. При цьому загальна вартість виробництва й перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 грош. од.

Задача 4.2.

Районне агропромислове об'єднання складається з трьох господарств A1, A2, A3, які спеціалізуються на вирощуванні ранніх овочів. Кожне господарство щотижня збирає відповідно 50, 30 і 20 т овочів, які необхідно відправляти до чотирьох магазинів B1, B2, B3, B4. Магазини бажають одержати ранні овочі в кількості відповідно 30, 30, 10 і 20 т. Вартість перевезення 1 т овочів від господарств до магазинів приведена у таблиці:

Господарство	Вартість перевезення			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	4	2
A_2	5	7	1	4
A_3	9	4	3	2

Визначити такий план перевезення овочів у магазини, при якому загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Розв'язання.

Побудуємо математичну модель. Нехай x_{ij} - кількість овочів, перевезених з і-го господарства до j-го магазину ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$). Тоді економіко-математична модель має вигляд:

$$L = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 5x_{21} + 7x_{22} + x_{23} +$$
$$+ 4x_{24} + 9x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 30 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 20 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20 \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,3}, \quad j=\overline{1,4}$$

Знак «≤» у перших трьох обмеженнях пояснюється тим, що за умовою транспортна задача є відкритою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 90 \, .$$

У такій ситуації, коли попит менший за пропозицію, частина овочів залишиться в господарствах і фактично вивезуть менше овочів, ніж зібрали.

У першу чергу задачу необхідно збалансувати, тобто зробити закритою. Це виконується шляхом введення додаткового, умовного споживача B_5 з попитом B_5 = 100 - 90 = 10 т. Вартість перевезення одиниці продукції умовному споживачеві дорівняємо нулю.

Перший опорний план побудуємо методом подвійної переваги:

A_i	B_j					u_i
	B_1=30	B_2=30	B_3=10	B_4=20	B_5=10	
A_1=50	2 **30**	3 **20**	4	2	0	u_1 =-4
A_2=30	5	7 **10 –(**	1 **10**	4 **+Θ**	0 **10**	u_2 =0
A_3=20	9	4 **+Θ**	3	2 **20 -(**	0	u_3 =-2
v_j	v_1=6	v_2=7	v_3=1	v_4=0	v_5=0	

Отриманий опорний план є виродженим, і тому в клітку, наприклад A_2B_4, поставимо нуль і будемо вважати її заповненою. Перевірка плану за допомогою потенціалів показує, що він не оптимальний. Перехід до наступного опорного плану виконаємо шляхом заповнення клітки A_3B_2 відповідно до побудованого циклу. Зазначена клітка включена в цикл, тому що у випадку якщо є кілька однакових найбільших порушень умови оптимальності ($\Delta_{21} = \Delta_{32} = 1$) заповнюють ту клітку, що має меншу вартість перевезення одиниці продукції ($c_{32} < c_{21}$).

Новий план ТЗ має вигляд:

A_i	B_j					u_i
	B_1=30	B_2=30	B_3=10	B_4=20	B_5=10	
A_1=50	2 **30**	3 **20**	4	2	0	u_1 =-3
A_2=30	5	7	1 **10**	4 **10**	0 **10**	u_2 =0
A_3=20	9	4 **10**	3	2 **10**	0	u_3 =-2
v_j	v_1=5	v_2=6	v_3=1	v_4=4	v5=0	

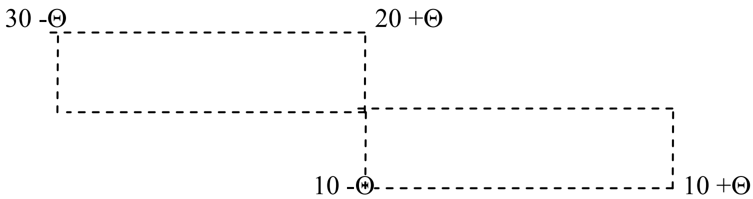
Умова оптимальності для цього плану виконується, і тому можна записати:

$L = 2 * 30 + 3 * 20 + 1 * 10 + 4 * 10 + 4*10 + 2 * 10 = 230$ грош. од.

Відповідно до оптимального плану потреба магазинів у ранніх овочах задовольняється завдяки повному вивозу продукції з першого й третього господарств і лише частково - з другого (залишок дорівнює 10 т). У цьому випадку загальна вартість всіх перевезень буде найменшою й складе 230 грош. од.

Однак розглянута ТЗ має ще один альтернативний оптимальний план. Ознакою цього є виконання умови оптимальності для порожньої клітки: $u_i + v_j = c_{ij}$, що в останній таблиці відповідає клітці A_2B_1: $u_2 + v_1 = 0+5 = c_{21} = 5$.

Щоб одержати альтернативний оптимальний план, досить заповнити зазначену клітку таблиці, виконавши перерозподіл продукції за наступним циклом:



Транспортна таблиця, яка відповідає альтернативному оптимуму, має вигляд:

A_i	B_j					u_i
	B_1=30	B_2=30	B_3=10	B_4=20	B_5=10	
A_1=50	2 **20**	3 **30**	4	2	0	u_1 =-3
A_2=30	5 **10**	7	1 **10**	4	0 10	u_2 =0
A_3=20	9	4	3	2 **20**	0	u_3 =-2
v_j	v_1=5	v_2=6	v_3=1	v_4=4	v_5=0	

$L = 2 * 20 + 3 * 30 + 5 * 10 + 1 * 10 + 2*10 = 230$ грош. од.

Альтернативний оптимальний план задачі формулюється в такий спосіб. Перевезти з першого господарства 20 т овочів у перший магазин і 30 т - у другий; з другого господарства - 10 т у перший магазин і 10 т овочів у третій, залишаючи не вивезеними 10 т, а також з третього господарства в четвертий магазин - 20 т овочів. У цьому випадку загальні транспортні витрати становитимуть також 230 грош. од. і будуть найменшими.

Практичне заняття 5
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА
(ВИКОРИСТАННЯ ШТРАФНИХ САНКЦІЙ. ДВОХЕТАПНА МОДЕЛЬ)

Мета - оволодіти розв'язуванням незбалансованої задачі із штрафними санкціями, сформувати вміння з побудови математичної моделі двохетапної ТЗ.
Вказівки до виконання завдання

У деяких ситуаціях, коли задача є незбалансованою, тобто умова $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ не виконується, і треба вводити фіктивного постачальника або споживача, величину фіктивного тарифу можна інтерпретувати як штраф, яким обкладається кожна одиниця недопоставленої продукції. У цьому випадку величина $c_ф$ може бути будь-яким позитивним числом.

Якщо умова ТЗ включає транзитні (проміжні) пункти, то їх подають як пункти призначення і пункти відправлення одночасно. При цьому можливість перевезення безпосередньо від початкових пунктів відправлення до кінцевих пунктів призначення блокується досить великими значеннями вартості перевезення. Таким же чином блокують і перевезення між проміжними пунктами. Таку задачу називають двохетапною. У транспортних задачах із проміжними пунктами можуть зустрічатися такі ситуації:

1. Незбалансованість транспортної задачі $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$. У цьому випадку необхідно ввести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача, звівши задачу до закритого типу.

2. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальному обсягу продукції постачальників: а) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (у цьому випадку потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, тоді кількість продукції, що буде «перевозитися» до нього, буде означати не вивезену частину продукції відповідного постачальника, або дозволити транзитні перевезення за обсягом не менш як $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{k} d_j$ (од.)); б) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{k} d_j$ (у цьому випадку немає необхідності вводити фіктивного постачальника й очевидно, що місткість проміжних пунктів не повністю використовуватиметься).

3. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальній потребі споживачів: а) $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{j=1}^{k} d_j$ (у цьому випадку потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і кількість продукції, що буде перевозитися від нього до споживача, має означати незадоволений попит відповідного споживача, або дозволити пряме перевезення продукції від постачальників до споживачів обсягом не менш $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{k} d_i$ (од.)); б) $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{j=1}^{k} d_j$ (аналогічно п. 2б).

Окремий випадок ТЗ - задача про призначення. У цієї задачі кількість пунктів відправлення дорівнює кількості пунктів призначення. Обсяги потреби й пропозиції в кожному з пунктів призначення й відправлення рівні 1. Прикладом типової задачі про призначення є розподіл працівників за різними видами робіт, що мінімізує сумарний час виконання робіт.

Задача 5.1

Три нафтопереробних заводи A_1, A_2, A_3, з максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20, 15 тис. т бензину забезпечують чотири бензосховища B_1, B_2, B_3, B_4, потреба яких становить відповідно 10, 20, 25 і 20 тис. т. бензину. Бензин транспортується до бензосховищ за допомогою трубопроводів. Вартість перекачування 1000 т бензину від заводів до сховищ (у грошових одиницях) наведена в таблиці:

Завод	Вартість транспортування 1000 т			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	7
A_2	7	6	2	5
A_3	2	3	9	8

Сформулювати і вирішити відповідну транспортну задачу з неодмінним виконанням наступних умов:

1)повністю задовольнити попит бензосховища B4;

2)недопоставка бензину сховищу B_2 штрафується 5 грош. од. вартості за кожні 1000 т бензину;

3)у зв'язку з виконанням ремонтних робіт на трубопроводі поставка бензину з заводу A1 до сховища B1 тимчасово неможлива.

Розв'язання.

Визначимо, чи є задача збалансованою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 30 + 20 + 15 = 65; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 10 + 20 + 25 + 20 = 75 .$$

За умовою задача відкрита, незбалансована. Зведення її до закритого типу передбачає введення додаткового фіктивного постачальника A_1 з продуктивністю a_4 = 75-65 = 10 (тисяч тон). Кількість бензину, що поставляється фіктивним заводом до бензосховищ в оптимальному плані, буде означати обсяг незадоволеного попиту в цьому пункті призначення. Тому для виконання першої додаткової вимоги задачі необхідно блокувати клітку фіктивного постачальника A_4 і споживача B_4, записавши до неї досить високу вартість М. Тоді в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов'язково буде незаповненою.

Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що в рядку фіктивного постачальника в стовпчику B_2 вартість транспортування 1000 т бензину буде дорівнювати 5 грош. од. замість нуля.

Оскільки неможливо транспортувати бензин від заводу A_1 до сховища B_1, необхідно також блокувати маршрут A_1B_1. Для цього в зазначеній клітці замість c_{11} = 4 запишемо величину М.

З урахуванням викладеного таблиця з початковим планом ТЗ має такий вигляд (початковий опорний план побудований методом апроксимації Фогеля).

A_i	B_j				u_i
	B_1=10	B_2=20	B_3=25	B_4=20	
A_1=30	M	5 **15 -Θ**	3 **5**	7 **10 +Θ**	u_1 =0
A_2=20	7	6	2 **20**	5	u_2 =-1
A_3=15	1 **10 -(**	3 **5 +Θ**	9	8 **20**	u_3 =-2
A_4=10	0 +Θ	5	0	M **10 -Θ**	u_4 =M-7
v_j	v_1=3	v_2=5	v_3=3	v_4=7	

Перший опорний план задачі не оптимальний. Найбільше порушення умови оптимальності відповідає порожнім кліткам A4B1 і A4B3. Оскільки обидві вони мають однаковий коефіцієнт c41 = c43 = 0, для заповнення можна вибрати кожну з них, наприклад A4B1. Перехід до нового плану виконується за зазначеним циклом, причому Θ=10. У результаті заблокована клітка A4B4 звільняється. Подальше розв'язання задачі подамо у вигляді таблиць:

A_i	B_j				u_i
	B_1=10	B_2=20	B_3=25	B_4=20	
A_1=30	M	5 **5**	3 **5 +Θ**	7 **20 -Θ**	u_1 =0
A_2=20	7	6	2 **20 -Θ**	5 **+Θ**	u_2 =-1
A_3=15	1	3 **15**	9	8	u_3 =-2
A_4=10	0 **10**	5	0	M	u_4 =-3
v_j	v_1=3	v_2=5	v_3=3	v_4=7	

В останній таблиці маємо оптимальний план, при якому

$$L = 5 * 5 + 3 * 25 + 5 * 20 + 3 * 15 = 245 \text{ грош. од.}$$

A_i	B_j				u_i
	B_1=10	B_2=20	B_3=25	B_4=20	
A_1=30	M	5 **5**	3 **25**	7 **M**	u_1 =0
A_2=20	7	6	2 **0**	5 **20**	u_2 =-1
A_3=15	1	3 **15**	9	8	u_3 =-2
A_4=10	0 **10**	5	0	M	u_4 =-3
v_j	v_1=3	v_2=5	v_3=3	v_4=6	

Через незбалансованість ТЗ буде спостерігатися недопоставка бензину першому бензосховищу в кількості 10000 т. Загальні витрати на транспортування будуть найменшими й складуть 295 грош. од.

Задача 5.2

Виробниче об'єднання складається з трьох філій A_1,A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в кількості відповідно 1000, 1500 і 1200 од. на місяць. Ця продукція відправляється на два склади D_1, D_2 місткістю відповідно 2500 і 1200 од., а потім — до п'яти споживачів B_1, B_2, ..., B5, попит яких становить відповідно 900, 700, 1000, 500 і 600 од. Вартості перевезення одиниці продукції від виробника на склад, а потім із складів до споживачів приведені в таблицях:

Філія	Вартість перевезення від виробника на склад	
	D_1	D_2
A_1	2	8
A_2	3	5
A_3	1	4

Склад	Вартість перевезення із складу до споживача				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1	3	8	5	4
D_2	2	4	5	3	1

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першої філії другому споживачеві, а також з третьої філії четвертому споживачеві. Вартість транспортування одиниці продукції за транзитним маршрутом A1B2 дорівнює 3 грош. од., а за маршрутом A3B4 — 4 грош. од. Перевезення продукції із складу на склад не припустиме.

Сформулювати задачу як транспортну з проміжними пунктами (двохетапну) і визначити її оптимальний план.

Розв'язання

Кожний склад можна представити як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому склади відіграють роль і постачальників продукції, і її споживачів.

Перевезення продукції безпосередньо від філій до споживачів (крім випадків, зазначених в умові задачі), а також із складу на склад блокується за допомогою досить великої вартості M. Побудована з урахуванням цього транспортна таблиця двохетапної задачі приведена нижче:

A, D	D, B							u_i
	D_1=2500	D_2=1200	B_1=900	B_2=700	B_3=1000	B_4=500	B_5=600	
A_1=1000	-2 **1000 -Θ**	8	M	3 +Θ	M	M	M	u_1 =0
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =1
A_3=1200	1 1200	4	M	M	M	4	M	u_3 =-1
D_1=2500	0 +Θ	M	1 **900**	3 **700 -Θ**	8 **900**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **100**	3 **500**	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=2	v_2=4	v_3=1	v_4=3	v_5=8	v_6=6	v_7=4	

При такому плані витрати становлять L = 2*1000 + 3*300 + 5*1200 + +1*1200+ 1*900+ 3*700 +8*900 + 5*100 + 3*500 + 1*600 = 22900 грош. од.

Помітимо, що в клітках D_1D_1 і D_2D_2 розміщається нульова вартість перевезення продукції. Це допускає можливість неповного використання складських приміщень у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням. Дана ТЗ є збалансованою, тому що

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1500 + 1200 = 3700;$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 900 + 700 + 1000 + 500 + 600 = 3700$$

.

Перший опорний план побудований методом мінімальної вартості. Він є неоптимальним. Перехід до нового плану виконаємо, заповнивши порожню клітку D1D1 відповідно до побудованого циклу.

A, D	D, B							u_i
	D_1=2500	D_2=1200	B_1=900	B_2=700	B_3=1000	B_4=500	B_5=600	
A_1=1000	-2 **300**	8	M	3 **700**	M	M	M	u_1 =2
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =3
A_3=1200	1 **1200 -Θ**	4	M	M	M	4 **+Θ**	M	u_3 =-1
D_1=2500	0 **700 +Θ**	M	1 900	3	8 **900 -(**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **100 +Θ**	3 **500 -Θ**	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=0	v_2=2	v_3=1	v_4=1	v_5=8	v_6=6	v_7=4	

L = 2*300 + 3*700 + 3*300 +5*1200+ 1*1200+ 1*900 +8*900 + 5*100 + +3*500 + 1*600 = 21500 грош. од.

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, має вигляд:

A, D	D, B							u_i
	D_1=2500	D_2=1200	B_1=900	B_2=700	B_3=1000	B_4=500	B_5=600	
A_1=1000	-2 **300**	8	M	3 **700**	M	M	M	u_1 =0
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =2
A_3=1200	1 **700**	4	M	M	M	4 **500**	M	u_3 =3
D_1=2500	0 **1200**	M	1 **900**	3	8 **400**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **600**	3	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=0	v_2=2	v_3=1	v_4=1	v_5=8	v_6=3	v_7=4	

В останній таблиці отриманий оптимальний план ТЗ. Мінімальні витрати на перевезення становлять:

L = 2*300 + 3*700 + 3*300 +5*1200+ 1*1200+ 1*700 +4*500 +1*900 + 8*400 + +5*600 + 1*600 = 20000 грош. од.

Оптимальний план перевезень продукції двохетапної транспортної задачі можна представити у вигляді схеми (рис. 5.1).

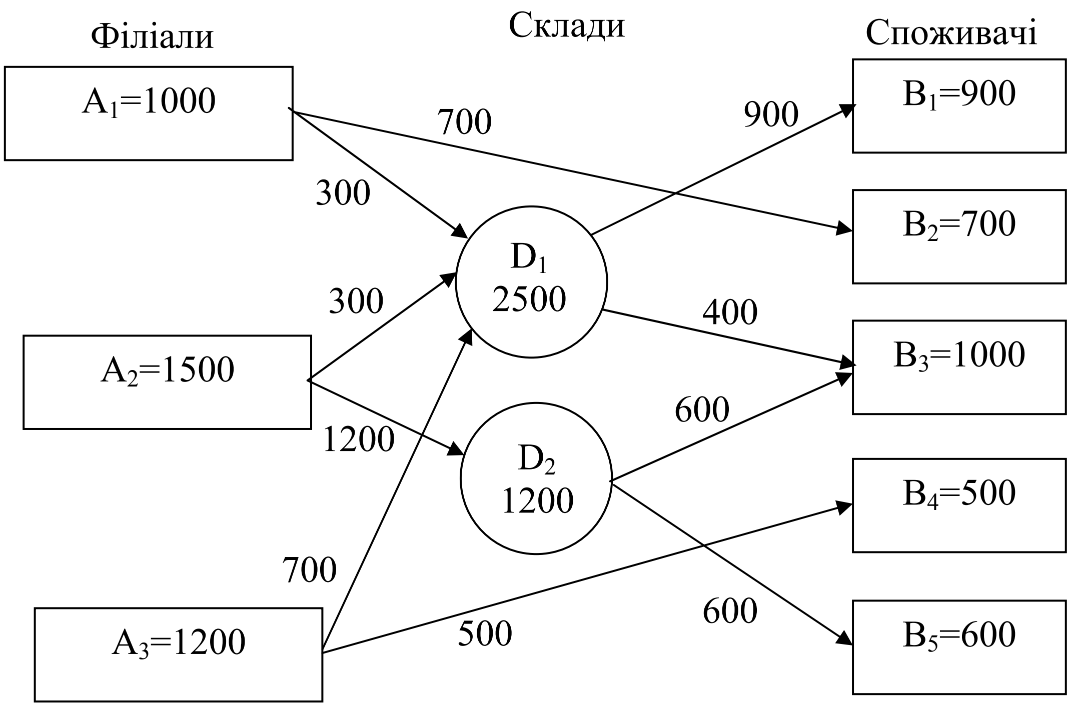


Рис. 5.1 – Схема оптимальних перевезень

Зі схеми видно, що на перший склад надходить 300 + 300 + 700= 1300 од. продукції, тобто його місткість використовується не цілком (D_1D_1 = 1200 од.). Це виникає внаслідок прямих поставок продукції за маршрутом A_1B_2 у кількості 700 од. і А3В4 у кількості 500 од.

Дана ТЗ має ще один альтернативний оптимальний план, що відрізняється від першого лише в частині, що стосується перевезення продукції із складів до третього й п'ятого споживачів.

Практичне заняття 6
ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – оволодіння практичним вмінням з побудови математичної моделі двоїстої задачі, отримання оптимального плану шляхом використання зв'язку оптимальних планів прямої і двоїстої задач.

Вказівки до виконання завдання

Для побудови моделі двоїстої задачі використовують її особливості:

- Якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації й навпаки;
- Коефіцієнти цільової функції прямої задачі c_1, $з_2$, ..., c_n стають вільними членами обмежень двоїстої задачі;
- Вільні члени обмежень прямої задачі b_1, b_2, ..., b_m стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;
- Матрицю обмежень двоїстої задачі отримують транспонуванням матриці обмежень прямої задачі $\overline{A}$;
- Знаки нерівностей в обмеженнях змінюють на зворотні;
- Число обмежень прямої задачі дорівнює числу змінних двоїстої задачі, а число обмежень двоїстої задачі дорівнює числу змінних прямої задачі.
- З особливостей двоїстої задачі випливає важлива властивість -

симетричність відносини двоїстості, тобто задача, двоїста стосовно двоїстої задачі, збігається із прямою (вихідною) задачею.

Таким чином, говорять про пару двоїстих задач. Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої й двоїстої задач встановлюють теореми двоїстості.

Задача 6.1

До приведеної нижче задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Вирішити одну з них симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі:

$$L = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу привести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція максимізується й у системі обмежень є нерівності, вони повинні мати знак «менше або дорівнює». Тому перше обмеження моделі помножимо на (-1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$L = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Тепер користуючись правилами, складемо двоїсту задачу:

$$L' = -u_1 + 5u_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -u_1 + 2u_2 \geq -5 \\ -u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна вирішити симплекс-методом. Визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Приведемо її до канонічної форми

$$L = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

У векторній формі система обмежень має вигляд

$$x_1\overline{A}_1 + x_2\overline{A}_2 + x_3\overline{A}_3 + x_4\overline{A}_4 = \overline{B}$$

де

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

У системі векторів для створення початкового одиничного базису відсутній вектор $\overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому введемо штучну змінну в перше обмеження.

Розширена задача лінійного програмування матиме вигляд:

$$L = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

У цієї задачі x_4 і x_5 — базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 — вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$. Перший опорний план задачі:

$$x_* = (0;0;0;5;1).$$

Складемо симплекс-таблицю й перевіримо план на оптимальність:

Базис	$Cj_{баз}$	C_j	-5	2	0	0	-M	Θ
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_5	-M	1	1	1	-1	0	1	1
A_4	0	5	2	3	0	1	0	$\frac{5}{3}$
L_j		-M	-M	-M	M	0	-M	
Δ_j		$-M^{+5}$	$-M^{-2}$	M	0	0		
A_2	2	1	1	1	-1	0	1	-
A_4	0	2	-1	0	3	1	-3	$\frac{2}{3}$
L_j		2	2	2	-2	0	2	
Δ_j		7	0	-2	0	2+M		7
A_2	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	
A_3	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	
L_j		$\frac{10}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	0	$\frac{2}{3}$	0	
Δ_j			$\frac{19}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	M	

Отримано оптимальний план прямої задачі

$$x_* = (0;\ 5/3;\ 2/3;\ 0),\ L = \frac{10}{3}.$$

Відповідно до першої теореми двоїстості оптимальний план двоїстої задачі існує й можна записати, що min L' = max L = $\frac{10}{3}$

$$u^* = \overline{C}_{баз}\,\overline{D}^{-1},$$

де $c_{баз} = (2;\ 0)$ і міститься у стовпчику «Сбаз» останньої симплекс-таблиці. Матриця $\overline{D}^{-1}$ міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних x_5 і

x_4, які утворювали початковий базис, $\overline{D}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/3\\ -1 & 1/3\end{pmatrix}$. Таким чином, дістанемо

$$u^*=(2;0)*\begin{pmatrix}0 & 1/3\\ -1 & 1/3\end{pmatrix}=(0;2/3)$$

$$\min L'=-1*0+5*2/3=10/3.$$

Таким чином, застосовуючи до розв'язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи першу теорему двоїстості.

Задача 6.2

До приведеної нижче задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Вирішити двоїсту задачу графічно й визначити оптимальний план прямої задачі:

$$L=x_1+2x_2+2x_3\to\min$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\ x_1+2x_2+x_3\ge 4\\ x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,3}\end{cases}.$$

Розв'язання

Побудуємо двоїсту задачу:

$$L'=u_1+4u_2\to\max$$

$$\begin{cases}2u_1+u_2\le 1\\ u_1+2u_2\le 2\\ -u_1+u_2\le 2\\ u_2\ge 0\end{cases}.$$

Помітимо, що задачі несиметричні, і тому змінна u1, що відповідає рівності в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна u_2 – тільки невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже її можна вирішити графічно (рис. 6.1).

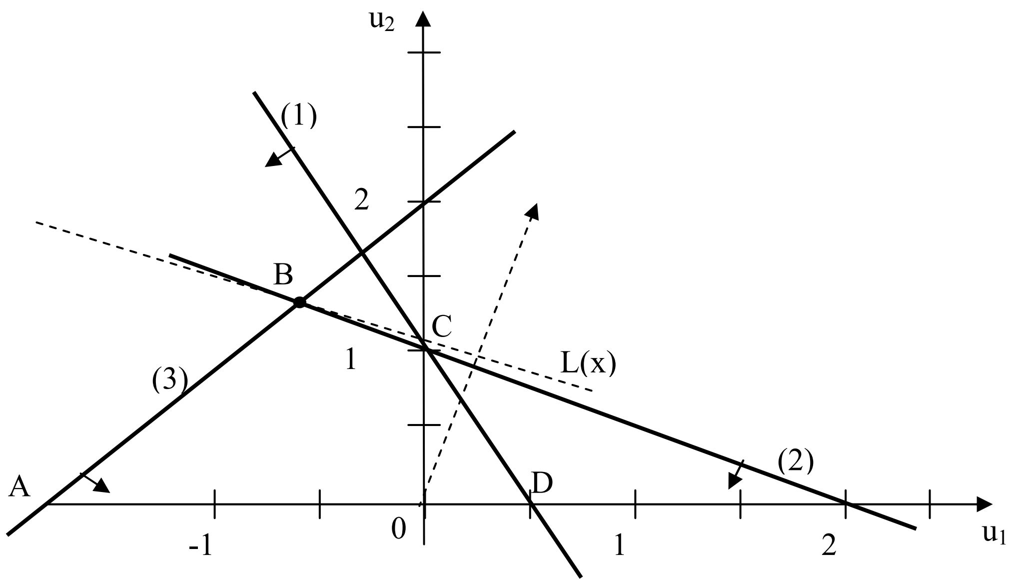


Рис. 6.1 – Графічне рішення двоїстої задачі

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі L' досягає в точці В багатокутника ABCD, її координати:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 = 2 \\ -u_1 + u_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -2/3 \\ u_2 = 4/3 \end{cases}.$$

Тобто u_*=(-2/3; 4/3), max $L_* = 1*(-\frac{2}{3})+4*\frac{4}{3} = \frac{14}{3}$.

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою другої теореми двоїстості. Підставимо u* у систему обмежень двоїстої задачі й з'ясуємо, як виконуються ці обмеження:

$$\begin{cases} 2(-2/3) + 4/3 = 0 \\ -2/3 + 2*4/3 = 2 \\ -1*(-2/3) + 4/3_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 \\ 2 = 2 \\ 2 = 2 \end{cases}.$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, доходимо висновку, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості). Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $u_2 = 4/3$ додатна, доходимо висновку, що друге обмеження прямої задачі для x* буде виконуватися як строга рівність (друга частина другої теореми двоїстості).

Узагальнивши отриману інформацію, запишемо систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, у якій x1 = 0, і визначимо інші змінні:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3 \\ x_3 = 2/3 \end{cases},$$

Тобто x_*=(0; 5/3; 2/3), min L_*= 1*0+2*5/3+2*2/3=14/3.

Умова min L' = max L = 14/3 виконується, і тому x*=(0; 5/3; 2/3) і u_*=(-2/3; 4/3) є оптимальними планами відповідно прямої і двоїстої задач.

Задача 6.3

Визначити, чи є оптимальними такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$L = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3} \end{cases}$$

а) x = (8/7; 3/7; 0); б) x = (0; 1/5; 8/5); в) x = (1/3; 0; 1/3).

Розв'язання

Принцип розв'язання задач такого типу заснований на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу й допустивши, що відповідний план x є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій будуть збігатися, то припущення є правильним. Протилежний висновок можна зробити в наступних випадках.

- Якщо запропонований план x неприпустимий, тобто не задовольняє системі обмежень прямої задачі.
- Якщо знайдений план двоїстої задачі є неприпустимим, тобто не задовольняє обмеженням двоїстої задачі.
- Якщо знайдений план двоїстої задачі припустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції L' не дорівнює значенню функції L, тобто не виконується умова першої теореми подвійності.

Запишемо двоїсту задачу до вихідної прямої задачі лінійного програмування:

$$L = u_1 + 2u_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 \le 12 \\ -3u_1 + 2u_2 \le -4 \\ u_1 + u_2 \le 2 \\ u_1 \in]-\infty; \infty[, \quad u_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. x = (8/7; 3/7; 0). Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 - 8/7 - 3*3/7 + 0 = 1 \\ 8/7 + 2*3/7 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \end{cases}.$$

Обидва обмеження виконуються, тому x = (8/7; 3/7; 0) є припустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді для нього L*= 12*8/7-4*3/7+ 2*0=12.

Скористаємося другою теоремою двоїстості й визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0$; $x_2 = 3/7 > 0$, то відповідно до другої частини другої теореми двоїстості можна записати перше і друге обмеження як рівності і визначити u1 і u2:

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 12 \\ -3u_1 + 2u_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_2 = 4 \end{cases}.$$

Підставимо ці значення до третього обмеження системи двоїстої задачі:

$$u_1 + u_2 \le 2;$$

$$4+4=8>2.$$

Для знайдених значень $u_1 = 4$; $u_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план u = (4; 4) є неприпустимим планом двоїстої задачі.

2. x= (0; 1/5; 8/5). Підставимо цей план у систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2*0 - 3*1/5 + 8/5 = 1 \\ 0 + 2*1/5 + 8/5 = 2 \end{cases}.$$

План є припустимим і для нього L=12*0-4*1/5 + 2*8/5 = 12/5.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_3 і x_2 позитивні, друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівності:

$$\begin{cases} -3u_1 + 2u_2 = -4 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 8/5 \\ u_2 = 2/5 \end{cases}.$$

Перевіримо, чи виконується перше обмеження двоїстої задачі для знайдених значень u_1 і u_2.2*8/5 + 2/5 = 18/5 < 12. Перше обмеження виконується, і тому u= (8/5; 2/5) є припустимим планом двоїстої задачі. Для цього плану L' = =8/5 + 2 * 2/5 = 12/5 = L. Таким чином, можна вважати, що u*= (8/5; 2/5) є оптимальним планом двоїстої задачі, а x*= (0; 1/5; 8/5) - оптимальним планом прямої задачі.

3. x = (1/3; 0; 1/3). Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються в такий спосіб:

$$\begin{cases} 2*1/3-3*0+1/3=1 \\ 1/3+2*0+1/3=2/3<2 \end{cases}.$$

Таким чином, x = (1/3; 0; 1/3) не задовольняє обмеженням і є неприпустимим планом, а отже не може бути оптимальним планом прямої задачі.

Практичне заняття 7
АНАЛІЗ РІШЕНЬ ЛІНІЙНИХ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Мета – оволодіння методикою аналізу чутливості оптимального розв’язку та формування вмінь оцінювати рентабельність продукції, виконувати аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів і коефіцієнтів цільової функції.

Вказівки до виконання завдання

Неминуче коливання значень таких економічних параметрів, як ціни на продукцію й сировину, запаси сировини, попит на ринку й т.ін. може привести до неоптимальності або непридатності попереднього оптимального плану. Для урахування подібних ситуацій проводять аналіз чутливості, тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів вихідної моделі вплинуть на отриманий раніше оптимальний розв’язок задачі ЛП.

Для розв'язання задач аналізу чутливості обмеження лінійної моделі класифікують в такий спосіб. Звя’зувальні обмеження проходять через оптимальну точку. Незв’язувальні обмеження не проходять через оптимальну точку. Аналогічно ресурс, що є зв’язувальним обмеженням, називають дефіцитним, а ресурс, що є незв’язувальним обмеженням – недефіцитним. Обмеження називають надлишковим у тому випадку, якщо його виключення не впливає на ОПР і, отже, на оптимальний розв'язок. Виділяють наступні три задачі аналізу на чутливість (табл. 7.1)

Таблиця 2.1 - Можливі ситуації графічного розв'язання задач ЛП

№	Вид ОПР	Вид оптимального розв'язку	Примітки
1.1	Багатокутна замкнута	Єдиний розв'язок	L(x)—>max
1.2		Єдиний розв'язок	L(x)—>min
1.3		Нескінченна множина рішень	
2.1	Багатокутна незамкнута	ЦФ не обмежена знизу	
2.2		ЦФ не обмежена зверху	
2.3		Єдиний розв'язок	L(x)—>max
2.4		Нескінченна множина рішень	L(x)—> min
3.1	Промінь	Єдиний розв'язок	Кількість обмежень більше одного
3.2		ЦФ не обмежена зверху	
3.3		ЦФ не обмежена знизу	
4.1	Відрізок	Єдиний розв'язок	
4.2		Нескінченна множина рішень	
5	Єдина точка		Всі обмеження - нерівності
6		Рішень немає	Всі обмеження - нерівності
7		Рішень немає	Всі обмеження - нерівності
8		Рішень немає	Обмеження у вигляді рівностей і нерівностей

a) Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:
   - на скільки можна збільшити (обмеження типу ≤) запас дефіцитного ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?
   - на скільки можна зменшити (обмеження типу ≤) запас недефіцитного ресурсу при збереженні оптимального значення ЦФ?

b) Вибір ресурсу (обмеження типу ≤), збільшення запасу якого є найбільше вигідним.

c) Аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ: яким є діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не змінюється оптимальний розв'язок?

Розглянемо методику графічного аналізу чутливості оптимального рішення.

Перша задача аналізу на чутливість (аналіз на чутливість до правої частини обмежень)

Проаналізуємо чутливість оптимального рішення задачі 2.1. Умова задачі: Фабрика виробляє два види фарб: перший – для зовнішніх, а другий – для внутрішніх робот. Для виробництва фарб використовують два інгредієнта: А і В. Максимально можливі добові запаси цих інгредієнтів відповідно 6 і 8 т. Відомі витрати А і В на 1 т відповідної фарби. Добовий попит на фарбу 2-го виду не перевищує попиту на фарбу 1-го виду більш ніж на 1 т. Попит на фарбу 2-го виду не перевищує 2 т на добу. Ціни на фарби відповідно дорівнюють 3 тис. грн і 2 тис. грн. за 1т. Треба визначити план виробництва, що максимізує дохід.

Таблиця 7.1 – Параметри задачі 2.1.

Інгредієнти	Витрати інгредієнтів, т. інгр / т. фарби		Запас, т. інгр/добу
	Фарба 1-го виду	Фарба 2-го виду	
А	1	2	6
В	2	1	8

ОПР задачі (рис. 7.1) - багатокутник ABCDEF. В оптимальній точці Е перетинаються прямі (1) і (2). Тому обмеження (1) і (2) є зв'язувальними, а відповідні їм ресурси (інгредієнти А і В) - дефіцитними.

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. & \end{cases}$$

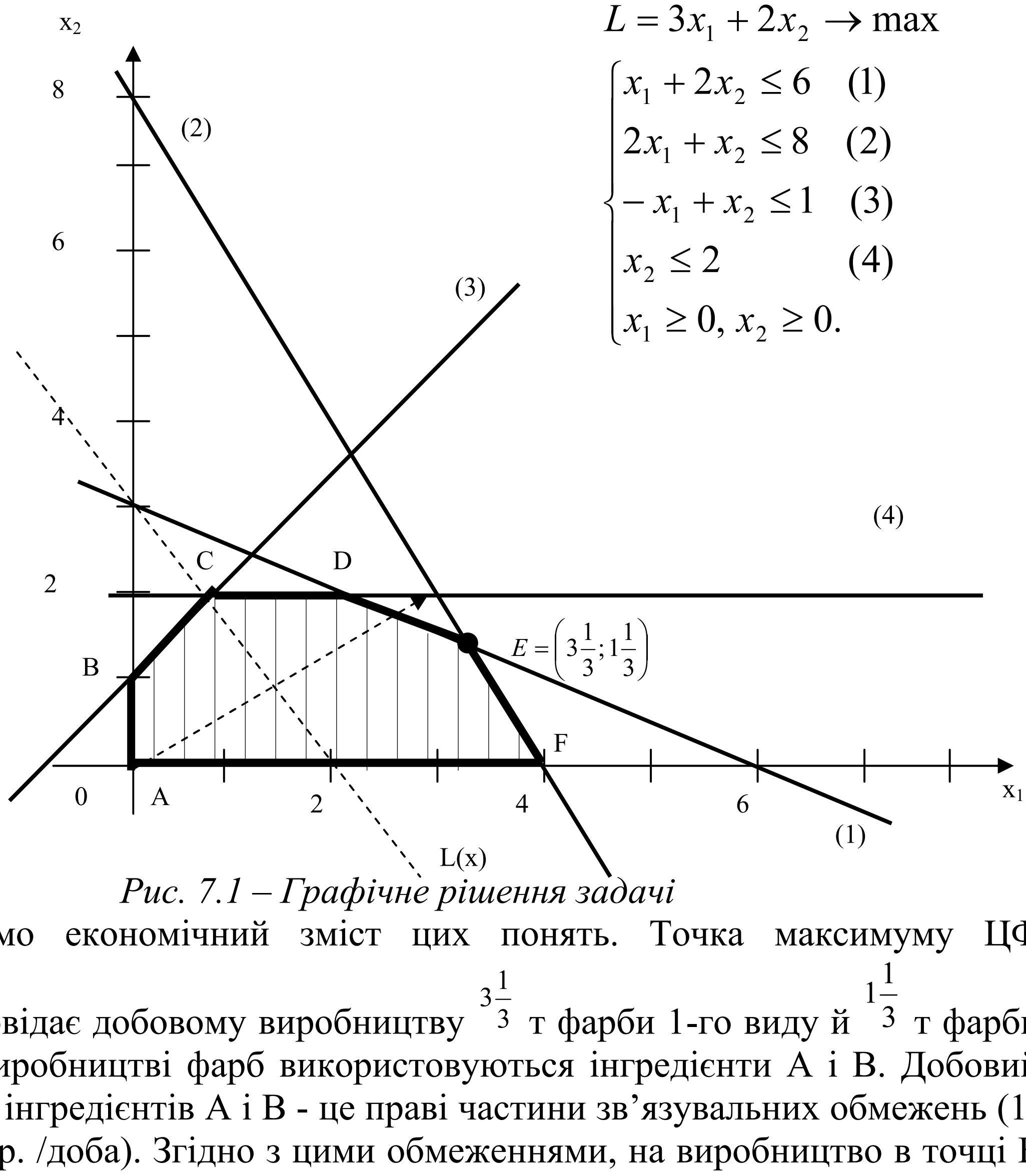


Рис. 7.1 – Графічне рішення задачі

Розглянемо економічний зміст цих понять. Точка максимуму ЦФ $E = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$ відповідає добовому виробництву $3\frac{1}{3}$ т фарби 1-го виду й $1\frac{1}{3}$ т фарби 2-го виду. У виробництві фарб використовуються інгредієнти А і В. Добовий запас на складі інгредієнтів А і В - це праві частини зв'язувальних обмежень (1) і (2) (6 і 8 т інгр. /доба). Згідно з цими обмеженнями, на виробництво в точці Е витрачається

$1 * 3\frac{1}{3} + 2 * 1\frac{1}{3} = 6$ [т інгр. А/доба] і $2 * 3\frac{1}{3} + 1 * 1\frac{1}{3} = 8$ [т інгр. В/доба].

Таким чином, поняття «зв'язувальні обмеження» (1) і (2) означає, що при виробництві фарб у точці $E\left(3\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{3}\right)$ запаси інгредієнтів А і В витрачаються повністю й з цієї причини неможливо подальше нарощування виробництва. У цьому полягає економічний зміст поняття дефіцитності ресурсів, тобто якщо фірма зможе збільшити добові запаси інгредієнтів, то це дозволить збільшити випуск фарб. У зв'язку з цим виникає питання: до якого рівня доцільно збільшити запаси інгредієнтів і на скільки при цьому збільшиться оптимальне виробництво фарб?

Правило 1. Щоб графічно визначити максимальне збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального розв'язку, необхідно пересувати відповідну пряму в напрямку поліпшення ЦФ доти, поки це обмеження не стане надлишковим.

При проходженні прямої (1) через точку К (рис. 7.2) багатокутник ABCKF стає ОПР, а обмеження (1) – надлишковим. Дійсно, якщо видалити пряму (1), що проходить через точку К, ОПР ABCKF не зміниться. Точка К стає оптимальною, у цій точці обмеження (2) і (4) стають зв’язувальними.

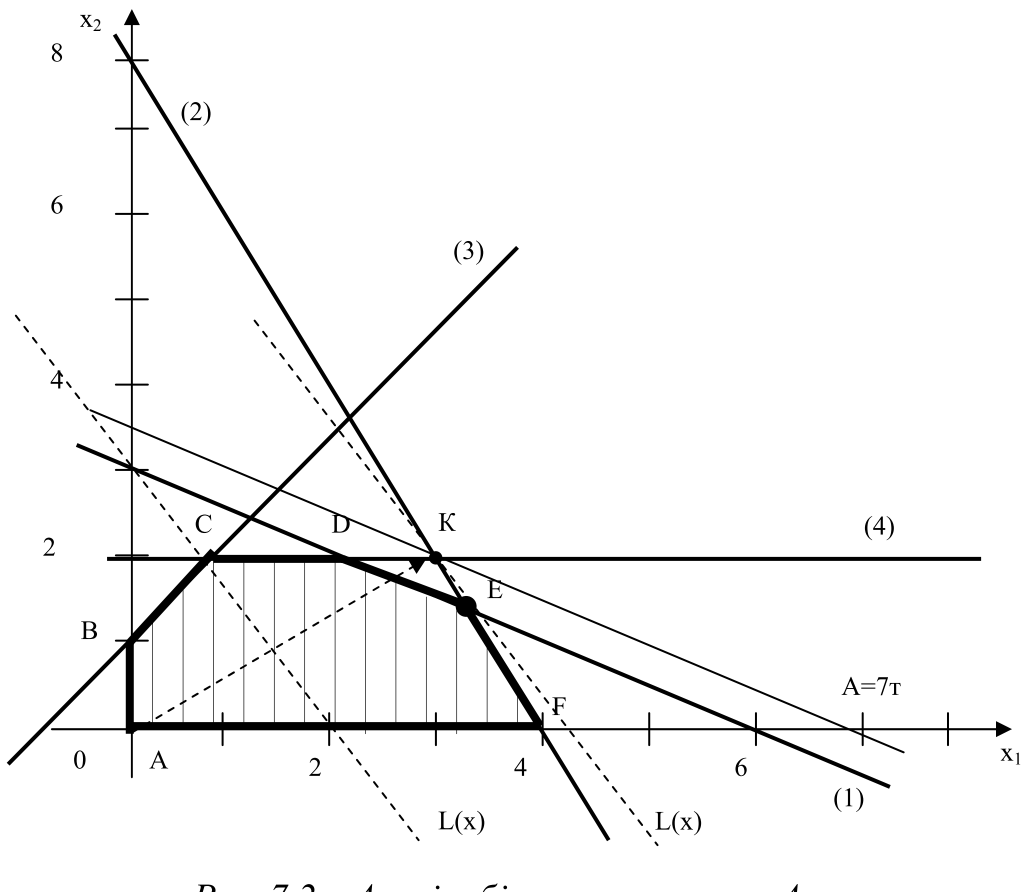


Рис. 7.2 – Аналіз збільшення ресурсу А

Правило 2. Щоб чисельно визначити максимальну величину запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального розв'язку, необхідно:

1) визначити координати точки $(x_1;x_2)$, у якій відповідне обмеження стає надлишковим;

2) підставити координати $(x_1;x_2)$ у ліву частину відповідного обмеження.

Координати точки К(3;2) знайдемо шляхом рішення системи рівнянь прямих (2) і (4). Тобто у цій точці фірма буде робити 3 т фарби 1-го виду і 2 т фарби 2-го виду. Підставимо $x_1 = 3$ і $x_2=2$ у ліву частину обмеження (1) і отримаємо максимально припустимий запас інгредієнта А

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2*2 = 7 \text{ [т інгр.А/добу]}.$$

Подальше збільшення запасу інгредієнта А недоцільно, тому що це не змінить ОПР і не приведе до іншого оптимального розв'язку. Дохід від продажу фарб в обсязі, що відповідає точці К, можна розрахувати, підставивши її координати (3;2) до виразу ЦФ

$$3x_1 + 2x_2 = 3*3 + 2*2 = 13 \text{ [тис. грн. /добу]}.$$

Розглянемо доцільність збільшення запасу інгредієнта В. Відповідно до правила 1, обмеження (2) стає надлишковим у точці J, у якої перетинаються пряма (1) і вісь змінної x1 (рис. 7.3). Багатокутник ABCDJ стає ОПР, а точка J(6;0) - оптимальним розв'язком.

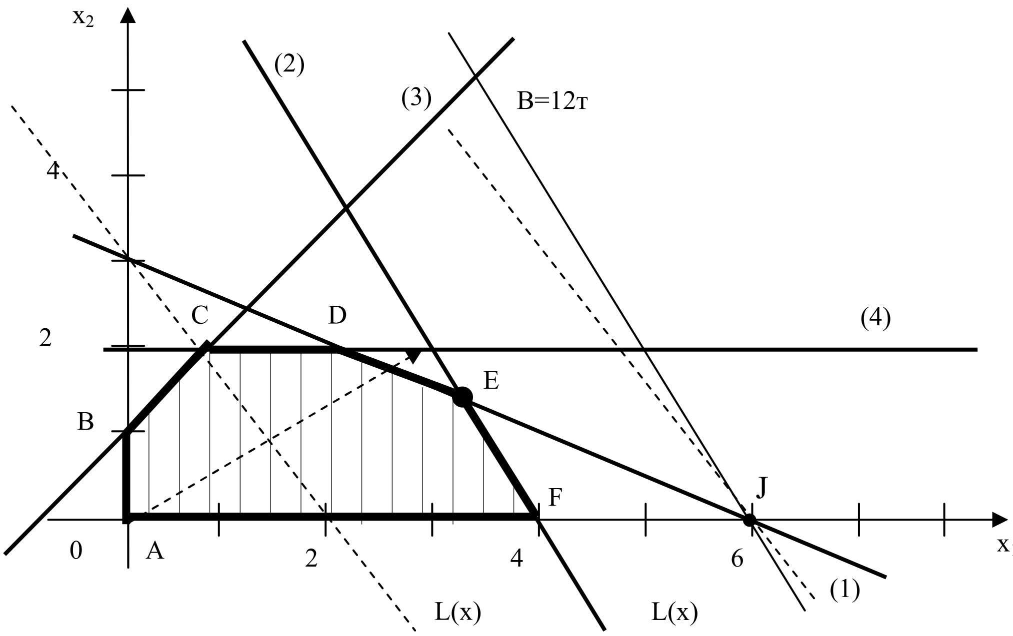


Рис. 7.3 – Аналіз збільшення ресурсу В

У точці J вигідно виробляти тільки фарбу 1-го виду (6 т на добу). Дохід від продажу при цьому складе

$$3x_1 + 2x_2 = 3 * 6 + 2 * 0 = 18 \text{ [тис. грн. /доба]}.$$

Щоб забезпечити такий режим роботи, відповідно до правила 2, запас інгредієнта В треба збільшити до величини

$$2x_1 + x_2 = 2 * 6 + 0 = 12 \text{ [т інгр.В/добу]}.$$

Обмеження (3) і (4) є незв’язувальними, тому що не проходять через оптимальну точку Е (рис. 7.1). Відповідні їм ресурси (попит на фарби) є недефіцитними. З економічної точки зору це означає, що в цей момент рівень попиту на фарби безпосередньо не обумовлює обсягу виробництва. Тому деяке його коливання може ніяк не вплинути на оптимальний режим виробництва в точці Е.

Наприклад, збільшення (зменшення) попиту на фарбу 2-го виду буде відповідати переміщенню прямої обмеження $x2 \le 2$ (4) вгору (униз). Переміщення прямої (4) вгору ніяк не може змінити точку Е максимуму ЦФ. Переміщення ж прямої (4) униз не впливає на існуюче оптимальне рішення тільки до перетинання із точкою Е (правило 3).

Правило 3. Щоб визначити максимальне зменшення запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимального розв'язку, необхідно пересувати відповідну пряму до перетинання з оптимальною точкою.

Правило 4. Щоб чисельно визначити мінімальну величину запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимального розв'язку, необхідно підставити координати оптимальної точки до лівої частини відповідного обмеження.

Щоб з'ясувати, до яких меж падіння попиту на фарбу 2-го виду не вплине на виробництво в точці $E\left(3\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{3}\right)$, використаємо правило 4. Підставляємо до лівої частини обмеження (4) координати точки Е, одержуємо

$$x_2 = 1\frac{1}{3}$$

Тобто граничний рівень, до якого може знизитись попит на фарбу 2-го виду і при якому не зміниться оптимальність отриманого раніше рішення, дорівнює $1\frac{1}{3}$ 1 т фарби на добу.

Економічний зміст обмеження (3) **$-x_1+x_2\le 1$ [т фарби/доба**] полягає у тому, що обсяг продажів фарби 2-го виду може перевищити обсяг продажів фарби 1-го виду максимум на 1 т. Подальше збільшення продажів фарби 2-го виду в порівнянні з фарбою 1-го виду графічно відобразиться переміщенням прямої (3) уліво й вгору, але ніяк не вплине на оптимальність точки Е. Але якщо різниця попитів на фарбу 2-го й 1-го видів буде зменшуватися, то пряма (3) буде переміщатися нижче й правіше. Останнім положенням прямої (3), при якому точка Е залишається оптимальною, є перетинання із точкою Е (рис. 7.1). Відповідно до правила 4, підставимо координати точки Е $\left(3\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{3}\right)$ у ліву частину обмеження (3)

$$-x_1 + x_2 = -3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \quad \text{[т фарби].}$$

Різниця попитів на фарбу 2-го й 1-го виду в точці стала від'ємною. Тобто, проходження прямої (3) через точку Е означає, що фарбу 2-го виду будуть купувати у меншому обсязі, ніж фарбу 1-го виду

$$x_1 - x_2 = 2 \text{ [т фарби/доба].}$$

Висновок: максимальне перевищення попиту на фарбу 1-го виду над попитом на фарбу 2-го виду, при якому оптимальне рішення в точці Е не зміниться, становить 2 т фарби в добу.

Результати розв'язання першої задачі аналізу оптимального рішення на чутливість подані в табл. 7.2.

Таблиця 7.2 - Результати аналізу ресурсів задачі 2.1

№	Тип ресурсу	Максимальна зміна ресурсу, max ΔBi, т/доба	Максимальна зміна доходу, max ΔL*, тис. грн. /доба	Цінність додаткової одиниці ресурсу y_i =max ΔL*/ max ΔBi, тис. грн./т
(1)	Дефіцитний	7-6=+1	$13-12\frac{2}{3}=+\frac{1}{3}$	$y_1=\left[\frac{1}{3}/1\right]=\frac{1}{3}$
(2)	Дефіцитний	12-8=+4	$18-12\frac{2}{3}=+5\frac{1}{3}$	$y_2=\left[5\frac{1}{3}/4\right]=1\frac{1}{3}$
(3)	Недефіцитний	-2-1= -3	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$	$y_3=[0/(-3)]=0$
(4)	Недефіцитний	$1\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$	$y_4=\left[0/(-\frac{2}{3})\right]=0$

Друга задача аналізу на чутливість (вибір ресурсу, збільшення запасу якого є найбільше вигідним)

Аналіз таблиці 7.2 показує, що до поліпшення оптимального розв'язку, тобто до збільшення добового доходу приводить збільшення дефіцитних ресурсів. Для визначення вигідності збільшення цих ресурсів використовують поняття цінності додаткової одиниці i-го ресурсу y_i

$$y_i=\frac{\max \Delta L^*}{\max \Delta B_i},$$

де max ΔL* - максимальний приріст оптимального значення ЦФ; max ΔBi - максимально припустимий приріст обсягу i-го ресурсу.

Наприклад, з табл. 7.2 випливає, що збільшення добового запасу інгредієнта А [обмеження (1)] на 1 т дозволить отримати додатковий дохід, рівний $y_1=\frac{1}{3}$ тис. грн./добу, в той час як збільшення запасу В [обмеження (2)] на 1 т принесе $y_2=1\frac{1}{3}$ тис. грн./добу. Недефіцитні ресурси мають нульові оцінки, оскільки зміна цих ресурсів не приводить до збільшення доходу.

Висновок: додаткові вкладення в першу чергу треба направляти на збільшення ресурсу В, а лише потім на ресурс А. Змінювати недефіцитні ресурси немає необхідності.

Третя задача аналізу на чутливість (Аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ)

Зробимо графічний аналіз припустимого діапазону зміни цін. Зміна цін на продукцію, тобто зміна коефіцієнтів ЦФ, представляється на графіку обертанням цільовій прямої навколо оптимальної точки. Так, при збільшенні коефіцієнта ЦФ c_1 або зменшенні c_2 цільова пряма обертається за годинниковою стрілкою. При зменшенні c1 або ж збільшенні c_2 цільова пряма обертається проти годинникової стрілки (рис. 7.4).

При таких поворотах точка Е буде залишатися оптимальною доти, поки нахил цільової прямої не вийде за межі, обумовлені нахилами прямих обмежень (1) і (2). Так, наприклад, якщо нахил цільової прямої збіжиться з нахилом прямої (1), оптимальним рішенням будуть точки відрізка DE.

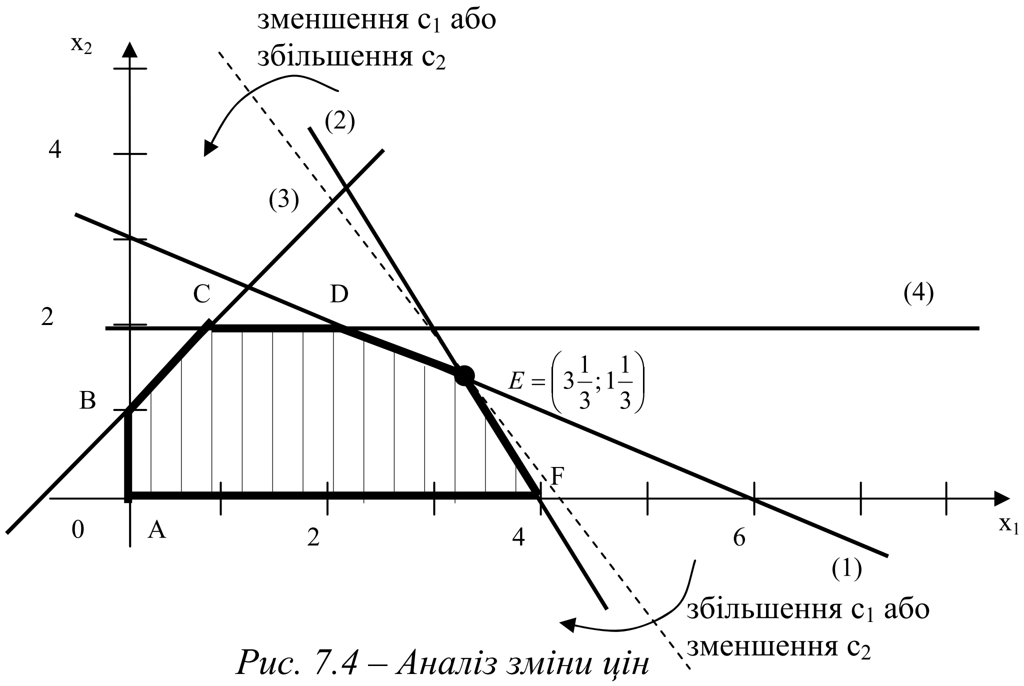


Рис. 7.4 – Аналіз зміни цін

У випадку збігу с прямою (2) оптимальним рішенням будуть точки відрізка EF. Якщо цільова пряма вийде за межі нахилу (1) або (2), то оптимальною точкою стане відповідно D або F.

Припустимо, що ціна на фарбу 2-го виду не змінюється, тобто зафіксуємо значення цільового коефіцієнта c_2. Проаналізуємо графічно результати зміни значення цільового коефіцієнту c_1, тобто ціни на фарбу 1-го виду. Оптимальне рішення в точці E не буде змінюватися при збільшенні c_1 доти, поки цільова пряма не збіжиться з прямою (2). Аналогічно, оптимальне рішення в точці E не буде змінюватися при зменшенні c_1 доти, поки цільова пряма не збіжиться з прямою (1).

Аналітичний пошук припустимого діапазону зміни цін

Збіг у процесі обертання цільової прямої з прямою обмеження означає, що кути їхнього нахилу щодо горизонтальної осі зрівнялися, а виходить, стали рівними тангенси кутів нахилу цих прямих.

Правило 5. Щоб визначити границі припустимого діапазону зміни коефіцієнта ЦФ, наприклад min c_1 і max c_1, необхідно дорівняти тангенс кута нахилу цільової прямої $tg\alpha_{ЦФ}$ по черзі до тангенсів кутів нахилу прямих зв'язувальних обмежень, наприклад $tg\alpha_{(1)}$ і $tg\alpha_{(2)}$ (рис. 7.5 і 7.6).

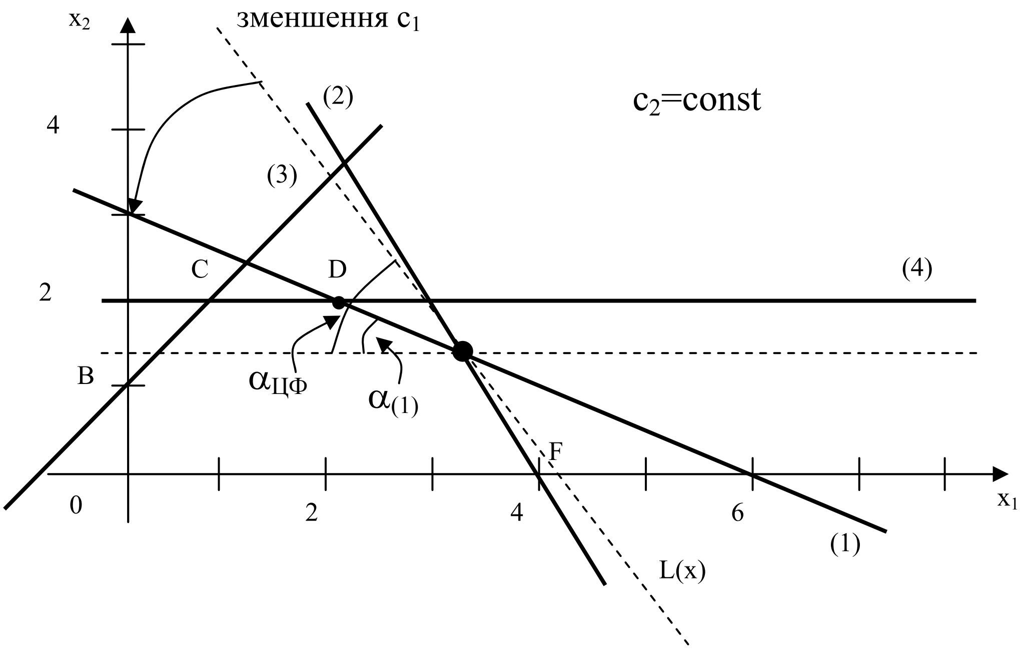


Рис. 7.5 – Визначення мінімуму c_1

Визначимо наскільки максимально може знизитися ціна на фарбу 1-го виду, не змінюючи оптимальну точку E. Для цього скористуємось правилом 5 і формулою розрахунку тангенса кута нахилу прямої (рис. 7.7).

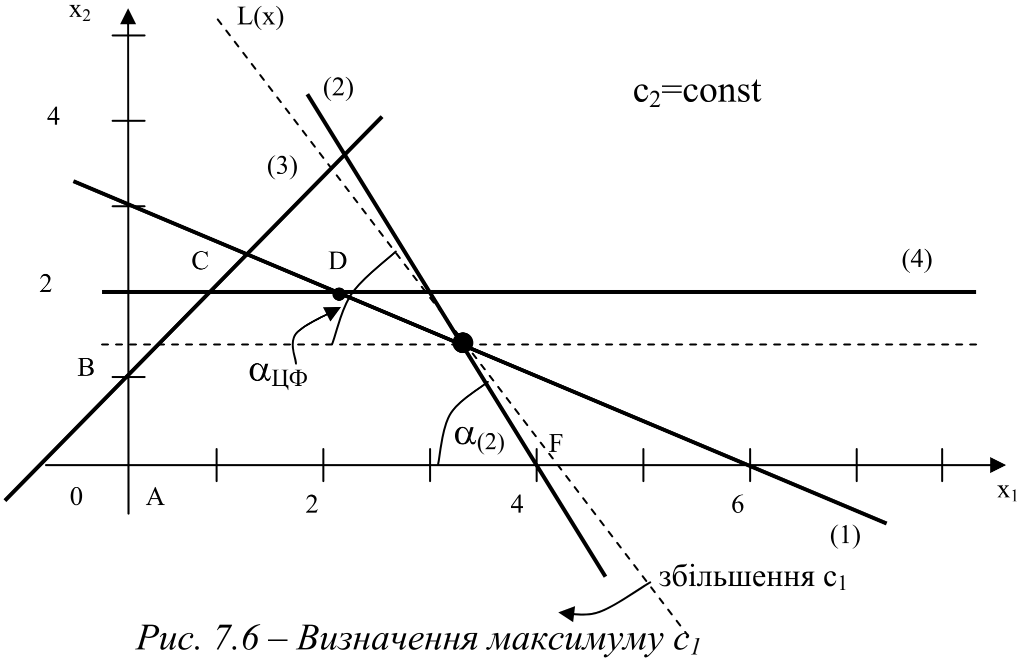


Рис. 7.6 – Визначення максимуму c_1

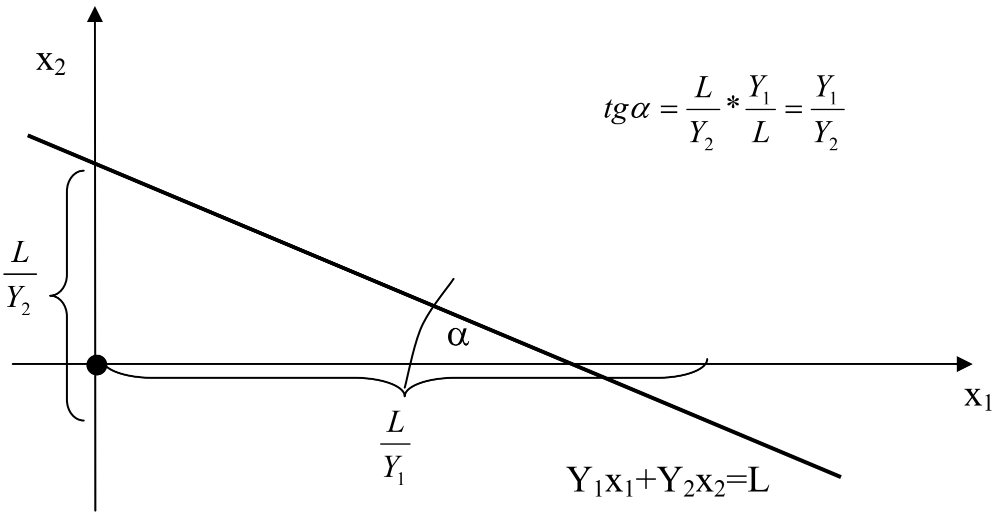


Рис. 7.7 – Визначення тангенса кута нахилу tgα прямої $Y_1x_1 + Y_2x_2 = L$

Визначимо тангенси кутів нахилу:

1)цільової прямої $L(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$, з огляду на те, що c_2=2 фіксоване

$$tg\alpha_{СФ} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{2};$$

2) зв’язувального обмеження $x_1+2x_2 \leq 6$ (1)

$$tg\alpha_{(1)} = \frac{1}{2}$$

3) зв’язувального обмеження $2x_1 + x_2 \leq 8$ (2)

$$tg\alpha_{(2)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Для знаходження min c_1 цільова пряма повинна збігтися з прямою (1) (рис. 7.5):

$$tg\alpha_{ЦФ} = tg\alpha_{(1)};$$

$$\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2}; \min c_1 = 1 \text{ [тис. грн./т]}.$$

Для знаходження max c_1 цільова пряма повинна збігтися із прямою (2) (рис. 7.6):

$$tg\alpha_{ЦФ}=tg\alpha_{(2)};$$

$$\frac{c_1}{2} = 2; \max c_1 = 4 \text{ [тис. грн./т]}.$$

Таким чином, якщо ціни на фарбу першого виду будуть коливатися в межах $1 < c_1 < 4$ тис. грн./т, то оптимальне рішення задачі не зміниться.

З проведених розрахунків і графічної їхньої ілюстрації випливає, що якщо ціна на фарбу першого виду стане меншою за 1 тис. грн./т ($c_1 < 1$), найбільш вигідним буде виробництво фарб у точці D (рис. 7.5). При цьому загальне споживання інгредієнта B знизиться, що призведе до його недефіцитності [ресурс (2)], а дефіцитними будуть ресурси (1) і (4).

Практичне заняття 8
ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – ознайомлення з моделями динамічного програмування та методикою їх розв’язування.

Вказівки до виконання завдання

Алгоритм розв’язування задач динамічного програмування містить наступні етапи:

1. Визначаємо стан заданої керованої системи та множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи обираємо, маючи на меті забезпечити зв'язок між послідовними етапами перебігу процесу і знайти допустимий розв'язок задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо. При цьому оптимальні рішення на наступних етапах приймаємо, нехтуючи впливом подальших рішень на прийняті раніше.
2. Розбиваємо динамічний процес (операцію) на кроки, що відповідають часовим періодам планування або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткування і т. ін.), стосовно яких розробляються управлінські рішення.
3. Подаємо перелік управлінських рішень x_j ($j = \overline{1,n}$) для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.
4. Визначаємо ефект, що його забезпечує управлінське рішення x_j на j-му кроці, якщо перед тим система була у стані S, як функцію ефективності:
$$F = \{g(x) + h(b_1 - x_1)\} \to \max.$$
5. Досліджуємо, як змінюється стан S системи під впливом управлінського x_j на j-му кроці, переходячи до нового стану:
$$S' = \varphi_j(s, x_j).$$
6. Будуємо для розглядуваної задачі рекурентну залежність, що визначає умовний оптимальний ефект F_j (s), починаючи з j-го кроку і до останнього, через вже відому функцію F_j + 1(s’):
$$F_j(s) = \max_{x_j}\{f_j(s, x_j) + F_{i+1}(s, x_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на j-му кроці (x_j(s)). Зауважимо, що за аргумент функції F_j + 1(s) беремо не s, а змінений стан системи, тобто
$$s' = \varphi_j(s, x_j).$$

7. Здійснюємо умовну оптимізацію останнього n-го кроку, розглядаючи множину станів s, що на один крок віддалені від кінцевого стану, і визначаємо умовний оптимальний ефект на n-му кроці:
$$F_n(s) = \max_{x_n}\{f_n(s, x_n)\}.$$

Далі знаходимо умовне оптимальне управлінське рішення xn(s), завдяки якому цей максимум досягається.

8. Виконуємо умовну оптимізацію (n-1)-го, (n-2)-го і т.д., тобто всіх попередніх кроків за рекурентними залежностями, і для кожного кроку

знаходимо умовне оптимальне управління:

$$F^* = F_1(s_0).$$

9. Здійснюємо безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямі — від початкового стану s_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці $x_1^* = x1(s)$ змінюємо стан системи згідно з п. 5 алгоритму. Далі для цього нового стану знаходимо оптимальне управління на другому кроці x_2^* і діємо так до останнього кроку.

Задача 8.1

Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн. грн. Для кожного з підприємств розроблено інвестиційні проекти, які відбивають прогнозовані сумарні витрати C та доходи D, пов'язані з реалізацією кожного проекту. Зміст цих проектів показано у таблиці:

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект передбачає відмовитися від розширення підприємства, а тому має нульові витрати і доходи. Розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язування

Спрощеним і найменш ефективним способом розв'язування таких задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про неприпустимі розв'язки, а також неможливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу за алгоритмом (методом) зворотного прогону. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підприємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженнями на загальний обсяг виділених коштів — 4 млн. грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1—4;

x_2 — те саме на кроках 2—4;

x_3 — те саме на кроках 3 і 4;

x_4 — те саме на кроці 4.

$k_i \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$ — обсяги інвестицій на і-му підприємстві (k_i=0,1,2,3,4).

$k_i * \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$ — оптимальні обсяги інвестицій на і-му підприємстві.

Рекурентне співвідношення для зворотного прогону від 4-го кроку до 1 -го (від четвертого підприємства до першого) подається у вигляді:

$$f_i*\left(x_5\right)=0,$$

$$f_i*\left(x_j k_j\right)=\max_{k_i}\left\{D_i(k_i)+f_{i+1}^*(x_i-C_i(k_i))\right\}\left(i=\overline{1,4}\right), C_j\left(k_i\right)\le X_i,$$

де $f_i*\left(x_j k_j\right)$ — сумарна ефективність інвестицій з і-го кроку до останнього. $f_i*\left(x_5\right)=0$, оскільки п'ятого підприємства не існує. Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

На етапі 4 маємо

$$f_4*\left(x_j k_j\right)=\max_{k_i}\left\{D_i(k_i)+f_{i+1}^*(x_i-C_i(k_i))\right\}.$$

Результати розрахунків зведемо у таблицю:

x_4	Дохід $f_4\left(x_4 k_4\right)=D_4(k_4)+f_5^*(x_5)$					Оптимальний розв’язок	
	k_4=0	k_4=1	k_4=2	k_4=3	k_4=4	f_4*(x_4)	k_4*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

На етапі 3 маємо

$$f_3*\left(x_3\right)=\max_{k_3}\left\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\right\}$$

за умов

$$C_3(k_3)\le X_3,\ k_3=0,1,2,3,4.$$

Виконуємо розрахунки. Нехай потрібно знайти f_3^* (x_3 =3). Обчислюємо

$$f_3\left(x_3 k_3\right)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3)).$$

Отже,

$$f_3\left(x_3=3;k_3=1\right)=0+f_4^*(3-0)=0+f_4^*(3)=0+8=0,$$

$$f_3\left(x_3=3;k_3=2\right)=4+f_4^*(3-2)=4+2=6,$$

$$f_3\left(x_3=3;k_3=3\right)=9+f_4^*(3-3)=9+0=9.$$

Результати розрахунків занесемо у таблицю:

x_3	Дохід $f_3(x_3k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))$				Оптимальний розв'язок	
	k_3=1	k_3=2	k_3=3	k_3=4	$f_3^*(x_3)$	k_3^*
0	0+f_4^* (0-0)= =0+0=0				0	0
1	0+f_4^* (1-0)= =0+2=2				2	0
2	0+f_4^* (2-0)= =0+8=8	4+f_4^* (2-2)= =4+0=4			8	0
3	0+f_4^* (3-0)= =0+8=8	4+f_4^* (3-2)= =4+2=6	9+f_4^* (3-3)= =9+0=9		9	3
4	0+f_4^* (4-0)= =0+8=8	4+f_4^* (4-2)= =4+8=12	9+f_4^* (4-3)= =9+2=11	12+f_4^* (4-4)= =12+0=12	12	2 або 4

Зауважимо, що $C_3(k_3 = 1) = 0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн. грн. Значення $f_4 * (x_3 - C_3(k_3))$ беремо з попередньої таблиці. Далі маємо:

$$f_3 * (x_3) = \max_{K_3=1,2,3} \{D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))\} = \max\{0,6,9\} = 9.$$

На етапі 2:

$$f_2 * (x_2) = \max_{k_2} \{D_2(k_2) + f_3^*(x_2 - C_2(k_2))\}$$

за умов

$$C_2(k_2) \le X_2,\ k_2 = 0,1,2,3,4$$

Результати розрахунків занесемо в таблицю:

x_2	Дохід $f_2(x_2k_2)=D_2(k_2)+f_3^*(x_3-C_2(k_2))$					Оптимальний розв'язок	
	k_2=0	k_2=1	k_2=2	k_2=3	k_2=4	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

На етапі 1:

$$f_1 * (x_1) = \max_{k_1} \{ D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1)) \}$$

за умов

$$C_1(k_1) \le X_1, k_1 = 0,1,2,3,4 .$$

Виконуємо розрахунки лише для x1 = 4 та занесемо їх в таблицю:

x_1	Дохід $f_1(x_1 k_1) = D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	k_1=1	k_1=2	k_1=3	k_1=4	f_1*(x_1)	k_1*
4	3+f_2^* (4-1)=3+12=15	5+f_2^* (4-2)=5+6=11	7+f_2^* (4-3)=7+4=11		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що k_1^* = 1, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, який використовує 1 млн. грн. інвестицій з ефективністю 3 млн. грн. Отже, для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4-1=3 млн. грн. інвестицій. З таблиці другого кроку маємо, що за умови x_2 = 3 максимальний ефект настає в разі реалізації для другого підприємства першого проекту (k_2 = 1), ефективність становить 4 млн. грн. Отже, x_3 = 3 - 1 = 2, тобто для третього і четвертого підприємств слід використати 2 млн. грн. інвестицій. З таблиці третього кроку за умови x_3 = 2 маємо, що k_3 = 0. Отже, x4 = 2, а йому відповідають капітальні вкладення k_4 = 2, ефективність яких 8 млн. грн. Остаточно маємо: ефективність 4 млн. грн. інвестицій становить 3 + 4 + 8 =15 (млн. грн.).

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. - К.: КНЕУ, 2001.
2. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. А., Волощенко А. В. Математическое программирование. - М.:Высш.школа,1980. - 240с.
3. Акулич И. Л. Математическое програмирование в примерах и задачах.- М.: Высш. школа,1986. – 244с.
4. Таха Х. А. Введение в исследование операций. - М.: Изд.дом «Вильямс», 2005.
5. Исследование операций в экономике: Уч. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман./ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
6. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. - М.: Мир, 1971.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки
до практичних занять з курсу «Математичне програмування»
(для студентів 3 курсу заочної форми навчання напряму
підготовки 6.030601 — «Менеджмент» та слухачів другої
вищої освіти спеціальності 7.03060101- «Менеджмент
організацій і адміністрування»)

Укладачі: **ВОРОНКОВА** Тетяна Борисівна,
ОХРІМЕНКО В'ячеслав Миколайович,
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович

Редактор *М. З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2010, поз. 505М

Підп. до друку 23.03.10	Формат 60x84/16
Друк на різографі.	Ум. друк. арк. 3,4
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011