

УДК 628.093 : 621.398

В.Ф.ХАРЧЕНКО, канд. техн. наук

Харківська національна академія міського господарства

**ЩОДО ПИТАННЯ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ СИЛИ СВІТЛА  
СВІТИЛЬНИКІВ ЗОВНІШНЬОГО ОСВІТЛЕННЯ МІСТ**

Запропоновано спосіб, що дозволяє моделювати криві сили світла різної конфігурації світильників зовнішнього освітлення.

Основою всіх світлотехнічних розрахунків є вихідні параметри світильників. До їх числа відносяться і криві світлорозподілу в просторі. Звичайний розподіл сили світла всіх світлових приладів зображується на площині, що утворюється перетином фотометричних тіл меридіональною півплощиною або екваторіальною площиною, перпендикулярною осі приладу, а також кінчною поверхнею з віссю, що є віссю приладу і вершиною в його світловому центрі. При перетині світильника меридіональною площиною виходять криві сили світла (КСС) – залежність сили світла від кута  $I(\alpha)$ . Залежність будується, як правило, у полярній системі координат, де кут змінюється від 0 до  $180^{\circ}$ , а радіус-вектор у лінійному масштабі зображує силу світла. Екваторіальний перетин в основному використовується для характеристики розподілу сили світла  $I(\beta)$ , де кут  $\beta$  визначає положення січної площини в просторі при  $\alpha = const$ . Для деяких світильників наводиться залежність  $I(\beta)$  при  $\alpha = const = 90^{\circ}$ . Для характеристики  $I(\beta)$  при  $\alpha = const$  використовується перетин фотометричного тіла кінчною поверхнею, у результаті якого виходить крива, що не лежить в одній площині. У цьому випадку крива проектується на площину в полярній системі координат, а кожний радіус-вектор  $I(\beta)$  відкладається в лінійному масштабі під тим же кутом  $\beta$ , в напрямку якого поширюється сила світла, що зображена, на кінчній поверхні.

Отримані криві світла за допомогою розподільного фотометра для кожного світильника надалі використовуються для світлотехнічних розрахунків. Світлорозподіл світильника наведено в таблицях з інтервалом 10 градусів меридіонального кута або графіках, побудованих у полярних координатах. Проміжні значення на практиці, при використанні таблиць, знаходяться інтерполяцією, що не завжди зручно. Трохи простіше значення можна одержувати за допомогою графіків, однак при автоматизованому світлотехнічному розрахунку ця процедура значно ускладнюється. Тому питання представлення кривих сили світла у вигляді математичної моделі завжди було актуальним. У роботах

[1, 2] використовуються математичні моделі, але кожна з них могла використовуватися тільки для визначеного типу кривих сили світла і вимагали постійного уточнення. До цього варто додати, що моделі дають задовільні результати тільки для косинусного і симетричного світлорозподілу.

Метою даної роботи є визначення способу побудови математичних моделей кривих сили світла світильників зовнішнього освітлення для різного світлорозподілу включаючи і несиметричне.

Оскільки криві сили світла в просторі одержують експериментально, то логічно здійснити апроксимацію функції сили світла. Розглянемо два варіанти. У першому варіанті крива сили світла світильника проходить через початок координат (рис.1), у другому варіанті – початок координат знаходиться у внутрішній області, обмеженій кривою сили світла (рис.2). В обох випадках кожному значенню кута  $\varphi$  відповідає єдине значення полярної координати  $r$ . Тому зручно задавати криву сили світла явною функціональною залежністю в полярних координатах:

$$r = f(\varphi), \varphi \in [a, b]; b - a \leq 2\pi; f(a) = f(b). \quad (1)$$

У варіанті, наведеному на рис.1,  $b - a$  може бути менше  $2\pi$ . Тоді доповнення інтервалу  $[a, b]$  до  $[0, 2\pi]$  відповідає області затінення, для якої  $f(\varphi) = 0$ . Так, для кривої на рис.1  $a = \pi, b = 2\pi, b - a = \pi, [0, \pi]$  – область затінення. У випадку, зображеному на рис.2, завжди  $b - a = 2\pi$ .

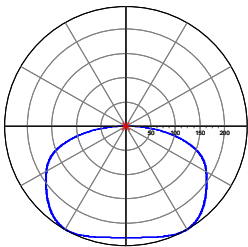


Рис.1 – Крива сили світла в полярній системі координат, що проходить через початок координат

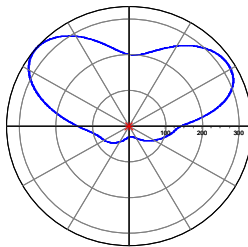


Рис.2 – Крива сили світла в полярній системі координат, початок координат якої лежить в області замкненої кривої сили світла

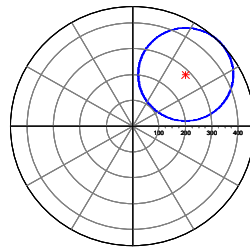


Рис.3 – Крива сили світла в полярній системі координат, початок координат якої лежить поза областю замкненої кривої сили світла

Якщо крива сили світла проходить через початок координат, то явне завдання кривої сили світла залежністю (1) не завжди можливо, тому що при цьому одному значенню  $\varphi$  можуть відповідати одне і більше значень  $r$  (рис.3). У цьому випадку треба розглядати параметричне представлення кривої сили світла:  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $s = [0, S]$ . Хоча таке завдання кривої є універсальним, явна функціональна залежність (рис.1) зручніше для аналізу. Тому будемо розглядати тільки випадки, зображені на рис.1, 2. Нехай сила світла вимірюється в рівномірній сітці кутів

$$\Delta: \quad a = \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N = b, \quad \varphi_i = a + (i-1)h, \\ h = (b-a)/(N-1) \quad (2)$$

і  $r_i = f(\varphi_i)$  – експериментальні значення. Існує кілька підходів до апроксимації функції  $f(\varphi)$  на інтервалі  $[a, b]$ . Найпростішим методом є інтерполяція [3- 5]. Її результатом є функція, значення якої у вузлах сітки  $\Delta$  збігаються з експериментальними значеннями  $f_i$ . Однак експериментальні дані завжди відомі з деякою похибкою. Застосовувати інтерполяцію не має рації, оскільки функція, що інтерполіює, буде точно проходити через задані точки і перетерплювати осциляції обумовлені похибками, а не відбивати реальну функціональну залежність. Для апроксимації експериментальних даних доцільно застосовувати сплайни, що згладжують, класична задача пошуку яких формулюється в [5].

Потрібно знайти функцію, що безперервно диференціюється з кусково-безперервній другій похідній, і мінімізує енергетичний функціонал

$$J(f) = \int_a^b (f''(\varphi))^2 d\varphi \rightarrow \min \quad (3)$$

і задовольняє умовам

$$|f(\varphi) - r_i| \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

де  $\delta_i > 0$  – припустимі абсолютні похибки. У силу екстремальної властивості кубічних сплайнів така функція існує і є *кубічним сплайном  $S(\varphi)$  дефекту (1)* або *просто кубічним сплайном*. На кожному інтервалі  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  вона є поліномом третього степеня.

При цьому у вузлах  $\varphi_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, N-1$  функція  $S(\varphi)$  і її перші дві похідні безперервні. Третя похідна, кажучи взагалі, у цих вузлах випробує стрибки. Задача (3)-(4) досить складна, оскільки при великій кількості вузлів вона призводить до погано обумовленої системи алгебраїчних рівнянь. Її рішення називається *сплайном глобального згладжування*.

Іноді розглядають задачу мінімізації функціонала

$$\sum_{j=1}^n q_j (f(\varphi_j) - r_j)^2,$$

де  $q_j$  – ваги. Таку апроксимацію називають *середньоквадратичною*. Однак вона також призводить до погано обумовленої системи алгебраїчних рівнянь при великій кількості вузлів [6].

Поряд із глобальним згладжуванням і середньоквадратичною апроксимацією застосовують процедури так званого *локального згладжування*, що засновані на *локальній апроксимації функцій кубічними сплайнами* [5]. Сплайни локальної апроксимації не проходять точно через задані точки. Однак заздалегідь припустимі абсолютні похибки (4) для цих сплайнів визначити не можна. Тому їх доцільно використовувати, коли немає апіорної інформації щодо значень  $\delta_j$ . За отриманим значенням відхилень  $\delta_j$  можна визначати точки, в яких експериментальна функція обмірювана з максимальною похибкою (за умови, що апроксимована функція є гладкою). Простота обчислювальної схеми і висока швидкість алгоритму є основними достоїнствами цього методу. Коефіцієнти сплайна на кожному інтервалі розбивки є лінійні комбінації значень функції у вузлах інтервалу й у декількох сусідніх вузлах. Тому зміна значення в одній точці вимагає перерахування коефіцієнтів сплайнів тільки на декількох сусідніх ділянках на відміну від глобального згладжування, для одержання якого треба було б перерахувати всі коефіцієнти.

Як базисні елементи для кубічних сплайнів будемо використовувати В-сплайни. Спочатку наведемо необхідні дані про В-сплайни.

*Кубічним В-сплайном*  $B_i(\varphi)$  називають кубічний сплайн дефекту 1, що задовольняє умові

$$B_i(\varphi) \equiv 0 \text{ при } \varphi \notin (\varphi_{i-2}, \varphi_{i+2}). \quad (5)$$

На кожному інтервалі  $[\varphi_j, \varphi_{j+1}]$ ,  $j = i-2, i-1, i, i+1$  В-сплайн задається кубічним поліномом, обумовленим чотирма коефі-

цієнтами. Всього  $4 \times 4 = 16$  невідомих, для визначення яких маємо  $3 \times 5 = 15$  умов безперервності сплайну і його перших двох похідних у вузлах  $\varphi_j$ ,  $j = i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$ . Таким чином, В-сплайни, що задовольняють умові (5), визначені з точністю до множення на константу. Її звичайно вибирають таким чином, щоб виконувалися умови

позитивності  $B_i(\varphi) > 0$ ,  $\varphi \in (\varphi_{i-2}, \varphi_{i+2})$  і умова  $\sum_{i=0}^{N+1} B_i(\varphi) \equiv 1$ ,

$\varphi \in [a, b]$ . Такі сплайни називають *нормованими В-сплайнами*. Вони визначаються за формулою

$$B_i(\varphi) = (\varphi_{i+2} - \varphi_{i-2}) \sum_{j=i-2}^{i+2} \frac{\max\{(\varphi - \varphi_j)^3, 0\}}{\prod_{\substack{p=i-2 \\ p \neq j}}^{i+2} (\varphi_j - \varphi_p)}.$$

У випадку рівномірної сітки (2) ця формула значно спрощується

$$B_i(\varphi) = \begin{cases} \left(3|\varphi - \varphi_i|^3 - 6h(\varphi - \varphi_i)^2 + 4h^3\right) / 6h^3, & |\varphi - \varphi_i| \leq h, \\ (2h - |\varphi - \varphi_i|)^3 / 6h^3, & h < |\varphi - \varphi_i| \leq 2h \\ 0, & |\varphi - \varphi_i| > 2h. \end{cases} \quad (6)$$

Будь-який кубічний сплайн можна представити у вигляді:

$$S(\varphi) = \sum_{i=0}^{N+1} b_i B_i(\varphi), \quad \varphi \in [a, b]. \quad (7)$$

І навпаки, будь-яка функція вигляду (7) є кубічним сплайном. Таким чином, В-сплайни є фінітними базисними функціями для кубічних сплайнів, що визначає їх широке застосування в теорії сплайнів. На інтервалі  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  відмінні від нуля тільки В-сплайни з індексами  $i - 1, i, i + 1, i + 2$ . Тому

$$S(\varphi) = b_{i-1} B_{i-1}(\varphi) + b_i B_i(\varphi) + b_{i+1} B_{i+1}(\varphi) + b_{i+2} B_{i+2}(\varphi), \\ \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (8)$$

Використовуючи формули (6) і (8), легко виразити значення сплайну  $S(\varphi)$  і його похідних у вузлах сітки через коефіцієнти  $b_i$ :

$$S(\varphi_i) = \frac{b_{i-1} + 4b_i + b_{i+1}}{6}, \quad S'(\varphi_i) = \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{2h},$$

$$S''(\varphi_i) = \frac{b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Отримаємо формули, що виражають коефіцієнти кубічних поліномів на інтервалах розбивки

$$S(\varphi) = a_3^{(i)} \varphi^3 + a_2^{(i)} \varphi^2 + a_1^{(i)} \varphi + a_0^{(i)}, \quad \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}],$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (10)$$

через коефіцієнти розкладу (7) для рівномірної сітки (2). Для цього підставимо вираз для В-сплайнів (6) у формулу (8) і порівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $\varphi$ . Маємо

$$a_3^{(i)} = \frac{-b_{i-1} + 3b_i - 3b_{i+1} + b_{i+2}}{6h^3},$$

$$a_2^{(i)} = \frac{\varphi_{i+1}b_{i-1} + 3\varphi_{i+2/3}b_i + 3\varphi_{i+1/3}b_{i+1} - \varphi_i b_{i+2}}{2h^3}, \quad (11)$$

$$a_1^{(i)} = \frac{-\varphi_{i+1}^2 b_{i-1} + 3\varphi_i \varphi_{i+4/3} b_i - 3\varphi_{i+1} \varphi_{i-1/3} b_{i+1} + 4\varphi_i^2 b_{i+2}}{2h^3},$$

$$a_0^{(i)} = \frac{\varphi_{i+1}^3 b_{i-1} + (-3\varphi_i^3 - 6h\varphi_i^2 + 4h^3)b_i + (3\varphi_i^3 + 3h\varphi_i^2 - 3h^2\varphi_i + h^3)b_{i+1} - \varphi_i^3 b_{i+2}}{6h^3},$$

де  $\varphi_{i+\alpha} = \varphi_i + \alpha h$ .

Представлення кубічного сплайну у вигляді розкладу В-сплайнів (7) економніше, ніж кусково-поліноміальний вираз (10), тому що воно вимагає збереження  $N + 2$  коефіцієнтів  $b_j$ , тоді як вираз (10) вимагає збереження  $4(N - 1)$  коефіцієнтів  $a_j^{(i)}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Крім того, методи, що використовують розкладання по В-сплайнам, стійкіші в порівнянні з методами, що використовують інші базисні функції.

Таким чином, на підставі проведених досліджень у даній роботі можна зробити висновки:

- криві сили світла світильників зовнішнього освітлення в полярній системі координат, отримані експериментально за допомогою просторового фотометра, можна апроксимувати сплайн-функціями;
- найбільш прийнятною є апроксимація так званого локального згладжування, заснована на локальній апроксимації функцій кубічними сплайнами;

- як базисні елементи для кубічних сплайнів доцільно використовувати В-сплайни.

Отримані результати дозволяють продовжити дослідження в цьому напрямку й одержати апроксимацію функцій кривих сили світла для різних світильників зовнішнього освітлення міст, а також одержати при цьому похибки апроксимації.

1.Справочная книга для проектирования электрического освещения / Под ред. Г.М. Кноринга. – СПб.: Энергоатомиздат, 1992. – 448 с.

2.Справочная книга по светотехнике / Под ред. Ю.Б.Айзенберга. – М.: Энергоатомиздат, 1995. – 528 с.

3.Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М: Мир, 1972. – 320 с.

4.К. Де Бор. Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.

5.Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплайны в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.

6.Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В. Среднеквадратичная аппроксимация сплайнами // Математическое моделирование. – 1997. – Т.9, № 9. – С. 107-116.

*Отримано 22.06.2004*

УДК 581.132

И.А.ВЕЛИТ, Ю.П.ПЕТРЕНКО, канд. техн. наук  
*Полтавская государственная аграрная академия*

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НАТРИЕВЫХ ЛАМП, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ СВЕТОКУЛЬТУРЫ РАСТЕНИЙ**

Обосновывается значение КПД ФАР для натриевых ламп высокого давления различных фирм-изготовителей. Анализируются пути повышения этого параметра и способы достижения этой цели.

Интенсивность света, его спектральный состав, а также совокупность технико-экономических показателей источников света предназначенных для светокультуры растений являются одними из многих факторов, определяющих продуктивность растений [1, 2].

На первых этапах онтогенеза растений уровень освещенности влияет на формирование раннего и обильного цветения, увеличение количества цветущих побегов, качество и урожайность овощных культур, выращивание продукции к определенному сроку [3-9].

Сравнительная эффективность источников различного типа для выращивания растений в закрытом грунте приведена в работе [10] с позиции расчетно-экспериментальных оценок КПД источников излучения в области фотосинтетически активной радиации (ФАР). КПД ФАР определялся на основании известного излучения в спектральных